ASUPRA LEMEI RIEMANN-LEBESGUE

CONSTANTIN P. NICULESCU ŞI DAN TUDOR VUZA

Abstract. Lucrarea discută diferite generalizări ale Lemei Riemann-Lebesgue, legate de extensia clasei funcţiilor periodice.

O lucrare relativ recentă a domnilor R. Anişca, Fl. Popovici şi M. Bencze [1] aduce în discuţie următoarea formă a Lemei Riemann-Lebesgue din Analiza armonică:

Teorema 1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă Lebesgue şi fie* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *o funcţie continuă şi periodică* (*de perioadă* $T > 0$). *Atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\varphi(nx)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x)\,dx \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Varianta clasică a Lemei Riemann-Lebesgue reprezintă cazul particular când $\varphi(x) = e^{ix}$, caz în care concluzia se poate rescrie în forma mai familiară,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\cos nx\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\sin nx\,dx = 0.$$

Pe de altă parte, Teorema 1 se poate deduce imediat din acest caz particular, folosind Teorema lui Weierstrass, de aproximare a funcţiilor continue şi periodice prin polinoame trigonometrice; vezi [4], Teorema 6.4.2, p. 279.

Cum rostul acestei leme (şi al generalizării sale) nu este în matematica elementară, demonstraţia cazului particular când funcţia f este doar integrabilă Riemann rămâne doar un exerciţiu de abilitate. În aplicaţiile serioase este nevoie de lărgirea clasei de funcţii integrabile, iar clasa Lebesgue reprezintă din multe puncte de vedere primul cadru optim.

Lema Riemann-Lebesgue este crucială în stabilirea criteriilor uzuale de convergenţă punctuală a seriilor Fourier trigonometrice la funcţiile care le-au generat, precum şi în stabilirea principiului lui Riemann, al localizării. Vezi de exemplu [4], pp. 461-463. O prezentare foarte competentă a acestei problematici este aceea din monografia lui T. Ganea, *Serii trigonometrice,* apărută la Ed. Tehnică în 1956.

Teorema 1 conţine unele restricţii ne necesare, de care cititorul trebuie să fie conştient.

Vom începe prin a aminti o generalizare naturală a conceptului de funcţie periodică, care îi aparţine matematicianului danez Harald Bohr (fratele binecunoscutului laureat al premiului Nobel, fizicianul Niels Bohr). Numim *polinom trigonometric*

Key words and phrases. Funcţie aproape periodică, medie temporală, lema Riemann-Lebesgue.
Mathematics Suject Classification 2000: Primary 42A16, 42A38.
Apare în vol. *Lucrările celei de a* III-*a Conferinţe anuale a Societăţii de Ştiinţe Matematice din România*, Craiova 26-29 mai 1999, pp. 151-156, Ed. Reprograph, Craiova, 2000.

orice funcţie de forma

$$\sum_{k=0}^{n} c_k e^{i\lambda_k t}$$

unde $c_k \in \mathbb{C}$ şi $\lambda_k \in \mathbb{R}$ pentru $k \in \{0, ..., n\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se zice că este *aproape periodică* dacă se poate aproxima uniform prin polinoame trigonometrice, deci dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ putem găsi un polinom trigonometric P_ε cu proprietatea că

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Fiind limite uniforme de funcţii continue şi mărginite, funcţiile aproape periodice sunt continue şi mărginite.

Funcţii extrem de familiare precum $\cos\sqrt{2}\,x + \sin x$, sunt aproape periodice fără a fi periodice; vezi faptul că

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\cos\sqrt{2}x + \sin x\right) = 2$$

fără ca acest supremum să fie atins!

Teoria funcţiilor aproape periodice este foarte frumos expusă în monografia domnului C. Corduneanu [2].

Mulţimea funcţiilor aproape periodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ constituie un spaţiu vectorial, notat AP($\mathbb{R}$), în raport cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu scalari a funcţiilor. Este util să considerăm un spaţiu şi mai larg, QAP($\mathbb{R}$), al funcţiilor *quasi-aproape periodice*, adică al funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue şi mărginite care sunt limite uniforme de transformate Fourier de măsuri Boreliene mărginite; să notăm că, de exemplu, funcţia gaussiană $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ aparţine lui QAP($\mathbb{R}$) (fiind propria sa transformată Fourier) dar nu aparţine şi lui AP($\mathbb{R}$).

Media temporală a unei funcţii $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ local integrabile (adică integrabilă pe orice subinterval compact) se defineşte prin formula

$$M_{temp}(\varphi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\, dt.$$

sub rezerva că limita din membrul drept există.

Un rezultat important în teoria funcţiilor aproape periodice este existenţa mediei temporale. Vezi [2], pp. 30-31. Mai general, are loc următorul rezultat:

Teorema 2 (Lema Riemann-Lebesgue generalizată). *Orice* $\varphi \in$QAP($\mathbb{R}$) *admite medie temporală şi*

$$\text{(RL)} \qquad \lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(\xi x)\, dx = M_{temp}(\varphi) \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$$

pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *integrabilă Lebesgue.*

Demonstraţie. Ca urmare a aproximării uniforme, ne putem limita la situaţia când

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} d\mu(\omega)$$

caz în care

$$\begin{aligned} M_{temp}(\varphi) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(t)\,dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i\omega t} dt \right) d\mu(\omega) \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \omega T}{\omega T} d\mu(\omega) = \mu(\{0\}), \end{aligned}$$

datorită Teoremei lui Lebesgue, a convergenţei dominate. Rămâne de stabilit egalitatea din enunţ. Folosind densitatea subspaţiului funcţiilor etajate şi liniaritatea integralei, este suficent să ne restrângem la cazul când f este funcţia caracteristică a unui interval mărginit, de exemplu, $f = \chi_{[a,b]}$. Or, în acest caz avem

$$\begin{aligned} \lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x)\,\varphi(\xi x)\,dx &= \lim_{|\xi|\to\infty} \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega\xi x} d\mu(\omega) \right) dx \\ &= \lim_{|\xi|\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^b e^{-i\omega\xi x} dx \right) d\mu(\omega) \\ &= \mu(\{0\})(b-a) = M_{temp}(\varphi)\cdot \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

ţinând seama de relaţia de mai sus, de Teorema convergenţei dominate, precum şi de faptul că

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_a^b e^{-i\omega\xi x} dx = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \omega \neq 0 \\ b-a, & \text{dacă } \omega = 0. \blacksquare \end{cases} .$$

Corolarul 1. *Dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcţie periodică, de perioadă T, atunci*

$$M_{temp}(\varphi) = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt.$$

Pentru funcţiile $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrabile Lebesgue se poate defini *media spaţială* prin formula

$$M_{sp}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Corolarul 2. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ o funcţie integrabilă Lebesgue şi fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcţie quasi-aproape periodică. Atunci*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\varphi(\xi x)\,dx \right) = M_{sp}(f)\cdot M_{temp}(\varphi).$$

Particularizând acest rezultat la cazul funcţiilor caracteristice, deducem că esenţa formulei (RL) din Lema Riemann-Lebesgue generalizată este aceea de "asimptotic egală distribuire" a valorilor funcţiei φ în sensul că

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{1}{(b-a)\,\xi}\int_{a\xi}^{b\xi} \varphi(x)\,dx = M_{temp}(\varphi)$$

pentru orice $a < b$.

Folosind Teorema Radon-Nikodým, putem reformula Teorema 2 astfel:

Corolarul 3. *Fie P o măsură Radon de probabilitate pe $\mathbb{R}$ (absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue) şi fie $\varphi \in QAP(\mathbb{R})$. Atunci*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi x)\, dP(x) = M_{temp}(\varphi).$$

Dacă P nu este absolut continuă, atunci afirmaţia din Corolarul 3 poate să nu mai fie adevărată. De exemplu, pentru $P = \delta(x-1)$, avem

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi x)\, dP(x) = \lim_{|\xi| \to \infty} \varphi(\xi)$$

care nu există dacă φ este periodică şi neconstantă.

Legat de Teorema 2, este următorul fapt:

Teorema 3. *Fie μ o măsură boreliană mărginită pe $\mathbb{R}$ şi fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcţie măsurabilă Borel şi mărginită, care admite medie temporală. Atunci funcţia F : $\xi \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi x)\, d\mu(x)$ admite de asemenea medie temporală şi aceasta este egală cu $\varphi(0)\mu(\{0\}) + M_{temp}(\varphi)\mu(\mathbb{R}\backslash\{0\})$.*

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi x)\, d\mu(x) \right) d\xi = \lim_{T \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(\xi x)\, d\xi \right) d\mu(x)$$

şi

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(\xi x)\, d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2T|x|} \int_{-T|x|}^{T|x|} \varphi(\xi) d\xi, & \text{dacă } x \neq 0 \\ \varphi(0), & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

ceea ce potrivit Teoremei convergenţei dominate conduce la concluzia din enunţ. ■

Putem lega Teorema 2 de posibilitatea generalizării transformatei Fourier.

Să notăm cu $C_\infty(\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, cu proprietatea că au limită finită la $-\infty$ şi la ∞. Este binecunoscut că asemenea funcţii sunt uniform continue şi mărginite. Vezi [4], pag. 199, Corolarul 4.4.10.

Pentru $\varphi \in$QAP$(\mathbb{R})$, considerăm transformarea liniară

$$T_\varphi : L^1(\mathbb{R}) \to C_\infty(\mathbb{R}), \quad T_\varphi(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\varphi(\xi x)}\, dx;$$

corectitudinea definiţiei lui T_φ este asigurată de Teorema 2. Când $\varphi = e^{ix}$, T_φ reprezintă transformata Fourier uzuală. Ar fi interesant de stabilit dacă această generalizare are aplicaţii concrete la studiul ecuaţiilor diferenţiale.

Doamna Silvia-Otilia Corduneanu (de la Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" din Iaşi) ne-a atras atenţia asupra lucrărilor lui C. Zhang [5], care pun în evidenţă clasa aşa numitelor funcţii pseudo-aproape periodice. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se zice că este *pseudo-aproape periodică* dacă este continuă şi mărginită şi se poate scrie ca suma dintre o funcţie aproape periodică şi o funcţie continuă şi mărginită, a cărui modul are media temporală 0. Conform discuţiei de mai sus, orice funcţie pseudo-aproape periodică admite medie temporală. Aşa cum a observat C. Zhang, aceste funcţii admit primitive pseudo-aproape periodice.

Funcţiile quasi-aproape periodice sunt de asemenea pseudo-aproape periodice. Această incluziune este strictă. Într-adevăr, funcţiile quasi-aproape periodice sunt uniform continue, în vreme ce există funcţii pseudo-aproape periodice care nu au această proprietate.

Bibliografie

[1] R. Anişca, Fl. Popovici and M. Bencze, *A simple proof of the generalized Lemma of Riemann*, Gazeta Matematică (seria pentru informare ştiinţifică şi perfecţionare metodică) **IV** (1996), no. 2, pp. 99-103.
[2] C. Corduneanu, *Funcţii aproape periodice*, Ed. Academiei Republicii Populare Române, Bucureşti, 1961.
[3] T. Ganea, *Serii trigonometrice*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.
[4] C. P. Niculescu, *Fundamentele analizei matematice*, vol. 1: *Analiza pe dreapta reală*. Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1996.
[5] C. Zhang, *Pseudo Almost Periodic Functions and Their Applications.* Teză de doctorat, University of Western Ontario, 1992. Vezi şi lucrările sale din J. of Math. Analysis and Applications, volumele **181** (1994), pp. 62-76 şi **192** (1995), pp. 543-561.

Universitatea din Craiova, Facultatea de matematică-informatică, Craiova 1100
E-mail address: tempus@oltenia.ro

Institutul de matematică al Academiei Române
E-mail address: dvuza@stoilow.imar.ro