

Trei sute de ani de la nașterea unui geniu universal al matematicii, Leonhard Euler

DE CONSTANTIN P. NICULESCU ȘI ANDREI VERNESCU¹

În ziua de 15 aprilie a anului curent s-au împlinit trei secole de la nașterea celui care avea să devină unul dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, *Leonhard Euler* (1707-1783).

Importanța și vastitatea fabuloasei sale opere, privitoare la toate ramurile matematicii secolului al XVIII-lea (precum și la însemnate capitole din mecanică, fizică și astronomie) este atât de covârșitoare, încât astăzi în aproape orice demers matematic, se întâlnește, într-un fel sau altul un rezultat, o noțiune sau măcar o notație introdusă de către *Euler*.

La trei secole de la naștere, i se aduce cuvenita comemorare, prin organizarea de Congrese, Conferințe și Simpozioane de către Societăți academice și Universități, prin republicarea de selecțiuni din opera sa sau de lucrări speciale care îi sunt destinate. Totul sub deviza atât de înțeleaptă a altui mare matematician, *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827) „Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous!”

În această prezentare vom căuta să evocăm pe scurt câteva repere ale vieții genialului savant, cât și câteva dintre rezultatele sale cele mai importante.

Leonhard Euler s-a născut la 15 aprilie 1707 în orașul Basel (fr. Bâle) în familia unui pastor calvin. Orașul Basel, situat pe Rin, la întâlnirea frontierelor Elveției, Franței și Germaniei, se bucura de prosperitate economică și culturală și avea o Universitate proprie. Tatăl lui *Leonhard*, *Paul Euler* era căsătorit cu *Marquerite Brucker* și își exercita profesiunea în mica localitate Riehen, de lângă Basel. Dar el avea și frumoașe cunoștințe de matematică, pe care le va transmite fiului. Într-adevăr, micul *Leonhard* își începe învățătura în casa părintească, sub directă îndrumare a tatălui său, de la care va căpăta primele cunoștințe de matematică, știință care se va transforma în pasiune și scop în viață.

Dar, după cum vom arăta și noi, viața familiei *Euler*, ca și activitatea științifică a lui *Leonhard Euler* este strâns legată de cea a familiei *Bernoulli*! Această familie (care la sfârșitul secolului al XVI-lea se refugiase de la Anvers (Belgia) ca să scape de persecuțiile religioase ale ducelui de Alba, din timpul ocupației spaniole a Țărilor de Jos), constituie un caz unic în istoria științelor,

¹Publicat în *Gazeta matematică* seria A, revistă de cultură matematică, **XXV (CIV)**, no. 3, 2007, pp. 244-248.

deoarece a dăruit comunității științifice mai multe generații de remarcabili savanți (matematicieni și mecanicieni). Revenind la *Paul Euler*, este interesant de menționat că acesta, când studiasse teologia la Universitatea din Basel, audiase și cursurile de matematică ale lui *Jacques (Jacob) Bernoulli* (1654-1705). Totodată *Paul Euler* și *Jean (Johann) Bernoulli* ²⁾ (1667-1748), fratele mai mic al lui *Jacques Bernoulli* au locuit, în timpul studiilor universitare în locuința lui *Jacques Bernoulli*. *Paul* avea să devină pastor, iar *Jean* I matematician și apropiat al lui *Leibniz*. Prietenia dintre *Paul* și *Jean* I avea să se transmită și fiilor lor *Leonhard Euler* și respectiv cei trei fii ai lui *Jean Bernoulli* I, anume *Nicolas Bernoulli* II (1695-1726), *Daniel Bernoulli* (1700-1782) și *Jean Bernoulli* II (1710-1790).

Cum spuneam, foarte de tânăr, *Leonhard Euler* capătă primele cunoștințe de matematică de la tatăl său. Acesta, deși intenționa inițial ca fiul său să urmeze tot cariera ecleziastică, a considerat că aceste cunoștințe îi pot fi utile, inclusiv prin puterea ordonatoare a gândirii, pe care o au. În 1720, la numai 13 ani, tânărul *Leonhard* își începe studiile de filozofie la Universitatea din Basel, unde, cu o memorie extraordinară, își formează o solidă cultură însușindu-și totodată și limba oficială a științei, de atunci, latina. În toată perioada 1720-1723, *Euler* va avea puterea să-și cultive și pasiunea pentru matematică, fiind ajutat acum de un profesionist, deoarece profesorul său *Jean Bernoulli* I îi acordă întregul său sprijin. El se întâlnea săptămânal cu tânărul *Euler*, pentru a risipi neclaritățile ce eventual le-ar fi întâmpinat acesta în studiul lucrărilor ce i le recomanda. În casa profesorului *Jean Bernoulli* I, *Euler* s-a împrietenit cu cei trei fii ai acestuia, *Nicolas* II, *Daniel* și *Jean* II.

În 1723, la numai 16 ani, *Euler* finalizează cursurile de filozofie și susține, în limba latină, discursul de absolvire, în care face o comparație între ideile filozofice ale lui *Descartes* și cele ale lui *Newton*, obținând astfel titlul de magister. Începe apoi, neîntârziat, studiul limbii ebraice și teologiei, exact așa cum dorea tatăl său, pe care reușește să și le însușească foarte bine, datorită memoriei sale prodigioase, dar simte cum atracția sa pentru matematică devine tot mai puternică. Apoi, la sfatul și insistențele profesorului său de matematică *Jean Bernoulli* I, care-i descoperise talentul extraordinar pentru această știință, tatăl său, consimte ca *Leonhard* să se orienteze de la studiul teologiei la cel al matematicii. Poate că prietenia lui *Euler*-tatăl cu *Jean Bernoulli* I, din timpul studenției lor să fi contribuit la această decizie înțeleaptă și binefăcătoare! Acum drumul lui *Leonhard Euler* în matematică este complet deschis! Tânărul *Leonhard* începe să obțină succese strălucite în studiul matematicii și în lucrările sale de cercetare.

În 1726 *Euler* și-a terminat studiile de matematică la Universitatea din Basel. Istoricii matematicii consideră că lucrările citite de *Euler* în acest timp, la sfatul lui *Jean Bernoulli* I trebuie să fi fost opere ale lui *Galilei*, *Varignon*, *Descartes*, *Newton*, *Van Schooten*, *Jacques Bernoulli*, *Hermann*, *Taylor*, *Napier* și *Wallis*.

Acum, tânărul de numai 19 ani, *Leonhard Euler*, își va căuta un post acad-

²⁾ Datorită faptului că în familia *Bernoulli* multe prenume s-au repetat, istoricii matematicii au adăugat cifre romane la numele acestora.

emic pe măsura pregătirii și talentului său.

Prietenii săi ceva mai vârstnici, *Nicolas* și *Daniel Bernoulli* se aflau deja la Sankt Petersburg, unde lucrau la Academia de Științe, fondată în 1725 de către împărăteasa *Ecaterina I*, soția lui *Petru cel Mare* și îi promisese că îl vor chema acolo de îndată, dacă un post pe măsura lui *Euler* se va ivi. Între timp, *Euler* încearcă să obțină un post de profesor la Universitatea din Basel, dar în locul lui este numit altcineva. Iată cum, celui care avea să fie cel mai mare matematician al Elveției, i se refuză un post universitar! (Poate și vârsta de doar 19 ani a candidatului *Euler* a influențat decizia, dar este sigur că nu peste mult timp, Universitatea din Basel va regreta amarnic refuzul din 1726!). În 1727 *Euler* pleacă la Sankt-Petersburg, unde fusese invitat încă din anul precedent, dar pe un post de profesor de fiziologie. Călătoria a durat din 5 aprilie 1727 până în 17 mai 1727. Între timp, în 1726, *Nicolas Bernoulli II* își pierduse viața, la numai 31 de ani, din cauza unei stupide apendicite! La cererea lui *Jakob Herman* și al lui *Daniel Bernoulli*, *Euler* este trecut la secția de matematică-fizică a Academiei. Devine academician. *Daniel Bernoulli* era șeful secției de matematică, dar el nu se putea adapta bine acestui oraș nordic și, în 1733 se întoarce definitiv în Elveția, unde își continuă cariera universitară. *Euler* este numit noul șef al secției de matematică-fizică. În ianuarie 1734 *Euler* se căsătorește cu *Katharina Gsell*, fiica unui pictor elvețian stabilit la Sankt-Petersburg. Vor avea 13 copii, din care vor supraviețui doar cinci; pe vremea aceea, ca și ulterior, încă două secole, supraviețuirea în fața agresiunii bolilor copilăriei nu era ușoară, deoarece, până la *Pasteur* nu existau vaccinurile, iar până la *Fleming* nu existau antibioticele...

La Sankt Petersburg, *Euler* a lucrat cu mult entuziasm și cu mult spor. Putea discuta cu eminenți matematicieni ai epocii, *Jakob Hermann*, *Daniel Bernoulli* (până în 1733, când s-a întors în Elveția), *Christian Goldbach* și alții. Obținând în 1738 și 1740 Marele Premiu al Academiei din Paris, *Euler* capătă o reputație excepțională și astfel este invitat la Academia din Berlin de către împăratul *Frederik cel Mare* al Germaniei. Inițial preferă să rămână la Sankt-Petersburg, dar în 1741, când anumite tulburări politice, precum și intrigile administrației fac viața străinilor dificilă, *Euler* acceptă. Trăise la Sankt-Petersburg 14 ani, timp în care obținuse rezultate importante în toate domeniile matematicii, iar în perioada 1736-1737 scrisese și o carte, intitulată *Mechanica*, în care prezenta pentru prima dată în mod sistematic dinamica newtoniană cu ajutorul instrumentului calculului diferențial și integral. Dar, din păcate, în 1735, și datorită muncii încordate de cartografie, *Euler* începuse să aibă probleme cu vederea, iar în 1738, vederea cu ochiul drept era deja afectată. Va petrece la Berlin 25 de ani, până în 1766, timp în care scrie peste 380 de articole și multe cărți. Reputația sa ajunge la cote extraordinare. Dar, după moartea în 1759 a lui *Maupertuis*, care era președintele Academiei, *Frederick al II-lea* nu s-a orientat către *Euler*, așa cum ar fi fost normal, ci a propus conducerea Academiei lui *d'Alembert*, care însă declină propunerea, nedorind să părăsească Parisul. Nici acum *Frederick al II-lea* nu-i propune lui *Euler* președinția Academiei și intervine în mod nepotrivit în treburile acesteia.

Probabil că *Euler* a fost afectat de nedreptatea făcută, dar el continuă să se

ocupe de ceea ce era mai important, continuă să creeze în matematică. Între timp *Euler* este rechemat, în condiții materiale foarte bune la Sankt Petersburg, unde va fi primit cu mari onoruri, în 1766. Va rămâne aici până la sfârșitul vieții, continuând să lucreze neobosit, deși vederea i se deteriorase mult, inclusiv la al doilea ochi, iar la 60 de ani devine complet orb. Anticipează astfel, poate mai dureros, drama lui *Beethoven*, care în 1819, la 49 de ani, avea să-și piardă auzul, compunând în această situație, în ultimii opt ani ai vieții. Dar ca și *Beethoven*, despre care *Victor Hugo* a spus „Ce sourd entendait l'infini“, pentru *Euler*, pierderea vederii nu a însemnat sistarea lucrului. Îl ajuta memoria sa cu adevărat fenomenală. Dicta la doi dintre fii săi *Johann-Albrecht Euler* (devenit fizician) și *Christoph Euler*, ca și la doi membri ai Academiei *W. L. Krafft* și *A. J. Lexell*, precum și tânărului matematician *N. Fuss*, care fusese invitat de către Academia din Elveția și se va căsători cu o nepoată de-a lui *Euler*. Este surprinzător că în perioada 1766-1783 *Euler* a creat mai mult de jumătate din opera sa! Atunci a creat aproape toate cărțile sale.

A fost membru al Academiei de Științe din Paris și al Royal Society din Londra.

Se stinge în seara zilei de 18 septembrie 1783, după ce prima parte a zilei fusese cât se poate de obișnuită, dând o lecție de matematică unuia din nepoți și discutând cu *Lexell* și *Fuss* despre recent descoperita planetă Uranus. Lăsa în urma sa cea mai prolifică operă matematică din toate timpurile, înegalată încă. Este înmormântat la mănăstirea Alexandr Nevski.

A fixat notații definitive, a definit noțiuni și concepte, a stabilit noi teorii și mari direcții de dezvoltare, a obținut rezultate fundamentale în mai toate ramurile matematicii, cât și nenumărate „perle“ de o neasemuită frumusețe. A fost cel mai mare descoperitor de formule, neajuns din urmă poate decât de Ramanujan (dar numai în direcția formulelor, nu și teoriilor !)

Revenind asupra vastității operei euleriene, reamintim că autorul ei a scris peste 1200 de articole (și multe cărți fundamentale) nefiind depășit de niciunul din urmașii săi cei mai prolifici *Cayley* (cu 966 de lucrări), *Cauchy* (cu 799 de lucrări) și *Poincaré*. Publicarea operei complete, întreprindere încă nefinalizată, circa 70 de volume și peste 16000 de pagini, a fost de mult începută și se află în stadiu foarte avansat în Rusia, Germania și Elveția. A fost tradusă parțial în limbile franceză și engleză (din limba latină, în care a fost scrisă la acea epocă).

Opera științifică a lui *L. Euler* fiind deosebit de vastă și profundă, este dificil de răspuns care este realizarea sa cea mai mare (sau care sunt primele zece realizări ale sale).

The Mathematical Association of America are pe site-ul ei o rubrică *How Euler did it*, prezentată de Ed. Sandifer (profesor de matematici la Western Connecticut State University, din Danbury, U.S.A.). Adresa ei este

<http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html>.

Rubrica din februarie 2007, *Euler's Greatest Hits*, conține o propunere pentru un Top 10, însoțită de comentarii foarte interesante.

Pentru matematica de liceu, numele lui *Euler* este legat în primul rând de cercul celor nouă puncte și de dreapta lui *Euler*. Foarte populară este și relația

sa metrică

$$OI^2 = R(R - 2r),$$

(de care se leagă faptul că $R > 2r$ în toate triunghiurile diferite de cele echilaterale, unde $R = 2r$). Elevii claselor a XI-a pot afla despre constanta lui *Euler*

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right),^{1)}$$

iar cei de clasa a XII-a raționalizează integrale utilizând diferite substituții ale lui *Euler*. Cum am mai spus, *Euler* a fost un maestru al unei imense diversități de formule.

Euler a introdus multe din notațiile curente: \sum pentru sumă; simbolul e pentru baza logaritmilor naturali; a , b și c pentru lungimile laturilor unui triunghi și A , B și C pentru mărimile unghiurilor opuse; simbolul π pentru numărul pi și simbolul i pentru $\sqrt{-1}$.

Numele lui *Euler* rămâne însă în galeria geniilor matematicii pentru alte contribuții:

1. Condiția (necesară) *Euler-Lagrange* pentru ca o funcție y să extremizeze o funcțională de forma $J = \int_a^b F(x, y, y') dx$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Euler a rezolvat mai multe probleme ingineresti, precum săgeata unei console elastice, încovoierea grinzilor elastice supuse unor încărcări, calculul modurilor de încovoiere ale coloanelor etc.

2. Ecuația lui *Euler* din mecanica fluidelor incompresibile.

3. Formula produs

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - 1/p^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

4. Calculul valorilor funcției zeta pentru valorile naturale pare $\left(\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \operatorname{Re}(s) > 1 \right)$.

În particular, formula

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Infinitudinea numerelor prime, legată de faptul $\sum_{p=\text{prim}} \frac{1}{p} = \infty$.

6. Problema celor șapte poduri din Königsberg (considerată a fi prima problemă de teoria grafurilor planare).

7. Formula combinatorică pentru poliedre convexe

$$V - M + F = 2,$$

¹⁾ Tot *Euler* a dat și generalizări ale acestora (v. G. M. - A 1/2007, pp. 11-16).

unde V reprezintă numărul vârfurilor, M reprezintă numărul muchiilor, iar F reprezintă numărul fețelor.¹⁾

8. Extensia funcției factorial la semidreapta $(0, \infty)$ și apoi la planul complex exceptând numerele întregi negative. Este vorba de celebra sa funcție gamma,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0,$$

care se extinde apoi la mulțimea din \mathbb{C} menționată mai sus și pentru care $\Gamma(n+1) = n!$, dacă $n \in \mathbb{N}$.

9. Extensia funcțiilor trigonometrice la planul complex și formula

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Pentru $z = \pi$, ea devine $e^{i\pi} + 1 = 0$.

10. Formula $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, unde φ este funcția indicatoare a lui Euler.

11. Partiții și funcții generatoare. Vezi formula

$$\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + \dots,$$

unde coeficientul lui x^k coincide cu numărul modurilor în care k se poate scrie ca suma a două numere naturale distincte și nenule. Spre exemplu, $2x^5$ ne spune că $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, adică 5 se poate descompune în două moduri. Formule de acest tip apar în celebra carte a lui Euler, *Introductio in analysin infinitorum*.

Detalii se pot afla din articolul enciclopedic [5], precum și din alte surse: [1], [3], [4].

¹⁾ Această formulă a permis demonstrarea faptului că singurele poliedre regulate sunt cele cinci cunoscute din antichitate.

References

Bibliografie

- [1] Dunham, William, *Euler: The Master of Us All*, Mathematical Association of America, Washington D.C., 1999.
- [2] Euler, Leonhard, *Introductio in analysis infinitorum*, 2 vols., Bosquet, Lucerne, 1748, reprinted in the Opera Omnia, Series I volumes 8 and 9. English translation by John Blanton, Springer-Verlag, 1988 and 1990. Facsimile edition by Anastaltique, Brussels, 1967.
- [3] Thiele, Rüdiger. *The mathematics and science of Leonhard Euler*, in *Mathematics and the Historian's Craft*, The Kenneth O. May Lectures, G. Van Brummelen and M. Kinyon (eds.), CMS Books in Mathematics, Springer Verlag, 2005.
- [4] Nahin, Paul, *Dr. Euler's Fabulous Formula*, New Jersey, Princeton, 2006.
- [5] <http://en.wikipedia.org/wiki/Euler>
- [6] Euler Tercentenary, <http://www.euler-2007.ch/en/index.htm>
- [7] Leonhard Euler Congress 2007, <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2007/AG/>

Universitatea din Craiova
Facultatea de Matematică-Informatică
Str. Al. I. Cuza, nr. 13
200585 Craiova

Universitatea Valahia din Târgoviște
Catedra de Matematică
Bd. Unirii, nr. 118
130082 Târgoviște