Asupra inegalităţilor de convexitate în absenţa derivabilităţii

CONSTANTIN P. NICULESCU*

Universitatea din Craiova, Facultatea de matematică-informatică, Craiova 1100

1. INTRODUCERE

Funcţiile convexe se bucură de o serie de proprietăţi geometrice, care le fac deosebit de utile în aplicaţiile analizei matematice. Acestea sunt prezentate adesea în ipoteza suplimentară de derivabilitate, o restricţie pe care nota de faţă îşi propune să o elimine. În particular, vom da o nouă perspectivă unor rezultate publicate anterior de V. Cârtoaje [1] şi M. O. Drimbe [2].[1]

În cele ce urmează, I desemnează un interval nevid. Reamintim că o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ este numită *funcţie convexă* dacă

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) \leq \alpha_1 f\left(x_1\right) + \alpha_2 f\left(x_2\right)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in I$ şi orice $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, cu $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Este binecunoscut că orice funcţie convexă f definită pe un interval deschis I este continuă, are derivate laterale finite în orice punct şi

$$x < y \text{ în } I \text{ implică } f_s^{'}(x) \leq f_d^{'}(x) \leq f_s^{'}(y) \leq f_d^{'}(y). \tag{*}$$

În particular, atât $f_s^{'}$ cât şi $f_d^{'}$ sunt funcţii crescătoare. Deoarece mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei funcţii crescătoare este cel mult numărabilă, rezultă de aici că orice funcţie convexă este derivabilă, exceptând o submulţime cel mult numărabilă de puncte. Toate aceste proprietăţi sunt demonstrate de exemplu în monografia autorului [5].

Locul derivatei în cazul funcţiilor convexe este jucat de subdiferenţială, un obiect care poate fi prezentat fie ca mulţime de funcţii, fie ca aplicaţie multivocă. Vom opta pentru prima variantă, care ni se pare mai naturală.

Prin definiţie, *subdiferenţiala* unei aplicaţii $f : I \to \mathbb{R}$ este mulţimea

$$\partial f = \{\varphi : I \to \mathbb{R} \,|\, f(x) \geq f(a) + (x-a)\varphi(a),\, \forall\, x, a \in I\}\,.$$

*Articol publicat în *Gazeta Matematică,* publicaţie lunară pentru tineret, **CIII** (1998), no. 9, pp. 329-337.

[1]După publicarea acestei lucrări am constatat că de fapt nota d-lui M. O. Drimbe [2] prezenta (fară să facă vreo menţiune) un rezultat al lui S. S. Dragomir şi N. M. Ionescu din lucrarea lor *Some converse of Jensen's inequality and applications*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. **23** (1994), 71-78.

Interpretarea geometrică a subdiferenţialei este aceea că dreapta de coeficient unghiular $\varphi(a)$, care trece prin punctul $(a, f(a))$, se află sub graficul lui f. Acest fapt conduce la următoarea caracterizare a funcţiilor convexe, binecunoscută specialiştilor din domeniul analizei convexe:

Lema 1. *Fie I un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe I.*

i) *Presupunem că intervalul I este deschis. Atunci subdiferenţiala ∂f este nevidă dacă şi numai dacă f este convexă. În plus, dacă $\varphi \in \partial f$, atunci*

$$f_s^{'}(x) \leq \varphi(x) \leq f_d^{'}(x)$$

pentru orice $x \in I$; în particular, φ este o funcţie crescătoare.

ii) *În cazul unui interval oarecare I, subdiferenţiala ∂f este nevidă dacă şi numai dacă f este restricţia unei funcţii convexe definite pe un interval deschis care îl include pe I.*

Demonstraţie. i) Pentru partea de necesitate este suficient să arătăm că dacă f este o funcţie convexă atunci atât $f_s^{'}$ cât şi $f_d^{'}$ aparţin lui ∂f. Vom detalia aici doar faptul că $f_d^{'} \in \partial f$.

Fie $x, a \in I$ şi presupunem că $x > a$. Pentru orice $t \in (0, 1]$ avem

$$f\left((1-t)a + tx\right) \leq (1-t)f(a) + tf(x)$$

de unde rezultă

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(a + t(x-a)) - f(a)}{t(x-a)} \cdot (x-a)$$

iar prin trecere la limita cu $t \to 0+$, de aici deducem că $f(x) \geq f(a) + f_d^{'}(a)(x-a)$. Dacă $x < a$, atunci un raţionament similar ne dă

$$f(x) \geq f(a) + f_s^{'}(a)(x-a) \geq f(a) + f_d^{'}(a)(x-a)$$

deoarece $x < a$.

Faptul că funcţia φ este crescătoare rezultă acum din relaţia (*).

Pentru partea de suficienţă, să notăm că dacă $\varphi \in \partial f$, atunci pentru orice două puncte $x, y \in I$ şi orice $\lambda \in [0, 1]$ avem

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \geq & f((1-\lambda)x + \lambda y) + \lambda(x-y)\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \\ f(y) & \geq & f((1-\lambda)x + \lambda y) - (1-\lambda)(x-y)\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \end{array}$$

de unde, adunând prima relaţie înmulţită cu $1-\lambda$ cu a doua înmulţită cu λ deducem că

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq f((1-\lambda)x + \lambda y).$$

Punctul ii) rezultă din i). ■

În paginile Gazetei Matematice, o parte din rezultatul Lemei 1 a făcut obiectul notei [7], fără a se conştientiza însă că este vorba de un întreg domeniu deja dezvoltat.

2. Precizarea inegalităţii lui Jensen

Scopul acestei secţiuni este acela de a demonstra inegalităţi care să evalueze precizia în binecunoscuta inegalitate a lui Jensen. O primă variantă este următoarea:

Teorema 1. *Fie I un interval deschis, fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi fie $\varphi \in \partial f$. Atunci*

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \sum\nolimits_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) - f\left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \\ &\leq \ \sum\nolimits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \varphi(x_k) - \left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)\left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(x_k)\right) \end{aligned}$$

pentru orice $x_1, ..., x_k \in I$ şi orice $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0, 1]$, cu $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

Să notăm că prima inegalitate este aceea a lui Jensen, care apoi este precizată de inegalitatea lui Cebâşev, aplicată perechii de funcţii crescătoare φ şi identitatea lui I.

Demonstraţie. Conform definiţiei lui ∂f avem

$$f(x) \geq f(x_k) + (x - x_k)\varphi(x_k)$$

pentru orice $x \in I$ şi orice $k \in \{1, ..., n\}$. Înmulţind ambii membri cu α_k, adunând inegalităţile şi particularizând rezultatul obţinut pentru $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, deducem a doua inegalitate din enunţ. ■

Putem preciza inegalitatea lui Jensen şi altfel:

Teorema 2. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi continuă, care admite derivată la dreapta finită în punctul a. Fie $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ şi fie $[m_1, M_1], ...,$ $[m_n, M_n]$ subintervale compacte incluse în intervalul $[a, b]$. Atunci funcţia*

$$E(x_1, ..., x_n) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) - f\left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)$$

definită pe $[m_1, M_1] \times ... \times [m_n, M_n]$ îşi atinge maximul într-un punct din $\{m_1, M_1\} \times ... \times \{m_n, M_n\}$. Mai general, oricare ar fi Ω un domeniu convex şi compact inclus în $[a, b]^n$, restricţia lui $E(x_1, ..., x_n)$ la Ω îşi atinge maximul într-un punct din frontiera lui Ω.

Demonstraţia Teoremei 2 se bazează pe o binecunoscută rafinare a Teoremei lui Lagrange, a creşterilor finite:

Lema 2 (Generalizarea Teoremei lui Lagrange). *Fie $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, care admite derivată la dreapta finită în orice punct din $[a, b)$. Atunci există două puncte α şi β în $[a, b)$ astfel încât*

$$h_d'(\alpha) \leq \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \leq h_d'(\beta).$$

Demonstraţie. Ca şi în cazul "diferenţiabil", considerăm funcţia auxiliară

$$H(x) = h(x) - \frac{h(b) - h(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Evident, funcţia H este continuă şi $H(a) = H(b)$. Alegem $\bar{\alpha}$ şi $\bar{\beta}$ în $[a, b]$ astfel încât

$$H(\bar{\alpha}) = \inf H \quad \text{şi} \quad H(\bar{\beta}) = \sup H.$$

Dacă $H(\bar{\alpha}) = H(\bar{\beta})$, atunci H este constantă şi putem alege $\alpha = \beta$ arbitrar în $[a, b)$.

Dacă $H(\bar{\alpha}) < H(\bar{\beta})$, atunci $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$ şi putem presupune că $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in [a, b)$; vezi faptul că $H(a) = H(b)$.

Considerăm cazul când $a \leq \bar{\alpha} < \bar{\beta} < b$. Din faptul că $\bar{\alpha}$ este un punct de minim şi $\bar{\beta}$ este un punct de maxim, rezultă că

$$\begin{aligned} H_d^{'}(\bar{\alpha}) &= \lim_{x \to \bar{\alpha}+0} \frac{H(x) - H(\bar{\alpha})}{x - \bar{\alpha}} \geq 0 \\ H_d^{'}(\bar{\beta}) &= \lim_{x \to \bar{\beta}+0} \frac{H(x) - H(\bar{\beta})}{x - \bar{\beta}} \leq 0. \end{aligned}$$

Or,

$$H_d^{'}(\bar{\alpha}) = h_d^{'}(\bar{\alpha}) - \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$$

şi

$$H_d^{'}(\bar{\beta}) = h_d^{'}(\bar{\beta}) - \frac{h(b) - h(a)}{b - a}.$$

Rezultă că proprietatea din enunţ este verificată pentru $\alpha = \bar{\beta}$ şi $\beta = \bar{\alpha}$.

Cazul când $a \leq \bar{\beta} < \bar{\alpha} < b$ se tratează similar. ■

Demonstraţia Teoremei 2. Vom demonstra că pentru orice $x_k \in [m_k, M_k]$, $k \in \{1, ..., n\}$, avem

$$E(x_1, ..., x_k, ..., x_n) \leq \sup\{E(x_1, ..., m_k, ..., x_n), E(x_1, ..., M_k, ..., x_n)\}.$$

Raţionând prin reducere la absurd, este suficient să considerăm cazul când $k = 1$ şi când avem

$$E(x_1, x_2, ..., x_n) > \sup\{E(m_1, x_2, ..., x_n), E(M_1, x_2, ..., x_n)\}.$$

Fixând $x_k \in [m_k, M_k]$ pentru $k \in \{2, ..., n\}$, considerăm funcţia

$$h : [m_1, M_1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = E(x, x_2, ..., x_n).$$

Conform Lemei 2, există $\xi \in [m_1, x_1)$ încât $h(x_1) - h(m_1) \le (x_1 - m_1)\, h_d'(\xi)$. Deoarece $h(x_1) > h(m_1)$, rezultă că $h_d'(\xi) > 0$, echivalent,

$$f_d'(\xi) > f_d'(\alpha_1 \xi + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n)\,.$$

Întrucât f_d' este o funcţie crescătoare, acest fapt conduce la $\xi > \alpha_1 \xi + \alpha_2 x_2 + ...$ $+ \alpha_n x_n$, adică la

$$\xi > \frac{\alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_2 + ... + \alpha_n}.$$

Aplicând din nou Lema 2 funcţiei h dar pe intervalul $[x_1, M_1)$, deducem existenţa unui $\eta \in [x_1, M_1)$ încât

$$\eta < \frac{\alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_2 + ... + \alpha_n}.$$

Apare astfel o contradicţie privind poziţionarea lui ξ şi η, ceea ce încheie demonstraţia. ■

3. ANALOGUL CONTINUU AL TEOREMEI 1 ŞI GENERALIZAREA INEGALITĂŢII LUI CEBÂŞEV

Varianta continuă a Teoremei 1 rezultă din aceasta prin tehnica sumelor integrale. Locul combinaţiilor convexe îl ia *media*, care în cazul unei funcţii integrabile (Riemann) $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este numărul

$$M(g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\, dx.$$

Media se poate defini de asemena ca o limită de combinaţii convexe,

$$M(g) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} g(a + k \cdot \frac{b-a}{n}).$$

Lema 3. *Dacă imaginea lui g este este inclusă într-un interval I, atunci media sa aparţine de asemenea lui I.*

Demonstraţie. Dacă I este un interval închis, atunci utilizăm faptul ca acesta conţine odată cu un şir convergent şi limita sa. În celălalt caz, dacă de exemplu $g < M$, atunci avem de arătat că $M(g) < M$, adică

$$\int_a^b (M - g)\; dx > 0.$$

Or această ultimă relaţie este adevărată întrucât integrala unei funcţii strict po zitive este un număr strict pozitiv; vezi [3], pagina 106, punctul 304. ■

Cu observaţiile de mai sus, varianta continuă a Teoremei 1 este următoarea:

Teorema 3. *Fie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă şi fie f o funcţie convexă definită pe un interval I, care include imaginea lui g. Presupunem că funcţia $f \circ g$ este integrabilă. Atunci oricare ar fi $\varphi \in \partial f$ cu proprietatea că $\varphi \circ g$ este integrabilă, are loc inegalitatea*

$$0 \leq M(f \circ g) - f\left(M(g)\right) \leq M(g \cdot (\varphi \circ g)) - M(g)M(\varphi \circ g).$$

Ipoteza că $f \circ g$ şi $\varphi \circ g$ sunt funcţii integrabile apare motivată tehnic prin apariţia mediilor. Ea nu se poate realiza ca efect al celorlalte ipoteze. Considerăm de exemplu cazul funcţiilor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \leq 0 \\ x, & \text{dacă} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

convexă pe $\mathbb{R}$ şi

$$g(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{dacă} \qquad x = \frac{p}{q} \in [0,1], \text{ cu } p, q \in \mathbb{N}^\star, \ (p,q) = 1 \\ 0, & \text{în restul} \quad \text{intervalului } [0,1], \end{cases}$$

integrabilă pe intervalul $[0,1]$. Funcţia

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \leq 0 \\ 1, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$$

aparţine lui ∂f şi $\varphi \circ g = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ este funcţia lui Dirichlet, despre care se ştie că *nu* este integrabilă Riemann pe intervalul $[0,1]$.

Este important să observăm că Teorema 3 poate fi reformulată de o manieră mult mai puternică, pornind de la faptul că orice funcţie crescătoare aparţine subdiferenţialei unei funcţii convexe. Într-adevăr, dacă $\varphi : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare şi $a \in I$, atunci funcţia

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$$

este convexă (şi $\Phi'(x) = \varphi(x)$ în toate punctele de continuitate ale lui φ). Să numim *primitivă* a lui φ orice funcţie continuă $\Psi : I \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $\Psi'(x) = \varphi(x)$ în toate punctele de continuitate ale lui φ. Se poate arăta că orice două primitive ale lui φ diferă printr-o constantă. Vezi [5], Corolarul 6.5.3.

Discuţia de mai mai sus ne permite să deducem din Teorema 3 următorul rezultat, care extinde inegalitatea lui Cebâşev:

Teorema 4. *Fie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă şi fie φ o funcţie crescătoare definită pe un interval I, care include imaginea lui g şi astfel că $\varphi \circ g$ este integrabilă* *pe* $[a,b]$. *Atunci oricare ar fi* Φ *o primitivă a lui* φ *cu proprietatea că* $\Phi \circ g$ *este integrabilă are loc inegalitatea*

$$M(g \cdot (\varphi \circ g)) - M(g)M(\varphi \circ g) \geq M(\Phi \circ g) - \Phi\left(M(g)\right) \geq 0.$$

Corolar (Inegalitatea lui Cebâşev)**.** *Fie* $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *două funcţii crescătoare. Are loc inegalitatea*

$$M(g \cdot h) - M(g)M(h) \geq 0.$$

Demonstraţie. Felul cum inegalitatea lui Cebâşev rezultă din Teorema 4 este clar atunci când g este strict crescătoare; se ia $\varphi = h \circ g^{-1}$. În cazul general, se înlocuieşte g cu o perturbaţie strict crescătoare a sa, de exemplu $g + \varepsilon x$. Rezultă

$$M((g + \varepsilon x) \cdot h) - M(g + \varepsilon x)M(h) \geq 0$$

potrivit cazului deja analizat şi se trece apoi la limită după $\varepsilon \to 0$. ■

Teorema 2 are şi ea un analog continuu, a cărui formulare o lăsăm cititorului ca exerciţiu.

4. Aplicaţii

i) Să considerăm cazul funcţiei $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Funcţia f este convexă şi $\varphi = sgn \in \partial f$.

Conform Teoremei 1, pentru orice $x_1, ..., x_n \in [-M, M]$ avem

$$\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} |x_k| - \left|\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} |x_k| - \left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} sgn\, x_k\right)$$

adică

$$\left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} sgn\, x_k\right) \leq \left|\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k\right|$$

formal mai tare decât ceea ce ne oferă inegalitatea lui Cebâşev.

În acelaşi timp, Teorema 2 afirmă existenţa unui $j \in \{1, ..., n\}$ astfel încât

$$\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} |x_k| - \left|\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k\right| \leq M - \left|\frac{n-j}{n}M - \frac{j}{n}M\right|$$

ceea ce conduce la

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} |x_k| - \left|\frac{1}{n}\sum\nolimits_{k=1}^{n} x_k\right| &\leq M\left(n - \inf_{j \in \{1,...,n\}} |n - 2j|\right) = \\ &= \begin{cases} Mn, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ M(n-1), & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}\end{aligned}$$

ii) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi continuă. Conform Teoremei 2, are loc relaţia

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sup_{x,y\in[a,b]} \left[\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right].$$

În particular,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(c)+f(d)}{2} - f\left(\frac{c+d}{2}\right)$$

pentru orice $a \leq c \leq d \leq b$.

Această observaţie poate fi sursa unor inegalităţi interesante ca de exemplu:

$$\frac{a^n+b^n}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \geq \frac{c^n+d^n}{2} - \left(\frac{c+d}{2}\right)^n$$

pentru orice $0 \leq a \leq c \leq d \leq b$ şi orice $n \geq 1$.

iii) Vom aplica la acest punct Teorema 2 pentru a regăsi un rezultat al lui L. G. Khanin [4]: Fie $p > 1$, $x_1, ..., x_n \in [0, M]$ şi fie $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0, 1]$, cu $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)^p + (p-1)\, p^{p/(1-p)} M^p.$$

În particular,

$$\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n} \leq \frac{(x_1 + ... + x_n)^2}{n} + \frac{M^2}{4},$$

fapt care poate fi privit ca o inegalitate de tip Cauchy-Schwarz inversă.

Într-adevăr, potrivit Teoremei 2, funcţia

$$E(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^p - \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)^p,$$

definită pentru $x_1, ..., x_n \in [0, M]$, îşi atinge maximul când o parte din variabile sunt 0 şi celelalte sunt M. Prin urmare,

$$\begin{aligned} \sup E(x_1, ..., x_n) &\leq M^p \cdot \sup\{s - s^p;\ s \in [0,1]\} = \\ &= (p-1)\, p^{p/(1-p)} M^p. \end{aligned}$$

iv) Teorema 4 conduce la inegalităţi foarte interesante. O mostră ne oferă perechea de funcţii

$$\varphi(x) = x + \cos x,\ \text{care este crescătoare pe } \mathbb{R}$$

şi

$$g(x) = \sin\frac{1}{x},\ \text{care are monotonie oscilantă pe } [0,1].$$

Se obţine:

$$\int_0^1 \left(\sin\frac{1}{x}\right)\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\sin\frac{1}{x}\right)dx \geq \left(\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx\right)\left(\int_0^1 \left(\sin\frac{1}{x}+\cos\sin\frac{1}{x}\right)dx\right).$$

Programul MAPLE V5, ne arată că diferenţa dintre cei doi membri este 0.37673... Este demn de notat că integralele care intervin în inegalitatea de mai sus nu sunt exprimabile cu ajutorul funcţiilor elementare.

References

[1] Cârtoaje Vasile, *Asupra unor inegalităţi cu restricţii,* Revista de matematică din Timişoara, **1** (1990), 3-7.

[2] Drimbe Mihai Onucu, *O legătură dintre inegalităţile Jensen şi Cebâşev*, Gazeta Matematică, **CI** (1996), nr. 5-6, pp. 270-273.

[3] Fihtenholt G. M., *Curs de calcul diferenţial şi integral*, vol. II, Editura Tehnică, bucureşti, 1964.

[4] Khanin L. G., Problema M 1083, Kvant, **18** (1988), nr. 1, p. 35 şi Kvant **18** (1988), nr. 5, p. 35.

[5] Niculescu P. Constantin, *Fundamentele analizei matematice. Analiza pe dreapta reală*. Editura Academiei, Bucureşti, 1996.

[6] Niculescu P. Constantin, *An extension of Chebyshev's Inequality and its Connection with Jensen's Inequality,* Journal of Inequalities and Applications, Volume **6** (2001), nr. 4, pp. 451-462.

[7] Pop Iulia, *O caracterizare a funcţiilor convexe*, Gazeta Matematică, **IC** (1994), nr. 7, pp. 313-314.