Şirurile recurente ca sisteme dinamice discrete

Constantin P. Niculescu [*,†]

Text revizuit la 28 mai 2000

1. Introducere

Matematica se mândreşte cu faptul că adevărurile ei, odată stabilite, rămân veşnice. Numai că, trebuie să admitem că percepţia noastră asupra lor nu rămâne aceeaşi odată cu scurgerea timpului. Nu odată, au apărut diferite reconsiderări, unele cu efecte dramatice, care au schimbat radical înţelegerea noastră asupra unor întregi domenii. Un astfel de caz ni-l oferă problematica şirurilor recurente. În matematica contemporană, ea este parte a problematicii sistemelor dinamice discrete.‘

Dar ce înseamnă un sistem dinamic discret?

O înţelegere empirică a acestui concept o dobândim scriind un număr pe disply-ul unui calculator (fie el şi de buzunar) şi apoi apăsând repetat una din funcţii (ca de exemplu, $\sqrt{\cdot}$, sin, cos etc). Ne vom îndrepta fie spre una din valorile intervalului $[-\infty, \infty]$, fie vom fi în situaţia unui şir fără limită.

Din punct de vedere tehnic, un *sistem dinamic discret* pe o mulţime M este şirul $(f^n)_n$ al iteratelor unei funcţii $f : M \to M$. Amintim că iteratele (de ordin pozitiv ale) funcţiei f se definesc prin formulele

$$f^0 = id_M \quad \text{şi} \quad f^n = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \text{ ori}}, \text{ dacă } n \in \mathbb{N}^\star.$$

Majoritatea autorilor folosesc apelativul ”fie $f : M \to M$ un sistem dinamic” cu înţelesul că se referă la sistemul dinamic discret generat de iteratele lui f pe M. Problematica acestor sisteme poate fi formulată astfel: *Fiind dată o funcţie f şi o valoare iniţială a, ce se întâmplă cu şirul*

$$x_0 = a, \quad x_n = f(x_{n-1}) \text{ dacă } n \in \mathbb{N}^\star,$$

al iteratelor lui f calculate în a?

Numim şirul $(f^n(a))_n$ *traiectoria* lui a, iar mulţimea valorilor sale, *orbita* lui a; notăm orbita lui a prin $\mathcal{O}(a)$. Valorile însele se mai numesc *stări*; x_0 poartă numele de *starea iniţială* a sistemului, iar x_n reprezintă *starea sistemului la momentul n.*

---

[*] Această lucrare a constituit baza conferinţei noastre *Matematica la răscruce de milenii*, prezentată în cadrul celei de a IV-a *Conferinţe anuale a Societăţii de ştiinţe matematice din România,* Constanţa, 25-28 mai 2000.

[†] Articol publicat în *Gazeta mtematică, revistă de cultură matematică*, anul **XVIII** (XCVII), no. 3, pp. 195-212, 2000.

Teoria şirurilor recurente priveşte *individual* aceste obiecte, teoria sistemelor dinamice se ocupă de *ansamblul* traiectoriilor unui sistem. Cel care a avut ideea studiului global al iteratelor (şi a iniţiat studiul sistemelor dinamice), a fost marele matematician francez H. Poincaré [21].

Problema înţelegerii structurii orbitelor se dovedeşte a fi deosebit de complexă şi de un interes major în aspectele practice (computaţionale) ale matematicii. Deloc surprinzător, multe întrebări cu un enunţ aparent simplu au dat, sau continuă să dea, multă bătaie de cap celor mai strălucite minţi ale matematicii mondiale. S. Smale [22], laureat a numeroase distincţii internaţionale, incluzând medalia Fields, a formulat de curând o listă de probleme deschise pentru secolul XXI. Unele dintre acestea privesc sistemele dinamice, şi acest fapt m-a determinat să aduc în atenţia cititorilor Gazetei matematice optica contemporană asupra şirurilor recurente.

Prezentul articol îşi doreşte totodată să contribuie la popularizarea conceptului matematic de *haos*, acum la modă în întreaga lume. O percepţie superficială asociază haosul cu "harababura totală" şi până nu demult, problema centrală era cum să fie evitat. Privind mai atent lucrurile, constatăm că "haosul controlat" poate însemna şansa supravieţuirii. Într-adevăr, în competiţia dură dintre specii, un comportament complet predictibil duce la dispariţie!

Tehnic, prezenţa comportamentului haotic are drept trăsătură principală manifestarea *dependenţei senzitive de datele iniţiale*: există un $\delta > 0$ astfel încât pornind de la orice două stări iniţiale x_0 şi y_0 (oricât de apropiate, dar nu identice) există un $n \geq 1$ cu proprietatea că $d(f^n(x_0), f^n(y_0)) > \delta$. Prin urmare în acest caz nu putem aproxima $(f^n(x_0)$ cu $f^n(y_0)$ începând de la un prag N, oricât de bună ar fi aproximaţia y_0 a lui x_0. Abordarea numerică a sistemelor dinamice haotice devine astfel extrem de dificilă şi larg incompletă fără un studiu calitativ complementar.

Frapant este faptul că aplicaţii extrem de simple, precum funcţia polinomială $2x^2 - 1$ pe intervalul $[-1, 1]$, intră în această categorie. Vezi secţiunea 7 de mai jos.

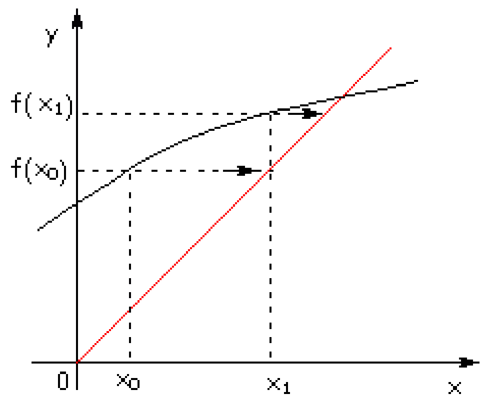
Teoria haosului este în plină dezvoltare şi dorim ca în unele lucrări ulterioare să prezentăm cititorilor Gazetei matematice numeroase alte rezultate interesante.

Terminologia şi notaţiile din acest articol sunt în acord cu *Dicţionarul de analiză matematică* [24].

2. Mulţimi invariante. Atractori

Dacă există un număr $n \in \mathbb{N}^\star$ astfel încât $f^n(a) = a$, atunci a poartă numele de *punct periodic* (de perioadă n); *perioada principală* a punctului periodic a va fi cel mai mic mai număr $n \in \mathbb{N}^\star$ cu proprietatea că $f^n(a) = a$. Orbita oricărui punct periodic este o mulţime finită. Ea constă dintr-un singur element dacă a este un *punct fix* al lui *f*, adică dacă

$$f(a) = a.$$



Aplicaţia identică a lui $\mathbb{R}$ admite toate elementele lui $\mathbb{R}$ ca puncte fixe. Aplicaţia $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$, are ca unic punct fix pe 0, toate celelalte puncte fiind periodice, de perioadă 2.

Punctele fixe şi orbitele periodice sunt exemple de mulţimi invariante. Fiind dată o aplicaţie $f : M \to M$, o submulţime A a lui M se zice că este *invarintă* (pentru f) dacă

$$f(A) = A$$

şi că este *pozitiv invariantă* dacă

$$f(A) \subset A;$$

în amândouă cazurile, orbitele punctelor care pleacă din A rămân în A.

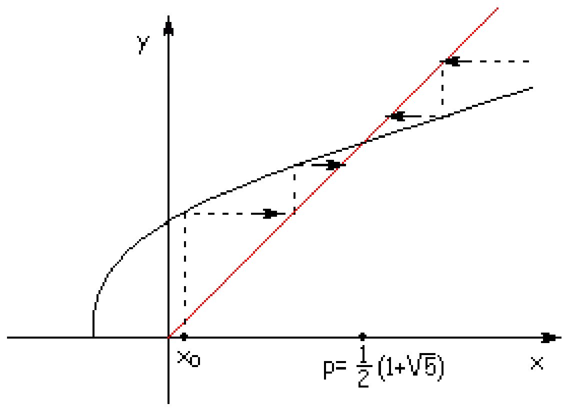
În cazul când M este un interval, analiza grafică poate juca un rol foarte important în înţelegerea dinamicii diferitelor funcţii, conducând la aşa numita *diagramă în trepte*. Intersecţia graficului lui f cu prima bisectoare evidenţiază punctele fixe. Şirul $\left(f^n(a)\right)_n$ al iteratelor lui $x_0 = a$ se vizualizează astfel: Ridicăm în a o perpendiculară pe axa Ox până intersectează graficul funcţiei f în punctul $(a, f(a))$. O paralelă prin acest punct la Ox taie prima bisectoare în $(f(a), f(a))$. Apoi, paralela la Oy prin acest ultim punct taie graficul lui f în $(f(a), f^2(a))$ ş. a. m.d. Săgeţile indică ordinea de parcurs, iar scările ascendente/descendente pun în evidenţă monotonia. Vezi Fig. 1.

Un studiu de caz este exemplificat în Fig. 2.

Calculul diferenţial contribuie major la realizarea analizei grafice şi implicit la studiul dinamicii diferitelor aplicaţii.

2.1. Exemple. i) Considerăm cazul aplicaţiei

$$f : [-1, \infty) \to [-1, \infty), \quad f(x) = \sqrt{1 + x}.$$



f are un unic punct fix, care este $p = (1 + \sqrt{5})/2$. Analiza grafică relevă că toate traiectoriile converg la p; mai precis, dacă $x_0 < p$ atunci $f^n(x_0) \nearrow p$, iar dacă $x_0 > p$ atunci $f^n(x_0) \searrow p$. Vezi Fig. 2.

ii) Considerăm cazul familiei de aplicaţii

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \lambda x.$$

Originea este un punct fix pentru oricare din ele, dar variind parametrul λ, dinamica punctelor din vecinătatea originii variază considerabil. Vezi Fig. 3. Într-adevăr, are loc următorul tablou:

Dacă $\lambda = 0$, atunci $f^n(x_0) = 0$ pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ şi orice $n \geq 1$;

Dacă $\lambda \in (0, 1)$, atunci toate traiectoriile tind monoton la 0 (crescător, dacă $x_0 < 0$, descrescător, dacă $x_0 > 0$);

Dacă $\lambda = 1$, atunci toate traiectoriile sunt constante (deci toate punctele lui $\mathbb{R}$ sunt puncte fixe);

Dacă $\lambda > 1$, atunci traiectoriile punctelor $x_0 > 0$ tind crescător la ∞, iar ale punctelor $x_0 < 0$ tind descrescător la $-\infty$;

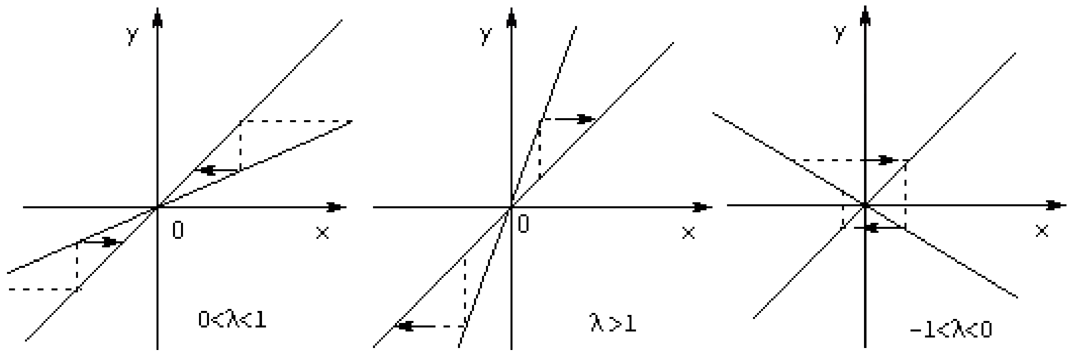
Dacă $\lambda \in (-\infty, -1)$, atunci traiectoriile se îndepărtează de origine;

Dacă $\lambda = -1$, atunci toate traiectoriile sunt periodice, de perioadă 2;

Dacă $\lambda \in (-1, 0)$, atunci toate traiectoriile se îndreaptă către 0, "înfăşurând" acest punct.

Cele două exemple de mai sus ne arată manifestarea mai multor tipuri de comportament a punctelor fixe.

2.2. Definiţie. Un punct fix p se zice că este *atractiv* (sau că este un *atractor*) pentru sistemul dinamic $f : M \to M$ dacă există o vecinătate U a lui p în M astfel



încât

$$f^n x_0 \to p \quad \text{pentru orice} \quad x_0 \in U.$$

Numim mulţimea U ca în Definiţia 2.2, *bazin de atracţie* a lui p. Dacă U se poate alege întregul spaţiu M, atunci vom spune că p este *atractorul global* al sistemului dinamic $f : M \to M$.

2.3. Definiţie. Spunem că un punct fix p este *repulsiv* pentru sistemul dinamic $f : M \to M$, dacă există o vecinătate U a lui p în M cu proprietatea că pentru orice $x_0 \in U$, $x_0 \neq p$, există un număr natural n astfel încât $f^n x_0 \notin U$.

În legătură cu Definiţia 2.3, este util să menţionăm posibilitatea ca iteratele de ordin mai mare decât n ale lui x_0 să viziteze din nou vecinătatea U.

Există puncte fixe *indiferente,* care nu sunt nici atractive şi nici repulsive. Este cazul originii, pentru sistemul dinamic ataşat identităţii lui $\mathbb{R}$.

O importantă sursă de atractori globali este Principiul Contracţiei. Amintim că o aplicaţie $f : M \to M$ (definită pe un spaţiu metric M, înzestrat cu metrica d) este o *contracţie* dacă există o constantă $C \in (0, 1)$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$$

pentru orice $x, y \in M$.

2.4. Principiul Contracţiei (cunoscut şi sub numele de *Teorema lui Banach-Cacciopoli, de punct fix*). *Fie M un spaţiu metric complet (e.g., o submulţime închisă a spaţiului euclidian real n-dimensional) şi fie $f : M \to M$ o contracţie. Atunci f are un unic punct fix p, care este atractorul global al lui f (văzut ca sistem dinamic discret pe M).*

În plus, p poate fi determinat prin *metoda aproximaţiilor succesive*: Fiind dată aproximaţia iniţială x_0, considerăm şirul *aproximaţiilor succesive,*

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

Atunci $x_n \to p$, indiferent de alegerea lui x_0.

Demonstraţia principiului contracţiei este binecunoscută şi apare în numeroase cărţi, în particular, în tratatul nostru [20], pp. 124-126. Proprietatea unicului punct fix p de a fi atractorul global este echivalentă cu faptul că $x_n \to p$, indiferent de alegerea lui x_0.

O foarte competentă istorie a metodei aproximaţiilor succesive apare în articolul lui D. F. Bailey [2]. Ea poate fi trasată în antichitate în legătură cu *algoritmul babilonian* de extragere a rădăcinii pătrate,

$$\begin{aligned} x_0 &> 0 \quad \text{aproximaţia iniţială} \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\,(x_n + \frac{a}{x_n}) \quad \text{pentru } n \geq 0. \end{aligned}$$

Urmează momentul algoritmului lui Newton de rezolvare numerică a ecuaţiilor algebrice şi, mai recent, al metodei lui Picard de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale via operatorii integrali. Principiul contracţiei este în fapt o formulare abstractă a metodei lui Picard, superior acesteia prin posibilitatea sa de aplicare în cele mai diferite ipostaze.

Exerciţii

1. Utilizaţi analiza grafică pentru a descrie dinamica aplicaţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x + 3x^2 - x^3.$$

2. Metoda aproximaţiilor succesive este mai generală decât Principiul contracţiei. Cu alte cuvinte, ea poate funcţiona şi pentru aplicaţii care nu sunt contracţii. Demonstraţi că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, şirul recurent definit de formula

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= \sin x_n, \quad \text{pentru } n \geq 0 \end{aligned}$$

converge la 0, unicul punct fix al funcţiei $\sin$.

3. (B. P. Hillam [10]). Fie $f : [a,b] \to [a,b]$ o *aplicaţie lipschitziană*, adică o aplicaţie care verifică o inegalitate de forma

$$|f(x) - f(y) \leq C\,|x - y|$$

pentru orice $x, y \in [a,b]$. Ei îi ataşăm aplicaţia

$$F : [a,b] \to [a,b], \quad F(x) = (1 - \lambda)x + \lambda f(x)$$

unde $\lambda = 1/(1+C)$. Demonstraţi că F este nedescrescătoare şi pentru orice $x_0 \in [a,b]$, şirul dat de formula

$$x_n = F^n(x_0), \quad n \geq 0$$

converge la unul din punctele fixe ale lui f.

3. Teorema lui A. N. Şarkovski

Mai poate oferi analiza pe dreapta reală surprize? Am fi tentaţi să spunem că nu, dar următorul rezultat publicat în anul 1964 a entuziasmat lumea matematicii prin simplitatea şi profunzimea sa:

3.1. Theorem (A. N. Şarkovski). *Orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care admite puncte periodice de perioadă principală* 3, *admite puncte periodice de orice altă perioadă principală.*

Demonstraţie. Dorind să nu stricăm cititorului plăcerea redescoperirii acestui frumos rezultat, ne mulţumim să indicăm etapele demonstraţiei; detaliile se pot completa apoi cu uşurinţă.

i) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci pentru orice interval compact B, inclus în $f([a,b])$, există un interval compact A, inclus în $[a,b]$, cu proprietatea că $f(A) = B$.

ii) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi fie A un interval nevid şi compact, inclus în $[a,b]$, cu proprietatea că $A \subset f(A)$. Din afirmaţia de la punctul i) se deduce că există p în A astfel că $f(p) = p$.

iii) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care există un punct c cu proprietatea că

$$f(a) = c,\ f(c) = b,\ f(b) = a.$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi fie intervalele $I_0 = ... = I_{n-2} = I_n = [a,b]$ şi $I_{n-1} = [a,c]$. Se arată că există un şir descrescător $A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_n$ de subintervale compacte ale lui $[c,b]$, astfel încât $f^k(A_k) = I_k$ pentru orice k în $\{0,1,...,n\}$. Atunci, în acord cu punctul ii) de mai sus, funcţia f^n admite un punct fix în A_n. Prin urmare, f admite puncte periodice, de perioadă principală n.

iv) Din afirmaţiile precedente se deduce acum cu uşurinţă că orice funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care admite puncte periodice de perioadă principală 3, admite puncte periodice de orice altă perioadă principală. ■

Şarkovski a demonstrat de fapt un rezultat mult mai puternic (dar specializat la intervale). Să considerăm pe $\mathbb{N}^\star$ aşa numita *ordine a lui Şarkovski*,

$$\begin{aligned} &3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd ... \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd 2\cdot 7 \rhd ... \rhd 2^2\cdot 3 \rhd ... \\ &\quad \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1. \end{aligned}$$

Sunt listate mai întâi numerele impare (cu excepţia lui 1), apoi acestea înmulţite cu 2, apoi înmulţite cu 2^2, ş.a.m.d. În acest mod sunt listate toate numerele naturale cu excepţia puterilor lui 2, numere care scrise în ordine descrescătoare completează lista.

3.2. Teoremă (A. N. Şarkovski [23]). *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care are puncte periodice de perioadă principală m. Dacă $m \rhd n$ în ordinea lui* Şarkovski, *atunci f are de asemenea puncte periodice de perioadă principală n.*

Cititorul interesat de detaliile demonstraţiei teoremei 3.2 poate consulta de asemenea cartea lui R. Devaney [7], pp. 60-68. Teorema 3.1 a fost redescoperită de Li şi Yorke într-o celebră lucrare în care demonstrau că existenţa punctelor periodice de perioadă principală 3 conduce la manifestarea unui comportament haotic al dinamicii sistemului aflat în atenţie:

3.3. Teoremă (Li şi Yorke [13]). *Fie I un interval şi fie $f : I \to I$ o funcţie continuă care admite puncte cu perioada principală* 3. *Atunci există o submulţime nenumărabilă S a lui I cu proprietatea că orbita fiecărui punct din S este aperiodică şi instabilă.*

Precizăm că o orbită $\mathcal{O}(a)$ este *aperiodică* dacă mulţimea punctelor sale de acumulare este infinită.

Orbita unui punct a se zice că este *instabilă* dacă există un număr $\delta > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi vecinătatea V a lui a există $x \in V$ şi $n \in \mathbb{N}^\star$ astfel încât

$$d\left(f^n(x), f^n(a)\right) > \delta.$$

Să notăm că submulţimea critică S din teorema 3.3 poate fi foarte "subţire", de măsură 0, aşa cum arată următorul exemplu analizat în [14]:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1/4) \\ 4x - 1, & \text{dacă } x \in [1/4, 1/2) \\ -4x + 3, & \text{dacă } x \in [1.2, 3/4) \\ 0, & \text{dacă } x \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Vom reveni în secţiunea 7 pentru prezentarea mai în detaliu a conceptului de comportament haotic.

4. Rotaţia pe cercul unitate

Cercul unitate este mulţimea

$$S^1 = \{z \,:\, z \in \mathbb{C}, \, |z| = 1\}.$$

El are o structură naturală de grup abelian multiplicativ şi, de asemenea, de grup topologic compact, luând în consideraţie topologia asociată metricii

$$d(u,v) = |u - v|.$$

Pentru $\theta \in \mathbb{R}$, definim *rotaţia de unghi* θ pe cercul unitate ca fiind aplicaţia

$$R_\theta : S^1 \to S^1, \quad R_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot z.$$

4.1. Lemă. *Dacă $\theta/2\pi \in \mathbb{Q}$, atunci orbitele tuturor punctelor $z \in S^1$ sunt periodice.*

Demonstraţie. Presupunând că $\theta = 2\pi \cdot \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{N}^\star$ şi p, q relativ prime, atunci

$$R_\theta^q(z) = e^{i\,q\theta} \cdot z = e^{i\,p2\pi} \cdot z = z,$$

pentru orice $z \in S^1$. ■

Vis-à-vis de limitele teoremei lui Şarkovski, să observăm că rotaţia R_θ, cu $\theta = 2\pi/3$, are puncte periodice de periodă principală 3 şi nu are puncte periodice de nici o altă perioadă principală.

4.1. Teorema lui Jacobi. *Dacă $\theta/2\pi \notin \mathbb{Q}$, atunci orbita oricărui punct $z \in S^1$ este densă în S^1.*

Demonstraţie. Deoarece $\theta/2\pi \notin \mathbb{Q}$, elementele şirului z, $R_\theta(z)$, $R_\theta^2(z), \ldots$ sunte distincte două câte două.

Deoarece S^1 este compact, din orice şir de elemente ale sale se poate extrage un subşir convergent. În particular, un subşir $\left(R_\theta^{k(n)}(z)\right)_n$ este convergent. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există deci un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|R_\theta^{k(m)}(z) - R_\theta^{k(n)}(z)| < \varepsilon$$

pentru orice $m, n \geq N_\varepsilon$. Fie $N = k(N_\varepsilon + 1) - k(N_\varepsilon)$. Evident, $N > 0$. Întrucât rotaţiile sunt izometrii, avem

$$\begin{aligned} |R_\theta^N(z) - z| &= |R_\theta^{k(N_\varepsilon)}\left(R_\theta^N(z) - z\right)| = \\ &= |R_\theta^{k(N_\varepsilon+1)}(z) - R_\theta^{k(N_\varepsilon)}(z)| < \varepsilon \end{aligned}$$

şi iterând acest argument, deducem că punctele z, $R_\theta^N(z)$, $R_\theta^{2N}(z)$, ... împart S^1 în arce de diametri $< \varepsilon$. Cum orice punct w din S^1 aparţine unui asemenea arc, rezultă că există un $n = n(w, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $|w - R_\theta^n(z)| < \varepsilon$. ■

Punctele ale căror orbite sunt dense se mai numesc *puncte topologic tranzitive* (iar sistemele care admit puncte topologic tranzitive se mai numesc *sisteme topologic* *tranzitive*). Asemenea sisteme au de regulă o dinamică complicată. Vezi secţiunea 7 de mai jos.

Mai multe informaţii privind dinamica aplicaţiilor pe cercul unitate se găsesc în [7].

5. Hiperbolicitate

În această secţiune vom prezenta o condiţie uşor verificabilă, datorată lui O. Perron, în prezenţa căreia punctele fixe sunt sau atractive, sau repulsive. Pentru simplificarea expunerii vom considera aici doar cazul când spaţiul M este un interval nedegenerat I şi sistemul dinamic în atenţie este asociat unei aplicaţii $f : I \to I$, de clasă C^1. Precizăm că apartenenţa la clasa C^r, cu $r \geq 1$, înseamnă continuitatea derivatei de ordinul r.

5.1. Definiţie. Spunem că un punct fix p pentru sistemul dinamic $f : I \to I$ este un *punct fix hiperbolic* dacă

$$|f'(p)| \neq 1.$$

Utilitatea definiţiei 5.1 este evidenţiată de următorul rezultat:

5.2. Teoremă. *Presupunem că $f : I \to I$ este o aplicaţie de clasă C^1.*

i) *Dacă $|f'(p)| < 1$, atunci există o vecinătate U a lui p astfel încât $f(U) \subset U$ şi pentru orice x din U are loc relaţia*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p.$$

ii) *Dacă $|f'(p)| > 1$, atunci există o vecinătate V a lui p astfel încât pentru orice x în $V \setminus \{p\}$ există un $n \in \mathbb{N}^\star$ cu proprietatea că $f^n(x) \notin V$.*

Demonstraţie. i) Deoarece f are derivată continuă şi $|f'(p)| < C < 1$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$|f'(x)| < C \quad \text{pe} \quad U = [p - \varepsilon, p + \varepsilon] \cap I.$$

Conform teoremei creşterilor finite (teorema lui Lagrange, de medie), pentru orice x din U avem

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq C|x - p| \leq |x - p| \leq \varepsilon.$$

Prin urmare $f(x)$ aparţine lui U, iar repetarea argumentului de mai sus conduce la relaţia

$$|f^n(x) - p| \leq C^n\,|x - p|,$$

de unde rezultă că $f^n(x) \to p$.

Afirmaţia de la punctul ii) se bazează de asemenea pe teorema creşterilor finite.
■

Este important să extindem considerentele de mai sus la cazul mulţimilor pozitiv invariante.

5.3. Definiţie. Spunem că o mulţime A, pozitiv invariantă pentru aplicaţia $f : I \to I$, de clasă C^1, este *hiperbolică* dacă

$$|f'(a)| \neq 1 \quad \text{pentru orice } a \in A.$$

Un caz special este acela al orbitelor periodice. Fie p un punct periodic, de perioadă principală m, pentru aplicaţia $f : I \to I$, de clasă C^1. Atunci condiţia de hiperbolicitate pentru $\mathcal{O}(p)$ este

$$|(f^m)'(p)| \neq 1.$$

Într-adevăr,

$$(f^m)'(x) = (f^m)'(p) \quad \text{pentru orice } x \in \mathcal{O}(p)$$

căci dacă $x \in \mathcal{O}(p)$, atunci $x = f^k(p)$ pentru un anume $k \in \{0, ..., m-1\}$ şi avem

$$\begin{aligned}(f^m)'(f^k(p)) &= f'(f^{m-1}(f^k(p))) \cdot f'(f^{m-2}(f^k(p))) \cdot ... \cdot f'(f^k(p)) = \\ &= f'(f^{m-1}(p)) \cdot f'(f^{m-2}(p)) \cdot ... \cdot f'(p).\end{aligned}$$

Schimbând f cu f^m în Teorema 5.2, obţinem tabloul comportamentului orbitelor periodice hiperbolice (în cazul aplicaţiilor pe intervale), care poate fi atractiv, sau repulsiv.

Spre exemplu, aplicaţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -\left(x^3 + x\right)/2$$

admite originea ca atractor hiperbolic, cu bazinul de atracţie $U = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; orbita periodică $\mathcal{O}(1) = \{-1, 1\}$ este şi ea hiperbolică, dar repulsivă.

Teoria expusă mai sus se poate generaliza la cazul când f este o aplicaţie diferenţiabilă acţionând pe varietăţi diferenţiabile (în particular, pe deschişi ai spaţiilor euclidiene). În locul derivatei se utilizează diferenţiala, iar condiţia de hiperbolicitate pentru un punct fix p este aceea că spectrul lui $df(p)$ nu intersectează cercul unitate.

Vezi [1], [7] şi [8] pentru mai multe detalii.

Exerciţii

1. Clasificaţi punctele periodice ale următoarelor aplicaţii care acţionează pe $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x \\ f_2(x) &= x^3 - x \\ f_3(x) &= \operatorname{arctg} x \\ f_4(x) &= e^x. \end{aligned}$$

2. Un difeomorfism $f : [a, b] \to [a, b]$ se numeşte *difeomorfism Morse-Smale,* dacă toate orbitele sale periodice sunt hiperbolice. Arătaţi că $f(x) = x^3 + 3x/4$, $x \in [-1/2, 1/2]$, este un asemenea exemplu. Demonstraţi că un difeomorfism Morse-Smale poate avea numai un număr finit de puncte periodice.

6. O problemă deschisă privind dinamica 1-dimensională

În teoria sistemelor dinamice prezintă interes aşa numitele puncte necălătoare.

6.1. Definiţie. Fiind dată o aplicaţie continuă $f : M \to M$, numim *punct necălător* pentru f orice punct a cu proprietatea că oricare ar fi vecinătatea sa U există $k \in \mathbb{N}^\star$ astfel încât $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$.

Mulţimea $\Omega(f)$, a punctelor necălătoare pentru f, include mulţimea $Per\,(f)$, a punctelor periodice pentru f, ca şi mulţimea punctelor topologic tranzitive pentru f.

Mulţimea $\Omega(f)$ este închisă şi pozitiv invariantă; pentru prima afirmaţie, se observă că $M \setminus \Omega(f)$ este deschisă, deoarece odată cu un punct, ea conţine o vecinătate a lui.

6.2. Definiţie. Spunem că o aplicaţie continuă $f : M \to M$ este *hiperbolică* dacă verifică următoarele două condiţii:

i) Mulţimea $\Omega(f)$ este hiperbolică;

ii) Mulţimea punctelor periodice ale lui f este densă în $\Omega(f)$.

Notăm cu $C^r([0,1], [0,1])$ spaţiul tuturor aplicaţiilor $f : [0,1] \to [0,1]$ de clasă C^r, înzestrat cu *metrica* C^r, adică metrica definită de formula

$$d_{C^r}(f,g) = \sum_{k=0}^{r} \sup_{x \in [0,1]} |D^k f(x) - D^k g(x)|.$$

Problemă. Poate fi aproximată în metrica C^r orice aplicaţie $f \in C^r([0,1], [0,1])$ prin aplicaţii hiperbolice de clasă C^r ?

M. Jakobson [11] (vezi şi [17]) a dat un răspuns pozitiv în cazul $r = 1$. Cazul $r > 1$ este deschis în continuare.

7. Dependenţa senzitivă de condiţiile iniţiale

Iterând aplicaţiile continue $f: M \to M$ (care acţionează pe spaţii metrice) putem avea mari surprize din punct de vedere numeric. Astfel, când urmărim traiectoria unui punct x_0, trebuie să avem în vedere că din diverse motive noi operăm doar cu o aproximaţie $\bar{x}_0$ a acestuia. A cunoaşte traiectoria lui x_0 înseamnă a şti $\varepsilon-$vecinătăţile sale. Continuitatea lui f ne asigură că dat fiind $\varepsilon > 0$ putem determina un $\delta > 0$ încât

$$d(x_0, \bar{x}_0) < \delta \quad \text{implică} \quad d(f(x_0), f(\bar{x}_0)) < \varepsilon.$$

Nimic nu ne asigură însă că

$$\sup_{n \geq 0} d(f^n(x_0), f^n(\bar{x}_0)) < \varepsilon.$$

Dimpotrivă, exemple simple precum *aplicaţia de dublare a unghiului pe cerc*,

$$f: S^1 \to S^1, \quad f(z) = z^2,$$

ne arată că exact contrariul se poate întâmpla! Acest fenomen (mai puternic decât acela al instabilităţii orbitelor) impune următoarea definiţie:

7.1. Definiţie (J. Guckenheimer [9]). Un sistem dinamic discret $f: M \to M$ se zice că prezintă *dependenţă senzitivă de condiţiile iniţiale* dacă există un număr $\delta > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi punctul $a \in M$ şi oricare ar fi vecinătatea sa V, există $y \in V$ şi $n \in \mathbb{N}^\star$ astfel încât

$$d\left(f^n(x), f^n(y)\right) > \delta.$$

În ştiinţele contemporane sunt adesea utilizaţi termeni precum *comportament haotic*, *dinamică haotică*, *haos* etc. Deşi nu există încă o definiţie unanim recunoscută a noţiunii matematice de haos, toată lumea este de acord că dependenţa senzitivă de condiţiile iniţiale constituie o componentă care nu poate lipsi.

7.2. Definiţie (R. Devaney [7]**).** Spunem că un sistem dinamic f este *haotic* dacă verifică următoarele trei condiţii:
(T) f este topologic tranzitiv;
(P) Mulţimea punctelor periodice este densă;
(S) f manifestă dependenţă senzitivă de condiţiile iniţiale.

Definiţia 7.2 a avut un impact deosebit în popularizarea teoriei sistemelor dinamice haotice. Ea suportă totuşi o mică observaţie, cele trei condiţii nefiind independente:

7.3. Teoremă (Vezi [4], sau [19], pp. 296-297**).** *Are loc implicaţia*

$$(T) \,\&\, (P) \Rightarrow (S).$$

Rezultatul principal în dinamica topologică pe dreaptă este următorul:

7.4. Teoremă (L. S. Block and W. A. Coppel [5]). *Fie I un interval. Orice aplicaţie continuă şi topologic tranzitivă* $f : I \to I$ *este haotică.*

O tehnică simplă de a deduce comportamentul haotic al unor sisteme este aceea bazată pe *semiconjugare*:

7.5. Teoremă. *Fie* X *şi* Y *două spaţii metrice şi fie diagrama comutativă*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

formată cu aplicaţii continue. Presupunem că f *este haotică şi că* h *este surjectivă. Atunci* g *este de asemenea haotică.*

Demonstraţie. Se verifică imediat că g satisface condiţiile (T) şi (P) (şi deci şi (S), conform teoremei 7.3). ■

Un caz frapant de comportament haotic este acela al *polinomului Cebâşev* de ordinul 2,

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad x \in [-1, 1].$$

Manipularea sa este simplă observând că substituţia $x = \cos\theta$ ne dă $T_2(x) = \cos 2\theta$.

Punctele lui $\mathbb{R}$ sunt fie topologic tranzitive fie eventual periodice pentru T_2; precizăm că un punct p este *eventual periodic* dacă $T_2^n(p)$ este periodic pentru un anume n. Punctele eventual periodice ale lui T_2 sunt precis punctele p de forma $p = \cos\theta$ cu

$$\theta = \frac{k\pi}{2^n - 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Comportamentul haotic al polinomului T_2 rezultă din teorema 7.5 aplicată pentru $X = S^1$, $Y = [-1, 1]$, f =aplicaţia de dublare a unghiului, $h(e^{i\theta}) = \cos\theta$ (proiecţia pe prima componentă) şi $g = T_2$.

Din comportamentul haotic al lui T_2 putem deduce similar (folosind funcţia $h(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$) comportamentul haotic al *funcţiei logistice,*

$$F_4 : [0, 1] \to [0, 1], \quad F_4(x) = 4x(1 - x).$$

Un recent articol al lui M. Martelli, M. Dang and T. Seph [14] aduce în atenţie şi alte definiţii ale conceptului matematic de haos, care ar putea în viitor să ia locul definiţiei lui R. Devaney.

Vom nota în încheiere un rezultat al lui B. P. Hillam (vezi Amer. Math. Monthly, **83** (1976), p.273) care poate fi privit ca o introducere naturală în studiul complexităţii dinamicii aplicaţiilor pe intervale: *Fie* $f : [0,1] \to [0,1]$ *o aplicaţie continuă şi fie* $x_0 \in [0,1]$. *Notăm cu* $(x_n)_n$ *şirul de aproximaţii succesive generat de* x_0. *Şirul* $(x_n)_n$ *este convergent* (în mod necesar, la un punct fix al lui f) *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

Exerciţii

1. Demonstraţi că în general toate polinoamele lui Cebâşev

$$T_n(x) = \cos n \arccos x,\ x \in [-1,1]$$

   de ordin $n \geq 2$ sunt haotice.

2. Daţi o demonstraţie directă (adică independentă de Teorema 7.5) a faptului că polinomul T_2 este haotic.

3. Demonstraţi că funcţia $f(x) = \pi \sin x$, $x \in [0,\pi]$, este haotică.

8. În loc de Epilog: Algoritmii numerici şi comportamentul haotic

Întrucât în general este imposibil să se indice forma analitică a traiectoriilor unei ecuaţii de evoluţie, se recurge la algoritmii numerici, care produc traiectorii aproximative. În ce mod reflectă acestea traiectoriile reale ?

Discutăm această problemă în cazul algoritmului lui Euler de rezolvare aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Se consideră o reţea echidistantă de puncte $t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h, ...$ în care *pasul* h este o constantă. Cunoscând valoarea soluţiei $x = x(t)$ a ecuaţiei în punctul 0, urmează să determinăm valoarea ei în t_1 ş.a.m.d. Aproximând $\frac{dx}{dt}(t_n)$ cu $\frac{x_{n+1} - x_n}{h}$, suntem conduşi la a asocia ecuaţiei iniţiale şirul recurent

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x_{n+1} &= x_n + h \cdot f(x_n) \end{aligned}$$

care produce valorile aproximative ale soluţiei $x(t)$ în punctele t_n.

Să ilustrăm această procedură în cazul aşa numitei *ecuaţii logistice,*

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x),$$

unde a este un parametru pozitiv. Traiectoriile sale sunt date formula

$$x(t) = \frac{x(0) \cdot e^{at}}{1 - x(0) + x(0) \cdot e^{at}}\,;$$

să notăm că $x = 1$ este un punct fix atractiv.

Aplicând algoritmul lui Euler cu pasul h şi notând $b = ha$, ajungem la procesul iterativ

$$x_{n+1} = bx_n(\frac{1+b}{b} - x_n).$$

Substituţia $x_n = \frac{1+b}{b} \cdot y_n$ subordonează studiul acestui proces discuţiei din secţiunea 7 asupra funcţiei logistice. Într-adevăr,

$$y_{n+1} = (1+b)y_n(1-y_n)$$

şi pentru $a = 1000.000$ şi $h = 0.003$ obţinem $1 + b = 4$. Procesul nostru iterativ corespunde funcţiei F_4, care potrivit unei observaţii anterioare are un comportament haotic.

Concluzia este că deşi ecuaţia logistică are o formă foarte simplă, dinamica ei nu poate fi reflectată cu acurateţe folosind algoritmii numerici simpli!

Notă. Această lucrare a fost elaborată în cadrul contractului de grant MEN 39683/1998.

Bibliografie

[1] V. I. Arnold, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.
[2] D. F. Bailey, *A Historical Survey of Solution by Iteration*, Math. Magazine, **62** (1989), 155-166.
[3] S. Bassein, *The Dynamics of a Family of One-Dimensional Maps*, Amer. Math. Monthly **105** (1998), 118-130.
[4] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos,* Amer. Math. Monthly, **99** (1992), 332-334.
[5] L. S. Block and W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension,* Lecture Notes in Math., n^0 **1513,** Springer-Verlag, 1992.
[6] P. Collet and J. -P. Eckmann, *Iterated maps on the Interval as a Dynamical System*, Birkhauser-Verlag, 1980.

[7] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems,* Addison-Wesley Publishing Company Inc., 2nd Ed., 1989.

[8] E. Glasner and B. Weiss, *Sensitive dependence on initial conditions,* Nonlinearity, **6** (1993), 1067-1075.

[9] J. Guckenheimer, *Sensitive dependence on initial conditions for one-dimensional maps,* Commun. Math. Phys., **70** (1979), 133-160.

[10] B. P. Hillam, *A generalization of Krasnoselski's Theorem on the real line*, Math. Magazine, **48** (1975), 167-168.

[11] M. Jakobson, *On smooth mappings of the circle onto itself*, Math. U.S.S.R. Sb., **14** (1971), 161-185.

[12] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems,* Cambridge Univ. Press, 1995.

[13] T. -Y. Li and J. A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985-992.

[14] M. Martelli, M. Dang and T. Seph, *Defining Chaos*, Mathematics Magazine, **71** (1998), no. 2, 112-122.

[15] R. May, *Simple mathematical models with a very complicated dynamics*, Nature, **261** (1976), 459-467.

[16] I. Melbourne, M. Dellnitz & M. Golubitsky: *The structure of Symmetric Attractors*, Arch. Rational Mech.Anal. 123 (1993), 73-98.

[17] W. de Melo and S. van Strien, *One Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[18] R. Nielsen, *Chaos and one-to-oneness*, Math. Magazine, **72** (1999), no. 1, 14-21.

[19] C. P. Niculescu, *Fundamentele analizei matematice, vol.* 1: *Analiza pe dreapta reală*. Ed. Academiei Române, 1996.

[20] C. P. Niculescu, *Topological Transitivity and Recurrence as a Source of Chaos.* In vol. *Functional Analysis and Economic Theory* (Y. Abramovich, E. Avgerinos and N. C. Yannelis Eds.), pp. 101-108, Springer-Verlag, 1998.

[21] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste,* vol. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1899.

[22] S. Smale, *Mathematical Problems for the Next Century,* Math. Intelligencer, **20** (1998), no.2, pp. 7-15.

[23] A. N. Şarkovski, *Coexistenţa ciclilor pentru o aplicaţie continuă a dreptei în ea însăşi*, Ukr. Mat. Z. **16** (1964), 61-71. (În lb. rusă)

[24] ***, *Dicţionar de analiză matematică* (R. Cristescu coordonator), Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

Universitatea din Craiova, Str. Al. I. Cuza 13, Craiova 1100
e-mail: tempus@oltenia.ro