Asupra inegalităţilor lui H. Bergström

Aurelia Florea şi Constantin P. Niculescu*

La al 11-lea *Congres al matematicienilor scandinavi*, H. Bergström ([3]) a prezentat o lucrare care cuprindea şi următorul rezultat:

Teoremă. *Fie z_1 şi z_2 două numere complexe şi fie u şi v două numere reale astfel încât $u \neq 0$, $v \neq 0$ şi $u + v \neq 0$. Atunci:*

i) $\dfrac{|z_1 + z_2|^2}{u+v} \leq \dfrac{|z_1|^2}{u} + \dfrac{|z_2|^2}{v}$ *dacă* $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} > 0$;

ii) $\dfrac{|z_1 + z_2|^2}{u+v} \geq \dfrac{|z_1|^2}{u} + \dfrac{|z_2|^2}{v}$ *dacă* $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} < 0$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $vz_1 = uz_2$.

Demonstraţie. Totul rezultă din identitatea:

$$\frac{|z_1|^2}{u} + \frac{|z_2|^2}{v} - \frac{|z_1 + z_2|^2}{u+v} = \frac{|vz_1 - uz_2|^2}{uv(u+v)}. \quad \blacksquare$$

Rezultatul lui H. Bergström este menţionat în celebra monografie a lui *D.S. Mitrinović* ([5], la pag. 315), exact în forma de mai sus. Să notăm că Bergström nu a fost interesat de aplicaţiile elementare ale acestor inegalităţi, ci de utilizarea lor la unele chestiuni de teoria matricilor.

Inegalitatea de la ii) se poate deduce din aceea de la punctul i).

Un caz special al inegalităţii de la punctul i) este atribuit în numerele recente ale Gazetei Matematice lui *T. Andreescu.* (vezi [1], [2] şi [6]). Trecând pe lângă această scăpare de documentare, să observăm că multe alte observaţii din matematică sunt redescoperite periodic.

O aplicaţie elementară tipică este următoarea:

Fie numerele pozitive a, b, c, d şi fie $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(c)$, $\pi(d)$ o permutare a lor. Atunci:

$$\frac{\pi(a)^2 + \pi(b)^2}{a+b} + \frac{\pi(b)^2 + \pi(c)^2}{b+c} + \frac{\pi(c)^2 + \pi(d)^2}{c+d} + \frac{\pi(d)^2 + \pi(a)^2}{d+a} \geq a + b + c + d \qquad (*)$$

şi egalitatea are loc numai dacă $a = b = c = d$.

Într-adevăr, conform punctului i), rezultă că membrul stâng al inegalităţii $(*)$ este mai mare ca:

$$\frac{\left(2\pi(a) + 2\pi(b) + 2\pi(c) + 2\pi(d)\right)^2}{4a + 4b + 4c + 4d} = a + b + c + d.$$

*Publicat în *Gazeta matematică*, revista de cultura matematica pentru tineret, **CVII** (2002), nr. 11, pp. 434-436.

În cazul de egalitate trebuie să avem $\pi(x)y = \pi(y)x$ pentru orice $x, y \in \{a, b, c, d\}$. Acest fapt face ca:

$$x < y \Rightarrow \pi(x) < \pi(y),$$

de unde rezultă că π trebuie să fie permutarea identică. În acest caz trebuie ca $\dfrac{a^2+b^2}{a+b} = a + b$ (şi relaţiile similare, obţinute prin permutări), deci $a = b = c = d$.

Inducţia matematică ne permite să deducem din inegalitatea de la punctul i) următorul fapt (utilizat pentru prima oară de *H. Bohr* în [4]):

Propoziţie. *Dacă* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sunt numere complexe şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sunt numere pozitive astfel încât*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a},$$

atunci

$$a|z_1 + \ldots + z_n|^2 \leq a_1|z_1|^2 + \ldots + a_n|z_n|^2.$$

Aplicaţiile date în lucrările [1], [2], [6] evidenţiază cu prisosinţă importanţa inegalităţii i) în matematica de concursuri. Observaţia lui *L. Panaitopol* ([6]) că i) este de fapt o consecinţă a inegalităţii *Cauchy-Buniakovski* se regăseşte şi în articolul lui H. Bergström.

Propunem cititorilor Gazetei Matematice să studieze implicaţiile acestei inegalităţi în contextul numerelor complexe, urmărind totodată şi posibilele lor aplicaţii în geometrie.

Bibliografie

[1] T. Andreescu şi M. Lascu, *Asupra unei inegalităţi*, Gazeta Matematică, **CVI** (2001), nr. 9-10, pp. 322-326.

[2] M. Becheanu şi B. Enescu, *Inegalităţi elementare ... şi mai puţin elementare*, Ed. Gil, Zalău, 2002.

[3] H. Bergström, *A triangle-inequality for matrices*, C. R. 11e Congrès Math. Scandinaves, Trondheim 1949, pp. 264-267 (1952).

[4] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I*, Acta Math. **45** (1924), pp. 29-127.

[5] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[6] L. Panaitopol, *Consecinţe ale inegalităţii lui Hölder*, Gazeta Matematică, **CVII** (2002), nr. 4, pp. 145-147.

Universitatea din Craiova,
Fac. de matematică-informatică
Str. A. I. Cuza, nr. 13,

Universitatea din Craiova,
Fac. de matematică-informatică
Str. A. I. Cuza, nr. 13,