Concursul naţional studenţesc „Traian Lalescu“, Constanţa, 7-9 mai 2003

Constantin P. Niculescu*

Ediţia din 2003 a tradiţionalului concurs „Traian Lalescu“ a fost găzduită de Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Ovidius din Constanţa. Au participat studenţi de la Universitatea Bucureşti, Universitatea Ovidius din Constanţa, Universitatea din Craiova, Universitatea Al. I. Cuza din Iaşi şi Universitatea de Vest din Timişoara. Juriul, format din profesorii *Dumitru Buşneag*, *Constantin Ilioi*, *Mihail Megan*, *Constantin P. Niculescu*, *Silviu Sburlan* (preşedinte), *Mirela Ştefănescu* şi *Ioan Vrabie*, a selecţionat următoarele probleme:

Anul I.

1. Fie $\sum\limits_n x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi şi $x_n \to 0$. Notăm $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Să se arate că seria $\sum\limits_n x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(\{s_n)\})_n$ este convergent. (Am notat cu $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.)

2. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor $f : [0,1] \to [0,1]$ cu proprietatea că există două submulţimi nevide şi disjuncte încât $[0,1] = A \cup B$, $f(A) \subseteq B$ şi $f(B) \subseteq A$.

Să se studieze dacă $\mathcal{F}$ conţine funcţii continue, funcţii care admit primitive şi funcţii cu proprietatea lui *Darboux*.

3. În spaţiul euclidian E^3 se consideră, în raport cu un reper ortonormat, dreapta (d) de ecuaţie $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{2}$ şi familia de drepte (d_a) de ecuatie: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-(a+1)}{a}$, pentru $a \in \mathbb{R}$.

i) Să se arate că dreptele (d_a) trec printr-un punct fix.

ii) Să se determine a astfel încât distanţa dintre dreptele (d) şi (d_a) să fie maximă.

4. Două pătrate $ABCD$ şi $ABEF$ au latura comună AB, iar planele lor sunt perpendiculare. Se iau pe diagonalele AC şi BF segmentele egale $AM = BN$. Să se arate că în poziţia în care lungimea segmentului MN este minimă, MN este perpendicular pe BF şi AC şi este paralel cu DE.

5. i) Un grup finit $(G, \cdot)$ se zice raţional dacă $g \sim g^d$ pentru orice $d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(d, |G|) = 1$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ grupul $(S_n, \circ)$ este raţional, iar apoi să se caracterizeze grupurile finite şi comutative care sunt raţionale.

*Publicat în Gazeta matematică, Seria A, **XXII (CI)** (2004), no. 1, pp 52-54.

ii) Să se arate că grupurile finite cu proprietatea că subgrupurile lor proprii au acelaşi număr de elemente sunt comutative.

iii) Pe mulţimea divizorilor naturali ai unui număr natural liber de pătrate să se definească o structură de inel boolean.

Anul II

1. i) Să se arate că polinomul $x^2+x(y-1)+y^2-1$ este ireductibil in $\mathbb{Q}[x,y]$.

ii) Fie numerele prime 269 şi 2003. Cercetaţi ireductibilitatea lor în inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$.

2. Fie funcţia:

$$f(x)=\int_1^\infty \frac{t\ln t}{(1+t^2)^x}dt, \quad x>1.$$

i) Să se arate că f este convexă, descrescătoare şi derivabilă.

ii) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

3. Fie $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, o funcţie continuă şi integrabilă pe $[0,\infty)$.

i) Să se demonstreze că dacă $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ este o soluţie mărginită a ecuaţiei $x''+\varphi(t)\cdot x=0$, atunci $\lim\limits_{t\to\infty} x'(t)=0$.

ii) Să se demonstreze că ecuaţia $x''+\varphi(t)\cdot x=0$ are cel puţin o soluţie nemărginită.

4. Fie Γ o curbă parametrizabilă biregulată, dată prin parametrizarea naturală $r:I\to\mathbb{R}^3$, $r=\overline{r}(s)$ şi fie Γ' curba definită de parametrizarea $r^b:I\to\mathbb{R}^3$, $\overline{r}^b(s)=\overline{r}(s)+\dfrac{1}{k_1(s)}\overline{v}(s)$, unde k_1 este curbura curbei Γ, iar $\overline{v}$ este versorul normalei principale.

i) Dacă torsiunea curbei Γ este identic nulă, să se determine versorul tangentei, versorul normalei principale şi curbura curbei Γ'.

ii) Dacă f este elicea cilindrică dată de parametrizarea $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\overline{r}(s)=(a\cos s, a\sin s, bs)$, $(a>0,\ b\neq 0)$, să se arate că curba Γ' este, de asemenea, o elice cilindrică.

Cea mai bună prestaţie în concurs a avut-o studentul *Răzvan Iagăr* de la Universitatea Bucureşti, care a primit premiul I, ca şi în anul precedent.

Lista completă a premianţilor, soluţiile problemelor din concurs şi baremurile de corectare se află pe site-ul Universităţii Ovidius din Constanţa. Următoarea ediţie a concursului este prevăzută a avea loc în septembrie 2004.

Universitatea din Craiova,
str. A.I. Cuza, nr. 13,
200585 Craiova