Concursul studenţesc de matematică ”Traian Lalescu“, Craiova, 9-10 mai 2002

Dumitru Busneag şi Constantin P. Niculescu*

În perioada 9-10 mai 2002 s-a reluat la Craiova, în organizarea Facultăţii de Matematică-Informatică a Universităţii din Craiova, tradiţionalul concurs de matematică pentru studenţi „Traian Lalescu“.

Demarat la începutul anilor ’70, la iniţiativa Facultăţii de Matematică a Universităţii din Bucureşti, acest concurs a avut, din păcate, după 1989 o evoluţie destul de sinuoasă.

La actuala ediţie au participat câte doi studenţi din anii I şi II de la facultăţile de matematică din centrele universitare Braşov, Bucureşti, Cluj, Constanţa, Craiova, Iaşi şi Timişoara.

Juriul concursului a fost prezidat de prof.univ.dr. *Dumitru Buşneag*, decanul Facultăţii de Matematică-Informatică a Universităţii din Craiova şi a avut următoarea componenţă:

– prof.univ.dr. *Ion Doru Albu*, Universitatea de Vest din Timişoara;
– prof.univ.dr. *Cezar Avramescu* , Universitatea din Craiova;
– prof.univ.dr. *Alexandru Dincă*, Universitatea din Craiova;
– prof.univ.dr. *Gheorghe Murărescu*, Universitatea din Craiova;
– prof.univ.dr. *Constantin P.Niculescu*, Universitatea din Craiova;
– prof.univ.dr. *Dumitru Popa*, Universitatea „Ovidius“ din Constanţa;
– prof.univ.dr. *Constantin Zălinescu*, Universitatea „A.I.Cuza“ din Iaşi;
– conf.univ.dr. *Eugen Păltănea*, Universitatea „Transilvania“ din Braşov;
– conf.univ.dr. *Mariana Popescu*, Universitatea din Craiova;
– lect.univ.dr. *Mihai Chiş*, Universitatea de Vest din Timşoara;
– lect.univ.dr. *Radu Miculescu*, Universitatea din Bucureşti;
– lect.univ.dr. *Tiberiu Trif*, Universitatea „Babeş-Bolyai“ din Cluj.

Conţinutul probei de concurs (desfăşurată pe data de 10 mai, pe parcursul a 3 ore) a fost următorul:

Anul I

Problema 1. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel în care $x^4 = x$ pentru orice $x \in R$. Arătaţi că inelul R este comutativ.

M.Chiş (Timişoara)

*Publicat în *Gazeta matematică*, revistă de cultură matematică, **XX (XCIX)** (2002), nr. 3, pp. 158-161.

Problema 2. Să se găsească toate funcţiile continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ având proprietatea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$ pentru orice $x \in [0,1]$.

Gh.Grigore (Bucureşti)

Problema 3. În spaţiul euclidian $\mathcal{E}_3$, raportat la un reper cartezian ortonormat, se consideră familia de plane:

$$\pi_\lambda : (4\lambda^2 - \lambda + 3)x - (3\lambda^2 + \lambda + 4)y + (\lambda^2 - \lambda)z + 24\lambda^2 + \lambda + 25 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că există o dreaptă fixă d conţinută în toate planele familiei $\{\pi_\lambda\}$.

b) Să se determine planul din această familie situat la cea mai mare distanţă de originea reperului şi să se precizeze această distanţă.

c) Fie F fasciculul de plane de axă d. Să se compare mulţimile F şi $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

M.Popescu (Craiova)

Anul II

Problema 1. a) Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă (*Fréchet*) în origine, atunci:

$$\lim_{cr\to 0 r>0} \frac{1}{r^3} \iint_{cx+y\leq r x\geq 0, y\geq 0} |f(x,y) - f(0,0)| xy = \frac{1}{6}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right].$$

b) Folosind, eventual, afirmaţia de la punctul a), să se calculeze:

$$\lim_{cr\to 0 r>0} \frac{1}{r^3} \oint_{T_r} P\text{x} + Q\text{y},$$

unde T_r este triunghiul orientat pozitiv determinat de punctele $(0,0)$, $(r,0)$ şi $(0,r)$, iar $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^2, care au proprietatea că $\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial P}{\partial y}(0,0)$.

D.Popa (Constanţa)

Problema 2. Se consideră sistemul:

$$x_1' = x_n,\ x_2' = x_{n-1},\ \ldots,\ x_n' = x_1. \tag{1}$$

a) Să se arate că singura soluţie periodică a sistemului (1) este cea banală (identic nulă).

b) În cazul $n = 2$, fie $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ o soluţie a sistemului (1). Să se arate că $\lim_{t\to\infty} x(t) = (0,0) \Leftrightarrow x_1(0) + x_2(0) = 0$.

C.Avramescu (Craiova)

Problema 3. a) Fie A un domeniu de integritate şi K corpul său de fracţii. Fie $\varphi : K \to \mathbb{Q}$, astfel încât $\varphi(A^*) \subset \mathbb{N}^*$, $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in K^*$ şi $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Să se arate că (A, φ) este inel euclidian, dacă şi numai dacă oricare ar fi $\alpha \in K$, există $a \in A$, astfel încât $\varphi(\alpha - a) < 1$.

b) Folosind eventual a) să se arate că inelul

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right] = \left\{ m + n\frac{1+\sqrt{11}}{2} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

(în raport cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire) este inel euclidian.

A.Dincă (Craiova)

Problema 4. Să se determine curba $\gamma : \overline{r} = \overline{\rho} = \overline{c} = \overline{c}(s)$ din spaţiul euclidian ε_3 raportat la un reper ortonormat, care are curbura şi torsiunea constante, egale cu $\frac{1}{2}$, ştiind că reperul *Frenet* asociat curbei γ în punctul $M_0(1, 0, 0) \in \gamma$, corespunzător lui $s = 0$, este determinat de vectorii $\overrightarrow{t_0} = \overrightarrow{r_0}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overline{n_0} = \overline{\nu_0}(-1, 0, 0)$, $\overline{b_0} = \overline{\beta_0}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Să se demonstreze apoi că normala principală în fiecare punct al curbei γ este perpendiculară pe o direcţie fixă.

I.D.Albu (Timişoara) şi *Gh. Murărescu* (Craiova)

Pentru soluţiile problemelor şi baremurile de corectare vă rugăm să accesaţi pagina noastră de Internet la adresa: http://www.inf.ucv.ro

S-au obţinut următoarele rezultate:

La anul I:

Premiul I: *Răzvan Iagăr*, Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucureşti;

Premiul II: *Dan Goreac*, Facultatea de Matematică, Universitatea A.I.Cuza“ din Iaşi;

Premiul III: *Mircea Vodă*, Facultatea de Matematică-Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai“ din Cluj;

Menţiuni: *Radu Cebanu*, Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucureşti şi *Constantin Cristian Dinu*, Facultatea de Matematică-Informatică, Universitatea din Craiova.

La anul II:

Premiul I: *Marin Petre*, Facultatea de Matematică-Informatică, Universitatea din Craiova;

Premiul II: *Alexandra Seceleanu*, Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucureşti;

Premiul III: *Vasile Minea*, Facultatea de Matematică-Informatică, Universitatea Ovidius“ din Constanţa;

Menţiuni: *Elena Dumitrică*, Facultatea de Matematică, Universitatea A.I.Cuza“ din Iaşi şi *Ionuţ Alexuc*, Facultatea de Matematică, Universitatea de Vest din Timişoara.

Următoarea ediţie a concursului Traian Lalescu“ va avea loc în anul 2003 la Constanţa.

Universitatea din Craiova,
str. A.I. Cuza, nr. 13,
1100 Craiova