Matematica între demonstraţie şi algoritmi[1]

de Constantin P. Niculescu

Abstract. Matematica rezolvă o gamă variată de probleme puse de practică, elaborând teorii abstracte şi algoritmi. Aceşti algoritmi sunt preluaţi de către informaticieni în crearea unor produse care, prin uşurinţa cu care pot fi manipulate, ne pot induce impresia greşită că matematica nu mai este necesară (mai rău, că de acum înainte elevii se pot dispensa de ea). În realitate, societatea modernă este societatea bazată pe cunoaştere şi competiţie, iar rolul cunoaşterii matematicii devine tot mai important.

1. Introducere

Caracteristic societăţii contemporane este utilizarea a tot mai mult produse care încorporează tehnica avansată: telefoane cu funcţii multiple, automobile cu computer la bord şi sistem GPS, notebookuri cu capabilităţi de staţie grafică etc. Sunt puţini însă cei care conştientizează imensul efort de cercetare ştiinţifică care a condus la astfel de produse şi încă şi mai puţini cei care înţeleg ce rol important au matematicile în progresul ştiinţific şi tehnologic actual.

Încă din antichitate, matematica s-a dezvoltat atât pe linia unei nevoi proprii de elaborare a teoriilor care o fundamentează, cât şi prin extinderea ariei aplicaţiilor ei concrete.

Astfel, datorăm Greciei antice importanţa noţiunii de demonstraţie, precum şi prima încercare de axiomatizare a geometriei. Dar tot atunci s-au pus bazele a ceea ce azi noi numim *matematica aplicată*. Urmând spiritul ştiinţific al celebrelor „Elemente“ ale lui *Euclid*, *Arhimede* a realizat prima modelare matematică a unui fenomen din mecanică, demonstrând celebra lege a pârghiei (cunoscută empiric cu mult înaintea sa de către constructorii piramidelor).

Un timp îndelungat învăţământul matematic a stat sub semnul marilor creaţii ale antichităţii, dar începând cu secolul XVIII marile progrese ale tehnicii au impus crearea unor noi discipline precum calculul diferenţial şi integral, teoria probabilităţilor, ecuaţiile fizicii matematice ş.a.m.d. Ele au reliefat, cu pregnanţă, rolul algoritmilor ca interfaţă între matematică şi ştiinţele aplicate.

În zilele noastre este clar că demonstraţia matematică îşi păstrează importanţa, dar matematica nu poate fi redusă doar la atât. Valoarea creaţiei matematice nu poate fi apreciată decât prin prisma impactului ei, fie el teoretic sau practic. Probabil că, în viitorul imediat, vom asista atât la tendinţa matematicienilor de a păstra segmentul calculului ştiinţific (care presupune algoritmi transformaţi în programe software) cât şi tendinţa practicienilor din diferitele ştiinţe aplicate de a-şi însuşi elemente din matematică, apte de a da suport teoretic algoritmilor creaţi de ei.

Prin urmare, matematica utilizată în aplicaţii va deveni tot mai sofisticată, iar lumea implicată în manipularea unor teorii matematice, tot mai numeroasă.

---

[1] 2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A18, 26A51, 26B25; Secondary 91B02.

Key words and phrases. Teorema lui Fermat, condiţiile Karush-Kuhn-Tucker, punct critic.

Participarea autorului la Conferinţa SSMR de la Lugoj a fost sprijinită de grantul CNCSIS 80/2005. (N.A.)

Publicat în *Gazeta matematică* seria A, **XXIV** (**CIII**), no. 1, 2006, pp. 2-13.

Vom discuta aceste aspecte pe baza unor fapte din matematica zilelor noastre şi prin prisma propriei experienţe.

2. Ce ne învaţă ecuaţiile algebrice

Istoriceşte, un rol important în dezvoltarea matematicii l-a avut rezolvarea ecuaţiilor. Iată două cazuri simple, dar pline de semnificaţie pentru evoluţia noţiunii de număr:

$$2x + 5 = 3 \tag{2.1}$$
$$x^2 = 8. \tag{2.2}$$

În primul caz suntem conduşi la numerele întregi negative. În vreme ce numerele raţionale pozitive sunt cunoscute de circa 4000 de ani, numerele negative, ca şi numărul zero, au fost introduse în urmă cu numai 1000 de ani. În şcoala lui *Pitagora* însă, se cunoştea că soluţia pozitivă a ecuaţiei (2.2), notată $\sqrt{8}$, este un număr iraţional. Existenţa numerelor iraţionale precum $\sqrt{8}$ era legată de construcţiile geometrice ($\sqrt{8}$ este diagonala pătratului de latură 2) şi deci a fost repede acceptată.

O caracteristică importantă a matematicii este generalizarea. Cazul general al ecuaţiilor de gradul 2:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

(unde $a \neq 0$) este bazat pe observaţia că:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

de unde rezultă binecunoscutele formule pentru rădăcini:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se observă că $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ şi deci:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{şi} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \tag{2.3}$$

Formulele (2.3) sunt un caz particular al celebrelor formule ale lui *Viéte*. Ele ne dau posibilitatea să calculăm uşor expresiile simetrice de rădăcini (precum $x_1^4 + x_2^4$), fără a şti concret valorile lui x_1 şi x_2.

A urmat apoi momentul rezolvării ecuaţiilor de gradul al treilea, urmat imediat de acela al ecuaţiilor de gradul al patrulea, prin celebrele formule ale lui *Cardano-Tartaglia* şi respectiv ale lui *Ferrari* (ambele publicate în 1545 în cartea „Ars magna“ a lui *Cardano*). Cu acest prilej s-a văzut că numărul de soluţii ale unei ecuaţii de gradul 3 (şi respectiv 4) este 3 (respectiv 4) dacă luăm în consideraţie şi rădăcinile complexe, iar numărătoarea ţine seama de multiplicităţi. Să notăm, totuşi, că numerele complexe au fost legitimate mai târziu, odată cu interpretarea dată de *Wessel* a punctelor din plan ca afixe ale numerelor complexe.

Succesul rezolvării ecuaţiilor de grad ≤ 4 nu s-a repetat şi pentru cele de grad ≥ 5. (Vezi celebrul rezultat al lui *N. Abel* din 1826 privind imposibilitatea rezolvării în radicali a ecuaţiilor algebrice de grad ≥ 5 (urmat de teoria lui *Galois*, care lămurea ce ecuaţii algebrice pot fi totuşi rezolubile în radicali).)

Pe de altă parte, teorema fundamentală a algebrei (demonstrată de *Gauss* în 1799) ne asigură că orice polinom de grad $n \geq 1$, cu coeficienţi complecşi, are n rădăcini complexe (atunci când ţinem seama şi de multiplicitatea lor).

În acest mod a apărut clar distincţia între o teoremă de existenţă a rădăcinilor unei ecuaţii şi formule pentru calculul acestora.

Nu putem aminti de teoremele de existenţă fără a menţiona aici teorema valorii intermediare (datorate lui *Bolzano* şi *Cauchy*). Conform ei, orice polinom de grad 5, cu coeficienţi reali, are cel puţin o rădăcină reală. (Vezi limitele la $-\infty$ şi ∞, care sunt de semn contrar.)

Inexistenţa formulelor generale de rezolvare a ecuaţiilor algebrice a adus în atenţie conceptele de soluţie aproximativă şi de algoritm numeric pentru rezolvarea unei ecuaţii. Exista un predecesor notabil, algoritmul babilonian de extragere a radicalilor. În cazul lui $\sqrt{8}$ el ia forma şirului recurent:

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{8}{a_n}\right).$$

Exprimând $a_{n+1}^2 - 8$ în funcţie de $a_n^2 - 8$, se ajunge la:

$$0 < a_n^2 - 8 \leq 32^{1-2^{n-1}}$$

şi apoi la $0 < a_n - \sqrt{8} \leq 10 \cdot 10^{-3 \cdot 2^{n-2}}$, ceea ce denotă o viteză mare de convergenţă.

Newton a fost cel care a dat o formă mai generală acestui algoritm. Algoritmul său pentru aflarea rădăcinilor unei ecuaţii de forma:

$$f(x) = 0,$$

în cazul unei funcţii f derivabile pe un interval, constă în considerarea recurenţei:

$$a_0 = a, \qquad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Analiza convergenţei se află în oricare din manualele de analiză numerică.

Rezolvarea ecuaţiilor algebrice cu coeficienţi întregi conduce la conceptul de număr algebric. O problemă importantă a antichităţii a constat în a arăta că π nu este algebric.

Studiul naturii numerelor este departe de a fi epuizat, spre exemplu nu se ştie dacă constanta lui *Euler*:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

este un număr iraţional sau nu.

Algoritmii numerici (precum cel babilonian) produc şiruri *Cauchy* şi se naşte întrebarea dacă şirurile *Cauchy* de numere reale sunt întotdeauna convergente. Acest fapt, cunoscut sub numele de *teorema de completitudine* a lui $\mathbb{R}$, este cel care motivează imaginea de *continuum* al dreptei reale (adică al unei linii fără perforaţii).

Completitudinea joacă astăzi un rol important în teoriile matematice. (Vezi cazul completitudinii spaţiilor *Lebesgue* $L^p(\mathbb{R})$, cu $1 \leq p \leq \infty$. O referinţă este [6].)

3. O teorie a lui Galois pentru inegalităţi?

Funcţiile simetrice elementare de n variabile sunt definite prin formulele:

$$\begin{aligned}
e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 1\\
e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n\\
e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{i<j} x_i x_j\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Utilizarea lor impune normalizarea:

$$E_k = E_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\binom{n}{k}}.$$

3.1. Teoremă (I. Newton [4] şi C. Maclaurin [3]). *Fie $\mathcal{F}$ un n-uplu de numere nenegative. Atunci*:

(N) $\quad E_k^2(\mathcal{F}) > E_{k-1}(\mathcal{F}) \cdot E_{k+1}(\mathcal{F}), \quad 1 \leq k \leq n-1$

(M) $\quad E_1(\mathcal{F}) > E_2^{1/2}(\mathcal{F}) > \ldots > E_n^{1/n}(\mathcal{F})$

exceptând cazul când componentele lui $\mathcal{F}$ coincid.

O demonstraţie se află în [2] şi [5] (care conţine şi unele extensii).

Este simplu să observăm că inegalitatea:

$$aE_1^3 + bE_1E_2 + cE_3 \geq 0$$

are loc pentru orice n-uplu $\mathcal{F}$ de numere nenegative (cu $n \geq 3$) dacă şi numai dacă:

$$a \geq 0,\ 4a + 3b \geq 0 \quad \text{şi} \quad a + b + c \geq 0.$$

(Vezi [8] pentru o suită de soluţii.) Cu ocazia Congresului matematicienilor români din 2003, am propus următoarea:

3.2. Conjectură. Pentru orice număr natural $n \geq 1$, mulţimea polinoamelor $P(x_1, \ldots, x_n)$, de grad n, pozitiv omogene, simetrice şi având coeficienţi reali, care iau valori nenegative pentru orice $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, are un caracter semi-algebric. Cu alte cuvinte, există un set $Q_{n,1}, \ldots, Q_{n,k(n)}$ de polinoame reale, cu coeficienţi întregi, astfel că un polinom de grad n, pozitiv omogen, simetric şi real:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = aE_1^n + bE_1^{n-2}E_2 + \ldots,$$

este nenegativ pentru toţi $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ dacă şi numai dacă:

$$Q_{n,1}(a,b,\ldots) \geq 0 \quad , \ldots , \quad Q_{n,k(n)}(a,b,\ldots) \geq 0.$$

Cazul $n = 4$ este rezolvat afirmativ în lucrarea noastră [8].

4. Calculul variaţional

P. Fermat indică, în 1637, metoda sa de căutare a punctelor de extrem printre punctele critice. El leagă determinarea punctului de minim al polinomului:

$$P(x) = x^2 - 2ax + b$$

de ecuaţia:

$$P'(x) = x - a = 0.$$

Acest fapt se generalizează uşor sub următoarea formă:

4.1. Teoremă. *Fie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă care admite în punctul a un extrem local. Atunci*:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(a) = 0 \quad , \ldots , \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}(a) = 0.$$

Dacă F este convexă, atunci acest punct este de minim global. El este unic dacă F este strict convexă.

Determinarea faptului că o funcţie este convexă/strict convexă se face cu algoritmi bine cunoscuţi, care privesc matricea hessiană.

Iată două aplicaţii din monografia [9]:

(1) Fie mulţimea deschisă $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x,y > 0, \ xy > z^2\right\}$. Arătaţi că A este convexă şi că funcţia:

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \frac{1}{xy - z^2}$$

este strict convexă. Deduceţi inegalitatea:

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2) - (z_1+z_2)^2} < \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}\,,$$

care are loc pentru orice pereche (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) de puncte distincte din A.

(2) (Inegalitatea lui *Minkowski* pentru $p = 0$). Folosiţi calculul diferenţial pentru a arăta că funcţia:

$$f : [0,\infty)^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1,\ldots,x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

este concavă şi deduceţi inegalitatea:

$$\sqrt[n]{(x_1+y_1)\cdots(x_n+y_n)} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} + \sqrt[n]{y_1\cdots y_n},$$

care are loc pentru orice $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0$.

5. Problema programării convexe

Ne propunem să dezvoltăm ideea din Teorema 4.1 în cazul unor probleme de extrem care apar frecvent în practică, urmând fidel [9].

Fie $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcţii convexe şi diferenţiabile. *Problema programării convexe* (pentru aceste date) este aceea a minimizării lui f pe mulţimea convexă:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ g_1(x) \leq 0, \dots,\ g_m(x) \leq 0\}.$$

Un caz particular este *problema dietei*, care cere minimizarea funcţiei:

$$L(x) = \langle x, c\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

relativ la mulţimea $x \geq 0$ şi $Ax \geq b$. Aici $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ şi $b, c \in \mathbb{R}^n$, iar:

a_{ij} reprezintă conţinutul de nutrient i într-o unitate de produs alimentar j;

b_i reprezintă minimul zilnic necesar din nutrientul i;

c_j reprezintă costul unei unităţi de produs alimentar j;

x_j reprezintă cantitatea de produs j în dieta zilnică.

Această problemă a fost rezolvată de *George Stigler* în 1945 (şi i-a adus în 1982 un Premiu Nobel pentru Economie). Algoritmul *simplex* al lui *G. B. Dantzig* ne dă posibilitatea de a afla cu rapiditate soluţia ei chiar şi în cazul unui număr mare de variabile.

Iată şi o problemă teoretică (de teoria aproximării) rezolubilă cu ajutorul programării convexe (în fapt, cu a programării liniare).

Fie $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ şi $b \in \mathbb{R}^m$ astfel că sistemul $Ax = b$ *nu* are soluţie. Eroarea în ecuaţia de rang i este funcţia:

$$e_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i.$$

Problema lui Cebâşev cere minimizarea erorii absolute:

$$X = \max\{|e_i(x)| : i = 1, \dots, m\}.$$

Se alege X ca o nouă necunoscută şi ajungem la problema:

$$\text{minimizăm } X$$

relativ la inegalităţile:

$$-X \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leq X \quad (i = 1, \dots, m).$$

6. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Trecem acum la rezolvarea problemei programării convexe, pe care o abordăm ca o problemă de extrem condiţionat.

Considerăm deci funcţia lui *Lagrange* asociată:

$$F(x,y) = f(x) + y_1 g_1(x) + \cdots + y_m g_m(x),$$

care este o funcţie de $n+m$ variabile reale $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ (componentele lui x şi respectiv ale lui y).

Numim *punct şa* al lui F orice punct (x^0, y^0) din $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ astfel că:

$$x^0 \geq 0, \; y^0 \geq 0$$

şi:

$$F(x^0, y) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x, y^0)$$

pentru orice $x \geq 0$, $y \geq 0$. Punctele şa ale lui F ne dau soluţii pentru problema de programare convexă:

6.1. Teoremă. *Fie (x^0, y^0) un punct şa pentru funcţia F. Atunci x^0 este o soluţie a problemei programării convexe şi:*

$$f(x^0) = F(x^0, y^0).$$

Demonstraţie. Condiţia $F(x^0, y) \leq F(x^0, y^0)$ ne dă:

$$y_1 g_1(x^0) + \cdots + y_m g_m(x^0) \leq y_1^0 g_1(x^0) + \cdots + y_m^0 g_m(x^0).$$

Păstrând $y_2, \ldots, y_m$ fixaţi şi trecând la limită după $y_1 \to \infty$ obţinem că $g_1(x^0) \leq 0$. Similar, $g_2(x^0) \leq 0, \ldots, g_m(x^0) \leq 0$. Rezultă că x^0 aparţine mulţimii de constrângeri X.

Din $F(x^0, 0) \leq F(x^0, y^0)$ şi definiţia lui X deducem că:

$$0 \leq y_1^0 g_1(x^0) + \cdots + y_m^0 g_m(x^0) \leq 0,$$

adică, $y_1^0 g_1(x^0) + \cdots + y_m^0 g_m(x^0) = 0$. Astfel, $f(x^0) = F(x^0, y^0)$.

Deoarece $F(x^0, y^0) \leq F(x, y^0)$ pentru orice $x \geq 0$, avem:

$$f(x^0) \leq f(x) + y_1^0 g_1(x) + \cdots + y_m^0 g_m(x) \leq f(x),$$

pentru orice $x \geq 0$, ceea ce ne arată că x^0 este o soluţie a problemei de programare convexă. ∎

6.2. Teoremă (Condiţiile Karush-Kuhn-Tucker). *Presupunem că funcţiile $f, g_1, \ldots, g_m$ sunt convexe şi diferenţiabile pe $\mathbb{R}^n$. Atunci (x^0, y^0) este un punct şa pentru funcţia lagrangeană F dacă şi numai dacă:*

$$x^0 \geq 0 \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, y^0) \geq 0, \; \textit{pentru } k = 1, \ldots, n \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, y^0) = 0, \; \textit{dacă } x_k^0 > 0 \tag{6.3}$$

şi:

$$y^0 \geq 0 \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(x^0, y^0) = g_j(x^0) \leq 0, \ \textit{pentru} \ j = 1, \ldots, m \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(x^0, y^0) = 0, \ \textit{dacă} \ y_j^0 > 0. \tag{6.6}$$

Demonstraţie. Dacă (x^0, y^0) este un punct şa pentru F, atunci este clar că (6.1) şi (6.4) au loc. În plus:

$$F(x^0 + te_k, y^0) \geq F(x^0, y^0), \text{ pentru orice } t \geq -x_k^0.$$

Dacă $x_k^0 = 0$, atunci:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, y^0) = \lim_{t \to 0+} \frac{F(x^0 + te_k, y^0) - F(x^0, y^0)}{t} \geq 0.$$

Dacă $x_k^0 > 0$, atunci $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, y^0) = 0$ conform teoremei clasice a lui *Fermat*. De o manieră similară putem motiva (6.5) şi (6.6).

Să presupunem acum că (6.1)-(6.6) sunt îndeplinite. Deoarece $F(x, y^0)$ este o funcţie convexă şi diferenţiabilă de x (fiind o combinaţie liniară cu coeficienţi pozitivi de astfel de funcţii), ea verifică ipotezele teoremei 4.1. Luând în consideraţie condiţiile (6.1)-(6.3), ajungem la:

$$\begin{aligned}
F(x, y^0) &\geq F(x^0, y^0) + \langle x - x^0, \nabla_x F(x^0, y^0) \rangle = \\
&= F(x^0, y^0) + \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_k^0\right) \frac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, y^0) = \\
&= F(x^0, y^0) + \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(x^0, y^0) \geq F(x^0, y^0),
\end{aligned}$$

pentru orice $x \geq 0$. Pe de altă parte, din (6.5)-(6.6), pentru $y \geq 0$, avem:

$$\begin{aligned}
F(x^0, y) &= F(x^0, y^0) + \sum_{j=1}^{m} \left(y_j - y_j^0\right) g_j(x^0) = \\
&= F(x^0, y^0) + \sum_{j=1}^{m} y_j g_j(x^0) \leq F(x^0, y^0).
\end{aligned}$$

Prin urmare, (x^0, y^0) este un punct şa pentru F. ■

Exemplu. Minimizăm $(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2$ relativ la $0 \leq x_1 \leq 1$ şi $0 \leq x_2 \leq 2$.

Aici $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1 - 1$ şi $g_2(x_1, x_2) = x_2 - 2$. Funcţia lagrangeană ataşată problemei este:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + y_1 (x_1 - 1) + y_2 (x_2 - 2),$$

iar condiţiile *Karush-Kuhn-Tucker* ne conduc la ecuaţiile:

$$\begin{cases} x_1(2x_1-4+y_1)=0 \\ x_2(2x_2+2+y_2)=0 \\ y_1\,(x_1-1)=0 \\ y_2(x_2-2)=0 \end{cases} \tag{6.7}$$

şi la inegalităţile:

$$\begin{cases} 2x_1-4+y_1\geq 0 \\ 2x_2+2+y_2\geq 0 \\ 0\leq x_1\leq 1,\ 0\leq x_2\leq 2 \\ y_1,y_2\geq 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Sistemul de ecuaţii (6.7) are 9 soluţii:
$(1,0,2,0)$, $(1,2,2,-6)$, $(1,-1,2,0)$, $(0,0,0,0)$, $(2,0,0,0)$,
$(0,-1,0,0)$, $(2,-1,0,0)$, $(0,0,0,-1)$, $(2,0,0,-1)$,

din care doar $(1,0,2,0)$ verifică şi inegalităţile (6.8). Prin urmare:

$$\inf_{\substack{0\leq x_1\leq 1\\ 0\leq x_2\leq 2}} f\,(x_1,x_2)=f(1,0)=2.$$

În condiţii largi, problema programării convexe este echivalentă cu aflarea punctelor şa. Avem nevoie de un rezultat ajutător, important şi în sine:

6.3. Lema lui Farkas. *Fie $f_1,\ldots,f_m$ funcţii convexe definite pe o submulţime convexă Y din $\mathbb{R}^n$. Atunci sau există un y în Y astfel încât $f_1(y)<0,\ldots$
$\ldots,f_m(y)<0$, sau există numere nenegative $a_1,\ldots,a_m$, nu toate zero, astfel că:*

$$a_1f_1(y)+\cdots+a_mf_m(y)\geq 0,\quad \textit{pentru orice } y\in Y.$$

Demonstraţie. Să presupunem că prima alternativă nu are loc şi să considerăm mulţimea:

$$C=\{(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^m \mid (\exists)\, y\in Y \text{ cu } f_k(y)<t_k,\quad (\forall)\, k=1,\ldots,m\}\,.$$

Se arată imediat că C este convexă şi că C nu conţine originea lui $\mathbb{R}^m$. În acord cu Teorema *Hahn-Banach* de separare, C şi originea se pot separa printr-un hiperplan, deci există scalari $a_1,\ldots,a_m$ nu toţi zero, astfel că pentru orice $y\in Y$ şi orice $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m>0$ avem:

$$a_1(f_1(y)+\varepsilon_1)+\cdots+a_m(f_m(y)+\varepsilon_m)\geq 0. \tag{6.9}$$

Păstrând $\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m$ fixaţi şi trecând la limită după $\varepsilon_1\to\infty$, deducem că $a_1\geq 0$. Similar, $a_2\geq 0,\ldots,a_m\geq 0$. Făcând $\varepsilon_1\to 0,\ldots,\varepsilon_m\to 0$ în (6.9) tragem concluzia că $a_1f_1(y)+\cdots+a_mf_m(y)\geq 0$ pentru orice y în Y. ∎

6.4. Teoremă (Condiţia lui Slater). *Presupunem că x^0 este o soluţie a problemei programării convexe. Dacă există $x^*\geq 0$ astfel că $g_1(x^*)<0,\ldots,g_m(x^*)<0$, atunci putem găsi y^0 în $\mathbb{R}^m$ pentru care (x^0,y^0) este un punct şa pentru funcţia lui Lagrange F.*

Demonstraţie. Conform lemei lui *Farkas*, aplicată funcţiilor $g_1, \ldots, g_m$, $f - f(x^0)$ şi mulţimii $Y = \mathbb{R}^n_+$, putem găsi $a_1, \ldots, a_m, a_0 \geq 0$, nu toţi zero, astfel că:

$$a_1 g_1(x) + \cdots + a_m g_m(x) + a_0(f(x) - f(x^0)) \geq 0, \tag{6.10}$$

pentru orice $x \geq 0$. Un moment de gândire ne arată că $a_0 > 0$. Punem $y_j^0 = \dfrac{a_j}{a_0}$ şi $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$. Conform (6.10) avem că:

$$f(x^0) \leq f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^0 g_j(x) = F(x, y^0),$$

pentru orice $x \geq 0$. În particular, pentru $x = x^0$, aceasta ne dă:

$$f(x^0) \leq f(x^0) + \sum_{j=1}^{m} y_j^0 g_j(x^0) \leq f(x^0),$$

adică, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} y_j^0 g_j(x^0) = 0$, ceea ce conduce la $F(x^0, y^0) = f(x^0) \leq F(x, y^0)$, pentru orice $x \geq 0$. Pe de altă parte, pentru $y \geq 0$ avem:

$$F(x^0, y^0) = f(x^0) \geq f(x^0) + \sum_{j=1}^{m} y_j g_j(x^0) = F(x^0, y),$$

şi deci (x^0, y^0) este un punct şa. ■

Vom indica în continuare o aplicaţie la problema lui *J. Sylvester*: *Aflaţi cel mai mic disc care include o mulţime dată de puncte din plan.*

Presupunem că punctele date sunt $a_1, \ldots, a_m$. Ele se află într-un disc de centru x şi rază r dacă:

$$\|a_k - x\|^2 \leq r^2, \quad \forall\, k = 1, \ldots, m. \tag{6.11}$$

Avem de aflat x şi r astfel ca r să fie minim. Notând:

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(r^2 - \|x\|^2\right),$$

putem înlocui constrângerile pătratice (6.11) cu unele liniare:

$$x_0 + \langle a_k, x \rangle \geq b_k, \quad \text{pentru } k = 1, \ldots, m.$$

Aici $b_k = \dfrac{\|a_k\|^2}{2}$. În acest mod, problema lui *Sylvester* devine o problemă de programare pătratică:

$$\text{minimizăm } 2x_0 + x_1^2 + x_2^2,$$

relativ la m inegalităţi liniare:

$$x_0 + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \geq b_k, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Exerciţii. (1) Minimizaţi $x^2 + y^2 - 6x - 4y$, relativ la $x \geq 0$, $y \geq 0$ şi $x^2 + y^2 \leq 1$.

(2) Deduceţi din lema lui *Farkas* teorema fundamentală a proceselor *Markov*: *Fie* $(p_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *o matrice cu coeficienţii nenegativi, astfel că*:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Atunci există un vector $x \in \mathbb{R}_+^n$ *pentru care*:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \text{ şi } \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j = x_i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

(3) (O variantă a lemei lui *Farkas*). Următorul rezultat este un analog al *alternativei lui Fredholm* pentru inegalităţi liniare. Fie A o matrice reală $m \times n$ dimensională şi fie b un vector din $\mathbb{R}^m$. Atunci are loc una şi numai una din următoarele două alternative:

i) sistemul $Ax = b$ are o soluţie $x \in \mathbb{R}_+^n$;

ii) există un vector $y \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $A^\star y \in \mathbb{R}_+^m$ şi $\langle y, b\rangle < 0$.

7. Appendix privind inegalităţile neliniare

Lema lui *Farkas* se poate aborda prin tehnici simple, legate de teorema lui *Fermat*:

7.1. Teoremă. *Fie* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *vectori din* $\mathbb{R}^n$ *astfel că* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_k\rangle \leq 0$ *pentru orice* k *are loc numai dacă* $\mathbf{x} = 0$. *Atunci există numere pozitive* λ_k *astfel încât* $\sum_k \lambda_k \mathbf{a}_k = 0$.

Demonstraţie. Considerăm funcţia:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} e^{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_k\rangle}.$$

Să observăm că $\delta = \inf\{\sup_k \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_k\rangle : \|\mathbf{x}\| = 1\} > 0$ şi că $f(\mathbf{x}) > e^{r\delta}$ dacă $\|\mathbf{x}\| = r$. Prin urmare, pentru $\|\mathbf{x}\| \geq (\log m)/\delta$, atunci $f(\mathbf{x}) > m = f(0)$. Deci minimul lui f pe bila de centru 0 şi rază $(\log m)/\delta$ se atinge într-un punct interior $\mathbf{x}^0$. Conform teoremei lui *Fermat*:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{m} e^{\langle \mathbf{x}^0, \mathbf{a}_k\rangle} a_{kj} = 0,$$

pentru orice j şi putem alege $\lambda_k = e^{\langle \mathbf{x}^0, \mathbf{a}_k\rangle}$. ■

7.2. Teoremă. *Fie* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ *vectori din* $\mathbb{R}^n$ *astfel că* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_k\rangle \leq 0$ *pentru orice* k *implică* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}\rangle \leq 0$. *Atunci există numere reale* λ_k *astfel încât* $\mathbf{b} = \sum_k \lambda_k \mathbf{a}$.

Demonstraţie. Se consideră funcţia:

$$f(\mathbf{x}) = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle + \sum_{k=1}^{m} e^{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_k \rangle}$$

şi se aplică următoarea lemă (ce exprimă existenţa punctelor „aproape critice“):

7.3. Lemă. *Fie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o funcţie mărginită inferior, care admite derivate parţiale continue. Atunci, pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un punct* $\mathbf{x}^0$ *astfel că*:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0) \right| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Adăugând o constantă, putem presupune că $f > 0$. Alegem $\delta > 0$ astfel că $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon^2}{4f(\mathbf{0})}$. Funcţia $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \delta \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ are un minim în $\mathbf{x}^0$, ceea ce conduce la faptul că:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) + 2\delta x_j^0 = 0,$$

pentru orice j. Dar $\delta \langle \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 \rangle \leq f(\mathbf{x}^0) + \delta \langle \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 \rangle \leq f(\mathbf{0})$ de unde rezultă că:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) \right| = 2\delta \left| x_j^0 \right| \leq 2\delta \sqrt{\langle \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 \rangle} \leq 2\sqrt{\delta f(\mathbf{0})} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

8. În loc de Epilog

Creşterea rolului computerelor în viaţa economică şi socială a putut crea iluzia că matematica poate fi masiv ocolită şi că studiul ei nu mai este util. În vreme ce chestiunea aceasta a fost rapid lămurită în străinătate, revenindu-se cu picioarele pe pământ, în România s-a ajuns până acolo că în 2005 planurile de învăţământ pentru facultăţile economice nu includ nici un curs specific de *calcul diferenţial şi integral*, de *algebră liniară* sau de *geometrie analitică*, considerându-se că abilitatea de a folosi programe precum *Matlab* sau *Maple* poate fi suficientă. Drept care matematica a fost redusă la un singur curs general, de doar un semestru, prevăzut cu două ore de predare!

Din păcate un tablou la fel de îngrijorător se petrece în facultăţile de ştiinţe, precum şi în cele inginereşti.

Am greşi însă considerabil, atribuind întreaga vină pentru situaţia de mai sus economiştilor, inginerilor ş.a.m.d.

Cufundaţi prea mult în contemplarea propriei lor lumi interioare, matematicienii s-au trezit izolaţi, uitând că nu societatea trebuie să vină la ei, ci ei să vină în întâmpinarea nevoilor societăţii. Iată de ce este imperios necesară o privire lucidă asupra situaţiei prezente şi o regândire curajoasă a obiectivelor matematicii atât la nivelul cercetării cât şi al învăţământului.

Bibliografie

[1] J. Franklin, *Mathematical Methods of Economics*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 229-244.

[2] G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities,* Cambridge Mathematical Library, 2nd Ed., 1952.

[3] C. Maclaurin, *A second letter to Martin Folkes, Esq.; concerning the roots of equations, with the demonstration of other rules in algebra,* Phil. Transactions **36** (1729), 59-96.

[4] I. Newton, *Arithmetica universalis*: *sive de compositione et resolutione arithmetica liber,* 1707.

[5] C. P. Niculescu, *A New Look at Newton's Inequalities,* J. Inequal. in Pure and Appl. Math. (JIPAM) **1** (2000), paper no. 17. Also presented to the *Symposium on Order Structures in Functional Analysis*, Bucharest, June 29, 2000.

[6] C. P. Niculescu, *Analiza matematică pe dreapta reală. O abordare contemporană.* Ediţia a 2-a, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

[7] C. P. Niculescu, *The Wonderful World of Convexity.* Communication to *The Fifth Congress of Romanian Mathematicians*, Piteşti, June 22-28, 2003.

[8] C. P. Niculescu, *Interpolating Newton's Inequalities,* Bull. Soc. Sci. Math. Roum. **47** (95), 2004, No. 1-2, 67-83.

[9] C. P. Niculescu and L.-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, Springer-Verlag, 2006.

Universitatea din Craiova,
Departamentul de matematică,
Str. Al. I. Cuza 13, Craiova 200585
e-mail:cniculescu@central.ucv.ro