Cum a fost rezolvată conjectura lui Horn*

Constantin P. Niculescu

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 15A42, 14M15; Secondary 47B07.
Key words and phrases. Matrice autoadjunctă, valoare proprie, varietate Schubert.

Ultimii ani ai secolului al XX-lea au fost anii unor numeroase realizări în Matematică, culminând cu celebra soluţie a Marii Teoreme a lui *Fermat*. Ne propunem să relatăm cazul unei mai puţin mediatizate descoperiri, anume, aceea a soluţiei conjecturii lui *Alfred Horn* [14] din 1962. Conjectura sa consta în aceea că, fiind date trei familii descrescătoare α, β, γ de n numere reale, condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa a trei matrici simetrice $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, cu $C = A + B$, care să aibă spectrele respectiv α, β, γ, este constituită din relaţia de urmă $\sum \alpha + \sum \beta = \sum \gamma$, la care se adaugă un set de inegalităţi liniare între elementele celor trei familii de numere (aşa-numitele inegalităţi ale lui *Horn*). *Horn* a demonstrat conjectura sa în cazul dimensiunilor mici, $n = \{3, 4\}$; cazul $n = 1$ se reduce la verificarea relaţiei de urmă, iar cazul $n = 2$ (descris mai jos) implică o problemă clasică a lui *H. Weyl*. Necesitatea îndeplinirii inegalităţilor lui *Horn* în cazul general a fost demonstrată de *A. H. Dooley*, *J. Repka* şi *N. J. Wildberger* ([5]) în 1993.

Partea de suficienţă a fost demonstrată de *A. A. Klyachko*([15]) în anul 1998 şi, cu o altă abordare, de *A. Knutson* şi *T. Tao* ([16]) în 1999. Ambele soluţii sunt bazate pe geometria algebrică, teoria reprezentărilor şi combinatorică.

Există mai multe lucrări introductive în matematica soluţiei conjecturii lui *Horn*: [3], [7] şi [17]. Urmând [3], dorim să facem accesibile aspectele elementare ale acestei teorii şi iubitorilor de matematică din România.

Materialul de faţă a fost prezentat în cadrul simpozionului *Structuri de ordine în analiza funcţională*, care a avut loc în ziua de 27 iunie 2002, la Casa oamenilor de ştiinţă din Bucureşti. Doresc să mulţumesc şi cu acest prilej domnului academician *Romulus Cristescu* pentru invitaţia de a lua parte la acea reuniune ştiinţifică.

1 Problema lui H. Weyl

Spectrul oricărei matrici autoadjuncte $n \times n$-dimensionale A este constituit din n valori proprii reale $\alpha_l, ..., \alpha_n$ (numărate cu multiplicitatea lor).

*Publicat în *Gazeta matematică*, revistă de cultură matematică, **XX (XCIX)** (2002), nr. 4, pp. 214-226.

Ele pot fi rearanjate descrescător: $\lambda_1^{\downarrow}(A) \geq ... \geq \lambda_n^{\downarrow}(A)$; săgeata $\downarrow$ subliniază ordonarea descrescătoare. În cele ce urmează, valorile proprii vor fi enumerate de regulă în ordine descrescătoare (şi săgeţile vor fi omise).

Dependenţa de A a valorilor proprii este neliniară, dar continuă (vezi Teorema lui *Weyl* de perturbare, demonstrată mai jos). Teorema de reprezentare spectrală a matricilor autoadjuncte ne arată că există o bază ortonormală $(u_k)_k$ a lui $\mathbb{C}^n$ formată din vectori proprii ai lui A, deci în care A diagonalizează:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \cdot, u_k \rangle u_k.$$

Problemă (*H. Weyl* [25]). *Fie A şi B două matrici autoadjuncte din $M_n(\mathbb{C})$, cu suma $C = A+B$. Valorile proprii ale lui A, B, C sunt enumerate descrescător, respectiv*:

$$\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n;\ \beta_1 \geq \ldots \geq \beta_n;\ \gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_n.$$

Care sunt relaţiile care leagă familiile α, β, γ?

Prima relaţie care poate fi menţionată este aceea dintre urme:

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k. \tag{Tr}$$

Alte relaţii se obţin prin metode variaţionale şi sunt inegalităţi liniare.

Range-ul numeric al unei matrici autoadjuncte A este mulţimea convexă $\{\langle Ax, x \rangle ; x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$. În termeni spectrali, ea este intervalul $[\alpha_n, \alpha_1]$. Acest fapt este motivat de continuitatea aplicaţiei $x \to \langle Ax, x \rangle$ şi de relaţiile :

$$\alpha_1 = \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \tag{1}$$

$$\alpha_n = \min_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \tag{2}$$

care se pot imediat verifica cu ajutorul teoremei de reprezentare spectrală.

De aici rezultă că:

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1, \tag{3}$$

$$\gamma_n \geq \alpha_n + \beta_n. \tag{4}$$

Prima relaţie ne arată că $\lambda_1^{\downarrow}(A)$ este o funcţie convexă de A, iar a doua că $\lambda_n^{\downarrow}(A)$ este o funcţie concavă de A. Cele două relaţii nu sunt independente. (Vezi faptul că:

$$\lambda_k^{\downarrow}(-A) = -\lambda_{n-k+1}^{\downarrow}(A) = -\lambda_k^{\uparrow}(A),$$

unde săgeata în sus marchează ordonarea în sens crescător.)

Principiul de minimax al lui Fischer (1905). *Valorile proprii (aranjate descrescător) ale unei matrici autoadjuncte $A \in M_n(\mathbb{C}^n)$ verifică relaţiile*:

$$\alpha_k = \max_{\substack{V \subset \mathbb{C}^n \\ \dim V = k}} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle = \min_{\substack{V \subset \mathbb{C}^n \\ \dim V = n-k+1}} \max_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle,$$

relaţii care extind (1) *şi* (2).

Demonstraţie. Fie $u_1, \dots, u_n$ baza ortonormală care apare în reprezentarea spectrală a lui A. Spaţiul vectorial $W = \mathrm{Sp}\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ este $n-k+1$ dimensional şi deci pentru orice subspaţiu vectorial k-dimensional $V \subseteq \mathbb{C}^n$ există $z \in W \cap V$ cu $\|z\| = 1$. Atunci:

$$\langle Az, z\rangle \in [\alpha_n, \alpha_k],$$

de unde rezultă că:

$$\min_{\substack{x\in V\\ \|x\|=1}} \langle Ax, x\rangle \leq \alpha_k.$$

Rămâne să observăm că pentru $V = \mathrm{Sp}\{u_1, \dots, u_k\}$ această inegalitate devine egalitate. ∎

Principiul lui *Fischer* conduce la *Principiul lui Weyl de monotonie*:

$$A \leq B \text{ implică } \lambda_k^{\downarrow}(A) \leq \lambda_k^{\downarrow}(B).$$

Teoremă (Relaţiile lui *Weyl*). *Avem*:

$$\begin{array}{ll} \gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j & \textit{dacă} \quad i+j-1 \leq n \\ \gamma_{i+j-n} \geq \alpha_i + \beta_j & \textit{dacă} \quad i+j-n \geq 1. \end{array} \tag{W}$$

Demonstraţie. Presupunem că A, B, C au respectiv reprezentările spectrale:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \cdot, u_k\rangle u_k;\; B = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \langle \cdot, v_k\rangle v_k;\; C = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \langle \cdot, w_k\rangle w_k.$$

Suma dimensiunilor spaţiilor vectoriale generate respectiv de familiile de vectori:

$$u_i, \dots, u_n;\; v_j, \dots, v_n;\; w_1, \dots, w_{i+j-1}$$

este:

$$(n-i+1) + (n-j+1) + (i+j-1) = 2n-1.$$

Deci aceste spaţii au un vector x (cu $\|x\| = 1$) în comun. Conform relaţiilor (1) şi (2),

$$\langle Ax, x\rangle \leq \alpha_i;\;\; \langle Bx, x\rangle \leq \beta_j;\;\; \langle (A+B)x, x\rangle \geq \gamma_{i+j-1}.\; ∎$$

Corolar. Au loc inegalităţile: .

$$\alpha_i + \beta_n \leq \gamma_i \leq \alpha_i + \beta_1.$$

Teorema lui Weyl de perturbare. *Pentru orice matrice autoadjunctă A are loc relaţia*:

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_n|\}.$$

Deci:

$$\alpha_i - \|B\| \leq \gamma_i \leq \alpha_i + \|B\|$$

şi, dacă schimbăm pe B cu $B - A$, atunci obţinem relaţia:

$$\max |\alpha_i - \beta_i| \leq \|A - B\|.$$

2 Cazul $n = 2$

Considerăm cazul când $n = 2$ şi spectrele lui A şi B sunt respectiv $\alpha = (4, 2)$ şi $\beta = (2, -2)$. Atunci (Tr) şi formulele lui *Weyl* (W) ne conduc la:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 6, \;\; \gamma_1 \geq \gamma_2, \tag{6}$$

$$\gamma_1 \leq 6, \;\; \gamma_2 \leq 2, \tag{7}$$

ceea ce ne arată că γ este de forma $\gamma = (6 - a, a)$, cu $0 \leq a \leq 2$; clar, $\gamma_1 \geq \gamma_2$. În acest mod, γ nu poate fi (3,3) şi nici $(7, -1)$! Sunt toate perechile $(6 - a, a)$, cu $0 \leq a \leq 2$, realizate (ca spectre de sume)?

Răspunsul este afirmativ şi priveşte un caz mult mai general. Anume, fiind date familiile de numere reale $\alpha_1 \geq \alpha_2$, $\beta_1 \geq \beta_2$, $\gamma_1 \geq \gamma_2$, care verifică inegalităţile lui *Weyl*:

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1, \;\; \gamma_2 \leq \alpha_2 + \beta_1, \;\; \gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2,$$

şi formula (Tr):

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_l + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2,$$

există matrici simetrice $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ care au respectiv spectrele (α_1, α_2), (β_1, β_2), (γ_1, γ_2) şi care verifică relaţia $C = A + B$.

Vom ilustra demonstraţia pe cazul particular considerat la începutul acestui paragraf. Relaţiile (6) şi (7) conduc (în planul $O\gamma_1\gamma_2$) la segmentul XY, unde $X = (6, 0)$ şi $Y = (4, 2)$. vezi Fig. 1.

Figura 1: Segmentul XY.

vom observa că spectrul $\left(\lambda_1^{\downarrow}(C_\theta), \lambda_2^{\downarrow}(C_\theta)\right)$ al matricii:

$$C_\theta = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + R_\theta^* \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} R_\theta$$

se află pe segmentul XY pentru orice $\theta \in [0, \pi/2]$. Într-adevăr, deoarece valorile proprii sunt funcţii continue de elementele matricii, aplicaţia:

$$\theta \to \left(\lambda_1^{\downarrow}(C_\theta), \lambda_2^{\downarrow}(C_\theta)\right)$$

este continuă. Formula de urmă ne arată că imaginea acestei aplicaţii este situată pe dreapta $\gamma_1 + \gamma_2 = 6$. X corespunde lui $\theta = 0$, iar Y corespunde lui $\theta = \pi/2$. Rezultă că fiecare din punctele segmentului XY corespund spectrului unei matrici C_θ cu $\theta \in [0, \pi/2]$.

3 Relaţia de majorizare

Pentru x şi y doi vectori din $\mathbb{R}^n$, definim *relaţia de majorizare slabă* prin formula:

$$x \prec_w y \text{ dacă } \sum_{k=1}^{r} x_k^{\downarrow} \leq \sum_{k=1}^{r} y_k^{\downarrow} \text{ pentru } r = 1, \ldots, n;$$

relaţia de majorizare, notată $x \prec y$, cere, în plus, ca pentru $r = n$ să avem egalitate. Relaţia de majorizare a fost introdusă de *Hardy*, *Littlewood* şi *Polya* (vezi [10]).

Un exemplu este următorul: Fie $p = (p_1, \ldots, p_n)$ vectorul ataşat unei distribuţii probabiliste. Atunci:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec p \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

Caracterizări importante ale relaţiei de majorizare se datoresc lui *I. Schur* şi respectiv lui *R. Rado* (cf. *Marshall* şi *Olkin*, [22]):

$$x \prec y \Leftrightarrow x = Sy \quad \text{pentru o anume matrice } S \text{ dublu stochastică, } n \times n\text{- dimensională.} \tag{S}$$

$$x \prec y \Leftrightarrow x \text{ aparţine anvelopei convexe a celor } n! \text{ puncte care se obţin din } y \text{ prin permutarea componentelor sale.} \tag{R}$$

Dublu stochasticitatea înseamnă că toate componentele sunt nenegative şi sumele pe linii şi pe coloane sunt constant 1.

Două observaţii importante în teoria majorizării sunt următoarele:

Teoremă. *Avem*:

$$x^{\downarrow} + y^{\uparrow} \prec x + y \prec x^{\downarrow} + y^{\downarrow}, \tag{HLP}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema lui I.Schur (1923). *Fie A o matrice autoadjunctă cu diagonala $d = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$ şi spectrul $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Atunci*:

$$d \prec \alpha. \tag{Sch}$$

Demonstraţie. Conform teoremei de reprezentare spectrală, există o matrice unitară $U = (u_{ij})_{i,j}$ astfel încât $A = U^* D U$, unde

$$D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Prin urmare:

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2 \alpha_j,$$

deci $d = S\alpha$, unde S este matricea de componente $s_{ij} = |u_{ij}|^2$. Deoarece U este unitară, se verifică uşor că S este dublu stochastică. $\blacksquare$

Deoarece spectrul este invariant la unitar echivalenţă, din Teorema lui *Schur* rezultă următorul principiu de maxim, remarcat de *Ky Fan*:

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k = \max_{\substack{(x_k)_{k=1}^{r} \\ \text{familie ortonormală}}} \sum_{k=1}^{r} \langle Ax_k, x_k \rangle ,$$

pentru $r = 1, \dots, n$.

Formula precedentă ne arată că sumele $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\downarrow}(A)$ sunt funcţii convexe de A. Acest fapt conduce la inegalităţile lui *Ky Fan* (1949):

$$\sum_{k=1}^{r} \gamma_k \le \sum_{k=1}^{r} \alpha_k + \sum_{k=1}^{r} \beta_k, \text{ pentru } r = 1, \dots, n. \tag{KF}$$

Aceste relaţii pot fi incluse într-o inegalitate de majorizare care extinde la contextul matricilor autoadjuncte inegalitatea (HLP) din dreapta:

$$\lambda(A+B) \prec \lambda^{\downarrow}(A) + \lambda^{\downarrow}(B). \tag{qrHLP}$$

Are loc şi extensia matricială a inegalităţii (HLP) din stânga:

$$\lambda^{\downarrow}(A) + \lambda^{\downarrow}(B) \prec \lambda(A+B). \tag{qlHLP}$$

Ea rezultă din cercetările ulterioare ale lui *V. B. Lidskii* şi *H. Wielandt*.

Teorema lui V. B. Lidskii (1950). *Spectrul lui $A+B$ se află în acoperirea convexă a celor $n!$ puncte*:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_{\pi(1)}, \dots, \beta_{\pi(n)}),$$

unde π parcurge familia permutărilor lui $\{1, \dots, n\}$.

Încercând să demonstreze Teorema lui *V. B. Lidskii*, *Wielandt* a dezvoltat un nou principiu variaţional, care a condus la un enunţ echivalent (vezi (R)).

Teorema lui H. Wielandt (1955). *Fie $1 \le r \le n$ şi fie $1 \le i_1 < \ < \dots < i_r \le n$. Atunci au loc inegalităţile*:

$$\sum_{k=1}^{r} \gamma_{i_k} \le \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i_k} + \sum_{k=1}^{r} \beta_k, \tag{LW}$$

precum şi inegalităţile care se obţin schimbând rolurile lui A şi B.

Demonstraţie (*C. K. Li* şi *R. Mathias*, [18]). Formula de demonstrat se mai scrie:

$$\sum_{k=1}^{r} \left[\lambda_{i_k}^{\downarrow}(A+B) - \lambda_{i_k}^{\downarrow}(A) \right] \le \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{\downarrow}(B).$$

Fără a micşora generalitatea putem presupune că $\lambda_r^{\downarrow}(B) = 0$; înlocuim B cu $B - \lambda_r^{\downarrow}(B) \cdot I$.

Fie $B = B_+ - B_-$ descompunerea lui B în partea pozitivă şi partea negativă. Deoarece $B \leq B_+$, conform principiului lui *Weyl* de monotonie avem $\lambda_{i_k}^{\downarrow}(A + B) \leq \lambda_{i_k}^{\downarrow}(A + B_+)$. Prin urmare, membrul stâng al inegalităţii de demonstrat este majorat de:

$$\sum_{k=1}^{r} \left[\lambda_{i_k}^{\downarrow}(A + B_+) - \lambda_{i_k}^{\downarrow}(A) \right],$$

iar acesta este majorat de:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k^{\downarrow}(A + B_+) - \lambda_k^{\downarrow}(A) \right] = \mathrm{Tr}(B_+).$$

Or, $\mathrm{Tr}(B_+) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k^{\downarrow}(B)$ deoarece $\lambda_r^{\downarrow}(B) = 0$. ■

4 Cazul $n = 3$

În cazul matricilor 3×3 - dimensionale, *A. Horn* ([14]) a evidenţiat 12 relaţii necesare:

- *Formula de urmă* (Tr):

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3;$$

- *Inegalităţile lui Weyl* (W):

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1 & \gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2 & \gamma_2 \leq \alpha_2 + \beta_1 \\ \gamma_3 \leq \alpha_1 + \beta_3 & \gamma_3 \leq \alpha_3 + \beta_1 & \gamma_3 \leq \alpha_2 + \beta_2; \end{array}$$

- *Inegalităţile lui Lidskii-Wielandt* (LW), folosind şi simetria în A şi B:

$$\begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_3 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3; \end{array}$$

- *Inegalitatea lui Horn*:

$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3.$$

Ultima rezultă din (qlHLP), care în cazul $n = 3$ se scrie:

$$(\alpha_1 + \beta_3, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_1) \prec (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Horn ([14]) a demonstrat, de asemenea, că cele 12 relaţii sunt şi suficiente pentru existenţa a trei matrici simetrice $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$, cu $C = A + B$, având ca spectre respectiv familiile:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3; \;\; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3; \;\; \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3.$$

Demonstraţia sa este asemănătoare cazului $n = 2$, cu deosebirea că intersecţiile de semiplane sunt înlocuite cu intersecţiile de semispaţii.

5 Conjectura lui Horn

În afara condiţiei (Tr), toate restricţiile remarcate mai sus sunt inegalităţi de forma :

$$\sum_{k\in K}\gamma_k \le \sum_{i\in I}\alpha_i + \sum_{j\in J}\beta_j, \tag{Ho}$$

unde $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$, $K = \{k_1, \ldots, k_r\}$ sunt submulţimi ale lui $\{1, \ldots, n\}$ de acelaşi cardinal. Numim asemenea triplete (I, J, K) *triplete admisibile* şi notăm cu T_r^n mulţimea lor.

Dacă $r = 1$, condiţia de admisibilitate este:

$$i_1 + j_1 = k_1 + 1.$$

Dacă $r > 1$, condiţia de admisibilitate este:

$$\sum_{i\in I} i + \sum_{j\in J} j = \sum_{k\in K} k + \binom{r+1}{2}$$

şi pentru orice $1 \le p \le r-1$ şi orice $(U, V, W) \in T_p^r$ să avem:

$$\sum_{u\in U} i_u + \sum_{v\in V} j_v = \sum_{w\in W} k_w + \binom{p+1}{2}$$

Conjectura lui Horn. *Fiind date 3 familii descrescătoare α, β, γ de n numere reale, atunci*:

i) *Dacă există matrici autoadjuncte $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$, cu $C = A + B$, a căror spectre să fie respectiv α, β, γ, atunci au loc inegalităţile* (H) *pentru toate tripletele admisibile din T_r^n şi orice $r = 1, \ldots, n$.*

ii) *Formula*(Tr) *şi inegalităţile de la punctul precedent sunt condiţii suficiente pentru existenţa tripletului $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ de matrici autoadjuncte cu proprietăţile specificate la punctul precedent.*

A. Horn a demonstrat această conjectură pentru $n = 3$ şi $n = 4$.

Aşa cum menţionam încă în introducere, punctul i) a fost demonstrat de *A.H.Dooley*, *J. Repka* şi *N. J. Widberger* ([5]). Partea de suficienţă a fost demonstrată de *A.A.Klyachko* ([15]) în anul 1998 şi, cu o altă abordare, de *A.Knutson* şi *T.Tao* ([16]) în 1999.

6 Observaţia cheie în rezolvarea conjecturii lui Horn

Rezolvarea conjecturii lui *Horn* este o problemă de intersecţii. Cazurile $n = 2$ şi $n = 3$ ne sugerează deja această opinie. Ea este întărită de principiul variaţional al lui *Hersch* şi *Zwahlen*, pe care îl reamintim în cele ce urmează. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice autoadjunctă cu descompunerea spectrală:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \cdot, v_k \rangle v_k.$$

Notăm:

$$V_k = \mathrm{Sp}\{v_1, \ldots, v_n\}$$

şi atunci pentru orice familie de indici $I = \{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ are loc relaţia:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j} = \min_{\substack{L \in G_k(\mathbb{C}^n) \\ \dim V_{i_j} \cap L \geq j}} \mathrm{Trace} A P_L, \tag{HZ}$$

unde P_L reprezintă proiectorul ortogonal pe subspaţiul L, iar $G_k(\mathbb{C}^n)$ reprezintă mulţimea subspaţiilor liniare k-dimensionale ale lui $\mathbb{C}^n$.

Demonstraţia principiului variaţional (HZ) este asemănătoare cu aceea a principiului lui $Fischer$.

Mulţimea pe care se ia minimul este un obiect familiar specialiştilor din geometria algebrică, mai precis, este o varietate *Schubert*. Acestea apar ca subvarietăţi $S(I; \mathcal{F})$ ale varietăţilor $G_k(\mathbb{C}^n)$, asociate unei filtrări complete $\mathcal{F} = (V_k)_k$ şi unei familii de indici $I = \{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$:

$$S(I; \mathcal{F}) = \{L \in G_k(\mathbb{C}^n);\ \dim V_{i_j} \cap L \geq j \text{ pentru orice } j = 1, \ldots, k\}.$$

O filtrare completă este un şir crescător de spaţii V_k cu proprietatea că $\dim V_k = k$ şi $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = \mathbb{C}^n$.

Legătura dintre proprietăţile de intersecţie ale varietăţilor *Schubert* şi inegalităţile lui *Horn* este evidenţiată de următoarea observaţie:

Fie A, B, C trei matrici autoadjuncte $n \times n$ - dimensionale astfel că $C = A + B$. Presupunem că ele au reprezentările spectrale:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \cdot, u_k \rangle u_k, \quad B = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \langle \cdot, v_k \rangle v_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \langle \cdot, w_k \rangle w_k.$$

Considerăm filtrările complete:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} = (U_k)_k, \ \textit{unde}\ U_k = \mathrm{Sp}\{u_n, \ldots, u_{n-k+1}\} \\ &\mathcal{G} = (V_k)_k, \ \textit{unde}\ V_k = \mathrm{Sp}\{v_n, \ldots, v_{n-k+1}\} \\ &\mathcal{H} = (W_k)_k, \ \textit{unde}\ W_k = \mathrm{Sp}\{w_1, \ldots, w_k\} \end{aligned}$$

şi mulţimile de indici $I, J, K \subset \{1, \ldots, n\}$, care au acelaşi cardinal. Mulţimea complementară unei mulţimi de indici I este prin definiţie $I' = \{i; n - i + 1 \in I\}$.

Atunci, dacă:

$$S(I, \mathcal{F}) \cap S(I, \mathcal{G}) \cap S(I, \mathcal{H}) \neq \emptyset,$$

tripletul (I, J, K) este admisibil.

Demonstraţia este imediată. Într-adevăr:

$$0 = \mathrm{Tr}(-AP_L - BP_L + CP_L) \geq \sum_{i\in I'} \lambda_i^{\downarrow}(-A) + \sum_{j\in J'} \lambda_j^{\downarrow}(-B) + \sum_{k\in K} \lambda_k^{\downarrow}(C),$$

de unde rezultă (conform (5)) că:

$$\sum_{k\in K} \lambda_k^{\downarrow}(C) \leq -\sum_{i\in I'} \lambda_i^{\downarrow}(-A) - \sum_{j\in J'} \lambda_j^{\downarrow}(-B) \leq \sum_{i\in I} \lambda_i^{\downarrow}(A) + \sum_{j\in J} \lambda_j^{\downarrow}(B). \qquad \blacksquare$$

Completarea soluţiei conjecturii lui *Horn* necesită un aparat matematic evoluat. De aceea recomandăm cititorilor interesaţi de detaliile acestei soluţii citirea prealabilă a articolelor lui *Bhatia* ([3]) şi *Knutson* şi *T. Tao* ([17]). Articolul lui *Fulton* ([8]), indică noile dezvoltări deschise de rezolvarea conjecturii lui *Horn*.

Notă. Această lucrare a fost elaborată în cadrul grantului CNCSIS A3/2002.

Bibliografie

[1] S. Agnihotri and C. Woodward, *Eigenvalues of products of unitary matrices and quantun Schubert calculus*, Math. Res. Lett., **5** (1998), 817-836.

[2] M. Atiyah, *Angular momentum, convex polyhedra and algebraic geometry*, Proc. Edinburg Math. Soc., **26** (1983), 121-138.

[3] R. Bhatia, *Linear Algebra to Quantum Cohomology: The Story of Alfred Horn's Inequalities*, Amer. Math. Monthly, **10**8 (2001), 289-318.

[4] A. S. Buch, *The saturation conjecture* (after A. Knutson and T. Tao), L'Enseignement Math., **46** (2000), 43-60.

[5] A. H. Dooley, J. Repka and N. J. Wildberger, *Sums of adjoint orbits*, Linear Multilinear Algebra, 36 (1993), 79-101.

[6] W. Fulton, *Young Tableaux*, Cambridge Univ. Press, 1997.

[7] W. Fulton, *Eigenvalues of sums of Hermitian matrices* (after A. Klyachko), Seminaire Bourbaki 845, June 1998, Asterisque **252**(1998), 255-269.

[8] W. Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights and Schubert calculus*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (2000), 209-249.

[9] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1991.

[10] G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, 2nd ed., 1952, Reprinted 1988.

[11] U. Helmke and J. Rosenthal, *Eigenvalues inequalities and Schubert calculus*, Math. Nachr., 171 (1995), 207-225.

[12] J. Hersch and B. Zwahlen, Évaluations par défaut pour une somme quelconque de valeurs propres γ_k d'un opérateur $C = A + B$, à l'aide valeurs propre α_i de A et β_j de B, C. R. Acad. Sci. Paris, **254** (1962), 1559-1561.

[13] Alfred Horn, *Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix*, Amer. J. Math., 76 (1954), 620-630.

[14] Alfred Horn, *Eigenvalues of Sums of Hermitian matrices*, Pacific J.Math., **12** (1962), 225-241.

[15] A. A. Klyachko, *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators*, Selecta Math., **4** (1998), 419-445.

[16] A. Knutson and T. Tao, *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products* I: *Proof of the saturation conjecture*, J. Amer. Math. Soc., **12** (1999), 1055-1090.

[17] A. Knutson and T. Tao, *Honeycombs and sums of Hermitian matrices*, Notices of the A.M.S., **48** (2001), no. 2, pp. 175-186.

[18] C.-K. Li and R. Mathias, *The Lidskii-Mirsky-Wielandt theorem-additive and multiplicative versions*, Numer. Math., **81** (1999), 377-413.

[19] V. B. Lidskii, *The proper values of the sum and product of symmetric matrices*, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., **74** (1950), 769-772. (Russian)

[20] B. V. Lidskii, *Spectral polyhedron of the sum of two Hermitian matrices*, Funct. Anal. Appl., **16** (1982), 139-140. (Russian)

[21] D. E. Littlewood and A. R. Richardson, *Group characters and algebra*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, A **233** (1934), 99-141.

[22] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[23] R. C. Thompson and L. Freede, *On the eigenvalues of a sum of Hermitian matrices*, Linear Algebra Appl., **4** (1971), 369-376.

[24] H. Wielandt, *An extremum property of sums of eigenvalues*, Proc. Amer. Math. Soc.,**6** (1955), 106-110.

[25] H. Weyl, *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte lineare partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann., **71** (1912), 441-479.

Universitatea din Craiova
Departamentul de Matematică
Str. A. I. Cuza, nr. 13
1100 Craiova