CONVEXITATEA IN ACORD CU MEDIA GEOMETRICĂ, VARIANTA MULTIPLICATIVĂ A NOŢIUNII DE FUNCŢIE CONVEXĂ

CONSTANTIN P. NICULESCU

1. Introducere

La Universitatea din Craiova conduc de mai mulţi ani un seminar de *Analiză matematică,* destinat iniţierii studenţilor în cercetarea ştiinţifică de profil. Fac aceasta din convingerea că depistarea şi cultivarea aptitudinilor de cercetare ale tinerilor trebuie făcute chiar de la începutul perioadei studenţiei, iar obişnuinţa reflecţiei asupra unui rezultat matematic trebuie să devină o trăsătură distinctivă a oricărui absolvent al unei facultăţi de matematică. Profesorii mei de la Universitatea Bucureşti, pe care-i numesc aici în ordinea în care i-am cunoscut, Nicolae Dinculeanu, Solomon Marcus, Miron Nicolescu şi Romulus Cristescu, erau străluciţi nu doar prin eleganţa argumentului matematic, dar şi prin comentariile asupra chestiunilor tratate, care conduceau adesea la noi întrebări.

Articolul de faţă ilustrează răspunsul nostru la veşnica întrebare a tinerilor, cum pornim o cercetare matematică?

Definiţia uzuală a noţiunii de funcţie convexă (de o variabilă reală) depinde de prezenţa structurii lui $\mathbb{R}$ ca spaţiu vectorial ordonat. Cum $\mathbb{R}$ este de fapt un corp ordonat, apare natural întrebarea: ce se întâmplă atunci când adunarea se înlocuieşte cu înmulţirea? Locul mediei aritmetice este luat de media geometrică şi apare o clasă de funcţii (numită mai jos a funcţiilor *multiplicativ convexe*) a cărei prezentare sistematică a fost realizată pentru prima dată de autor în cadrul dezbaterilor din sus amintitul seminar.

2. Conceptul de funcţie multiplicativ convexă

Din punct de vedere algebric, subintervalele I ale lui $\mathbb{R}$ pot fi numite *intervale aditive*; proprietatea lor caracteristică este

$$x, y \in I \text{ şi } \lambda \in [0,1] \text{ implică } (1-\lambda)x + \lambda y \in I.$$

Vom numi *interval multiplicativ convex* orice subinterval al lui $(0,\infty)$; pentru orice asemenea interval I are loc implicaţia

$$x, y \in I \text{ şi } \lambda \in [0,1] \text{ implică } x^{1-\lambda}y^{\lambda} \in I.$$

O funcţie $f : I \to J$ (acţionând pe subintervale multiplicativ convexe) se numeşte *funcţie multiplicativ convexă* dacă verifică următoarea proprietate:

$$(M) \qquad x, y \in I \text{ şi } \lambda \in [0,1] \text{ implică } f(x^{1-\lambda}y^{\lambda}) \le f(x)^{1-\lambda}f(y)^{\lambda}.$$

Publicat în *Gazeta matematică*, revistă de cultură matematică, **XVIII** (XCVII), nr. 1, 2000, pp.19-31.

Echivalent, f este multiplicativ convexă dacă şi numai dacă $\log f(x)$ este o funcţie convexă de $\log x$. Vezi Lema 1 de mai jos pentru demonstraţie.

O explicaţie asupra restricţiei considerentelor noastre la clasa funcţiilor acţionând pe intervale multiplicative este necesară. Putem extinde definiţia noţiunii de funcţie multiplicativ convexă pentru funcţiile care acţionează pe subintervale ale lui $[0,\infty)$, cerând verificarea condiţiei (M). Un calcul simplu ne arată că dacă o astfel de funcţie se anulează într-un punct diferit de 0, atunci funcţia respectivă este identic nulă. Rămân deci în atenţie doar funcţiile cu valori în $(0,\infty)$. Scopul acestei lucrări este acela de a investiga clasa funcţiilor multiplicativ convexe ca o sursă de inegalităţi. Considerarea lui 0 în domeniul de definiţie poate fi făcută ulterior, bazat pe argumente de continuitate.

Punctul de plecare al investigaţiei noastre îl constituie existenţa următoarei corespondenţe între funcţiile multiplicativ convexe şi acelea convexe (fapt ce ne va permite dezvoltarea unei paralele la teoria clasică a funcţiilor convexe): *Fie I un interval multiplicativ convex şi fie $f : I \to (0,\infty)$ o funcţie multiplicativ convexă. Atunci*

$$F = \log \circ f \circ \exp : \log(I) \to \mathbb{R}$$

este o funcţie convexă. Reciproc, dacă J este un interval şi $F : J \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă, atunci

$$f = \exp \circ F \circ \log : \exp(J) \to (0,\infty)$$

este o funcţie multiplicativ convexă.

Multe funcţii uzuale, precum exp, sh, ch şi polinoamele cu coeficienţi nenegativi, sunt multiplicativ convexe pe $(0,\infty)$. Alte funcţii, precum

$$\sec,\ \operatorname{cosec},\ \arcsin,\ \operatorname{tg},\ -\log(1-x),$$

se dovedesc a fi multiplicativ convexe pe diferite intervale care includ $(0,1)$. Vezi comentariul după enunţul Propoziţiei 1 de mai jos. Se poate arăta că celebra funcţie Γ a lui Euler este multiplicativ convexă pe $[1,\infty)$.

Multiplicativ convexitatea este o proprietate care intervine în unele enunţuri importante ale matematicii, precum celebra teoremă a celor trei cercuri a lui Hadamard. Termenul ca atare apare însă aici pentru prima dată. În celebra carte a lui Hardy, Littlewood şi Polya [3] dedicată studiului inegalităţilor, ei fac mai multe referinţe asupra funcţiilor multiplicativ convexe, utilizând caracterizarea lor din Lema 1 de mai jos. Amintim aici Teorema 124, pag. 98, din [3], care aparţine lui S. Saks: *Fiind dată o funcţie continuă $f : I \to (0,\infty)$, $\log f(x)$ este o funcţie convexă de $\log x$ dacă şi numai dacă pentru orice $\alpha > 0$ şi orice subinterval compact J al lui I, $x^\alpha f(x)$ îşi atinge maximul pe J într-unul din capetele lui J.* Cititorul interesat de aspectele avansate ale teoriei funcţiilor multiplicativ convexe va găsi informaţii utile în articolul lui P. Montel [7].

Lectura articolului de faţă presupune că cititorul este familiarizat cu teoria funcţiilor convexe la nivelul de prezentare din tratatul lui M. Nicolescu [8]. Faptele de bază sunt dezbătute şi în tratatul nostru [9], iar *Gazeta matematică* a prezentat adesea articole pe tema funcţiilor convexe, pe care cititorul le va găsi probabil utile în adâncirea ideilor discutate aici.

Terminologia şi notaţia sunt în acord cu *Dicţionarul de analiză matematică* [13].

3. Rezultate generale privind funcţiile multiplicativ convexe

Clasa funcţiilor multiplicativ convexe poate fi descrisă ca fiind constituită din acele funcţii f (acţionând pe intervale multiplicativ convexe) cu proprietatea că $\log f(x)$ este o funcţie convexă de $\log x$:

Lema 1. *Fie I un interval multiplicativ convex. O funcţie $f : I \to (0,\infty)$ este multiplicativ convexă dacă şi numai dacă*

$$\begin{vmatrix} 1 & \log x_1 & \log f(x_1) \\ 1 & \log x_2 & \log f(x_2) \\ 1 & \log x_3 & \log f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0$$

pentru orice $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ în I; echivalent, dacă şi numai dacă,

$$f(x_1)^{\log x_3} f(x_2)^{\log x_1} f(x_3)^{\log x_2} \geq f(x_1)^{\log x_2} f(x_2)^{\log x_3} f(x_3)^{\log x_1}$$

pentru orice $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ în I.

Demonstraţie. Acest rezultat este o reformulare imediată a multiplicativ convexităţii, aplicând logaritmul celor doi membri ai inegalităţii (M) şi observând că orice punct cuprins între x_1 şi x_3 este de forma $x_1^{1-\lambda} x_3^{\lambda}$. ■

Corolarul 1. *Orice funcţie multiplicativ convexă $f : I \to (0,\infty)$ admite derivate laterale finite în fiecare punct interior al lui I. În plus, submulţimea punctelor în care f nu este diferenţiabilă este cel mult numărabilă.*

Un exemplu de funcţie multiplicativ convexă, nederivabilă într-un şir de puncte, este

$$\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\log x - n|}{2^n}\right).$$

Conform Corolarului 1, orice funcţie multiplicativ convexă este continuă pe interiorul domeniului de definiţie. În prezenţa continuităţii, multiplicativ convexitatea poate fi reformulată în termeni de medie geometrică:

Teorema 1. *Fie I un interval multiplicativ convex. O funcţie continuă $f : I \to (0,\infty)$ este multiplicativ convexă dacă şi numai dacă*

$$x, y \in I \Rightarrow f(\sqrt{xy}) \leq \sqrt{f(x)f(y)}.$$

Demonstraţie. Necesitatea este evidentă. Suficienţa rezultă din legătura dintre multiplicativ convexitate şi convexitatea uzuală (notată în Introducere) precum şi din faptul binecunoscut potrivit căruia, în prezenţa continuităţii, mid-convexitatea (adică, convexitatea Jensen) este echivalentă cu convexitatea. Vezi [3]. ■

Teorema 1 de mai sus relevă esenţa multiplicativ convexităţii ca fiind *convexitatea în acord cu media geometrică*; într-adevăr, în prezenţa continuităţii, funcţiile multiplicativ convexe sunt precis acele funcţii $f : I \to (0,\infty)$ pentru care

$$x_1, ..., x_n \in I \Rightarrow f(\sqrt[n]{x_1...x_n}) \leq \sqrt[n]{f(x_1)...f(x_n)}.$$

În acest spirit, vom numi o funcţie $f : I \to (0,\infty)$ *multiplicativ concavă* dacă funcţia $1/f$ este multiplicativ convexă şi vom numi funcţia f *multiplicativ afină* dacă f este de forma Cx^{α} pentru un anume $C > 0$ şi un anume $\alpha \in \mathbb{R}$.

O rafinare a noţiunii de convexitate multiplicativă este aceea de *convexitate multiplicativă în sens strict,* concept care în prezenţa continuităţii înseamnă valabilitatea inegalităţilor de forma

$$f(\sqrt[n]{x_1 ... x_n}) < \sqrt[n]{f(x_1)...f(x_n)}$$

exceptând cazul când $x_1 = ... = x_n$. Evident, observaţia noastră privind legătura dintre funcţiile multiplicativ convexe şi acelea convexe în sens uzual admite o versiune "strictă".

O clasă largă de funcţii multiplicativ convexe în sens strict este indicată în următorul rezultat, care sub o formă echivalentă apare în [3], Theorem 177, pag. 125:

Propoziţia 1. *Orice polinom $P(x)$ cu coeficienţi nenegativi este o funcţie multiplicativ convexă pe $(0, \infty)$. Mai general, orice funcţie real analitică*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

cu coeficienţi nenegativi este o funcţie multiplicativ convexă pe $(0, R)$, unde R reprezintă raza de convergenţă a seriei care defineşte funcţia f.

În plus, exceptând cazul funcţiilor Cx^n (cu $C > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$), acestea sunt exemple de funcţii multiplicativ convexe în sens strict.

Exemple de funcţii real analitice verificând ipotezele Propoziţiei 1 sunt:

$$\begin{aligned}
&\exp,\ \mathrm{sh}\ ,\mathrm{ch} \quad \text{pe } (0,\infty) \\
&\mathrm{tg},\ \sec,\ \mathrm{cosec},\ \frac{1}{x} - \mathrm{ctg}\, x \quad \text{pe } (0,\pi/2) \\
&-\log(1-x),\ \frac{1+x}{1-x} \quad \text{pe } (0,1)
\end{aligned}$$

şi arcsin pe $(0, 1]$. Vezi orice tabel matematic de dezvoltări în serie, dar sursa cea mai autorizată în materie de tabele este fără îndoială lucrarea lui I. M. Rîjic şi I. S. Gradştein [11].

Demonstraţie. Datorită continuităţii, este suficient să demonstrăm doar prima afirmaţie. Pentru aceasta, să presupunem că $P(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$, cu $c_n \geq 0$ pentru orice n. În acord cu Teorema 1, avem de arătat că

$$x, y > 0 \Rightarrow \left(P(\sqrt{xy})\right)^2 \leq P(x)P(y),$$

echivalent,

$$x, y > 0 \Rightarrow \left(P(xy)\right)^2 \leq P(x^2)P(y^2).$$

Or, ultima implicaţie este o consecinţă a inegalităţii Cauchy-Schwarz. ■

Observaţii. i) *Dacă o funcţie f este multiplicativ convexă, atunci şi $x^\alpha f(x)$ are această proprietate (oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$).*

ii) În acord cu o observaţie din Introducere, o funcţie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este multiplicativ convexă (şi de două ori derivabilă) dacă şi numai dacă funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \ln f(e^x)$, este convexă (şi de două ori derivabilă). Ţinând cont că o funcţie F de două ori derivabilă este convexă dacă şi numai dacă $F'' \geq 0$, rezultă că *pentru funcţiile f de două ori derivabile, multiplicativ convexitatea este echivalentă cu verificarea condiţiei*

$$x[f(x)f''(x) - f'^2(x)] + f(x)f'(x) \geq 0 \quad \textit{pentru orice} \quad x > 0.$$

Acest fapt, care se poate adapta uşor pentru toate tipurile de intervale multiplicativ convexe, permite regăsirea tuturor exemplelor indicate mai sus ca aplicaţie la Propoziţia 1.

Aplicaţii. Propoziţia 1 este sursa multor inegalităţi interesante. Iată câteva exemple, via Teorema 1:

a) (Vezi D. Miheţ [6]). *Dacă P este un polinom cu coeficienţi nenegativi, atunci*

$$P(x_1)...P(x_n) \geq (P(\sqrt[n]{x_1...x_n}))^n \quad \text{pentru orice } x_1, ..., x_n > 0.$$

Aceste inegalităţi extind inegalitatea clasică a lui Huygens (care corespunde cazului în care $P(x) = 1 + x$) şi complementează o observaţie a lui C. H. Kimberling [4] la inegalitatea lui Cebâşev:

$$(P(1))^{n-1} P(x_1...x_n) \geq P(x_1)...P(x_n)$$

dacă toţi x_k sunt în $(0, 1]$ sau toţi în $[1, \infty)$.

Un enunţ similar este valabil pentru funcţiile real analitice ca în Propoziţia 1 de mai sus.

b) Inegalitatea mediilor este o consecinţă a convexităţii multiplicative în sens strict a funcţiei exp pe $(0, \infty)$.

c) Deoarece arcsin este o funcţie multiplicativ convexă în sens strict pe $(0, 1]$, în orice triunghi (exceptând triunghiurile echilaterale) are loc inegalitatea

$$\sin A \sin B \sin C < \left(\sin \sqrt[3]{ABC}\right)^3.$$

Aceasta îmbunătăţeşte binecunoscutul fapt potrivit căruia

$$\sin A \, \sin B \, \sin C < \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

exceptând cazul când $A = B = C$. În mod similar se poate arăta că

$$\sin \frac{A}{2} \, \sin \frac{B}{2} \, \sin \frac{C}{2} < \left(\sin\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{ABC}\right)\right)^3$$

şi

$$\cos \frac{A}{2} \, \cos \frac{B}{2} \, \cos \frac{C}{2} < \left(\sin\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{(\pi - A)(\pi - B)(\pi - C)}\right)\right)^3$$

exceptând cazul când $A = B = C$.

d) Deoarece funcţia tg este multiplicativ convexă în sens strict pe $(0, \pi/2)$, în orice triunghi neechilateral avem inegalitatea

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \, \operatorname{tg} \frac{B}{2} \, \operatorname{tg} \frac{C}{2} > \left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{ABC}\right)\right)^3.$$

Următoarele două exemple constituie aplicaţii ale Propoziţiei 1 via Lema 1:

e) Dacă $0 < a < b < c$ (sau $0 < b < c < a$, sau $0 < c < a < b$), atunci

$$P(a)^{\log c} P(b)^{\log a} P(c)^{\log b} > P(a)^{\log b} P(b)^{\log c} P(c)^{\log a}$$

pentru orice polinom P cu coeficienţi nenegativi şi grad pozitiv. Aceasta complementează concluzia standard a inegalităţilor de rearanjare (cf. [2], pag. 167): *Dacă* $0 < a < b < c$ *şi* $\deg P > 0$, *atunci*

$$\begin{aligned} P(a)^{\log c} P(b)^{\log b} P(c)^{\log a} &= \inf_{\sigma} P(a)^{\log \sigma(a)} P(b)^{\log \sigma(b)} P(c)^{\log \sigma(c)} \\ P(a)^{\log a} P(b)^{\log b} P(c)^{\log c} &= \sup_{\sigma} P(a)^{\log \sigma(a)} P(b)^{\log \sigma(b)} P(c)^{\log \sigma(c)} \end{aligned}$$

unde σ parcurge mulţimea permutărilor lui $\{a, b, c\}$.

f) Dacă $0 < a < b < c \leq 1$ (sau $0 < b < c < a \leq 1$, sau $0 < c < a < b \leq 1$), atunci

$$\begin{aligned} (\arcsin a)^{\log c} (\arcsin b)^{\log a} (\arcsin c)^{\log b} &> (\arcsin a)^{\log b} (\arcsin b)^{\log c} (\arcsin c)^{\log a} \\ (\operatorname{tg} a)^{\log c} (\operatorname{tg} b)^{\log a} (\operatorname{tg} c)^{\log b} &> (\operatorname{tg} a)^{\log b} (\operatorname{tg} b)^{\log c} (\operatorname{tg} c)^{\log a}. \end{aligned}$$

Caracterizarea integrală a funcţiilor multiplicativ convexe este o altă sursă de inegalităţi:

Propoziţia 2. *Fie* $\varphi : I \to (0, \infty)$ *o funcţie multiplicativ convexă şi continuă şi fie* $f : [a, b] \to I$ *o funcţie integrabilă. Atunci*

$$\varphi\left(e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx}\right) \leq e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log \varphi(f(x))\,dx}.$$

Demonstraţia este imediată folosind sumele integrale şi observaţia care urmează Teoremei 1, potrivit căreia multiplicativ convexitatea este convexitatea în acord cu media geometrică. Funcţia $\varphi \circ f$ este integrabilă potrivit criteriului lui Lebesgue de integrabilitate Riemann; funcţia f ia valori intr-un subinterval compact al lui I, iar funcţia φ este continuă pe orice subinterval compact al lui I. Repetând acest argument, deducem integrabilitatea funcţiei $\log(\varphi \circ f)$. ■

4. Analogul multiplicativ al inegalităţii lui Popoviciu

Tehnica majorizării, care domină studiul clasic al funcţiilor convexe, poate fi uşor adaptată în contextul funcţiilor multiplicativ convexe, utilizând corespondenţa dintre cele două clase de funcţii, aşa cum a fost ea menţionată în Introducere. Ne vom limita aici să enunţăm analogul multiplicativ al celebrei inegalităţi a lui Hardy, Littlewood şi Polya [3] (vezi [12] pentru o remarcabilă demonstraţie inductivă în cazul aditiv):

Teorema 2. Fie $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$ *şi* $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$ *două familii de numere pozitive, dintr-un interval multiplicativ convex I, astfel încât*

$$\begin{aligned} x_1 &\geq y_1 \\ x_1 x_2 &\geq y_1 y_2 \\ &\ldots \\ x_1 x_2 \ldots x_{n-1} &\geq y_1 y_2 \ldots y_{n-1} \\ x_1 x_2 \ldots x_n &= y_1 y_2 \ldots y_n. \end{aligned}$$

Atunci

$$f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n) \geq f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n)$$

pentru orice funcţie multiplicativ convexă $f : I \to (0, \infty)$.

Un rezultat datorat lui H. Weyl (cf. [5]) evidenţiază prototipul de pereche de şiruri care satisface ipotezele Teoremei 2: *Fiind dată o matrice* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *cu* *valorile proprii $\lambda_1, ...\lambda_n$ şi numerele singulare $s_1, ..., s_n$, acestea se pot rearanja astfel încât*

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &\geq ... \geq |\lambda_n|, \quad s_1 \geq ... \geq s_n \\ \left|\prod_{k=1}^{m} \lambda_k\right| &\leq \prod_{k=1}^{m} s_k \quad \text{pentru } k = 1, ..., n-1 \quad \text{şi } \left|\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right| = \prod_{k=1}^{n} s_k \,. \end{aligned}$$

Amintim că *numerele singulare* ale lui A sunt valorile proprii ale modulului său, $|A| = (A^\star A)^{1/2}$; se poate arăta că $s_k = |\lambda_k|$ atunci când matricea A este autoadjunctă. Cu totul remarcabil este faptul (descoperit de A. Horn) că toate exemplele de perechi de şiruri care verifică ipotezele Teoremei 2 se pot obţine exact în acest mod. Vezi [5].

În acord cu Propoziţia 1 şi Teorema 2, cu notaţiile de mai sus,

$$\prod_{k=1}^{n} P(s_k) \geq \prod_{k=1}^{n} P(|\lambda_k|)$$

pentru orice polinom P cu coeficienţi nenegativi.

O altă aplicaţie a Teoremei 2, nouă chiar şi în contextul polinoamelor cu coeficienţi nenegativi, este următoarea:

Teorema 3 (Analogul multiplicativ al inegalităţii lui Tiberiu Popoviciu [10]) . *Fie $f : I \to (0, \infty)$ o funcţie multiplicativ convexă. Atunci*

$$f(x)\, f(y)\, f(z)\, f^3\left(\sqrt[3]{xyz}\right) \geq f^2\left(\sqrt{xy}\right) f^2\left(\sqrt{yz}\right) f^2\left(\sqrt{zx}\right)$$

pentru orice x, y, $z \in I$. În plus, pentru funcţiile multiplicativ convexe în sens strict, egalitatea are loc numai când $x = y = z$.

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, putem presupune că $x \geq y \geq z$. Atunci

$$\sqrt{xy} \geq \sqrt{zx} \geq \sqrt{yz} \quad \text{şi} \quad x \geq \sqrt[3]{xyz} \geq z.$$

Dacă $x \geq \sqrt[3]{xyz} \geq y \geq z$, atunci concluzia dorită rezultă din Teorema 2 aplicată pentru

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad x_2 = x_3 = x_4 = \sqrt[3]{xyz}, \quad x_5 = y, \quad x_6 = z \\ y_1 &= y_2 = \sqrt{xy}, \quad y_3 = y_4 = \sqrt{xz}, \quad y_5 = y_6 = \sqrt{yz} \end{aligned}$$

iar cazul $x \geq y \geq \sqrt[3]{xyz} \geq z$ se tratează similar, considerând

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = x_4 = x_5 = \sqrt[3]{xyz}, \quad x_6 = z \\ y_1 &= y_2 = \sqrt{xy}, \quad y_3 = y_4 = \sqrt{xz}, \quad y_5 = y_6 = \sqrt{yz}\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

În acord cu Teorema 3, aplicată funcţiei exp, pentru orice x, y, $z > 0$ avem

$$\frac{x+y+z}{3} + \sqrt[3]{xyz} > \frac{2}{3}\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}\right)$$

exceptând cazul când $x = y = z$.

Alte inegalităţi omogene se pot obţine extinzând Teorema 3 la şiruri mai lungi şi/sau la combinaţii convexe mai generale.

Notă. Cercetarea ştiinţifică din această lucrare a fost suportată în parte de Grantul 10/1998, finanţat de CNCSU.

Bibliografie

[1] E. Artin, *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
[2] A. Engel, *Problem-Solving Strategies,* Springer-Verlag, 1998.
[3] G. Hardy, J. E. Littewood and G. Polya, *Inequalities,* Cambridge Mathematical Library. 2nd ed., 1952, Reprinted 1988.
[4] C. H. Kimberling, *Some Corollaries to an Integral Inequality*, Amer. Math. Month., **81** (1974), 269-270.
[5] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, 1979.
[6] D. Miheţ, *O extensie a inegalităţii lui Huygens*, Revista Matematică din Timişoara, **1** (1990), no. 2, pp. 6-7.
[7] P. Montel, *Sur le functions convexes et les fonctions sousharmoniques*, Journal de Math., (9), **7** (1928), 29-60.
[8] M. Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. 2, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.
[9] C. P. Niculescu, *Fundamentele analizei matematice*, vol.1: *Analiza pe dreapta reală.* Editura Academiei române, Bucureşti, 1996.
[10] T. Popoviciu, *Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes*, Analele Ştiinţifice Univ. "Al. I. Cuza", Iasi, Secţia Mat., **11** (1965), 155-164.
[11] I. M. Rîjic şi I. S. Gradştein, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1955.
[12] T. Trif, *O nouă demonstraţie a unei inegalităţi a lui T. Popoviciu*, Revista de Matematică din Timişoara, (Seria 4) **1** (1996), no. 2, pp. 6-9.
[13] ***, *Dicţionar de analiză matematică* (R. Cristescu coordonator), Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

Universitatea din Craiova, str. A.I. Cuza 13, Craiova 1100
E-mail address: `tempus@oltenia.ro`