Câteva probleme de matematică în aşteptarea unei soluţii

de Constantin P. Niculescu[1]

După ce *Andrew Wiles* a descoperit la finele mileniului trecut demonstraţia vestitei Teoreme a lui *Fermat*, s-a născut în mod firesc întrebarea care vor fi problemele ce vor acapara atenţia matematicienilor în anii următori. Şi, ca o replică la celebra listă a lui *David Hilbert*, prezentată de el la *Congresul internaţional al matematicienilor* de la Paris, din 1900, s-a născut lista de şapte probleme pentru soluţionarea cărora *Institutul Clay* din S.U.A. oferă premii de câte 1 milion de dolari (vezi http://www.claymath.org/millenium). Activitatea actuală, foarte intensă în domeniul cercetării matematice, are în atenţie şi alte probleme tot atât de celebre, precum existenţa progresiilor aritmetice oricât de lungi, formate numai din numere prime. Pentru aceasta din urmă s-a anunţat chiar şi o soluţie. (Vezi articolul lui B. Green şi T. Too, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions* (disponibil pe http://arxiv.org/abs/math.NT/0404188).

Rămâne însă, de văzut dacă demonstraţia lor va fi validată de specialşti!

Într-o conferinţă pe care am ţinut-o la Universitatea Valahia din Târgovişte în decembrie 2004 am dorit să aduc în atenţia matematicienilor români (şi în special a celor tineri), câteva din multele probleme care de decenii îşi aşteaptă soluţionarea. Nici una nu are notorietatea pe care o au problemele de tipul deja menţionat, dar în mod cert vor aduce pe rezolvitorul lor în atenţia matematicienilor de pretutindeni. Şi, fapt deloc neglijabil, sunt şanse mult mai bune de succes, comparativ cu problemele de genul *ipotezei lui Riemann*.

Rezolvarea unor probleme deschise poate fi începutul performanţei matematice la cel mai înalt nivel!

Consultându-mă cu colegii de la diferitele universităţi din ţară, a apărut clar că este bine ca în reviste precum Gazeta Matematică, seria A, să fie menţionate şi probleme care rezistă încă asaltului matematicienilor profesionşti. Revista American Mathematical Monthly are o rubrică specială, care se bucură de o foarte mare atenţie.

Cele cinci probleme menţionate mai jos fac parte dintre sutele de astfel de probleme, şi cred că au meritul de a reliefa cât de complexă este matematica.

1. O problemă diofantică

Este adevărat că:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^\star} n\,|\sin n| = 0?$$

Deoarece π este iraţional, se arată simplu că $(\sin n)_n$ este dens în intervalul $[-1,1]$ şi că nu există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sin n}$. Aceste fapte binecunoscute nu par însă a avea vreo relevanţă în chestiunea de faţă.

Într-adevăr, ea privşte dezvoltarea în fracţie continuă a lui π. Notând această dezvoltare cu $\pi = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ şi cu $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ redusele sale (p_n şi

[1] Publicat în *Gazeta matematică*, seria A, revistă de cultură matematică, **XXIII** (**CII**), no. 4, 2005, pp. 331-335.

q_n sunt naturali relativ primi), atunci:

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \pi\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2};$$

(vezi [1], [2], [3]). Prin urmare:

$$p_n|\sin p_n| = p_n|\sin(p_n - q_n\pi)| < p_n|p_n - q_n\pi| < \frac{p_n}{a_{n+1}q_n}$$

şi cum $\dfrac{p_n}{q_n} \to \pi$, rezultă că $\inf\limits_{n\geq 1} n|\sin n| = 0$ dacă şirul $(a_n)_n$ nu este mărginit. Aceasta însă este o problemă deschisă. Ea se poate formula şi astfel:

Este adevărat că pentru orice $\varepsilon > 0$ există numere naturale m şi n astfel încât $|\pi - \dfrac{m}{n}| < \dfrac{\varepsilon}{n^2}$?

Din comentariile făcut în [4] rezultă că cel mai bun rezultat care se ştie este că $\inf\limits_{n\geq 1} n|\sin n| < \dfrac{\pi}{20776}$ (consecinţă a faptului că $a_{431} = 20776$).

Bibliografie

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to Theory of Numbers*, 4th Ed., Oxford, London, 1965.

[2] A. I. Hincin, *Fracţii continue*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1960.

[3] S. Lang, *Introduction to Diophantine Approximations*, Addison-Wesley, Reading, 1966.

[4] Problem 5849, *An unsolved approximation question for* π, Amer. Math. Monthly, **80** (1973), 701.

[5] Problem 5983, *Rational Approximation to* $\sqrt{2}$ *and* π, Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 293-294.

2. Problema iterării funcţiei $3x + 1$

Considerăm şirul recurent:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{dacă} \quad a_n \quad \text{este par} \\ 3a_n + 1, & \text{dacă} \quad a_n \quad \text{este impar.} \end{cases}$$

Pentru care valori pozitive ale lui a_1 este adevărat că există indici n astfel încât $a_n = 1$?

Probabil ca răspunsul să fie pozitiv pentru orice $a_1 > 0$, dar până în prezent nu s-a conturat un argument. Istoricul şi evoluţia acestei probleme (atât de simplă la prima vedere) se pot afla din următoarele articole.

Bibliografie

[1] R. Guy, *Dont try to solve these problems*, Amer. Math. Monthly, **90**(1983), 35-41.

[2] R. Nowakowski, *Unsolved Problems*, Amer. Math. Monthly, **106**(1996), 959-962.

3. Ecuaţia funcţională $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *o funcţie care este diferenţiabilă în raport cu fiecare variabilă (atunci când cealaltă este fixată). Presupunem că* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *pe* $\mathbb{R}^2$*. Există, în mod necesar, o funcţie* g *de o singură variabilă astfel încât* $f(x, y) = g(x + y)$?

Propusă ca Problem 5871 în Amer. Math. Monthly, **79**(1972), p. 780, de către *P. R. Chernoff*, a fost curând clar că „soluţia" originală era incorectă. Câţiva ani mai târziu, *A. M. Gleason* şi *H. F. Royden* (vezi Amer. Math. Monthly, **82**(1975), no. 5, pp. 530-531) au demonstrat că răspunsul este într-adevăr DA dacă se face presupunerea suplimentară că f este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

4. Proprietatea de punct fix pentru aplicaţiile neexpansive

Fie C *o submulţime slab compactă convexă şi nevidă a unui spaţiu Banach* E*. Are orice aplicaţie neexpansivă* $T : C \to C$ *un punct fix?*

Aplicaţiile neexpansive sunt aplicaţiile astfel că $||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$ pentru orice $x, y \in C$. *W. A. Kirk* ([2]) a arătat, în 1965, că răspunsul la problema de mai sus este afirmativ dacă în plus C are structură normală (adică dacă orice submulţime convexă $S \subseteq C$, cu diametru $d > 0$, conţine un punct x astfel că $\sup\{||x - y|| : y \in S\} < d$. Acest fapt poate fi dedus şi din demonstraţia lui *F. E. Browder*([1]) pentru cazul când E este uniform convex. În cazul spaţiilor uniform convexe, orice submulţime convexă şi slab compactă are structură normală, dar în cazul general al spaţiilor *Banach* acest fapt nu mai este valabil. Un raport (cu o bună bibliografie) privind această problemă se află în articolul [3].

Bibliografie

[1] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **54**(1965), 1041-1044.

[2] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 1004-1006.

[3] S. Reich, *The fixed point property for non-expansive mappings*, Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 266 - 268.

5. O problemă de cea mai bună aproximare

Una dintre noţiunile importante în matematică este aceea de cel mai bun aproximant.

Se ştie că dacă H este un spaţiu *Hilbert* (adică un spaţiu vectorial normat complet în care norma este asociată unui produs scalar) şi C este o submulţime convexă şi închisă a lui H, atunci pentru orice element $u \in H$ există şi este unic un element $P_C(u) \in C$ cu proprietatea că:

$$||u - P_C(u)|| = \inf_{c \in C} ||u - c||.$$

Cu alte cuvinte, fiecare u admite o cea mai bună aproximaţie cu elemente din C, iar aceasta este unică. Spre exemplu, dacă $H = \mathbb{R}^2$ şi C este planul xOy, atunci:

$$P_C((x, y, z)) = (x, y, 0),$$

adică $P_C((x, y, z))$ este proiecţia ortogonală a punctului (x, y, z) pe planul xOy.

Este situaţia de mai sus definitorie pentru submulţimile convexe şi închise? Cu alte cuvinte, dacă C este o submulţime a lui H cu proprietatea că pentru orice element $u \in H$ există şi este unic un element $P_C(u) \in C$ cu proprietatea că:

$$||u - P_C(u)|| = \inf_{c \in C} ||u - c||$$

este mulţimea C convexă şi închisă? Clar, mulţimea C trebuie să fie închisă. Nu se ştie însă dacă ea trebuie să fie şi convexă. *L. N. H. Bunt* a demonstrat, în 1934, că răspunsul este afirmativ în cazul când spaţiul H este finit dimensional. Ulterior, matematicianul american *V. Klee* a ridicat problema dacă şi în cazul infinit dimensional este necesar ca C să fie convexă. În prezent aceasta este una dintre cele mai importante chestiuni nerezolvate în teoria aproximării.

Informaţii suplimentare se află în bibliografia de mai jos.

Bibliografie

[1] J.-B. Hiriart-Urruty, *Ensembles de Tchebychev vs ensembles convexes: l'etat de la situation vu via l'analyse non lisse*, Ann. Sci. Math. Québec, **22**(1998) 47-62.

[2] C. P. Niculescu and L.-E. Persson, *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach*, Springer-Verlag, 2005.

Desigur că lista problemelor deschise poate continua. Ele sunt provocări ale minţii omeneşti, care într-un viitor mai apropiat sau mai depărtat îşi vor afla în mod cert soluţia.

Universitatea din Craiova
Facultatea de matematică-informatică
str. Al. I. Cuza 13, Craiova 200585