Observaţii asupra simplificărilor frauduloase

DE CONSTANTIN P. NICULESCU ŞI ANDREI VERNESCU[1]

Dedicat domnului academician Solomon Marcus, cu prilejul împlinirii vârstei de 80 de ani.

În cartea „ Şocul matematicii“ ([2]), a domnului academician *Solomon Marcus*, la pag. 318–320 s-au semnalat, poate pentru prima dată în mod sistematic în literatura matematică românească, simplificările frauduloase, adică efectuate fără a respecta regulile corecte de calcul, dar care conduc totuşi la rezultate corecte. De exemplu:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4};\quad \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5};\quad \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5};\quad \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}.$$

unde am notat prin „tăierea“ oblică de la dreapta sus către stânga jos „factorul“ care se simplifică.

Este arătat, în carte, că (cităm): „Această repetare a unui fenomen care părea să fie produsul unei întâmplări foarte puţin probabile ne dă de bănuit că aici s-ar ascunde un fapt matematic interesant“. Este apoi dată explicaţia matematică a fenomenului şi sunt prezentate şi alte aspecte.

Matematica oferă numeroase exemple de formule cărora simplificările frauduloase le conferă un suport intuitiv. Un prim exemplu ni-l oferă formula:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\quad (\text{cu } \beta\neq 0),$$

unde atât sin cât şi x par a se fi simplificat, dar unde adevărata simplificare este aceea oferită de limita fundamentală $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}\right)\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Calculul derivatelor funcţiilor compuse ne oferă un foarte bun exemplu de simplificare literală care poate fi argumentată: *Dacă* $y=y(x)$ *şi* $x=x(t)$ *sunt funcţii derivabile atunci şi funcţia* $y=y(x(t))$ *este derivabilă şi*:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Din experienţa noastră la catedră am constatat că elevii şi studenţii adoptă foarte uşor formulele bazate pe astfel de simplificări şi chiar au tendinţa de a

[1]Publicat în *Gazeta matematică*, seria A, revista de cultura matematică, **XXIII** (**CII**), no. 4, 2005, pp. 351-354.

generaliza, scăpând din vedere că *simplificările de acest tip nu sunt un argument, ci o consecinţă* (a unor raţionamente riguroase, bine elaborate).

Vom prezenta aici un exemplu discutat cu studenţii de anul I de la facultăţile noastre.

Pornim de la formula schimbării de bază în calculul logaritmilor, care ne conduce la formula:

$$\frac{\log_a M}{\log_a N} = \frac{\log M}{\log N} = \frac{\log_b M}{\log_b N}$$

valabilă pentru orice numere $M, N > 0$, $N \neq 1$, $0 < a \neq 1$ şi $0 < b \neq 1$. Apare aici faptul că fracţia $\dfrac{\log_a M}{\log_a N}$ nu depinde de baza a (care în acest context se poate simplifica). Se poate simplifica şi logaritmul?

Tehnic, această problemă înseamnă stabilirea condiţiilor pe care trebuie să le îndeplinească două numere reale şi distincte $x, y \in (0,1) \cup (1, \infty)$ astfel ca:

$$\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{x}{y}, \tag{1}$$

sau, echivalent:

$$x^y = y^x. \tag{2}$$

Vom indica soluţia lui *L. Euler* a ecuaţiei (2). Punctul de plecare este observaţia că deoarece avem de a face cu o ecuaţie simetrică, putem căuta doar soluţiile care verifică ordonarea $x < y$. Punem:

$$t = \frac{y}{x}$$

şi atunci $t > 1$. Ecuaţia (2) devine:

$$x^{tx} = (tx)^x$$

şi deoarece $x \neq 0$, de aici rezultă că $x^{t-1} = t$, deci:

$$\begin{cases} x = t^{1/(t-1)} \\ y = t^{t/(t-1)}. \end{cases} \tag{3}$$

Cum $t > 1$, putem face parametrizarea (3) mai relevantă observând că $t = 1 + \dfrac{1}{s}$ pentru un anume $s > 0$. Rezultă astfel că soluţiile netriviale $x < y$ ale ecuaţiei (1) sunt:

$$x = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s, \quad y = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1}, \tag{4}$$

unde parametrul s descrie intervalul $(0, \infty)$. Remarcabil este faptul că soluţiile x şi y sunt separate de numărul e.

Geometric, ecuaţia (2) defineşte o curbă $\mathcal{E}$ în formă implicită, pentru care formulele (4) oferă o explicitare. Proprietăţile aritmetice ale acestei curbe au fost amplu investigate de-a lungul timpului.

Astfel, singurul punct din plan cu ambele coordonate întregi prin care trece $\mathcal{E}$ este acela de coordonate $x = 2$ şi $y = 4$ (cazul când $s = 2$). Acest fapt este amintit de *W. Sierpiński* ([4], pp 171-172).

Punctele din plan cu ambele coordonate raţionale prin care trece $\mathcal{E}$ sunt acelea de componente:

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. ([4], pp. 171-172). O demonstraţie simplă a fost dată în [1] (reprodusă în [5], pp. 248-250). În fine, punctele cu ambele componente numere algebrice sunt acelea care corespund valorilor raţionale ale parametrului s (vezi [3] sau [5] pp. 250-251, unde se află expusă abordarea lui *Ş. Buzeteanu*).

Să notăm, în final, că rezolvarea ecuaţiei (2) conduce şi la rezolvarea ecuaţiei:

$$u^u = v^v,$$

care se obţine prin transformarea $u = \dfrac{1}{x}$ şi $v = \dfrac{1}{y}$.

Bibliografie

[1] S. Man-Keung, *An Interesting Exponential Equation*, The Mathematical Gazette, **60** (1987), Note 413, pp. 213-215.

[2] S. Marcus, *Şocul matematicii*, Editura Albatros, Bucureşti, 1987.

[3] D. Sato, *Algebraic Solutions of* $x^y = y^x$ $(0 < x < y)$, Proceedings of Amer. Math. Soc., vol. **31** (1972) nr. 316.

[4] W. Sierpiński, *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969.

[5] A. Vernescu, *Numărul e şi matematica exponenţialei*, Editura Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 2004.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Matematică-Informatică
Str. Al. I. Cuza, nr. 13
200585 Craiova

Universitatea Valahia din Târgovişte
Catedra de Matematică
Bd. Unirii, nr. 118
130082 Târgovişte