Exista funcţii continue pe multimea numerelor raţionale şi discontinue pe mulţimea numerelor iraţionale?

Constantin P. Niculescu*

Un recent articol al domnului *C. Chiteş* ([2]) aduce în discuţie problema din titlu. Unele observaţii, în special de ordin bibliografic, cred că se impun pentru mai buna informare a cititorilor Gazetei matematice.

Problema a fost soluţionată (negativ) de *Vito Volterra* ([7]) în anul 1881, student fiind la Scuola Normale Superiore di Pisa. Raţionamentul său (cu totul elementar) privea un rezultat general, mult mai cuprinzător. Îl redăm în formularea lui *W. Dunham* ([3]):

Teorema lui Volterra. *Fie* $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *două funcţii astfel că, mulţimile lor de continuitate (*C_f *şi respectiv* C_g*) sunt fiecare dense în intervalul* $[0, 1]$*. Atunci* f *şi* g *au un punct de continuitate în comun.*

Demonstraţie. Notăm $I_0 = [0, 1]$ şi alegem un punct $p_0 \in C_f \cap \operatorname{Int} I_0$ ($\operatorname{Int} I_0$ fiind interiorul lui I_0). Existenţa lui p_0 este asigurată de faptul că C_f este densă în I_0.

Din proprietatea de continuitate a lui f în punctul p_0 deducem (via definiţia cu ε şi δ) existenţa unui subinterval închis $J_0 \subseteq I_0$ (centrat în p_0, de lungime nenulă), pentru care

$$x, y \in J_0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1.$$

Similar, putem alege un punct $q_0 \in C_g \cap \operatorname{Int} J_0$. Utilizând proprietatea de continuitate a lui g în punctul q_0, deducem existenţa unui subinterval închis $I_1 \subseteq J_0$ (centrat în q_0, de lungime nenulă), pentru care :

$$x, y \in I_1 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < 1/2.$$

Procedând inductiv, vom construi un şir descrescător $(I_n)_n$ de intervale închise şi mărginite, fiecare de lungime nenulă şi astfel că:

$$\text{(C)} \qquad |f(x) - f(y)| < 1/2^{n-1}, \quad |g(x) - g(y)| < 1/2^n,$$

oricare ar fi $x, y \in I_n$ şi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Conform principiului intervalelor incluse (vezi de exemplu [6], p. 77), există un punct z în intersecţia tuturor

*Publicat în *Gazeta matematică*, revistă de cultură matematică, **XIX** (XCVII), no. 1, 2001, pp. 40-42.

acestor intervale. Din relaţiile (C) rezultă cu uşurinţă că z este un punct de continuitate atât pentru f cât şi pentru g. ■

Observaţie. Aşa cum remarca *D. Gould* [5], raţionamentul demonstraţiei lui *Volterra* se poate adapta uşor pentru a se trage o concluzie mai puternică:

$C_f \cap C_g$ *este o mulţime nenumarabilă şi densă în* $[0,1]$.

Lucrarea lui *Volterra* a fost motivată de exemplul funcţiei lui *Riemann*, $g : (0,1] \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \text{ este irational} \\ 1/q & \text{dacă } x = p/q,\ p,q \in \mathbb{N}^\star,\ (p,q) = 1 \end{cases}$$

care este continuă în punctele iraţionale şi discontinuă în punctele raţionale ale lui $(0,1]$; vezi faptul că $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ pentru orice $a \in (0,1]$. Prelungind această funcţie prin periodicitate, obţinem o funcţie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă în punctele iraţionale şi discontinuă în punctele raţionale ale lui $\mathbb{R}$. Cum atât $\mathbb{Q}$ cât şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sunt dense în $\mathbb{R}$, teorema lui *Volterra* nu permite existenţa funcţiilor $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue în punctele raţionale şi discontinue în punctele iraţionale ale lui $\mathbb{R}$.

În articolul domnului *Chiteş* [2] inexistenţa funcţiilor F de tipul de mai sus este motivată cu ajutorul teoremei lui *Baire*, de categorie. Deşi nu apare ca referinţă, abordarea sa o reproduce practic pe aceea din binecunoscuta carte de *Contraexemple în analiză*, a lui *B. R. Gelbaum* şi *J. M. H. Olmsted* ([4], pp. 142-144). Cititorul trebuie avizat, de asemenea, că esenţa soluţiei problemei pe care o discutăm în această notă nu este densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ (cum eronat ar putea sugera titlul lucrării [2]) ci simultaneitatea densităţii lui $\mathbb{Q}$ şi a lui $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$!

Profesorul *W. Dunham* (de la Muhlenberg College, USA) îmi menţiona într-un mesaj e-mail că demonstraţia teoremei de categorie dată de *René Baire* ([1]) în 1899 prezintă similarităţi izbitoare cu demonstraţia lui *Volterra*, amintită mai sus. Este de inţeles, căci *Baire* a fost un discipol al lui *Volterra*.

Bibliografie

[1] R. Baire: *Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di matematica pura ed applicata 3 (1899), 1-122.

[2] C. Chiteş: *Aplicaţii ale teoremei de densitate a lui* $\mathbb{Q}$ *în* $\mathbb{R}$, Gazeta Matematică (seria pentru informare ştiinţifică şi perfeţionare metodică) IV (1996), nr. 1, pp. 15 – 22.

[3] W. Dunham: *A Historical Gem from Vito Volterra*, Math. Magazine 63 (1990), nr. 4, pp. 234-237.

[4] B. R. Gelbaum şi J. M. H. Olmsted: *Contraexemple în analiză*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

[5] D. Gould: *Did the young Volterra know about Cantor ?*, Math. Magazine 66 (1993), pp. 246-247.
[6] C. P. Niculescu: *Fundamentele analizei matematice*, vol. 1: *Analiza pe dreapta reală*, Ed. Academiei române, Bucureşti, 1996.
[7] V. Volterra: *Alcune osservasioni sulle funzioni punteggiate discontinue*, Giornale di Matematiche 19 (1881), pp. 76-86. Apare de asemenea în: *Opere Matematiche di Vito Volterra*, vol. 1, pp. 7-15, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1954.

Universitatea din Craiova
str. Al. I. Cuza, nr. 13,
1100 Craiova