Concursul interjudeţean de matematică Ion Ciolac”

Ediţia a IV-a, Craiova, 22 mai 2004

Constantin P. Niculescu şi Liliana Niculescu[1]

Această ediţie a Concursului „Ion Ciolac” s-a bucurat de participarea a peste 400 de elevi din judeţele Argeş, Dolj, Gorj, Mehedinţi, Olt, Prahova şi Vâlcea. Premiul întâi a fost obţinut de următorii participanţi: Toader Alexandra (clasa a IV-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova), Schneider Valeriu (clasa a V-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova), Pădureanu Victor (clasa a VI-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova), Tuţescu Anca (clasa a VII-a, Colegiul Naţional Fraţii Buzeşti, Craiova), Bucăţea Mădălin (clasa a VIII-a, Şc. gen. 37, Craiova), Duţă Cătălin (clasa a IX-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova), Dinu Lavinia (clasa a X-a, Colegiul Naţional Fraţii Buzeşti, Craiova), Diaconu Andrei (clasa a XI-a, Colegiul Naţional Fraţii Buzeşti, Craiova) şi Ion Marius (clasa a XII-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova). Indicăm în continuare problemele propuse şi schiţa soluţiilor.

Clasa a IV-a

1. Un elev a cumpărat 16 caiete şi 12 creioane pentru care a plătit 312 lei. Un alt elev a cumpărat 24 de caiete şi 18 creioane de acelaşi fel cu colegul său.

   Ce sumă a încasat librăria de la cei doi copii?

   Maria Doran

2. Aflaţi cifrele a, b, c, d din egalităţile:

   (a) $(a-1) \times (a-2) = 20$.

   (b) $\overline{bb} \times b + 295 = 999$.

   (c) $c \times 4 = 9 \times d - 27$.

   Catargena Rada

3.

   (a) Aflaţi numărul natural a ştiind că dacă se împarte 25 la $3 \times a - 7$ se obţine restul 3.

   (b) Completaţi pătratele de mai jos cu numere aşa încât suma numerelor scrise în oricare trei pătrate alăturate să fie aceeaşi.

185		275						219

[1]Publicat în *Gazeta matematică*, revista de cultura matematica pentru tineret, **CIX** (2004), no. 9, pp. 470-475.

***

Clasa a V-a

1. Fie $A \subset \mathbb{N}$, o mulţime având simultan proprietăţile:

   (a) $1 \in A$.

   (b) Dacă $x \in A$, atunci $4x \in A$.

   (c) Dacă $3x + 1 \in A$, atunci $x \in A$.

   Demonstraţi că $\{0; 85; 113; 1024\} \subset A$.

   Ion Rotaru

2. Demonstraţi că oricare ar fi numerele naturale $\overline{aaaa}$ şi $\overline{bbbb}$ scrise în baza 10, are loc inegalitatea

$$\frac{\left(\overline{aa}\right)^2 + a \cdot \overline{aaa}}{4 \cdot \overline{aaaa}} < \frac{\overline{bbbb}}{\left(\overline{bb}\right)^2 + b \cdot \overline{bbb}}.$$

   Dan Mic

3. Aflaţi cel mai mare număr natural par n astfel încât în mulţimea $\{1, 2, 3, ..., n\}$ să existe 668 de numere care se divid cu 2 dar nu se divid cu 6.

   Liliana Niculescu

Clasa a VI-a

1. Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + b$, $b + c$ şi $c + a$ sunt direct proporţionale cu numerele bc, ca şi ab. Demonstraţi că $a = b = c$.

   Nicolae Tălău

2. Aflaţi cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care putem alege semnele $+$ şi $-$ astfel încât

$$\pm 1 \pm 2 \pm ... \pm n = 16.$$

   R.M.T., Dan Comănescu

3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $m\left(\widehat{ADC}\right) = 120°$, $m\left(\widehat{DBC}\right) = 50°$ şi $m\left(\widehat{DAB}\right) = 40°$. Demonstraţi că dacă $(DB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$, atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DAB}$.

   Nicolae Tălău

Clasa a VII-a

1. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{x+4}{5}+\frac{x+5}{6}+...+\frac{x+98}{99}+\frac{x+99}{100}=2^5\cdot 3.$$

Cornelia Piciu

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Notăm cu D, simetricul lui A faţă de B şi cu E,simetricul lui A faţă de C.

   (a) Determinaţi punctul $M \in BC$ pentru care suma $DM + EM$ este minimă.

   (b) După acelaşi procedeu se construiesc punctele $N \in AC$ şi $P \in AB$. Demonstraţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

Ion Rotaru şi Liliana Niculescu

3. În divizia A a campionatului naţional de fotbal sunt 16 echipe. Fiecare echipă joacă cu toate celelalte câte două meciuri, unul acasă şi unul în deplasare. Se acordă 3 puncte pentru victorie, un punct pentru meci egal şi nu se acordă nici un punct pentru înfrângere.

   Care poate fi diferenţa maximă de puncte dintre ocupantele locurilor întâi şi doi la sfârşitul campionatului?

Monica Stanca

Clasa a VIII-a

1. Fie A o mulţime de numere naturale şi $f : A \to A$ o funcţie cu proprietăţile:

   i) există $x_0 \in A$ astfel încât $f(x_0) \neq x_0$;

   ii) $f(m) - f(n) = m - n$ pentru orice $m, n \in A$.

   Demonstraţi că mulţimea A este infinită.

Gazeta Matematică, Mircea Becheanu

2. Considerăm ecuaţiile:

$$\begin{aligned} 1+2+3+...x+y^2 &= z^2, \qquad \mathbf{(1)} \\ 1+2+3+...x+y^3 &= z^2. \qquad \mathbf{(2)} \end{aligned}$$

   Demonstraţi că:

   (a) ecuaţia **(1)** are o infinitate de soluţii (x, y, z) cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$;

   (b) ecuaţia **(2)** are o infinitate de soluţii (x, y, z) cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Claudiu Coandă

3. Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$ iar E şi F, mijloacele muchiilor SA şi SC. Fie $N \in [SB]$ astfel încât $SN = \frac{2}{3}SB$. Planul (ENF) intersectează SD în M iar planul α dus prin AC paralel cu (ENF) intersectează SD în Q. Calculaţi:

   (a) raportul dintre volumul lui $SMEF$ şi volumul lui $SACD$;

   (b) raportul $\frac{SQ}{SD}$.

Claudiu Coandă

Clasa a IX-a

1. Fie ABC, un triunghi care nu este echilateral. Notăm cu A_1, simetricul lui A faţă de B, cu B_1, simetricul lui B faţă de C şi cu C_1, simetricul lui C faţă de A. Fie O şi O_1 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$ iar H şi H_1, ortocentrele acestor triunghiuri. Demonstraţi că OO_1HH_1 este trapez.

***

2. Demonstraţi că nu există funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să îndeplinească simultan următoarele condiţii:

   i) $f(f(x) + y) = x + g(y)$, pentru orice $x; y \in \mathbb{R}$;

   ii) există $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$, şi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ pentru care

$$\left(1 + g^2(\alpha) + g^2(\beta)\right)^n = 1 + ng^2(\alpha) + ng^2(\beta).$$

Raluca Ciurcea

3. Demonstraţi că dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2^k x < \frac{(2^n - 1)\pi}{n \cdot 2^{n+1}} \left(\frac{1}{x} - \text{ctg} 2^n x\right).$$

Iuliana Coravu

Clasa a X-a

1. Mulţimea numerelor naturale nenule se descompune în 2004 progresii aritmetice neconstante care nu au termeni comuni. Demonstraţi că în fiecare dintre aceste progresii, raţia este mai mare sau egală cu primul termen al progresiei.

***

2. Considerăm mulţimea $A = \{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 2$ şi funcţia $f : A \to A$ cu proprietatea $f(f(x)) = 1$ pentru orice $x \in A$.

(a) Demonstraţi că $f(A)$ are cel mult $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ elemente.

(b) Pentru $n = 4$, aflaţi numărul funcţiilor cu proprietatea din enunţ.

(c) Pentru $n = 2004$, aflaţi funcţia cu proprietatea dim enunţ pentru care produsul $f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(2004)$ este maxim.

Liliana Niculescu

3. Fie tetraedrul $OABC$, cu proprietatea $OA \perp OB$, $OB \perp OC$ şi $OC \perp OA$. Arătaţi că dacă

$$OA^2 + CB^2 = 4\left(\mathcal{A}_{\triangle OAB} + \mathcal{A}_{\triangle OAC} - \mathcal{A}_{\triangle OBC}\right)$$

atunci $m\left(\widehat{BAO}\right) + m\left(\widehat{CAO}\right) + m\left(\widehat{BAC}\right) = 90°$.

Nicolae Tălău

Clasa a XI-a

1. Considerăm funcţiile $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietăţile:

i) funcţia f este crescătoare;

ii) funcţia g este continuă;

iii) funcţia $\frac{f}{g}$ este descrescătoare.

Demonstraţi că funcţia f este continuă.

Dorin Popovici

2. Fie matricele $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât Z comută cu X sau cu Y. Demonstraţi că
$$\det(Z + XY) = \det(Z + YX).$$

G.M., Ovidiu Pop

3. O secantă mobilă dusă prin focarul F al parabolei $y^2 = 2px$ intersectează parabola în M şi N. Notăm cu M', N' şi E, proiecţiile punctelor M, N şi F pe directoarea parabolei. Demonstraţi că:

(a) $EM' \cdot EN' = constant$.

(b) MN' trece printr-un punct fix.

(c) $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF} = constant$.

Liliana Niculescu

Clasa a XII-a

1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi a, un element al lui A pentru care există $b \in A$ astfel încât $ab = 1$. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

   (a) $card\,\{x \in A \,|\, ax = 1\} > 1$;

   (b) a nu este inversabil;

   (c) există $c \in A$, $c \neq 0$ astfel încât $ac = 0$.

   ***

2. Determinaţi funcţiile continue $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ln\left(\frac{b^b}{a^a} \cdot e^{a-b}\right)$$

   pentru orice $a, b \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$.

   Virgiliu Schneider

3. Demonstraţi că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, neconstantă şi periodică, iar $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa, atunci graficul lui F nu admite asimptote.

   Liliana Niculescu

Soluţii

Clasa a IV-a

1. 16 caiete şi 12 creioane costă 312 lei, deci 8 caiete şi 6 creioane costă $312 : 2 = 156$ lei.

   24 caiete şi 18 creioane costă $156 \times 3 = 468$ lei. Librăria a încasat $312 + 468 = 780$ lei.

2. (a) $(a-1) \times (a-2) = 4 \times 5$. $a-2$ şi $a-1$ sunt numere consecutive. Rezultă $a = 6$.

   (b) $\overline{bb} \times b = 999 - 295 = 704$, deci $11b \times b = 704$, de unde $b \times b = 64$, deci $b = 8$.

   (c) $c \times 4 = 9 \times (d-3)$. c se împarte exact la 9 şi c este cifră deci $c = 0$ sau $c = 9$.Dacă $c = 0$, rezultă $d = 3$, iar dacă $c = 9$, rezultă $d = 7$.

3. (a) Din teorema împărţirii cu rest, avem $25 = (3 \times a - 7) \times C + 3$, adică $22 = (3 \times a - 7) \times C$, deci 22 se împarte exact la $3 \times a - 7$.Împărţitorul trebuie să fie mai mare decât restul, deci $3 \times a - 7$ poate fi 11 sau 22. Dacă $3 \times a - 7 = 11$ obţinem $a = 6$ iar pentru $3 \times a - 7 = 22$ nu obţinem soluţie.

(b) Notăm numerele necunoscute astfel:

185	a	275	b	c	d	e	219

$185 + a + 275 = a + 275 + b \Longrightarrow b = 185.$
$a + 275 + b = 275 + b + c \Longrightarrow a = c.$
$275 + b + c = b + c + d \Longrightarrow d = 275.$
$b + c + d = c + d + e \Longrightarrow b = e.$
$c + d + e = d + e + 219 \Longrightarrow c = 219.$
Deci obţinem:

185	219	275	185	219	275	185	219

Clasa a V-a

1. $1 \in A \overset{\mathbf{b.}}{\Longrightarrow} 4, 16, 64, 256, 1024 \in A.$
   $1 = 3 \cdot 0 + 1 \in A \overset{\mathbf{c.}}{\Longrightarrow} 0 \in A.$
   $256 = 3 \cdot 85 + 1 \in A \overset{\mathbf{c.}}{\Longrightarrow} 85 \in A.$
   $85 \in A \overset{\mathbf{b.}}{\Longrightarrow} 4 \cdot 85 = 340 \in A.$
   $340 = 3 \cdot 113 + 1 \in A \overset{\mathbf{c.}}{\Longrightarrow} 113 \in A.$

2. Avem: $A = \dfrac{(\overline{aa})^2 + a \cdot \overline{aaa}}{4 \cdot \overline{aaaa}} \dfrac{58a}{1111}$ şi $B = \dfrac{\overline{bbbb}}{(\overline{bb})^2 + b \cdot \overline{bbb}} = \dfrac{1111}{232b}$. Cum a şi b sunt cifre, $A \leq \dfrac{58 \cdot 9}{1111} = \dfrac{522}{1111} < \dfrac{1}{2}$ şi $B \geq \dfrac{1111}{232 \cdot 9} = \dfrac{1111}{2088} > \dfrac{1}{2}$. Rezultă $A < B$.

3. Numărul este de forma $6a$, $6a + 2$ sau $6a + 4$.

Dacă $n = 6a$, în mulţime sunt $3a$ numere divizibile cu 2 şi a numere divizibile cu 6, deci $3a - a = 668$ de unde $a = 334$, deci $n = 6 \cdot 334 = 2004$.

Dacă $n = 6a + 2$, în mulţime sunt $3a + 1$ numere divizibile cu 2 şi a numere divizibile cu 6, deci se obţine ecuaţia $3a + 1 - a = 668$ care nu are soluţie număr natural.

Dacă $n = 6a + 4$, în mulţime sunt $3a + 2$ numere divizibile cu 2 şi a numere divizibile cu 6, deci $3a + 2 - a = 668$, de unde $a = 333$, deci $n = 6 \cdot 333 + 4 = 2002$.

Deci cel mai mare număr natural cu proprietatea cerută este 2004.

Clasa a VI-a

1. $\frac{a+b}{bc}=\frac{b+c}{ca}=\frac{a+c}{ab}$.Eliminând numitorii obţinem: $a^2+ab=b^2+bc=c^2+ac$.

   Presupunem că $a<b$. Din $a^2+ab=b^2+bc$ rezultă $a^2-b^2=b(c-a)$ şi cum $a^2-b^2<0$, rezultă $c<a$, deci $c<b$. Din $b^2+bc=c^2+ac$ rezultă $b^2-c^2=c(a-b)$ ceea ce este imposibil pentru că $b^2-c^2>0$ iar $c(a-b)<0$.

   Analog se ajunge la contradicţie dacă presupunem că $a>b$. Rezultă $a=b$.Înlocuind în relaţia $a^2-b^2=b(c-a)$, se obţine $a=c$.

2. Pentru $n\leq 5$, avem $\pm 1\pm 2\pm ...\pm n\leq 1+2+...+n\leq 1+2+3+4+5=15$ deci nu se realizează condiţia din enunţ. Pentru $n=6$, numărul $\pm 1\pm 2\pm ...\pm 6$ este impar, deci nu poate fi egal cu 16. Pentru $n=7$, avem: $1-2+3-4+5+6+7=16$. Deci, cel mai mic număr natural care îndeplineşte condiţia din enunţ este $n=7$.

3. $m\left(\widehat{ADB}\right)=m\left(\widehat{CDB}\right)=\frac{1}{2}m\left(\widehat{ADC}\right)=60^\circ$. $m\left(\widehat{DBA}\right)=180^\circ-40^\circ-60^\circ=80^\circ$.

   Considerăm punctul T pe prelungirea lui AD (D este între A şi T) şi S pe prelungirea lui AB (B este între A şi S). Avem $m\left(\widehat{TDC}\right)=60^\circ$ şi $m\left(\widehat{SBC}\right)=50^\circ$. ($DC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BDT}$ deci C este egal depărtat de BD şi DT. (BC este bisectoarea unghiului $\widehat{DBS}$ deci C este egal depărtat de BD şi BS. Rezultă că C este egal depărtat de dreptele DT şi BS, adică de laturile unghiului $\widehat{TAS}$, deci se află pe bisectoarea acestui unghi.

Clasa a VII-a

1. Ecuaţia este echivalentă cu: $(x-1)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)=0$. Deci soluţia este $x=1$.

2.

   (a) Fie E', simetricul lui E faţă de BC. Notăm $DE'\cap BC=\{M\}$. Pentru orice punct $N\in BC$, $N\neq M$, avem $DN+NE=DN+NE'>DE'=DM+ME$, deci M este punctul căutat.

   (b) Notăm cu A', L şi T, proiecţiile lui A, D şi E pe BC. Congruenţele $\triangle ABA'\equiv\triangle DBL$, $\triangle ACA'\equiv\triangle ECT$ şi $\triangle LMD\equiv\triangle TME'$ conduc la $BA'=CM$, deci la concluzia că M şi A' sunt simetrice faţă de mijlocul lui (BC). Rezultă $\frac{BM}{MC}=\frac{CA'}{A'B}$. Analog, dacă notăm cu BB' şi CC', înălţimile din B şi C, avem $\frac{CN}{NA}=\frac{AB'}{B'C}$ şi $\frac{AP}{PB}=\frac{BC'}{C'A}$.

Cum înălţimile sunt concurente avem $\frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'C} = 1$, de unde $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$, deci AM, BN, CP sunt concurente.

3. Notăm cu a_i numărul punctelor realizate de echipa de pe locul i, deci avem:

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{16}.$$

Echipa de pe locul întâi a jucat 30 de meciuri deci

$$a_1 \leq 90. \qquad \textbf{(1)}$$

La fiecare meci, cele două echipe participante primesc în total cel puţin 2 puncte (2 puncte la meci egal sau 3 puncte dacă meciul s-a încheiat cu victoria uneia dintre echipe). Echipele situate pe locurile $2, 3, ..., 16$ au jucat între ele $15 \cdot 14$ meciuri, deci

$$a_2 + a_3 + ... + a_{16} \geq 2 \cdot 15 \cdot 14.$$

Cum $15a_2 \geq a_2 + a_3 + ... + a_{16}$, rezultă

$$a_2 \geq 28. \qquad \textbf{(2)}$$

Din **(1)** şi **(2)** rezultă $a_1 - a_2 \leq 62$.

Rămâne de arătat că diferenţa de 62 puncte poate fi atinsă. Într-adevăr acest lucru se realizează când echipa de pe locul întâi câştigă toate meciurile iar celelalte echipe pierd toate meciurile cu echipa câştigătoare şi realizează între ele meciuri egale.

Clasa a VIII-a

1. Din **ii)** avem $f(n) - n = f(m) - m$ pentru orice $m, n \in A$, deci $f(n) - n$ este constantă. Notăm $f(n) - n = k$. Presupunem că mulţimea A este finită. Fie a cel mai mic element şi b, cel mai mare element al lui A.Rezultă $f(a) \geq a$ şi $f(b) \leq b$, adică $a + k \geq a$ şi $b + k \leq b$, de unde $k = 0$. Deci $f(n) = n$, $\forall n \in A$, ceea ce contrazice **i)**.

2. (a) Ecuaţia se scrie: $\frac{x(x+1)}{2} = z^2 - y^2$. Alegem $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ şi obţinem $k(2k+1) = (z-y)(z+y)$. Este suficient să găsim $y, z \in \mathbb{N}$ astfel încât $z - y = k$ şi $z + y = 2k + 1$. Rezultă $z = \frac{3k+1}{2}$, deci k trebuie să fie impar, $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Obţinem $x = 4n + 2$, $y = n + 1$, $z = 3n + 2$ cu $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Căutăm pentru ecuaţia **(2)** o soluţie în care $y = u^2$, $u \in \mathbb{N}$. Relaţia

$$1 + 2 + 3 + ... + x + \left(u^2\right)^3 = z^2$$

se scrie
$$1+2+3+...+x+\left(u^3\right)^2=z^2.$$
Deci pentru ca $\left(x,u^2,z\right)$ să fie soluţie pentru **(2)** este suficient ca $\left(x,u^3,z\right)$ să fie soluţie pentru **(1).** Luăm deci $u^3=n+1$, $(n\in\mathbb{N})$ de unde $n=u^3-1$ $(u\in\mathbb{N}^*)$ şi obţinem soluţii ale lui **(2)** de forma: $x=4\left(u^3-1\right)+2=4u^3-2$, $y=u^2$, $z=3\left(u^3-1\right)+2=3u^3-1$, unde $u\in\mathbb{N}^*$ este arbitrar.

3. Notăm $(ENF)=\pi$.

   (a) EN taie AB în P iar NF taie BC în T. Din teorema lui Menelaos, $\frac{PB}{PA}\cdot\frac{EA}{ES}\cdot\frac{NS}{NB}=1$, de unde $\frac{PB}{PA}=\frac{1}{2}$, adică B este mijlocul lui AP. Analog se arată că B este mijlocul lui CT. Notăm cu R, intersecţia lui BD cu TP. Obţinem $RD=3RB$. Punctele R,N şi M se află în planele π şi (SBD), deci sunt coliniare. Din teorema lui Menelaos, $\frac{MS}{MD}\cdot\frac{RD}{RB}\cdot\frac{NB}{NS}=1$, rezultă $\frac{MS}{MD}=\frac{2}{3}$, deci $\frac{MS}{SD}=\frac{2}{5}$. Obţinem $\frac{V_{[SMEF]}}{V_{[SACD]}}=\frac{SM}{SD}\cdot\frac{SE}{SA}\cdot\frac{SF}{SC}=\frac{1}{4}\cdot\frac{SM}{SD}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$.

   (b) Planele paralele α şi π taie planul (SAD) după drepte paralele, deci $EM\parallel AQ$. Rezultă $\frac{SM}{SQ}=\frac{SE}{SA}=\frac{1}{2}$, deci $SQ=2SM=\frac{4}{5}SD$, de unde $\frac{SQ}{SD}=\frac{4}{5}$.

Clasa a IX-a

1. Fie G, centrul de greutate al triunghiului ABC, deci avem $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Rezultă
$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1} &= \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC_1}=\\ &= \overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0},\end{aligned}$$
deci G este centru de greutate şi pentru triunghiul $A_1B_1C_1$. Cum $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$ şi $\overrightarrow{GH_1}=-2\overrightarrow{GO_1}$, segmentul $[HH_1]$ este transformatul lui $[OO_1]$ prin omotetia de centru G şi raport -2. Rezultă concluzia.

2. Notăm $B=g^2(\alpha)+g^2(\beta)$. Presupunem $B\neq 0$ deci $B>0$ şi arătăm prin inducţie că $(1+B)^n>1+nB$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, ceea ce contrazice relaţia **ii).** Rezultă $B=0$, deci $g(\alpha)=g(\beta)=0$. În **i)** pentru $y=0$, Avem $f(f(x))=x+g(0)$. Folosind această relaţie arătăm că f este injectivă. În **i)** facem $y=\alpha$, apoi $y=\beta$ şi rezultă: $f(f(x)+\alpha)=x+g(\alpha)=x$ şi $f(f(x)+\beta)=x+g(\beta)=x$. Din injectivitate, rezultă $f(x)+\alpha=f(x)+\beta$, deci $\alpha=\beta$, contradicţie!

3. Pentru orice $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ şi $1 \leq k \leq n$, avem:

$$\begin{aligned} \cos 2^k x &= \frac{\sin 2^{k+1} x}{2 \sin 2^k x}, & \textbf{(1)} \\ \frac{1}{\sin 2^k x} &= \mathrm{ctg} 2^{k-1} x - \mathrm{ctg} 2^k x. & \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Folosind inegalitatea lui Cebîşev, avem

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} \cos 2^k x \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2^{k+1} x}{\sin 2^k x} \\ &\leq \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^{n} \sin 2^{k+1} x \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^k x} \right). \end{aligned}$$

Dar

$$\sum_{k=1}^{n} \sin 2^{k+1} x < x \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} = 4 \left(2^n - 1\right) x < \frac{4 \left(2^n - 1\right) \pi}{2^{n+2}}$$

(deoarece $\sin \alpha < \alpha$ pentru $\alpha > 0$) şi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^k x} \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{ctg} 2^{k-1} x - \mathrm{ctg} 2^k x\right) = \mathrm{ctg} x - \mathrm{ctg} 2^n x < \frac{1}{x} - \mathrm{ctg} 2^n x$$

(deoarece pentru $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ avem $\mathrm{tg}\alpha > \alpha > 0$, deci $\mathrm{ctg}\alpha < \dfrac{1}{\alpha}$). Prin urmare $S < \dfrac{\left(2^n - 1\right) \pi}{2^{n+1} \cdot n} \left(\dfrac{1}{x} - \mathrm{ctg} 2^n x\right)$, q.e.d.

Clasa a X-a

1. Presupunem că există o progresie $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel ca raţia ei să fie $r < a_1$. Fie $x = a_1 - r \in \mathbb{N}^*$. Există o progresie $(b_n)_{n \geq 1}$ care îl conţine pe x ca termen. Fir r' raţia acesteia; $r' \neq 1$ (reducere la absurd). Atunci însă numărul $y = x + rr' = a_1 + r(r' - 1)$ aparţine ambelor progresii, contradicţie!

2. (a) Notăm $f(A) = B$ şi $m = card(B)$. Fie $y \in B$. Există $x \in A$ astfel încât $y = f(x)$, deci $f(y) = f(f(x)) = 1$. Deci restricţia lui f la B este constantă, egală cu 1.Din $1 \in f(A)$ rezultă $f(1) = 1$. $A - B$ are $n - m$ elemente şi $f(A - B) = B$ sau $f(A - B) = B - \{1\}$, deci $n - m \geq m - 1$, de unde $m \leq \dfrac{n+1}{2}$. Dacă presupunem $m > \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, rezultă $m \geq \left[\dfrac{n+1}{2}\right] + 1 > \dfrac{n+1}{2}$, contradicţie.

(b) Pentru $n = 4$, $f(A)$ are cel mult două elemente. Dacă $f(A)$ are un singur element, acesta este 1, deci $f(x) = 1$, pentru orice $x \in A$. Dacă $f(A)$ are două elemente, fie $f(A) = \{1, 2\}$. Rezultă $f(1) = f(2) = 1$, $\{f(3), f(4)\} \subset \{1, 2\}$, şi cel puţin unul dintre numerele $f(3)$ sau $f(4)$ trebuie să fie egal cu 2. Sunt posibile 3 cazuri:

i) $f(3) = f(4) = 2$. **ii)** $f(3) = 2$ şi $f(4) = 1$. **iii)** $f(3) = 1$ şi $f(4) = 2$.

Analog, dacă $f(A) = \{1, 3\}$ sau $f(A) = \{1, 4\}$. Deci numărul funcţiilor este $1 + 3 \cdot 3 = 10$.

(c) Avem $1 \in f(A)$. Evident, pentru ca $f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(2004)$ să fie maximă trebuie ca $f(A) \neq \{1\}$. Dacă $b \neq 1$ aparţine imaginii, rezultă $f(b) = 1$, deci cel puţin două dintre valorile funcţiei sunt 1. Rezultă că $f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(2004) \leq 2004^{2002}$. Această valoare se atinge pentru funcţia $f : A \to A$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x \in \{1, 2004\} \\ 2004, & \text{pentru } x \in \{2, 3, 4, ..., 2003\} \end{cases}$$

care, evident îndeplineşte condiţia din enunţ.

3. Notăm $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $m\left(\widehat{BAO}\right) = x$, $m\left(\widehat{CAO}\right) = y$ şi $m\left(\widehat{BAC}\right) = z$.Relaţia din enunţ conduce la $a = b + c$. Avem $\text{tg}x = \dfrac{b}{a}$ şi $\text{tg}y = \dfrac{c}{a}$, deci $\text{tg}(x+y) = \dfrac{\frac{b}{a} + \frac{c}{a}}{1 - \frac{bc}{a^2}} = \dfrac{a^2}{a^2 - bc}$.

$\cos z = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+c^2}} > 0$, deci $z \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\text{tg}^2 z = \dfrac{1}{\cos^2 z} - 1 = \left(\dfrac{a^2 - bc}{a^2}\right)^2$. Cum $a^2 = (b+c)^2 > bc$, rezultă $\text{tg}z = \dfrac{a^2 - bc}{a^2}$, deci $\text{tg}z \cdot \text{tg}(x+y) = 1$. Aceasta se scrie $\text{tg}(x+y) = \text{ctg}z = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$. Cum $x+y$ şi $\dfrac{\pi}{2} - z$ sunt ascuţite, rezultă $x + y = \dfrac{\pi}{2} - z$, deci $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}$.

Clasa a XI-a

1. Demonstrăm că funcţia $h = \dfrac{f}{g}$ este continuă. Fie $x_0 \in (0, \infty)$.Pentru orice $x > x_0$ avem: $0 \leq h(x_0) - h(x) = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} - \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x)} = f(x_0)\left(\dfrac{1}{g(x_0)} - \dfrac{1}{g(x)}\right)$. Deoarece g este continuă,

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x_0)\left(\frac{1}{g(x_0)} - \frac{1}{g(x)}\right) = 0$$

şi potrivit criteriului cleştelui obţinem $\lim_{x \searrow x_0} (h(x_0) - h(x)) = 0$, adică $\lim_{x \searrow x_0} h(x) = h(x_0)$. Analog se arată că $\lim_{x \nearrow x_0} h(x) = h(x_0)$. Deci h este continuă în x_0. Cum x_0 a fost luat arbitrar, h este continuă pe $(0, \infty)$. Deci $f = gh$ este continuă.

2. Fără a micşora generalitatea, putem presupune că Z comută cu X.

   Cazul I: $\det X \neq 0$. Avem $X(Z + YX) = (Z + XY)X$, deci $\det X \cdot \det(Z + YX) = \det(Z + XY) \det X$, de unde rezultă concluzia.

   Cazul II: $\det X = 0$. Considerăm matricea $A_t = X + t \cdot I_n$ unde $t \in \mathbb{C}$. Cum $\det(A_t)$ este un polinom de gradul n în t, el este nul pentru cel mult n numere complexe $t_1, t_2, ..., t_n$. Pentru orice $t \in \mathbb{C} - \{t_1, t_2, ..., t_n\}$, avem $\det(A_t) \neq 0$ şi A_t comută cu Z, deci (conform cazului I) rezultă $\det(Z + A_t Y) = \det(Z + Y A_t)$. **(1)**

   Relaţia **(1)** exprimă faptul că două polinoame (în t) de grad cel mult n iau valori egale pentru o infinitate de valori ale lui t, deci polinoamele sunt egale. În particular, dând lui t valoarea 0, rezultă concluzia.

3. **Soluţie analitică.** Focarul este $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ iar directoarea este $x = -\frac{p}{2}$.

   (a) Notăm $M(x_1, y_1)$ şi $N(x_2, y_2)$. Fie m panta lui MN. Coordonatele lui M şi N verifică sistemul: $\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = m\left(x - \frac{p}{2}\right) \end{cases}$, deci y_1 şi y_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $y^2 - \frac{2p}{m} y - p^2 = 0$. Rezultă $y_1 y_2 = -p^2$ adică $EM' \cdot EN' = p^2$.

   (b) Panta lui OM este $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1}$. Punctul N' are coordonatele $\left(-\frac{p}{2}, y_2\right)$ deci panta lui ON' este $\frac{y_2}{-\frac{p}{2}} = \frac{-\frac{p^2}{y_1}}{-\frac{p}{2}} = \frac{2p}{y_1}$ de unde rezultă MN' trece prin punctul fix O.

   (c) Fie α, măsura unghiului format de Ox cu FM. Avem $MF = MM' = EF + MF \cos\alpha$, deci $MF = \frac{p}{1 - \cos\alpha}$. Analog, $NF = \frac{p}{1 + \cos\alpha}$, deci $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF} = \frac{2}{p}$.

   Soluţie sintetică.

   (a) Din faptul că $MF = M'F$ şi $NF = N'F$ deducem că $m\left(\widehat{MFM'}\right) + m\left(\widehat{NFN'}\right) = 90°$. Cu teorema înălţimii în triunghiul dreptunghic $M'FN'$, avem $EM' \cdot EN' = EF^2$.

(b) Fie Q, intersecţia lui MN' cu Ox. Avem $\dfrac{QF}{NN'} = \dfrac{FM}{MN}$ deci $QF = \dfrac{FM \cdot FN}{MN}$ şi $\dfrac{QE}{MM'} = \dfrac{FN}{MN}$ deci $QE = \dfrac{FM \cdot FN}{MN} = QF$. Rezultă că Q este mijlocul lui EF, deci MN' trece prin O.

(c) Analog se arată că NM' trece prin O. Folosind triunghiuri asemenea, avem:

$$\frac{OF}{MM'} = \frac{NF}{MN} \quad \text{şi} \quad \frac{OF}{NN'} = \frac{MF}{MN}$$

de unde prin adunare, $\dfrac{OF}{MM'} + \dfrac{OF}{NN'} = 1$. Din definiţia parabolei, $MM' = MF$ şi $NN' = NF$, deci $\dfrac{1}{MF} + \dfrac{1}{NF} = \dfrac{1}{OF} = const.$

Clasa a XII-a

1. **„a⟹b”.** Presupunem că a este inversabil. Dar atunci ecuaţia $ax = 1$ are soluţia unică $x = a^{-1}$ deci $card\{x \in A \,|\, ax = 1\} = 1$, contradicţie.

   „b⟹c”. Cum $ab = 1$ şi a nu este inversabil, rezultă $ba \neq 1$. Notăm $c = ba - 1 \neq 0$ şi avem: $ac = a(ba - 1) = a(ba) - a = (ab)a - a = 1 \cdot a - a = 0$.

   „c⟹a”. Fie $c \neq 0$ astfel încât $ac = 0$. Avem $a(b + c) = ab + ac = ab = 1$ deci mulţimea $\{x \in A \,|\, ax = 1\}$ conţine cel puţin două elemente distincte b şi $b + c$.

2. F este continuă, deci are primitive. Fie F, o primitivă. Avem: $F(b) - F(a) = \ln\left(\dfrac{b^b}{a^a} \cdot e^{a-b}\right)$, $\forall\ a, b \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Dăm lui a valoarea 1 şi obţinem $F(b) - F(1) = b \ln b - b + 1$, $\forall b \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Dacă două funcţii continue coincid pe $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$, ele coincid pe $(0, \infty)$. Deci $F(x) - F(1) = x \ln x - x + 1$, $\forall x \in (0, \infty)$. Derivând, obţinem $f(x) = \ln x$. Se arată că $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ verifică relaţia din enunţ.

3. F este definită pe $\mathbb{R}$ şi continuă, deci graficul său nu admite asimptote verticale.Fie T, o perioadă a funcţiei f. Din $F'(x) = F'(x + T)$ rezultă că există o constantă k astfel încât $F(x + T) - F(x) = k$. Construim funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) - \dfrac{kx}{T}$. Avem $g(x + T) = g(x)$. Deci F se scrie sub forma $F(x) = g(x) + ax$ unde g este o funcţie periodică neconstantă, iar $a = \dfrac{k}{T}$. Dacă $a = 0$, F este periodică neconstantă deci nu are asimptote orizontale sau oblice. Fie $a \neq 0$. Funcţia g este mărginită deci $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} ax = \infty$ sau $-\infty$, deci F nu are asimptotă orizontală la ∞. Analog la $-\infty$. Presupunem că există asimptotă oblică, de forma $y = mx + n$. Avem: $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{g(x) + ax}{x} = a$, $n = \lim_{x\to\infty} g(x)$, dar ultima limită nu există, g fiind periodică neconstantă.

Constantin P. Niculescu,
Universitatea din Craiova,
Facultatea de matematică-informatică,
Str. A. I. Cuza 13,
Craiova 200585

Liliana Niculescu,
Colegiul Naţional„Carol I",
Str. Ion Maiorescu 6,
Craiova