

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

**ANALIZA NELINIARA
APLICATA**

Analiza neliniara aplicata
Indrumar pentru curs si seminar

Andaluzia Matei

Cuprins

Curs 1	1
Seminar 1	11
Curs 2	16
Seminar 2	19
Curs 3	23
Seminar 3	29
Curs 4	37
Seminar 4	42
Curs 5	49
Seminar 5	54
Curs 6	59
Seminar 6	66
Curs 7	70
Seminar 7	78
Curs 8	83
Seminar 8	91
Curs 9	96
Seminar 9	105
Curs 10	110
Seminar 10	116

Curs 11	120
Seminar 11	125
Curs 12	127
Seminar 12	133
Curs 13	136
Seminar 13	142
Curs 14	147
Seminar 14	153
Bibliografie	154

Curs 1

Tematica: Preliminarii de analiza functionala. Spatii Sobolev in dimensiune 1

1.1 Preliminarii de analiza functionala

Trecem in revista câteva noțiuni importante despre spații normate, spații Hilbert, operatori liniari și continui, iar la final vom prezenta câteva teoreme de punct fix.

Fie X un spațiu vectorial real.

Definiția 1. Se numește normă pe X aplicația $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile

$$\text{N1)} \quad \|u\| \geq 0, \forall u \in X;$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0;$$

$$\text{N2)} \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|, \forall u \in X, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\text{N3)} \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in X.$$

Definiția 2. Se numește spațiu normat un spațiu vectorial X înzestrat cu o normă $(X, \|\cdot\|)$.

Definiția 3. Fie X un spațiu normat și $\|\cdot\|^{(1)}, \|\cdot\|^{(2)}$ două norme arbitrare pe X . Cele două norme sunt echivalente, și scriem $\|\cdot\|^{(1)} \sim \|\cdot\|^{(2)}$, dacă există două constante $c_1, c_2 > 0$ astfel încât

$$c_1 \|u\|^{(1)} \leq \|u\|^{(2)} \leq c_2 \|u\|^{(1)} \quad \forall u \in X.$$

Definiția 4. Spunem că un șir $(u_n)_n \subset X$ converge tare la $u \in X$ dacă

$$\|u_n - u\|_X \rightarrow 0 \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Definiția 5. Spunem că un șir $(u_n)_n \subset X$ este mărginit dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât

$$\|u_n\|_X \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiția 6. Fie X un spațiu normat. Șirul $(u_n)_n \subset X$ se numește șir Cauchy dacă

$$\|u_n - u_m\|_X \rightarrow 0 \text{ când } n, m \rightarrow \infty.$$

În orice spațiu normat, orice șir convergent este Cauchy.

Definiția 7. Se numește complet un spațiu normat în care orice șir Cauchy este convergent.

Definiția 8. Se numește spațiu Banach un spațiu vectorial normat complet.

Definiția 9. Se numește produs scalar o aplicație $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile

- 1) $(u, u)_X \geq 0, \forall u \in X;$
 $(u, u)_X = 0 \Leftrightarrow u = 0;$
- 2) $(u, v)_X = (v, u)_X, \forall u, v \in X.$
- 3) $(\alpha u + \beta v, w)_X = \alpha (u, w)_X + \beta (v, w)_X, \forall u, v, w \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

Definiția 10. Un spațiu vectorial (liniar) înzestrat cu un produs scalar $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ se numește spațiu pre-Hilbert.

Orice spațiu pre-Hilbert $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ este spațiu normat (il putem înzestra cu norma indusă de produsul scalar $\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X}$ pentru oricare $u \in X$).

Definiția 11. Un spațiu pre-Hilbert complet se numește spațiu Hilbert.

Fie $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu Hilbert.

1) **Inegalitatea Cauchy-Schwarz:**

$$|(u, v)_X| \leq \|u\|_X \cdot \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

2) **Identitatea paralelogramului:**

$$\|u + v\|_X^2 + \|u - v\|_X^2 = 2 \cdot (\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2) \quad \forall u, v \in X.$$

Definiția 12. Fie X și Y două spații normate. Spunem că operatorul $L : X \rightarrow Y$ este liniar dacă

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in X \text{ și } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definiția 13. Fie X și Y două spații normate. Operatorul $L : X \rightarrow Y$ este continuu dacă și numai dacă pentru orice sir $(u_n) \subset X$,

$$u_n \rightarrow u \text{ în } X \Rightarrow L(u_n) \rightarrow L(u) \quad \text{în } Y$$

când $n \rightarrow \infty$.

Caracterizarea continuității pentru aplicații liniare: dacă L este operator liniar, atunci L este continuu dacă și numai dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât

$$\|L(u)\|_Y \leq M \cdot \|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Notăm cu $\mathcal{L}(X, Y)$ spațiul operatorilor $L : X \rightarrow Y$ liniari și continui.

Definiția 14. Fie $L \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definim norma operatorului L prin

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{u \in X, u \neq 0_X} \frac{\|L(u)\|_Y}{\|u\|_X}.$$

Remarca 15. Dacă Y este spațiu Banach atunci $\mathcal{L}(X, Y)$ este spațiu Banach.

De-a lungul acestui curs vom folosi notația $L(u) = Lu$.

Definiția 16. Fie X un spațiu normat. Spațiul $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ poartă numele de dualul lui X .

Elementele lui $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ sunt funcționale liniare și continue.

Notăm cu X' dualul lui X . Norma pe X' este dată de

$$\|\varphi\|_{X'} = \sup_{u \in X, u \neq 0_X} \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|_X}.$$

$(X', \|\cdot\|_{X'})$ este spațiu Banach.

Definiția 17. Spunem că $(u_n)_n \subset X$ este convergent în sens slab la $u \in X$, și notăm $u_n \rightharpoonup u$, dacă

$$\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u) \text{ când } n \rightarrow \infty, \quad \forall \varphi \in X'.$$

Remarca 18. Convergența tare implică convergența slabă. Invers nu este totdeauna adevărat.

Fie X un spațiu normat. Mulțimea $K \subset X$ se numește

-
- i) închisă tare dacă limita fiecărui șir convergent de elemente din K rămâne în K ,
adică pentru orice sir $(u_n) \subset K$,

$$u_n \rightarrow u \text{ în } X \Rightarrow u \in K.$$

- ii) închisă în sens slab dacă limita fiecărui șir de elemente din K , convergent în sens slab, rămâne în K , adică pentru orice sir $(u_n) \subset K$,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ în } X \Rightarrow u \in K.$$

Fiecare submulțime închisă în sens slab este închisă în sens tare. Reciproca nu este, în general, adevărată.

Definiția 19. O submulțime K a unui spațiu liniar se numește convexă dacă pentru orice două elemente $u, v \in K$ avem

$$(1 - \lambda)u + \lambda v \in K \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Teorema 20. (*Teorema lui Mazur*) O submulțime convexă a unui spațiu Banach este închisă în sens tare dacă și numai dacă este închisă în sens slab.

Continuam cu cateva elemente de teoria formelor si operatorilor.

Definiția 21. Fie X si Y spatii vectoriale.

O aplicatie $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ se numeste *forma biliniara* daca este liniara in fiecare argument, adica pentru oricare $u_1, u_2, u \in X, v_1, v_2, v \in Y, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v),$$

$$a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2).$$

Daca $X = Y$, spunem ca forma biliniara este *simetrica* daca

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

Definiția 22. Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ si $(Y, \|\cdot\|_Y)$ doua spatii normate. O forma biliniara $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ se numeste *continua* daca exista $M > 0$ astfel incat

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_Y \quad \forall u \in X, \forall v \in Y.$$

Daca $X = Y$, spunem ca o forma biliniara a este *X-eliptica* daca exista $m > 0$ astfel incat

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Definiția 23. Fie X un spațiu înzestrat cu produsul scalar $(\cdot, \cdot)_X$ și norma $\|\cdot\|_X$ și fie $A : X \rightarrow X$ un operator.

Operatorul A este monoton dacă

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

Operatorul A este tare monoton dacă există o constantă $m > 0$ astfel încât

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \cdot \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X.$$

Definiția 24. Operatorul A este nonexpansiv dacă

$$\|Au - Av\|_X \leq \|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Definiția 25. Operatorul A este Lipschitz dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât

$$\|Au - Av\|_X \leq M \cdot \|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Remarca 26. Orice operator Lipschitz este continuu.

Teorema 27. Fie K o submulțime nevidă și închisă a unui spațiu Hilbert X . Atunci, pentru fiecare $f \in X$ există un unic element $u \in K$ astfel încât

$$\|u - f\|_X = \min_{v \in K} \|v - f\|_X. \quad (1)$$

Această teoremă ne permite să dăm următoarea definiție.

Definiția 28. Fie K o submulțime convexă, închisă și nevidă a unui spațiu Hilbert X . Atunci pentru fiecare $f \in X$ elementul u care satisface (1) se numește proiecția lui f pe K și este notată $P_K f$. Mai mult, operatorul $P_K : X \rightarrow K$ se numește operatorul de proiecție pe K .

Propoziția 29. [Caracterizarea proiecției] Fie K o submulțime convexă, închisă și nevidă a unui spațiu Hilbert X și fie $f \in X$.

Atunci $u = P_K f \Leftrightarrow$

$$u \in K, (u, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Teorema 30. (Teorema de reprezentare a lui Riesz) Fie $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un spațiu Hilbert și fie $\varphi \in X'$. Atunci există un unic element $u \in X$ astfel încât

$$\varphi(v) = (u, v)_X \quad \forall v \in X.$$

În plus,

$$\|\varphi\|_{X'} = \|u\|_X.$$

Teorema 31. Dacă X este un spațiu Hilbert atunci orice șir mărginit din X conține un subșir slab convergent.

Teorema 32. Fie X un spațiu Hilbert și fie $(u_n)_n$ un șir mărginit de elemente din X astfel încât fiecare subșir slab convergent al lui (u_n) converge (slab) la aceeași limită $u \in X$. Atunci $u_n \rightharpoonup u$ în X (adică tot șirul converge slab la u .)

Definiția 33. Fie X și Y două spații normate. Operatorul $L : X \rightarrow Y$ se numește complet continuu dacă și numai dacă pentru orice șir $(u_n) \subset X$, din $u_n \rightharpoonup u$ în X rezultă

$$L(u_n) \rightarrow L(u) \quad \text{în } Y$$

când $n \rightarrow \infty$.

Definiția 34. Fie X un spațiu normat. O submulțime $K \subset X$ se numește mărginită dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât

$$\|u\|_X \leq M \quad \forall u \in K.$$

Definiția 35. Fie X un spațiu normat. O submulțime $K \subset X$ se numește relativ (secvențial) compactă dacă orice șir din K conține un subșir convergent în X .

Definiția 36. Fie X și Y două spații normate. Operatorul $\Lambda : K \subset X \rightarrow Y$ este compact dacă este continuu și duce mulțimi mărginite în mulțimi relativ (secvențial) compacte.

Propoziția 37. Orice operator liniar și compact este complet continuu.

Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu Banach și K o submulțime a lui X .

Fie $\Lambda : K \rightarrow X$ un operator.

Ne interesează să studiem existența unui element $u \in K$ ce verifică

$$\Lambda u = u. \quad (2)$$

Un element ce verifică relația (2) se numește punct fix.

În ceea ce urmează vom prezenta teoreme de punct fix pentru operatori univoci:

Teorema 38. *(Teorema de punct fix a lui Banach) Fie K o submulțime nevidă închisă a spațiului Banach $(X, \|\cdot\|_X)$.*

Dacă $\Lambda : K \rightarrow K$ este o contracție, adică există $\alpha \in [0, 1)$ astfel încât

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \leq \alpha \|u - v\| \quad \forall u, v \in K,$$

atunci există un unic element $u \in K$ astfel încât $\Lambda u = u$.

Vom enunța încă o versiune a Teoremei lui Banach de punct fix. În acest scop, pentru un operator Λ definim puterile sale în mod inductiv prin formula $\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1})$ pentru $m \geq 2$.

Teorema 39. *Presupunem că K este o submulțime nevidă și închisă a unui spațiu Banach X și fie $\Lambda : K \rightarrow K$. Presupunem, de asemenea, că $\Lambda^m : K \rightarrow K$ este o contracție pentru un întreg pozitiv m . Atunci Λ are un unic punct fix.*

Teorema 40. *(Teorema de punct fix a lui Schauder) Fie K o submulțime nevidă, închisă, convexă și mărginită a spațiului Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ și fie $\Lambda : K \rightarrow X$ un operator compact astfel încât $\Lambda(K) \subset K$. Atunci Λ are cel puțin un punct fix.*

Pentru detalii privind aceasta prima secțiune a cursului a se vedea, de exemplu, [50] and [34].

1.2 Spații Sobolev în dimensiune 1

Considerăm $I \subset \mathbb{R}$ deschis.

Fie $f \in L^p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definiția 41. $f \in L^p(I)$ este derivabilă în sens slab dacă există $g \in L^p(I)$ astfel încât

$$\int_I f \varphi' dx = - \int_I g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

($\varphi \in C_c^1(I)$ este funcție de clasă C^1 cu suport compact; $\text{supp} \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$.)

Vom numi φ funcție test.

Definiția 42. Spunem ca $f \in L^1_{loc}(I)$ dacă și numai dacă pentru oricare compact $K \subset I$,

$$\int_K |f(x)| dx < \infty.$$

Lema fundamentală a calculului variațional în 1D. Fie $f \in L^1_{loc}(I)$. Dacă

$$\int_I f \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I),$$

atunci rezultă că

$$f = 0 \text{ a.p.t. în } I.$$

Derivata slabă este "unică". Într-adevăr, fie $f \in L^p(a, b)$.

Presupunem că $g_1, g_2 \in L^p(a, b)$ sunt derivate în sens slab.

$$\int_I f \varphi' dx = - \int_I g_1 \varphi dx,$$

$$\int_I f \varphi' dx = - \int_I g_2 \varphi dx.$$

Scăzând ultimele două relații obținem

$$0 = \int_I (g_2 - g_1) \varphi dx.$$

Cum $g_2 - g_1 \in L^p(I)$ rezultă ca $g_2 - g_1 \in L^1_{loc}(I)$. Utilizăm Lema fundamentală a calculului variațional și obținem

$$g_2 = g_1 \text{ a.p.t. } x \in I.$$

$$W^{1,p}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^p(I), \text{ există } g \in L^p(I) \text{ a.î. } \int_I f \varphi' dx = - \int_I g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)\},$$

$$(W^{1,p}(I) = \{f \in L^p(I), f' \in L^p(I)\}).$$

$$W^{2,p}(I) = \{f \in W^{1,p}(I), f' \in W^{1,p}(I)\} = \{f \in L^{1p}(I), f' \in L^p(I), f'' \in L^p(I)\},$$

$$W^{k,p}(I) = \{f \in W^{k-1,p}(I), f' \in W^{k-1,p}(I)\}$$

($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$)

$$(W^{1,p}(I), \|\cdot\|_{W^{1,p}(I)})$$

este spațiu Banach inzestrat cu norma

$$\|v\|_{W^{1,p}(I)} = \|v\|_{L^p(I)} + \|v'\|_{L^p(I)}.$$

Dacă $p = 2$, $W^{1,2}(I)$ este spațiu Hilbert si notam $W^{1,2}(I) = H^1(I)$.

In acord cu [5], $H^1(I)$ se scufundă continuu în $C(\bar{I})$ adica: există $c > 0$, astfel încât

$$\|v\|_{C(\bar{I})} \leq c \|v\|_{H^1(I)}.$$

$$i : H^1(I) \rightarrow C(\bar{I}), \quad iu = u,$$

$$\|iu\|_{C(\bar{I})} \leq c \|u\|_{H^1(I)} \Leftrightarrow \|u\|_{C(\bar{I})} \leq c \|u\|_{H^1(I)}.$$

Amintim ca,

$$\|v\|_{C(\bar{I})} = \max_{x \in \bar{I}} |v(x)|.$$

si,

$$\|v\|_{H^1(I)} = \|v\|_{L^2(I)} + \|v'\|_{L^2(I)},$$

Consideram urmatorul produs scalar:

$$(\cdot, \cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v)_{H^1(I)} = (u, v)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)}.$$

Norma indusa de acest produs scalar este

$$\|u\|_{H^1(I)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(I)}} = \sqrt{\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2}.$$

Notam ca $\|\cdot\|_{H^1(I)}$ și $|||\cdot|||_{H^1(I)}$ sunt norme echivalente.

Într-adevăr, există $c_1, c_2 > 0$ astfel încât

$$c_1 \|u\|_{H^1(I)} \leq |||u|||_{H^1(I)} \leq c_2 \|u\|_{H^1(I)}.$$

Dacă introducem notatiile $\|u\|_{L^2(I)} = a$ și $\|u'\|_{L^2(I)} = b$, trebuie sa gasim doua constante strict pozitive astfel incat dubla inegalitate algebrica elementara se verifica:

$$c_1(a + b) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq c_2(a + b), \quad a, b \geq 0.$$

Putem lua $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $c_2 = 1$.

Definim

$$H_0^1(I) = \overline{C_c^1(I)}^{\|\cdot\|_{H^1(I)}}.$$

Daca de exemplu $I = (0, 1)$ si $v \in H_0^1(0, 1)$ atunci $v(0) = v(1) = 0$.

Pe $H_0^1(I)$ putem considera urmatoarea structura particulara:

$$\begin{aligned}(u, v)_{H_0^1(I)} &= (u', v')_{L^2(I)}, \\ \|u\|_{H_0^1(I)} &= \|u'\|_{L^2(I)}.\end{aligned}$$

Teorema 43. *[Inegalitatea lui Poincaré; a se vedea [5]] Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval deschis, mărginit. Atunci există $C_p > 0$ astfel încât*

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq C_p \|u'\|_{L^2(I)}, \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Utilizand Inegalitatea lui Poincaré se poate justifica usor ca $(H_0^1(I), (\cdot, \cdot)_{H_0^1(I)}, \|\cdot\|_{H_0^1(I)})$ este spațiu Hilbert.

Remarca 44. Există $\widetilde{C}_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \widetilde{C}_p \|u'\|_{L^2(I)} \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Fie $I = (0, 1)$ și

$$V = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0\}.$$

$$(V, (\cdot, \cdot)_{H^1(0,1)}, \|\cdot\|_{H^1(0,1)})$$

este spațiu Hilbert fiind un subspatiu închis al lui $H^1(0, 1)$.

Pe V putem considera urmatoarea structura particulara:

$$\begin{aligned}(u, v)_V &= (u', v')_{L^2(I)}, \\ \|u\|_V &= \|u'\|_{L^2(I)}.\end{aligned}$$

Inegalitate de tip Poincaré (pentru demonstratie a se vedea Raviart-Thomas)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval deschis, mărginit. Atunci există $C_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq C_p \|u'\|_{L^2(I)}, \quad \forall u \in V.$$

$(V, (\cdot, \cdot)_V, \|\cdot\|_V)$ este de asemenea un spațiu Hilbert.

Remarca 45. Există $\widetilde{C}_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \widetilde{C}_p \|u'\|_{L^2(I)} \quad \forall u \in V.$$

Pentru mai multe detalii privind spatiile Sobolev in 1D se poate consulta [5].

Seminar 1

Exercițiul 1. Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu normat și $K \subset X$ o submulțime nevidă. Justificați că dacă K este închisă în sens slab atunci K este închisă în sens tare. Dar reciproc?

Cum convergența tare implică convergența slabă deducem imediat că dacă K este închisă în sens slab atunci K este închisă în sens tare. Reciproc este adevărat doar dacă K este în plus și convexe.

Exercițiul 2. Fie K o submulțime convexă, închisă și nevidă a unui spațiu Hilbert X .

Operatorul de proiecție este monoton, adică

$$(P_K u - P_K v, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X$$

și nonexpansiv, adică

$$\|P_K u - P_K v\|_X \leq \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Fie $G_K : X \rightarrow X$ un operator definit prin

$$G_K(u) = u - P_K u \quad \forall u \in X.$$

Atunci sunt verificate următoarele proprietăți:

$$(G_K(u) - G_K(v), u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X$$

$$\|G_K(u) - G_K(v)\|_X \leq 2 \cdot \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X$$

$$(G_K(u), v - u)_X \leq 0 \quad \forall u \in X, v \in K$$

$$G_K(u) = 0 \Leftrightarrow u \in K.$$

Rezolvarea se bazează pe caracterizarea proiecției. Pentru detalii a se vedea pagina 14 în [50].

Exercițiul 3. Fie $(u_n) \subset X$ un sir astfel incat $u_n \rightharpoonup u$ in X . Atunci

$$(u_n, v)_X \rightarrow (u, v)_X \text{ când } n \rightarrow \infty, \quad \forall v \in X.$$

Ind. Se utilizeaza Teorema de reprezentare a lui Riesz si definitia convergentei in sens slab.

Exercițiul 4. Există $\widetilde{C}_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \widetilde{C}_p \|u'\|_{L^2(I)} \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Ind. $\|u\|_{H^1(I)} = \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)} \leq (1 + C_p) \|u'\|_{L^2(I)}$, pot lua $\widetilde{C}_p = 1 + C_p$, unde C_p este constanta Poincaré.

Exercițiul 5. Fie $I = (0, 1)$ și $V = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0\}$. V este un subspatiu inchis al lui $H^1(0, 1)$.

Intr-adevar, 1) V este subspatiu liniar

$$\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V.$$

$$\alpha u + \beta v \in H^1(0, 1) \text{ și } (\alpha u + \beta v)(0) = \alpha u(0) + \beta v(0) = 0.$$

2) V este inchis

Fie $(v_n)_n \subset V$ sir convergent,

$$v_n \rightarrow v \left(\|v_n - v\|_{H^1(I)} \rightarrow 0 \right) \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Arăt că $v \in V$.

Cum $(v_n)_n \subset H^1(0, 1)$ și $v_n \rightarrow v$ când $n \rightarrow \infty$ în $H^1(0, 1)$ rezultă că $v \in H^1(0, 1)$.

Arătăm acum că $v(0) = 0$.

$$0 \leq |v(0)| \leq \|v\|_{C([0,1])} = \max_{x \in [0,1]} |v(x)| \leq c \|v\|_{H^1(I)},$$

$$|v(0)| = |v(0) - v_n(0) + v_n(0)| \leq |v(0) - v_n(0)| + |v_n(0)| = |(v_n - v)(0)| \leq \max_{x \in [0,1]} |(v_n - v)(x)| =$$

$$\|v_n - v\|_{C(\bar{I})} \leq c \|v_n - v\|_{H^1(0,1)}, \quad \bar{I} = [0, 1].$$

Trecem la limita si folosim criteriul clestelui.

$$\text{Rezultă că } |v(0)| = 0 \Rightarrow v(0) = 0.$$

Exercițiul 6. Orice operator Lipschitz este continuu.

Ind. Se utilizeaza definitia continuitatii unui operator cu siruri (vezi curs).

Exercițiul 7. Fie $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară, continuă, X-eliptică și simetrică. Definim $A : X \rightarrow X$ prin

$$(Au, v)_X = a(u, v).$$

Arătați că A este tare monoton și Lipschitz.

- A tare monoton: Fie $u, v \in X$.

$$\begin{aligned} (Au - Av, u - v)_X &= (Au, u - v)_X - (Av, u - v)_X = a(u, u - v) - a(v, u - v) \\ &= a(u - v, u - v). \end{aligned}$$

Cum a este X-eliptică, avem

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \cdot \|u - v\|_X^2.$$

Deci A este tare monoton.

- A Lipschitz: Știm că

$$\|Au - Av\|_X = \sup_{w \in X, w \neq 0} \frac{(Au - Av, w)_X}{\|w\|_X}.$$

Evaluăm

$$\begin{aligned} \frac{(Au - Av, w)_X}{\|w\|_X} &= \frac{(Au, w)_X - (Av, w)_X}{\|w\|_X} = \frac{a(u, w) - a(v, w)}{\|w\|_X} \\ &= \frac{a(u - v, w)}{\|w\|_X} \leq \frac{|a(u - v, w)|}{\|w\|_X} \leq \frac{M \cdot \|u - v\|_X \cdot \|w\|_X}{\|w\|_X} \\ &= M \cdot \|u - v\|_X. \end{aligned}$$

Trecem la supremum

Deci A este Lipschitz.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N \geq 1$) un deschis mărginit de frontieră netedă.

Exemple de astfel de mulțimi:

- $N = 1$:

$$\Omega = I = (2, 3)$$

$$\partial\Omega = \{2, 3\}.$$

- $N = 2$:

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1\}$$

$$\partial\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1\}.$$

- $N = 3$:

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 < 5\}$$

$$\partial\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 5\}.$$

Definiția 8. O mulțime care este deschisă și conexă ("dintr-o bucată") se numește domeniu.

Fie $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Definim norma sa euclidiană prin

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}.$$

Definiția 9. Pentru o funcție $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 definim gradientul său prin

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Observatie: putem vorbi si de "gradient in sens slab" pentru functii $u \in L^p(\Omega)$.
Exemple:

- $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$; $\nabla u = (1, 2)$.
- $u(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$; $\nabla u = (2x_1, 4x_2)$.

Definiția 10. Pentru o funcție $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 definim operatorul lui Laplace prin

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}.$$

Exemplu:

- $u(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$; $\Delta u = 2 + 4 = 6$.

Pentru un punct $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \partial\Omega$, versorul normalei exterioare la frontiera în $\mathbf{x}$ se notează cu $\nu(\mathbf{x})$.

Fie $1 \leq p \leq \infty$.

- $1 \leq p < \infty$:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ măsurabile} : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\};$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $p = \infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ măsurabile} : \exists C > 0 \text{ a.î. } |f(x)| \leq C \text{ a.p.t. în } \Omega\};$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ a.p.t. în } \Omega\}.$$

Daca

- $1 \leq p \leq \infty$: $L^p(\Omega)$ este spațiu Banach;

-
- $1 < p < \infty : L^p(\Omega)$ este reflexiv;
 - $p = 2 : L^2(\Omega)$ este spațiu Hilbert, înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercițiul 11. Fie $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \text{dacă } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Verificați dacă $u \in L^2(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u(x)|^2 dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} |u(x)|^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |u(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Așadar, $u \in L^2(0, 1)$.

Tema Dacă $u \in L^\infty(I)$ atunci $u \in L^p(I)$, $\forall p$, $1 \leq p < \infty$.

Curs 2

Tematica: Spatii Sobolev in dimensiune $N > 1$

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o submultime deschisa.

Definiția 1. Fie $1 \leq p \leq \infty$ si $f \in L^p(\Omega)$. Spunem ca f este derivabila partial, in sens slab, in raport cu x_i daca exista $g_i \in L^p(\Omega)$ astfel incat

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Daca $f \in L^p(\Omega)$ admite derivate partiale in sens slab g_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, vom face urmatoarea notatie:

$$g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}.$$

Daca $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ este spațiu Banach inzestrat cu urmatoarea norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Norma $W^{1,p}(\Omega)$ este echivalenta cu norma

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N} + \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

$W^{1,p}(\Omega)$ este spațiu reflexiv pentru $1 < p < \infty$ a se vedea [5].

Teorema 2. [Teorema de urma, [34]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$. Fie $1 \leq p < \infty$.

Atunci exista un unic operator liniar si continuu $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ astfel incat:

- (1) $\gamma u = u|_{\Gamma}$ daca $u \in C^1(\bar{\Omega})$.
- (2) $\|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ unde $c = c(p, \Omega) > 0$.

-
- (3) *daca* $1 < p < \infty$, *atunci* $\gamma(W^{1,p}(\Omega)) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.
(4) *daca* $1 < p < N$ *atunci* $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ *este compact pentru orice* r *astfel incat* $1 \leq r < \frac{Np-p}{N-p}$.
(5) *daca* $p \geq N$ *atunci* $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ *pentru orice* $r \geq 1$.

Definiția 3. γu se numeste *urma* lui u pe Γ iar $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ se numeste *operator urmă*.

Amintim ca un operator continuu $A : X \rightarrow Y$ (X, Y spatii Banach), este *compact* *daca* pentru orice sir marginit $(u_n)_n \subset X$, $(Au_n)_n \subset Y$ contine un subsir tare convergent in Y ; a se vedea de exemplu [34].

Fie $1 \leq p < \infty$.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

Spatiul $W_0^{1,p}(\Omega)$ inzestrat cu norma indusa de $W^{1,p}(\Omega)$ este un spatiu Banach; *daca* $1 < p < \infty$, spatiul $W_0^{1,p}(\Omega)$ este spatiu Banach reflexiv; a se vedea [5].

Urmatoarea teorema ne da o caracterizare foarte utila a spatiului $W_0^{1,p}(\Omega)$ prin intermediul operatorului de urma γ .

Teorema 4. [a se vedea de exemplu [16, 34]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera neteda (de exemplu Lipschitz sau C^1). Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Atunci

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff \gamma u = 0 \text{ in } L^p(\Gamma).$$

Teorema 5. [Inegalitatea Poincaré, [5]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ submultime deschisa si mărginita. Atunci există $C_P = C_P(\Omega) > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Norma $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}$ este o norma pe $W_0^{1,p}(\Omega)$ echivalenta cu norma pe $W^{1,p}(\Omega)$.

In baza inegalitatii lui Poincaré se arata ca

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})$$

este un spatiu Banach.

Dualul lui $W_0^{1,p}(\Omega)$, ($1 \leq p < \infty$), se notează cu $W^{-1,p'}(\Omega)$ unde p' este exponentul conjugat al lui p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.)

Fie m un numar natural astfel incat $m \geq 2$ si p un numar real astfel incat $1 \leq p \leq \infty$. Se defineste prin recurenta

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}.$$

Spatiul $W^{m,p}(\Omega)$ este un spatiu Banach inzestrat cu norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

unde:

- α este un multi-indice, adica un sir finit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ cu $\alpha_i \geq 0$
- $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$
- $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u$

Teorema 6. *Admitem ca Ω este un domeniu marginit cu frontiera Lipschitz. Daca $k \in \mathbb{N}^*$ si $1 \leq p < \infty$ atunci: pentru oricare $v \in W^{k,p}(\Omega)$ exista un sir $(v_n)_n \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ astfel incat*

$$\|v_n - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

a se vedea de exemplu [19], pagina 32.

Acest rezultat poate fi privit si ca un rezultat de densitate si putem scrie:

$$W^{k,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})} \quad k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq p < \infty.$$

Teorema 7. *Pentru oricare $v \in W_0^{k,p}(\Omega)$ exista $(v_n)_n \subset C_c^\infty(\Omega)$ astfel incat*

$$\|v_n - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

a se vedea de exemplu [19] pagina 32. Avem asadar:

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)} \quad k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq p < \infty. \quad (1)$$

Seminar 2

Fie $p = 2$.

Fie $f \in L^2(\Omega)$. Amintim ca f este derivabila partial, in sens slab, in raport cu x_i daca exista $g_i \in L^2(\Omega)$ astfel incat

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Functiile g_i se numesc derivate partiale in sens slab ale lui f si pentru a simplifica scrierea se noteaza cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}.$$

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}}.$$

$$H^1(\Omega) = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}, \tag{1}$$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}. \tag{2}$$

În cazul $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ este spațiu Hilbert inzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N}.$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2}.$$

Teorema de urma pentru cazul $p = 2$ se enunta astfel:

Teorema 1. [Teorema de urma, [34]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$.

Atunci exista un unic operator liniar si continuu $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ astfel incat:

$$(1) \quad \gamma u = u|_{\Gamma} \text{ daca } u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

-
- (2) $\|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_{tr}\|u\|_{H^1(\Omega)}$ unde $c_{tr} = c_{tr}(\Omega) > 0$.
(3) $\gamma(H^1(\Omega)) = W^{1/2,2}(\Gamma)$.
(4) *daca* $N > 2$ *atunci* $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ *este compact pentru orice* r *astfel incat* $1 \leq r < \frac{2N-2}{N-2}$.
(5) *daca* $N \leq 2$ *atunci* $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ *pentru orice* $r \geq 1$.

$\gamma u \in L^2(\Gamma)$ se numeste *urma* lui u pe Γ iar $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ se numeste *operator urmă*.

Operatorul urma nu este nici injectiv, nici surjectiv.

Notam ca $W^{1/2,2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)$ si ca există $Z : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, operator numit *inversul la dreapta al lui* γ .

$$(Z\gamma)(u) = u \quad \forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Formula de tip Green pentru functii $v \in H^1(\Omega)$ Fie Ω deschis marginit cu frontiera Lipschitz si u o functie suficient de neteda. Atunci

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Intr-adevar, fie $v \in H^1(\Omega)$. In acord cu (1), există $(v_n)_n \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ astfel încât $v_n \rightarrow v$ când $n \rightarrow \infty$ în $H^1(\Omega)$. Aplicam acum formula lui Green pentru functii netede.

$$\int_{\Omega} \Delta u v_n dx = \int_{\partial\Omega} v_n \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_n dx, \quad \forall n \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u (v_n - v) dx + \int_{\Omega} \Delta u v dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} (v_n - \gamma v) d\Gamma \\ &+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v_n - \nabla v) dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\Omega} \Delta u (v_n - v) dx \right| = \left| (\Delta u, v_n - v)_{L^2(\Omega)} \right| \\ &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

și rezultă,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Delta u (v_n - v) dx = 0.$$

În continuare, facem o estimare a termenului $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} (\gamma v_n - \gamma v) d\Gamma$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} (\gamma v_n - \gamma v) d\Gamma \right| = \left| \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \gamma(v_n - v) \right)_{L^2(\partial\Omega)} \right| \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \cdot \|\gamma(v_n - v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} c_{tr} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

și rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} (\gamma v_n - \gamma v) d\Gamma = 0.$$

Asemanator:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v_n - \nabla v) dx = 0.$$

Trecem la $\lim_{n \rightarrow \infty}$ în (3) și obținem formula lui Green pe spații Sobolev.

Utilizand operatorul urma putem scrie *formula de integrare prin parti* pentru functii din $H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\Gamma} \gamma u \gamma v \nu_i d\Gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

unde ν_i ($i \in \{1, 2, \dots, N\}$) sunt componentele lui $\boldsymbol{\nu}$, versorul normalei exterioare la frontiera Γ ; a se vedea de exemplu [20]

Pentru a simplifica scrierea, uneori vom omite scrierea operatorului urma atunci cand scriem termeni integrali pe frontiera, de exemplu, putem scrie

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\Gamma} u v \nu_i d\Gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Teorema 2. [Inegalitatea Poincaré] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ submultime deschisa si mărginita. Atunci există $C_P = C_P(\Omega) > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Remarca 3. Există $\widetilde{C}_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \widetilde{C}_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Pe spatiul $H_0^1(\Omega)$ putem considera urmatorul produs scalar.

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N}$$

si norma asociata,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Cu ajutorul Inegalitatii lui Poincaré se poate demonstra ca $H_0^1(\Omega)$ este spatiu Hilbert in raport cu structura particulara precizata anterior.

$$(H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}, \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}).$$

Dualul lui $H_0^1(\Omega)$ se notează cu $H^{-1}(\Omega)$. Avem

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

cu injectii continue si dense, a se vedea de exemplu [5].

Dualul lui $H^{1/2}(\Gamma)$ se noteaza cu $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Remarca 4. $\gamma(H^1(\Omega))$ este densa in $L^2(\Gamma)$, a se vedea de exemplu [20].

Prin "injectie" intelegem aplicatia identica. O injectie $X \subset Y$ (X, Y spatii normate) este compacta daca orice submultime marginita a lui X este relativ compacta in Y (sau, cu siruri, din orice sir marginit in X putem extrage un subsir convergent in Y).

Spatiul $H_0^1(\Omega)$ este spatiu Banach reflexiv; a se vedea [5].

Teorema 5. [a se vedea de exemplu [16, 34]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera neteda (de exemplu Lipschitz sau C^1). Fie $u \in H^1(\Omega)$. Atunci

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff \gamma u = 0 \text{ in } L^2(\Gamma).$$

Notam ca $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 dx}$

unde

$$\|\nabla u(\cdot)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(\cdot) \right)^2}.$$

Exercițiul 6. Fie $(u_n)_n \subset H^1(\Omega)$ astfel încât $u_n \rightharpoonup u$ în $H^1(\Omega)$. Demonstrați că $u_n \rightarrow u$ în $L^2(\Omega)$.

Știm că $H^1(\Omega)$ se scufundă compact în $L^2(\Omega)$. Aceasta înseamnă că aplicația

$$i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), i(u) = u$$

este compactă. Cum i este și liniară, avem că i este aplicație complet continuă, adică

$$\forall (u_n)_n, u_n \rightharpoonup u \text{ în } H^1(\Omega) \Rightarrow u_n \rightarrow u \text{ în } L^2(\Omega).$$

Curs 3

Tematica: Probleme la limita in dimensiune 1; formulari variationale; solutii slabe

Supunem atentiei urmatoarele probleme la limita.

PROBLEMA 1. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad (2)$$

$$u'(1) = h(u(1)), \quad (3)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 : |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 2. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (4)$$

$$u(0) = 0, \quad (5)$$

$$u(1) \leq g, \quad u'(1) \leq 0, \quad (u(1) - g)u'(1) = 0, \quad (6)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

PROBLEMA 3. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (7)$$

$$u(0) = 0, \quad (8)$$

$$|u'(1)| \leq g, \quad u'(1) = -g \frac{u(1)}{|u(1)|} \text{ dacă } u(1) \neq 0, \quad (9)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

Problema 1 este o problema la limita posibil neliniara (daca h e functie liniara atunci problema este liniara). Problemele 2 si 3 sunt neliniare, neliniaritatea fiind "impusa" de conditiile la limita

$$u(1) \leq g, \quad u'(1) \leq 0, \quad (u(1) - g)u'(1) = 0,$$

respectiv

$$|u'(1)| \leq g, \quad u'(1) = -g \frac{u(1)}{|u(1)|} \text{ daca } u(1) \neq 0.$$

Remarca 1. Daca h in Problema 1 e functie liniara, atunci studiul variational se poate face cu ajutorul Lemei Lax-Milgram.

Lema 2. [Lax-Milgram, [5]] Fie X un spatiu Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o forma biliniara, continua si X -eliptica si $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicatie liniara si continua. Atunci exista un unic element $u \in X$ astfel incat

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in X. \quad (10)$$

Daca in plus a este si simetrica atunci

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in X$$

unde

$$J : X \rightarrow \mathbb{R} \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v).$$

Daca h nu e liniara, atunci studiul variational necesita utilizarea unor noi rezultate de analiza functionala: **Teorema Minty-Brower; Lema Lax-Milgram neliniara.** Problema 2 se poate rezolva cu Teorema lui Stampacchia (**in cadrul teoriei inegalitatilor varitionale de tipul I**) iar Problema 3 se poate studia **in cadrul teoriei inegalitatilor variationale de tipul II**, dupa cum vom vedea impreuna in cursul de semestrul acesta.

Ne propunem sa introducem notiunea de solutie slaba pentru fiecare dintre aceste probleme.

Studiul variational al Problemei 1

- Cazul particular $h \equiv 0$

PROBLEMA 4. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (11)$$

$$u(0) = 0, \quad (12)$$

$$u'(1) = 0, \quad (13)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$.

În acest caz problema la limita este o problema mixta omogena.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 4 și să studiem existența și unicitatea acesteia.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 4. Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul

$$V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}.$$

Fie $v \in V$.

Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$\int_0^1 -u''v dx = \int_0^1 f v dx$$

Utilizând integrarea prin părți (pe spații Sobolev) găsim

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx. \quad (14)$$

Ținând cont de condițiile la limita obținem

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx.$$

Definiția 3. Numim soluție în sens slab pentru Problema 4 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V,$$

dat fiind $f \in L^2(0, 1)$.

Teorema 4. Problema 4 are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Fie

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx$$

și

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Se arată că aplicația a este biliniară, continuă și V -eliptică, iar φ este liniară și continuă.

Aplicăm Teorema 1 (Lema Lax-Milgram) și găsim că Problema 4 are o unică soluție slabă. $\square$

• Cazul h liniara

PROBLEMA 5. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (15)$$

$$u(0) = 0, \quad (16)$$

$$u'(1) = -ku(1), \quad (17)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $k > 0$.

În acest caz problema la limita este o problema de tip Robin.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 5 și să studiem existența și unicitatea acesteia.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 5.

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul

$$V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}.$$

Fie $v \in V$. Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$\int_0^1 -u''v dx = \int_0^1 f v dx$$

Utilizând integrarea prin părți și condițiile la limita obținem

$$\int_0^1 u'v' dx + ku(1)v(1) = \int_0^1 f v dx.$$

Definiția 5. Numim soluție în sens slab pentru Problema 5 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_0^1 u'v' dx + ku(1)v(1) = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V,$$

dat fiind $f \in L^2(0, 1)$ și $k > 0$.

Teorema 6. Problema 5 are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Fie

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx + ku(1)v(1)$$

și

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Se arată că aplicația a este biliniară, continuă și V -eliptică, iar φ este liniară și continuă. Aplicăm Teorema 1 (Lema Lax-Milgram) și găsim că Problema 5 are o unică soluție slabă. $\square$

Remarca 7. Cazurile particulare studiate sunt probleme liniare. Am introdus notiunea de soluție slabă și cu ajutorul Lemei Lax-Milgram am putut studia existența și unicitatea soluției slabe în sensul introdus.

- h neliniară

PROBLEMA 6. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (18)$$

$$u(0) = 0, \quad (19)$$

$$u'(1) = h(u(1)), \quad (20)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0, |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 6.

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul

$$V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}.$$

Fie $v \in V$.

Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$\int_0^1 -u'' v dx = \int_0^1 f v dx$$

Utilizând integrarea prin părți găsim

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx. \quad (21)$$

Ținând cont de condițiile la limită,

$$\int_0^1 u'v' dx + h(u(1))v(1) = \int_0^1 f v dx.$$

Definiția 8. Numim soluție în sens slab pentru Problema 6 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_0^1 u'v' dx + h(u(1))v(1) = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V, \quad (22)$$

dat fiind $f \in L^2(0, 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Lipschitz și monotonă.

Remarca 9. În acest caz ipotezele Lemei Lax-Milgram nu mai pot fi verificate. Vom învăța în cursurile următoare noi rezultate de analiza funcțională ce permit rezolvarea unor astfel de probleme neliniare.

TEMĂ Studiați existența și unicitatea soluției slabe pentru problema

$$-u'' + u = f \text{ în } (0, 1),$$

$$u'(0) = 3, \quad u'(1) = 2,$$

unde $f \in L^2(0, 1)$.

Seminar 3

Breviar teoretic Amintim aici Lema Lax-Milgram.

Teorema 1. (*Lema Lax-Milgram*) Fie $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară, continuă și X -eliptică și $\varphi \in X'$. Atunci există un unic element $u \in X$ astfel încât

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in X. \quad (1)$$

Dacă în plus aplicația a este simetrică, atunci unica soluție a ecuației variaționale (1) minimizează funcționala energetică asociată

$$J : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u).$$

Definiția 2. Aplicația $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este formă biliniară dacă este liniară în fiecare argument, adică

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w),$$

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w),$$

pentru orice $u, v, w \in X$ și orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definiția 3. O formă $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este simetrică dacă

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

Definiția 4. O forma biliniară $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \cdot \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Definiția 5. O forma biliniară $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este X -eliptică dacă există o constantă $m > 0$ astfel încât

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Definiția 6. O forma $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este coerciva dacă

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow \infty} a(u, u) = \infty.$$

Exersam în acest seminar tehnica introducerii noțiunii de soluție slabă pentru o clasă de probleme pentru care putem aplica Lema Lax-Milgram în studiul existenței și unicității soluției slabe.

Fie următoarea problemă la limită (Dirichlet omogenă).

PROBLEMA 7. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (2)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (3)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 7 și să studiem existența și unicitatea acesteia.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 7.

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul $H_0^1(0, 1)$.

Fie $v \in H_0^1(0, 1)$.

Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$\int_0^1 -u''v dx = \int_0^1 f v dx.$$

Utilizând integrarea prin părți găsim

$$-\left(u'v|_0^1 - \int_0^1 u'v' dx\right) = \int_0^1 f v dx,$$

care se poate scrie

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx. \quad (4)$$

Cum $v \in H_0^1(0, 1)$, avem

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (5)$$

Ținând cont de (5), relația (4) devine

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx.$$

Definiția 7. Numim soluție în sens slab pentru Problema 7 o funcție $u \in H_0^1(0, 1)$ ce verifică

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1),$$

dat fiind $f \in L^2(0, 1)$.

Teorema 8. *Problema 7 are o unică soluție în sens slab.*

DEMONSTRAȚIE. Fie $a : H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx$. Vom arăta că aplicația a este biliniară, continuă și H_0^1 -eliptică.

- a biliniară:

Fie $u, v, w \in H_0^1(0, 1)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= \int_0^1 (\alpha u + \beta v)' w' dx = \int_0^1 (\alpha u' + \beta v') w' dx \\ &= \alpha \int_0^1 u' w' dx + \beta \int_0^1 v' w' dx = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w). \end{aligned}$$

Deci a este liniară în primul argument. Vom arăta că este liniară și în al doilea argument.

$$\begin{aligned} a(u, \alpha v + \beta w) &= \int_0^1 u'(\alpha v + \beta w)' dx = \int_0^1 (\alpha u'v' + \beta u'w') dx \\ &= \alpha \int_0^1 u'v' dx + \beta \int_0^1 u'w' dx = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w). \end{aligned}$$

Deci, a este liniară și în al doilea argument. Așadar, a este biliniară.

- a continuă:

Fie $u, v \in H_0^1(0, 1)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u'v' dx \right| = |(u', v')_{L^2(0,1)}| \leq \|u'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v'\|_{L^2(0,1)} \\ &= \|u\|_{H_0^1(0,1)} \cdot \|v\|_{H_0^1(0,1)}. \end{aligned}$$

Așadar, a este continuă (putem lua $M = 1$).

- a H_0^1 -eliptică:

Fie $u \in H_0^1(0, 1)$.

$$a(u, u) = \int_0^1 (u')^2 dx = \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 = \|u\|_{H_0^1(0,1)}^2.$$

Putem lua $m = 1$.

În ultima parte a demonstrației considerăm $\varphi : H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(v) = \int_0^1 f v dx$.

Vom arăta că $\varphi \in (H_0^1(0, 1))'$, adică φ este liniară și continuă.

- φ liniară:

Fie $u, v \in H_0^1(0, 1)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha v + \beta w) &= \int_0^1 f(\alpha v + \beta w) dx = \int_0^1 \alpha f v dx + \int_0^1 \beta f w dx \\ &= \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(w).\end{aligned}$$

Deci φ este liniară.

- φ continuă:

Fie $v \in H_0^1(0, 1)$.

$$\begin{aligned}|\varphi(v)| &= \left| \int_0^1 f v dx \right| = |(f, v)_{L^2(0,1)}| \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq (1 + \|f\|_{L^2(0,1)}) C_P \|v'\|_{L^2(0,1)} = (1 + \|f\|_{L^2(0,1)}) C_P \|v\|_{H_0^1(0,1)}.\end{aligned}$$

Luând $M = (1 + \|f\|_{L^2(0,1)}) C_P > 0$ găsim că φ este continuă.

În acest moment sunt satisfăcute toate ipotezele Teoremei 1 (Lema Lax-Milgram).

Aplicăm această teoremă și găsim că Problema 7 are o unică soluție slabă. $\square$

În ceea ce urmează ne propunem să analizăm o problemă la limită cu condiție Neumann omogenă.

PROBLEMA 8. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' + u = f \text{ în } (0, 1), \quad (6)$$

$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad (7)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 8 și să studiem existența și unicitatea acesteia.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 8.

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul $H^1(0, 1)$.

Fie $v \in H^1(0, 1)$.

Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (-u'' + u) v dx &= \int_0^1 f v dx \\ - \int_0^1 u'' v dx + \int_0^1 u v dx &= \int_0^1 f v dx.\end{aligned}$$

Utilizând integrarea prin părți găsim

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx. \quad (8)$$

Din (7) avem

$$u'(0) = u'(1) = 0. \quad (9)$$

Ținând cont de (9), relația (8) devine

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 fvd x.$$

Definiția 9. Numim soluție în sens slab pentru Problema 8 o funcție $u \in H^1(0, 1)$ ce verifică

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 fvd x \quad \forall v \in H^1(0, 1),$$

dat fiind $f \in L^2(0, 1)$.

Teorema 10. Problema 8 are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Fie $a : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv)dx$. Vom arăta că aplicația a este biliniară, continuă și H_0^1 -eliptică. Bilinearitatea se demonstrează ușor, într-un mod asemănător cu cel folosit în demonstrațiile anterioare.

- a continuă:

Fie $u, v \in H^1(0, 1)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx \right| \leq \left| \int_0^1 u'v' dx \right| + \left| \int_0^1 uv dx \right| \\ &= |(u', v')_{L^2(0,1)}| + |(u, v)_{L^2(0,1)}| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v'\|_{L^2(0,1)} + \|u\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Cum

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)} \text{ și } \|u'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)} \quad \forall u \in L^2(0, 1)$$

obținem

$$|a(u, v)| \leq 2\|u\|_{H^1(0,1)} \cdot \|v\|_{H^1(0,1)}.$$

Așadar, a este continuă.

- a H^1 -eliptică:

Fie $u \in H^1(0, 1)$.

$$a(u, u) = \int_0^1 ((u')^2 + u^2)dx = \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u\|_{L^2(0,1)}^2 = \|u\|_{H^1(0,1)}^2.$$

Putem lua $m = 1$.

În ultima parte a demonstrației considerăm $\varphi : H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(v) = \int_0^1 f v dx$. φ este liniară și continuă (vezi demonstrațiile anterioare). În acest moment sunt satisfăcute toate ipotezele Teoremei 1 (Lema Lax-Milgram). Aplicăm această teoremă și găsim că Problema 8 are o unică soluție slabă. $\square$

Considerăm acum o problema la limita cu condiție Neumann neomogenă pe frontieră.

PROBLEMA 9. *Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$-u'' + u = f \text{ în } (0, 1), \quad (10)$$

$$u'(0) = u'(1) = \alpha, \quad (11)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 9 și să studiem existența și unicitatea acesteia.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 9. Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul $H^1(0, 1)$. Fie $v \in H^1(0, 1)$. Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-u'' + u)v dx &= \int_0^1 f v dx \\ - \int_0^1 u'' v dx + \int_0^1 u v dx &= \int_0^1 f v dx. \end{aligned}$$

Utilizând integrarea prin părți găsim

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx. \quad (12)$$

Din (11) avem

$$u'(0) = u'(1) = \alpha. \quad (13)$$

Ținând cont de (13), relația (12) devine

$$\int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx + \alpha v(1) - \alpha v(0).$$

Definiția 11. Numim soluție în sens slab pentru Problema 9 o funcție $u \in H^1(0, 1)$ ce verifică

$$\int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx + \alpha v(1) - \alpha v(0) \quad \forall v \in H^1(0, 1),$$

dat fiind $f \in L^2(0, 1)$.

Teorema 12. *Problema 9 are o unică soluție în sens slab.*

DEMONSTRAȚIE. Fie $a : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv)dx$. Vom arăta că aplicația a este biliniară, continuă și H^1 -eliptică. Bilinearitatea se demonstrează ușor, într-un mod asemănător cu cel folosit în demonstrațiile anterioare.

- a continuă:

Fie $u, v \in H^1(0, 1)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx \right| \leq \left| \int_0^1 u'v'dx \right| + \left| \int_0^1 uvdx \right| \\ &= |(u', v')_{L^2(0,1)}| + |(u, v)_{L^2(0,1)}| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v'\|_{L^2(0,1)} + \|u\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Cum

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)} \text{ și } \|u'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)} \quad \forall u \in L^2(0, 1)$$

obținem

$$|a(u, v)| \leq 2\|u\|_{H^1(0,1)} \cdot \|v\|_{H^1(0,1)}.$$

Așadar, a este continuă.

- a H^1 -eliptică: Fie $u \in H^1(0, 1)$.

$$a(u, u) = \int_0^1 ((u')^2 + u^2)dx = \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u\|_{L^2(0,1)}^2 = \|u\|_{H^1(0,1)}^2.$$

Putem lua $m = 1$.

În ultima parte a demonstrației considerăm $\varphi : H^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(v) = \int_0^1 f v dx + \alpha v(1) - \alpha v(0)$.

Vom arăta că φ este liniară și continuă.

- φ liniară: Fie $u, v \in H^1(0, 1)$ și $\beta, \delta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\beta v + \delta w) &= \int_0^1 f(\beta v + \delta w)dx + \alpha(\beta v + \delta w)(1) - \alpha(\beta v + \delta w)(0) \\ &= \int_0^1 \beta f v dx + \int_0^1 \delta f w dx + \beta \alpha v(1) + \delta \alpha w(1) - \beta \alpha v(0) - \delta \alpha w(0) \\ &= \beta \left(\int_0^1 f v dx + \alpha v(1) - \alpha v(0) \right) + \delta \left(\int_0^1 f w dx + \alpha w(1) - \alpha w(0) \right) \\ &= \beta \varphi(v) + \delta \varphi(w). \end{aligned}$$

Deci φ este liniară.

-
- φ continuă: Fie $v \in H^1(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
|\varphi(v)| &= \left| \int_0^1 f v dx + \alpha v(1) - \alpha v(0) \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 f v dx \right| + |\alpha| \cdot |v(1)| + |\alpha| \cdot |v(0)| \\
&\leq \|f\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v\|_{L^2(0,1)} + |\alpha| \cdot \max_{x \in (0,1)} |v(x)| + |\alpha| \cdot \max_{x \in (0,1)} |v(x)| \\
&\leq (\|f\|_{L^2(0,1)} + 2|\alpha|) \|v\|_{H^1(0,1)}.
\end{aligned}$$

Deci φ este continuă.

În acest moment sunt satisfăcute toate ipotezele Teoremei 1 (Lema Lax-Milgram).
Aplicăm această teoremă și găsim că Problema 8 are o unică soluție slabă. $\square$

TEMĂ Studiați existența și unicitatea soluției slabe pentru problema

$$-u'' + u = f \text{ în } (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

unde $f \in L^2(0, 1)$.

Curs 4

Tematica: Probleme la limita in dimensiune 1; formulari variationale; solutii slabe
(II)

Fie problema la limita

PROBLEMA 10. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad (2)$$

$$u(1) \leq g, u'(1) \leq 0, \quad (3)$$

$$(u(1) - g)u'(1) = 0, \quad (4)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 10.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 10. Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul

$$V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}.$$

Fie $v \in V$.

Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$\int_0^1 -u''v dx = \int_0^1 f v dx$$

Utilizând integrarea prin părți găsim

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx. \quad (5)$$

Ținând cont de condițiile la limita,

$$-u'(1)v(1) + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in V. \quad (6)$$

Considerăm acum mulțimea

$$K = \{v \in V : v(1) \leq g\}.$$

Testând cu $v - u$ în (6) avem

$$-u'(1)(v(1) - u(1)) + \int_0^1 u'(v' - u')dx = \int_0^1 f(v - u)dx \quad \forall v \in V.$$

Fie $v \in K$. Rezultă că

$$v(1) \leq g. \quad (7)$$

$$-u'(1)(v(1) - u(1)) = -u'(1)(v(1) - g) + u'(1)(u(1) - g) = -u'(1)(v(1) - g).$$

Așadar,

$$\int_0^1 u'(v' - u')dx = \int_0^1 f(v - u)dx + u'(1)(v(1) - g). \quad (8)$$

Cum

$$u'(1)(v(1) - g) \geq 0, \quad (9)$$

obținem

$$\int_0^1 u'(v' - u')dx \geq \int_0^1 f(v - u)dx \quad \forall v \in K. \quad (10)$$

Definiția 1. Numim soluție în sens slab pentru Problema 10 o funcție $u \in K$ ce verifică relația (10).

În acest caz studiul existenței și unicității soluției slabe nu se poate face cu Lema Lax-Milgram. În schimb, se poate face cu ajutorul Teoremei lui Stampacchia.

Teorema 2. [Stampacchia, [5]] Fie X un spațiu Hilbert, $K \subseteq X$ submulțime nevidă închisă convexă, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară, continuă și X -eliptică și $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicație liniară și continuă. Atunci există un unic element $u \in K$ astfel încât

$$a(u, v - u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in K. \quad (11)$$

Dacă în plus a este și simetrică atunci

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K$$

unde

$$J : X \rightarrow \mathbb{R} \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v).$$

Teorema 3. Problema 10 are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Fie

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx$$

și

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Se arată că aplicația a este biliniară, continuă și V -eliptică, iar φ este liniară și continuă. Aplicăm Teorema lui Stampacchia cu

$$X = V$$

și

$$K = \{v \in V : v(1) \leq g\}.$$

Asadar, Problema 10 are o unică soluție slabă. $\square$

Inegalitatea (10) se numeste inegalitate variationala de tipul I. Notam ca aceasta inegalitate este guvernata de o forma biliniara.

Consideram in continuare urmatoarea problema la limita

PROBLEMA 11. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (12)$$

$$u(0) = 0, \quad (13)$$

$$|u'(1)| \leq g, u'(1) = -g \frac{u(1)}{|u(1)|} \text{ daca } u(1) \neq 0 \quad (14)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 56.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 11. Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul

$$V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}.$$

Fie $v \in V$. Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$\int_0^1 -u''v dx = \int_0^1 f v dx$$

Utilizând integrarea prin părți și condițiile la limita putem scrie

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in V$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx \quad (15)$$

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(v) = \int_0^1 f v dx \quad (16)$$

$$j : V \rightarrow \mathbb{R}, j(v) = g|v(1)|. \quad (17)$$

Definiția 4. Numim soluție în sens slab pentru Problema 10 o funcție $u \in K$ ce verifică

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in V \quad (18)$$

unde a , j și φ sunt definite anterior.

Inegalitatea de mai sus se numește inegalitate variațională de tipul II (guvernata de forma biliniară a).

Studiul acestei noi probleme variaționale nu se poate face cu mijloacele cunoscute până în prezent (nu putem aplica nici Lax-Milgram, nici Stampacchia).

În contextul acestui studiu (al soluțiilor slabe pentru probleme la limită) două întrebări importante se ridică:

- 1) se poate demonstra plus de regularitate pentru soluția slabă?
- 2) admitând că datele problemei este suficient de netede putem demonstra că soluția slabă este soluție clasică?

Pentru a simplifica prezentarea, vom răspunde la aceste două întrebări considerând problema Dirichlet omogenă.

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

$u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2(I)$.

Soluție clasică: $u \in C^2([0, 1])$ ce verifică (19).

Soluție slabă: $u \in H_0^1([0, 1])$ astfel încât

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I), f \in L^2(I) \text{ dat}.$$

Aplicăm Lema Lax- Milgram, problema (19) are o unică soluție slabă.

1) *Boot-strap procedure (plus de regularitate).*

Cu Lax- Milgram: $u \in H_0^1(I)$.

De fapt, putem demonstra că $u \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$.

Intr-adevar,

$$\int_0^1 u'v'dx = - \int_0^1 (-f)vdx,$$

rezultă

$$(u')' = -f.$$

Cum $-f \in L^2(I)$ rezultă

$$(u')' \in L^2(I),$$

și prin urmare

$$u \in H^2(I).$$

2) *Intoarcerea la soluția clasică* dacă $f \in C([0, 1])$.

Cum $(u')' = -f$ și $-f \in C([0, 1])$ rezultă că

$$u \in C^2([0, 1]).$$

Intr-adevar, utilizand *Teorema VIII.2* din [5] (pag.177):

$$u \in H^1 \text{ și } u' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^1(\bar{I})$$

$$u' \in H^1 \text{ și } u'' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u' \in C^1(\bar{I})$$

$$\text{Acum, din } u \in C^1(\bar{I}) \text{ și } u' \in C^1(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^2(\bar{I}).$$

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fvdx, \quad \forall v \in H_0^1(I) \supset C_c(I), (C_c \subset \overline{C_c} = H_0^1).$$

Cum

$$\int_0^1 u'v'dx = u'v|_0^1 - \int_0^1 u''vdx,$$

rezultă că

$$- \int_0^1 u''vdx = \int_0^1 fvdx, \quad \forall v \in C_c(I),$$

și prin urmare

$$\int_0^1 (u'' + f)vdx = 0, \quad \forall v \in C_c(I).$$

Cu lema fundamentală a calculului variațional rezultă că

$$u'' + f = 0 \text{ a.p.t.} \Rightarrow -u'' = f \text{ a.p.t. pe } I.$$

Deoarece u'' și f sunt funcții continue avem de fapt

$$u'' + f = 0 \text{ peste tot pe } I.$$

Seminar 4

Exercițiul 1. Fie $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Aratam ca exista $p \in [1, \infty]$ astfel incat $f \in L^p(-1, 1)$.

Metoda 1:

$\int_{-1}^1 |x|^p dx = \int_{-1}^0 (-x)^p dx + \int_0^1 x^p dx < \infty$. Rezultă că $f \in L^p(-1, 1)$, $\forall p \in [1, \infty)$.

Metoda 2: Observăm că $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in (-1, 1)$. Așadar, f este mărginită, deci $f \in L^\infty(-1, 1)$.

Prin urmare $f \in L^p(-1, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$.

În continuare, studiem derivabilitatea lui f . f nu este derivabilă pe $(-1, 1)$. Studiem derivabilitatea în sens slab.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| \varphi' dx &= \int_{-1}^0 (-x) \varphi' dx + \int_0^1 x \varphi' dx = (-x) \varphi|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-x)' \varphi dx + x \varphi|_0^1 - \int_0^1 x' \varphi dx \\ &= -\left(\int_{-1}^0 g \varphi dx + \int_0^1 g \varphi dx \right) = - \int_{-1}^1 g \varphi dx, \end{aligned}$$

unde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ c, & x = 0 \\ -1, & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Funcția g de mai sus reprezintă derivata în sens slab a lui f .

Exercițiul 2. Fie $h : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$. Studiați derivabilitatea lui h în sens slab.

Observăm că h se scrie

$$h(x) = \begin{cases} (-x)^{\frac{3}{2}}, & x \in (-1, 0] \\ x^{\frac{3}{2}}, & x \in (0, 1) \end{cases}.$$

Studiem limitele lui h la stânga și la dreapta în punctul 0 :

$$\lim_{x \nearrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{2}} = 0$$

Rezultă că h este continuă.

Verificăm acum derivabilitatea lui h .

$$h'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}, & x \in (-1, 0) \\ \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 0} h'(x) = 0$$

$$\lim_{x \searrow 0} h'(x) = 0$$

Rezultă că h este derivabilă în 0, deci h este derivabilă în sens clasic pe $(-1, 1)$.

Prin urmare, h este derivabilă și în sens slab.

Exercițiul 3. Fie $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$. Studiați derivabilitatea lui g .

Observăm că g se scrie

$$g(x) = \begin{cases} (-x)^{\frac{1}{2}}, & x \in (-1, 0] \\ x^{\frac{1}{2}}, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Studiem limitele lui g la stânga și la dreapta în punctul 0 :

$$\lim_{x \nearrow 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = 0$$

Rezultă că g este continuă pe $(-1, 1)$.

Verificăm acum derivabilitatea lui g .

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x \in (-1, 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow 0} g'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \searrow 0} g'(x) = +\infty$$

Rezultă că g nu este derivabilă în sens clasic pe $(-1, 1)$.

Observăm că $g \in L^\infty(-1, 1)$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 |x|^{\frac{1}{2}} \varphi' dx &= \int_{-1}^0 \sqrt{-x} \varphi' dx + \int_0^1 \sqrt{x} \varphi' dx \\
&= \sqrt{-x} \varphi|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right) \varphi dx + \sqrt{x} \varphi|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi dx \\
&= - \int_{-1}^1 \tilde{g} \varphi dx,
\end{aligned}$$

unde

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x \in (-1, 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (0, 1) \end{cases}.$$

Observam ca $\tilde{g} \in L^1(-1, 1)$.

Deci $g \in L^1(-1, 1)$ este derivabila in sens slab.

Notam ca $g \in W^{1,1}(-1, 1)$.

In ultima parte a acestui seminar consideram un nou exemplu (alaturi de cel prezentat la curs) cu ajutorul caruia exersam tehnica "boot-strap" si de "intoarcere la solutia clasica cand data este suficient de neteda"

Fie problema la limita

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$u : I \rightarrow \mathbb{R}$ este necunoscuta iar $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ reprezintă data problemei.

Numim *soluție clasică* o funcție $u \in C^2(\bar{I})$ care verifică (1).

Introducem in continuare notiunea de *solutie slaba*.

Alegem drept spațiu al funcției test, spațiul $H_0^1(I) = \overline{C_c^1(I)}^{\|\cdot\|_{H^1(I)}}$. Fie $v \in H^1(I)$, atunci $v \in H_0^1(I) \iff v|_{\partial I} = 0, (v(0) = v(1) = 0)$.

Fie $v \in H_0^1(I)$. Înmulțind prima linie din (1) cu v și integrând pe I obținem

$$\int_I (-u''v) dx + \int_I u v dx = \int_I f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I), f \in L^2(I),$$

(u funcție suficient de netedă.)

Folosind formula de integrare prin părți și ținând cont de faptul că $v(0) = v(1) = 0$ obținem

$$\int_I u'v' dx + \int_I uv dx = \int_I f v dx. \quad (2)$$

Definiția 4. Dat $f \in L^2(I)$, numesc soluție slabă pentru problema (1), o funcție $u \in H_0^1(I)$ care verifică (2), $\forall v \in H_0^1(I)$.

Teorema 5. Problema (1) are o unică soluție slabă.

DEMONSTRAȚIE. $H = H_0^1(I)$ este spațiu Hilbert. Fie $a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ date de relațiile:

$$a(u, v) = \int_I (u'v' + uv) dx,$$

$$\varphi(v) = \int_I f v dx.$$

Arătăm că a este o formă biliniară simetrică, continuă și H_0^1 -eliptică (coercivă).

a) a formă biliniară dacă:

$$\begin{cases} a(\alpha u + \beta w, v) = \alpha a(u, v) + \beta a(w, v), \\ a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w), \quad \forall u, v, w \in H_0^1(I), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Fie $u, v, w \in H_0^1(I)$, și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta w, v) &= \\ &= \int_I [(\alpha u + \beta w)'v' + (\alpha u + \beta w)v] dx \\ &= \int_I [(\alpha u' + \beta w')v' + (\alpha u + \beta w)v] dx \\ &= \int_I (\alpha u'v' + \beta w'v') dx + \int_I (\alpha uv + \beta wv) dx \\ &= \alpha \int_I u'v' dx + \beta \int_I w'v' dx + \alpha \int_I uv dx + \beta \int_I wv dx \\ &= \alpha \int_I (u'v' + uv) dx + \beta \int_I (w'v' + wv) dx \\ &= \alpha a(u, v) + \beta a(w, v). \end{aligned}$$

În mod similar se arată că $a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)$. Prin urmare, a este o formă biliniară.

b) a este continuă dacă

$$\exists m_a > 0 \text{ a.î. } |a(u, v)| \leq m_a \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}, \quad \forall u, v \in H_0^1(I).$$

Fie $u, v \in H_0^1(I)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_I (u'v' + uv) dx \right| = \left| \int_I u'v' dx + \int_I uv dx \right| \\ &\leq \left| \int_I u'v' dx \right| + \left| \int_I uv dx \right| = |(u', v')_{L^2(I)}| + |(u, v)_{L^2(I)}| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} + C_p^2 \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} \\ &= (1 + C_p^2) \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}. \end{aligned}$$

Pot lua $m_a = 1 + C_p^2$.

Am folosit pe rând mai sus: inegalitatea triunghiului, inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea lui Poincaré.

c) a este $H_0^1(I)$ -eliptică dacă

$$\exists M_a > 0 \text{ a. î. } a(u, u) \geq M_a \|u\|_{H_0^1(I)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Fie $u \in H_0^1(I)$.

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_I [(u')^2 + u^2] dx = \int_I (u')^2 dx + \int_I u^2 dx \\ &= \|u'\|_{L^2(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^2 \geq \|u'\|_{L^2(I)}^2 = \|u\|_{H_0^1(I)}^2. \end{aligned}$$

Pot lua $M_a = 1$.

d) a este simetrică (evident).

Acum, arătăm că φ este aplicație liniară și continuă.

e) φ este aplicație liniară dacă

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v), \quad \forall u, v \in H_0^1(I), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Fie $u, v \in H_0^1(I)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \int_I f(\alpha u + \beta v) dx = \alpha \int_I f u dx + \beta \int_I f v dx = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v).$$

f) φ este continuă dacă

$$\exists K > 0 \text{ a.î. } |\varphi(v)| \leq K \|v\|_{H_0^1(I)}, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Fie $v \in H_0^1(I)$,

$$|\varphi(v)| = \left| \int_I f v dx \right| = |(f, v)_{L^2(I)}|$$

$$\leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq C_p \|f\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} = C_p \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}.$$

Am folosit pe rând inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea lui Poincaré. Pot lua $K = C_p \|f\|_{L^2(I)} > 0$.

Aplicand Lema Lax-Milgram rezultă că

$$\exists! u \in H_0^1(I) \text{ astfel încât } a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

□

Boot-strap (plus de regularitate); intoarcerea la solutia clasica

Arat pentru inceput ca

$$u \in H_0^1(I) \cap H^2(I).$$

$$\int_I u' v' dx + \int_I u v dx = \int_I f v dx \Leftrightarrow \int_I u' v' dx = \int_I (f - u) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

echivalent cu

$$\int_I u' v' dx = - \int_I (-f + u) v dx, \quad \forall v \in C_c^1(I),$$

dar

$$\int_I u' v' dx = u' v|_0^1 - \int_I (u')' v dx = - \int_I (u')' v dx.$$

Rezultă

$$(u')' = u - f \in L^2(I),$$

si deci

$$u \in H^2(I).$$

Admitem acum că $f \in C(\bar{I})$.

Cum $u \in H_0^1$ rezulta ca $u \in C(\bar{I})$.

Deci

$$(u')' = u - f \in C(\bar{I}).$$

Utilizam Teorema VIII.2 din [5] (pag.177):

$$u \in H^1(I) \text{ și } u' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^1(\bar{I})$$

$$u' \in H^1(I) \text{ și } (u')' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u' \in C^1(\bar{I})$$

Acum, din $u \in C^1(\bar{I})$ și

$$u' \in C^1(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^2(\bar{I}).$$

Asadar,

$$u \in C^2(\bar{I}).$$

Din

$$-\int_I u'' v dx = \int_I (f - u) v dx,$$

trecând într-o parte obținem

$$\int_I (-u'' + u - f) v dx = 0, \forall v \in H_0^1(I) (\forall v \in C_c^1(I)).$$

Cu lema fundamentală a calculului variațional rezultă

$$-u'' + u = f \text{ a.p.t. in } I.$$

Cum însă u'' , u și f sunt funcții continue, deducem că

$$-u'' + u = f \text{ peste tot in } I.$$

Curs 5

Tematica: probleme la limita in dimensiunea $N > 1$; formulari variationale; solutii slabe (I)

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu marginit cu frontiera neteda (Lipschitz).

Supunem atentiei urmatoarele probleme la limita:

PROBLEMA 12.

$$\operatorname{div}(\mu(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2}\nabla u(\mathbf{x})\right)) + f_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega;$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1;$$

$$(\mu(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2}\nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2,$$

unde Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui $\partial\Omega$ ($|\Gamma_1| > 0$), $\mu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $K = \bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, k)$ ($k > 0$), $(\beta \geq 0)$, $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Aceasta problema la limita este un model mecanic in deplasari-tractiuni pentru materiale neliniar elastice, in context antiplan.

PROBLEMA 13.

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \quad \text{pe } \Gamma_2 \tag{3}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 : |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel incat $|\Gamma_1| > 0$.

PROBLEMA 14.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (4)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (5)$$

$$u \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2 \quad (6)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ ($|\Gamma_1| > 0$).

PROBLEMA 15.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (7)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (8)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0, \text{ pe } \Gamma_2, \quad (9)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $g > 0$ este o constantă, iar Γ este partiționată în Γ_1, Γ_2 , cu $(|\Gamma_1| > 0)$.

PROBLEMA 16.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (10)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ pe } \Gamma_2 \quad (12)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g(|u|), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0 \text{ pe } \Gamma_3, \quad (13)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_2)$, g o funcție dată iar Γ este partiționată în $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, $(|\Gamma_1| > 0)$.

Remarca 1.

Problema 12 este neliniara dacă $\beta > 0$, neliniaritatea datorându-se neliniarității ecuației. Problema 13 este neliniara dacă h este neliniara. Problemele 14, 15 și 16 sunt neliniare din cauza condițiilor la limita

$$u \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0;$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0;$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g(|u|), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0.$$

Dacă $\beta = 0$ în 12, studiul variational se poate face cu Lema Lax-Milgram. Dacă însă $\beta > 0$ atunci studiul variational necesită utilizarea unor noi rezultate de analiză

functională: Teorema Minty-Brower; Lema Lax-Milgram neliniară. De asemenea, dacă h în Problema 13 e funcție liniară, atunci studiul variational se poate face cu ajutorul Lemei Lax-Milgram. Dacă însă h nu e liniară studiul variational necesită utilizarea Teoremei Minty-Brower; Lema Lax-Milgram neliniară. Problema 14 se poate rezolva cu Teorema lui Stampacchia (în cadrul teoriei inegalităților variaționale de tipul I). Dacă ecuația în Problema 14 se perturbă cu un termen de tipul celui din Problema 12 atunci se impune o generalizare a Teoremei Stampacchia în teoria inegalităților variaționale de primul tip. Problema 15 se poate studia în cadrul teoriei inegalităților variaționale de tipul II iar Problema 16 se poate studia în cadrul teoriei inegalităților cvasivariaționale (după cum vom vedea în cursurile următoare).

- Studiul Problemei 12 în cazul $\beta = 0$

PROBLEMA 17.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) + f_0(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{în } \Omega; \\ u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1; \\ (\mu(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) &= f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2, \end{aligned}$$

unde Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui $\partial\Omega$, ($|\Gamma_1| > 0$), $\mu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $K = \bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, k)$ ($k > 0$), $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 17, admitând următoarele ipoteze:

- (1) Ω domeniu marginit
- (2) $|\Gamma_i| > 0$ ($i \in \{1, 2\}$)
- (3) $\mu \in C(\bar{\Omega})$; $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$
- (4) $f_0 \in L^2(\Omega)$
- (5) $f_2 \in L^2(\Gamma_2)$

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 17. Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul V .

Fie $v \in V$. Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu\nabla u) \cdot v dx = \int_{\Omega} f_0 v dx.$$

Utilizând formula de integrare prin părți în $\mathbb{R}^N$ pentru spații Sobolev și ținând cont de condițiile la limită obținem

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f_0 v dx.$$

Definiția 2. Numim soluție în sens slab pentru Problema 17 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Remarca 3. În ipotezele menționate anterior, putem aplica Lema Lax-Milgram pentru a demonstra ca Problema 17 are o unică soluție în sens slab. Notăm ca relația integrală

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V$$

este echivalentă cu ecuația variațională

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V, \quad (14)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

și

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

TEMA: Forma a este biliniară, continuă și V -eliptică și $\varphi \in V'$, adică φ este funcțională liniară și continuă.

Ecuația variațională 14 este guvernata de o formă biliniară.

- Studiul Problemei 12 în cazul $\beta > 0$

PROBLEMA 18.

$$\operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x})\right)) + f_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{în } \Omega;$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1;$$

$$(\mu(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2,$$

unde Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui $\partial\Omega$, ($|\Gamma_1| > 0$), $\mu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $K = \bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, k)$ ($k > 0$), ($\beta > 0$), $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Admitem următoarele ipoteze:

- (1) Ω domeniu marginat

-
- (2) $|\Gamma_i| > 0$ ($i \in \{1, 2\}$)
 - (3) $\mu \in C(\bar{\Omega})$; $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$
 - (4) $\beta > 0$
 - (5) $k > 0$
 - (6) $f_0 \in L^2(\Omega)$
 - (7) $f_2 \in L^2(\Gamma_2)$

Definiția 4. Numim soluție în sens slab pentru Problema 17 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} (\mu \nabla u + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Remarca 5. În acest caz nu mai putem aplica Lema Lax-Milgram. Notăm ca relația integrală

$$\int_{\Omega} (\mu \nabla u + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

este echivalentă cu ecuația variațională

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V, \tag{15}$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (\mu \nabla u + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \nabla v dx$$

și

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Ecuația variațională 15 nu mai este guvernata de o formă biliniară din cauza operatorului de proiecție. Ecuația variațională (15) se poate scrie ca o ecuație operatorială

$$Au = \bar{f}$$

unde $A : V \rightarrow V$ ($Au, v)_V = a(u, v)$ și $(\bar{f}, v)_V = \varphi(v)$ pentru oricare $v \in V$.

Ecuația operatorială de mai sus este guvernata de un operator neliniar.

Seminar 5

Am supus atenției la curs următoarea problema la limita

PROBLEMA 19.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \text{ pe } \Gamma_2 \quad (3)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 : |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ .

Studiem în acest seminar următoarele cazuri particulare:

- (1) $\Gamma_2 = \emptyset$
- (2) $\Gamma_1 = \emptyset$; $h \equiv 0$.
- Cazul $\Gamma_2 = \emptyset$

PROBLEMA 20. Găsiți $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (4)$$

$$u = 0 \text{ pe } \partial\Omega, \quad (5)$$

unde $\Omega \in \mathbb{R}^N$, ($N > 1$) este o mulțime deschisă, mărginită, cu frontiera netedă, $f \in L^2(\Omega)$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 20 și să studiem existența și unicitatea acesteia.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 20.

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul $H_0^1(\Omega)$. Fie $v \in H_0^1(\Omega)$. Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Utilizând formula lui Green pentru spații Sobolev găsim

$$-\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (6)$$

Cum $v \in H_0^1(\Omega)$, avem

$$\gamma v = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega. \quad (7)$$

Ținând cont de (7), relația (6) devine

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Definiția 1. Numim soluție în sens slab pentru Problema 20 o funcție $u \in H_0^1(\Omega)$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

dat fiind $f \in L^2(\Omega)$.

Teorema 2. Problema 20 are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Fie $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$. Vom arăta că aplicația a este biliniară, continuă și H_0^1 -eliptică.

– a biliniară: Fie $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta v, w) &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta v) \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} (\alpha \nabla u + \beta \nabla v) \cdot \nabla w dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx + \beta \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w). \end{aligned}$$

Deci a este liniară în primul argument. Vom arăta că este liniară și în al doilea argument.

$$\begin{aligned} a(u, \alpha v + \beta w) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(\alpha v + \beta w) dx = \int_{\Omega} (\alpha \nabla u \cdot \nabla v + \beta \nabla u \cdot \nabla w) dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \beta \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w). \end{aligned}$$

Deci, a este liniară și în al doilea argument. Așadar, a este biliniară.

– a continuă:

Fie $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| = |(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N}| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Așadar, a este continuă (putem lua $M = 1$).

– a H_0^1 –eliptică:

Fie $u \in H_0^1(\Omega)$.

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Putem lua $m = 1$.

În ultima parte a demonstrației considerăm $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx$.

Vom arăta că $\varphi \in (H_0^1(\Omega))'$, adică φ este liniară și continuă.

– φ liniară:

Fie $v, w \in H_0^1(\Omega)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha v + \beta w) &= \int_{\Omega} f(\alpha v + \beta w) dx = \int_{\Omega} \alpha f v dx + \int_{\Omega} \beta f w dx \\ &= \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(w). \end{aligned}$$

Deci φ este liniară.

– φ continuă:

Fie $v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| = |(f, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}) c_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} = (1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}) c_p \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Luând $M = (1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}) c_p > 0$ găsim că φ este continuă.

În acest moment sunt satisfăcute toate ipotezele Teoremei 1 (Lema Lax-Milgram). Aplicăm această teoremă și găsim că Problema 20 are o unică soluție slabă. $\square$

- Cazul $\Gamma_1 = \emptyset$; $h \equiv 0$

PROBLEMA 21. Găsiți $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \partial\Omega, \tag{9}$$

unde $\Omega \in \mathbb{R}^N$, ($N > 1$) este un domeniu mărginit, cu frontiera netedă, $f \in L^2(\Omega)$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 21 și să studiem existența și unicitatea acesteia. Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 21.

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul $H^1(\Omega)$.

Fie $v \in H^1(\Omega)$.

Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Utilizând formula lui Green pentru spații Sobolev găsim

$$-\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (10)$$

Ținând cont de (9), relația (10) devine

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Definiția 3. Numim soluție în sens slab pentru Problema 21 o funcție $u \in H^1(\Omega)$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

dat fiind $f \in L^2(\Omega)$.

Teorema 4. Problema 21 are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Fie

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

și

$$\varphi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Vom arăta că aplicația a este biliniară, continuă și H^1 -eliptică.

Este evident că a este biliniară.

– a continuă:

Fie $u, v \in H^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}|a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| = |(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N}| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Așadar, a este continuă (putem lua $M = 1$).

– a H^1 –eliptică:

Fie $u \in H^1(\Omega)$.

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2.$$

Putem lua $m = 1$.

φ este liniară și continuă (vezi demonstrațiile din Cursul 4).

În acest moment sunt satisfăcute toate ipotezele Teoremei 1 (Lema Lax-Milgram). Aplicăm această teoremă și găsim că Problema 21 are o unică soluție slabă. $\square$

Curs 6

Tematica: probleme la limita in dimensiunea $N > 1$; formulari variationale; solutii slabe (II)

Consideram problema la limita

PROBLEMA 22.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \text{ pe } \Gamma_2 \quad (3)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 : |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel încat $|\Gamma_1| > 0$.

- Studiul Problemei 22 in cazul $h \equiv 0$

PROBLEMA 23.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (4)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2 \quad (6)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel încat $|\Gamma_1| > 0$.

Definiția 1. Numim soluție în sens slab pentru Problema 23 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Remarca 2. In acest caz putem aplica Lema Lax-Milgram in studiul existentei si unicitatii solutiei slabe.

Relatia integrala

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

este echivalenta cu ecuatia variationala

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V, \quad (7)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

si

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Ecuatia variationala 7 este guvernata de o forma biliniara.

- Studiul Problemei 22 in cazul $h(r) = k r$ ($k > 0$)

PROBLEMA 24.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (8)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (9)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = k u \text{ pe } \Gamma_2 \quad (10)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $k > 0$ iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel incat $|\Gamma_1| > 0$.

Definiția 3. Numim soluție în sens slab pentru Problema 24 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} k \gamma u \gamma v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Remarca 4. Si in acest caz putem aplica Lema Lax-Milgram in studiul existentei si unicitatii solutiei slabe.

Relatia integrala

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} k \gamma u \gamma v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V$$

este echivalenta cu ecuatia variationala

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V, \quad (11)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} k \gamma u \gamma v d\Gamma$$

si

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Ecuatia variationala 11 este guvernata de o forma biliniara.

- Studiul Problemei 22 in cazul in care h nu este liniara

PROBLEMA 25.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (12)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (13)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \text{ pe } \Gamma_2 \quad (14)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 : |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel încat $|\Gamma_1| > 0$.

Definiția 5. Numim soluție în sens slab pentru Problema 25 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} h(\gamma u) \gamma v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Remarca 6. In acest caz nu mai putem aplica Lema Lax-Milgram. Notam ca relatia integrala

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} h(\gamma u) \gamma v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

este echivalenta cu ecuatia variationala

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V, \quad (15)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} h(\gamma u) \gamma v d\Gamma$$

si

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Ecuatia variationala 15 nu mai este guvernata de o forma biliniara din cauza neliniaritatii aplicatiei h . Ecuatia variationala (15) se poate scrie ca o ecuatie operatoriala

$$Au = \bar{f}$$

unde $A : V \rightarrow V$ (Au, v) $_V = a(u, v)$ si $(\bar{f}, v)$ $_V = \varphi(v)$ pentru oricare $v \in V$.

Ecuatia operatoriala de mai sus este guvernata de un operator neliniar.

Continuam cu studiul urmatoarei probleme la limita.

PROBLEMA 26.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (16)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (17)$$

$$u \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2 \quad (18)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ , ($|\Gamma_1| > 0$).

Fie

$$K = \{v \in V \mid v \leq 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_2\}.$$

Definiția 7. Numim soluție în sens slab pentru Problema 26 o funcție $u \in K$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in K.$$

Remarca 8. In acest caz nu mai putem aplica Lema Lax-Milgram. Putem aplica insa Teorema lui Stampacchia.

Notam ca relatia integrala

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in K$$

este echivalenta cu inegalitatea variationala de tipul I

$$u \in K, \quad a(u, v - u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in K, \quad (19)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

si

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Inegalitatea variationala 19 este guvernata de o forma biliniara.

Consideram in continuare problema

PROBLEMA 27.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (20)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (21)$$

$$|\frac{\partial u}{\partial \nu}| \leq g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0, \text{ pe } \Gamma_2, \quad (22)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $g > 0$ este o constantă, iar Γ este partiționată în Γ_1, Γ_2 ($|\Gamma_1| > 0$.)

Definiția 9. Numim soluție în sens slab pentru Problema 27 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_2} g(|\gamma v| - |\gamma u|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in V.$$

Remarca 10. In acest caz nu mai putem aplica nici Lema Lax-Milgram, nici Teorema lui Stampacchia. Va trebui sa invatam despre o noua clasa de rezultate de existenta si unicitate in cadrul **teoriei inegalitatilor variationale de tipul II** (o vom face in cursurile care urmeaza).

Notam ca relatia integrala

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_2} g(|\gamma v| - |\gamma u|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in V$$

este echivalenta cu inegalitatea variationala de tipul II

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in V, \quad (23)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$j : V \rightarrow \mathbb{R} \quad j(v) = \int_{\Gamma_2} g|\gamma v| d\Gamma$$

si

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Inegalitatea variationala 23 este guvernata de o forma biliniara a si de o functionala convexa si inferior semicontinua j .

Consideram acum problema la limita

PROBLEMA 28.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (24)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ pe } \Gamma_2 \quad (26)$$

$$|\frac{\partial u}{\partial \nu}| \leq g(|u|), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0, \text{ pe } \Gamma_3, \quad (27)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_2)$, g o functie data iar Γ este partiționată în $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, $|\Gamma_1| > 0$.

Definiția 11. Numim soluție în sens slab pentru Problema 28 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_2} g(|\gamma u|)(|\gamma v| - |\gamma u|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in V.$$

Remarca 12. Pentru a studia existenta si unicitatea solutiei slabe introdusa in definitia anterioara, va trebui sa invatam despre o noua clasa de rezultate de existenta si unicitate in cadrul **teoriei inegalitatilor cvasivariationale** (o vom face in cursurile care urmeaza).

Notam ca relatia integrala

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_2} g(|\gamma u|)(|\gamma v| - |\gamma u|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in V$$

este echivalenta cu inegalitatea cvasivariationala

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in V, \quad (28)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$j : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad j(u, v) = \int_{\Gamma_2} g(|\gamma u|)|\gamma v| d\Gamma$$

si

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Inegalitatea cvasivariationala 28 este guvernata de o forma biliniara a si de o bi-functionala j .

Remarca 13. In problemele studiate in acest curs, caracterul neliniar este dat de neliniaritatea conditiilor la limita. Daca insa perturbam ecuatiile cu un termen neliniar (a se vedea de exemplu ecuatia guvernata de operatorul de proiectie din cursul trecut) atunci problemele variationale nu vor mai fi guvernate de forme biliniare a ci de operatori neliniari, putand scrie:

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_V \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in K$$

$$(Au, v - u)_V + j(v) - j(u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in V$$

$$(Au, v - u)_V + j(u, v) - j(u, u) \geq \varphi(v - u) \quad \forall v \in V.$$

Remarca 14. Notiunea de solutie slaba se poate introduce in mai multe feluri pentru o aceeaasi problema la limita. In cadrul acestui curs punem accent pe formulari variationale via inegalitati variationale. Putem da insa, de exemplu, formulari variationale mixte (sisteme variationale cu multiplicatori Lagrange). In seminar vom da un exemplu iar in ultimele doua cursuri vom reveni cu o discutie asupra formularilor variationale cu multiplicatori Lagrange(formulari mixte) formulari care intereseaza indeosebi pe specialistii in analiza numerica.

Seminar 6

Fie problema la limita

PROBLEMA 29. Sa se determine $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat

$$-\xi \Delta u(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\xi \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (3)$$

$$\left| \xi \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) \right| \leq g, \quad \xi \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) = -g \frac{u(\mathbf{x})}{|u(\mathbf{x})|} \quad \text{daca } u(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (4)$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu marginit cu frontiera neteda Γ , partitionata in trei parti masurabile cu masura strict pozitiva, Γ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, $g > 0$, $\xi > 0$, $f_0 \in L^2(\Omega)$, $f_2 \in L^2(\Gamma_2)$.

- Prima formulare variationala (via inegalitati variationale de tipul II)

PROBLEMA 30. Sa se determine $u_0 \in V$ astfel incat

$$a(u_0, v - u_0) + j(v) - j(u_0) \geq (f, v - u_0)_X \quad \text{for all } v \in V, \quad (5)$$

unde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.e. on } \Gamma_1\}; \quad (u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^2}; \quad (6)$$

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad a(u, v) = \xi(u, v)_V; \quad (7)$$

$$j : V \rightarrow \mathbb{R} \quad j(v) = \int_{\Gamma_3} g |\gamma v| d\Gamma; \quad (8)$$

$$(f, v)_V = \int_{\Omega} f_0 v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \gamma v d\Gamma. \quad (9)$$

- A doua formulare variationala- formulare variationala via multiplicatori Lagrange (formulare variationala mixta)

Introducem aici un nou spatiu de functii.

$$M = \gamma(V) = \{\tilde{v} \in H^{1/2}(\Gamma) \mid \exists v \in X \text{ astfel incat } \tilde{v} = \gamma v \text{ a.p.t. pe } \Gamma\},$$

unde, amintim,

$$H^{1/2}(\Gamma) = \{\tilde{v} \in L^2(\Gamma) \mid \exists v \in H^1(\Omega) \text{ astfel incat } \tilde{v} = \gamma v \text{ a.p.t. pe } \Gamma\}.$$

Fie $\mathcal{Z} : H^{1/2}(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ inversul la dreapta al operatorului urma (operator liniar si continuu).

$$\mathcal{Z}(\gamma v) \in X \quad \forall v \in X,$$

si

$$\gamma(\mathcal{Z}(\gamma v)) = \gamma v \quad \forall v \in X. \quad (10)$$

Detalii privind spatiile $H^{1/2}(\Gamma)$ se pot gasi in [23, 39].

Consideram acum dualul lui M notat cu Y ,

$$Y = M'. \quad (11)$$

M este un spatiu Hilbert, a se vedea de exemplu [29]. In plus, Y este un spatiu Hilbert fiind dualul unui Hilbert. Notam cu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y,M}$ produsul in dualitate.

Fie u functie suficient de neteda ce verifica Problema 29.

Introducem un multiplicator Lagrange dupa cum urmeaza:

$$\lambda \in Y,$$

$$\langle \lambda, \tilde{v} \rangle_{Y,M} = - \int_{\Gamma_3} \xi \frac{\partial u}{\partial \nu} \tilde{v} d\Gamma \quad \forall \tilde{v} \in M.$$

Suntem condusi la urmatoarea formulare variationala mixta a Problemei 29:

PROBLEMA 31. *Sa se determine $u \in X$ si $\lambda \in \Lambda \subset Y$ astfel incat*

$$a(u, v) + \langle \lambda, \gamma v \rangle_{Y,M} = (f, v)_X \quad \forall v \in X, \quad (12)$$

$$\langle \mu - \lambda, \gamma u \rangle_{Y,M} \leq 0 \quad \forall \mu \in \Lambda. \quad (13)$$

Pentru definitia lui $a(\cdot, \cdot)$ si a lui f a se vedea (7) si, respectiv (9).

$$\Lambda = \{\mu \in Y \mid \langle \mu, \gamma v \rangle_{Y,M} \leq \int_{\Gamma_3} g |\gamma v| d\Gamma \forall v \in X\}. \quad (14)$$

$$b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \quad b(v, \mu) = \langle \mu, \gamma v \rangle_{Y,M} \quad \forall v \in X, \mu \in Y. \quad (15)$$

Forma $b(\cdot, \cdot)$ este biliniara si continua. In plus,

$$\|\mu\|_Y = \sup_{\bar{w} \in M, \bar{w} \neq 0_M} \frac{\langle \mu, \bar{w} \rangle_{Y,M}}{\|\bar{w}\|_M} \leq \sup_{w \in X, \gamma w \neq 0_M} \frac{\langle \mu, \gamma w \rangle_{Y,M}}{\|\gamma w\|_M}.$$

Fie $w \in X$ astfel incat $\gamma w \neq 0_M$. Atunci $\mathcal{Z}(\gamma w) \neq 0_X$.

Intr-adevar, altfel $\mathcal{Z}(\gamma w) = 0_X$, si aplicand operatorul urma γ am obtine

$$\gamma(\mathcal{Z}(\gamma w)) = \gamma 0_X = 0_M.$$

Utilizand (10) rezulta ca $\gamma w = 0_M$, fals.

Cum $\mathcal{Z}$ e operator liniar si continuu, exista $c > 0$ astfel incat,

$$\|\mathcal{Z}(\gamma w)\|_X \leq c\|\gamma w\|_M.$$

Deoarece $\gamma w \neq 0_M$, atunci

$$\frac{1}{\|\gamma w\|_M} \leq \frac{c}{\|\mathcal{Z}(\gamma w)\|_X}.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \|\mu\|_Y &\leq c \sup_{w \in X, \mathcal{Z}(\gamma w) \neq 0_X} \frac{\langle \mu, \gamma w \rangle_{Y,M}}{\|\mathcal{Z}(\gamma w)\|_X} \\ &= c \sup_{w \in X, \mathcal{Z}(\gamma w) \neq 0_X} \frac{\langle \mu, \gamma(\mathcal{Z}(\gamma w)) \rangle_{Y,M}}{\|\mathcal{Z}(\gamma w)\|_X} \\ &= c \sup_{w \in X, \mathcal{Z}(\gamma w) \neq 0_X} \frac{b(\mathcal{Z}(\gamma w), \mu)}{\|\mathcal{Z}(\gamma w)\|_X} \\ &\leq c \sup_{v \in X, v \neq 0_X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X}. \end{aligned}$$

Discutia ar putea continua pe tema: care este relatia dintre cele doua formulari variationale? Putem reveni la solutia clasica porind de la formularea cu multiplicatori admitand suficienta netezime pentru functiile in discutie? Raspunsul la aceste intrebari se poate gasi in lucrarea [32].

Privind existenta si unicitatea solutiei slabe in formularea cu multiplicatori Lagrange dam aici ideea: utilizam urmatorul cadru abstract.

Fie problema variationala mixta abstracta.

PROBLEMA 32. Sa se determine $u \in X$ si $\lambda \in \Lambda$ astfel incat

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = (f, v)_X \quad \forall v \in X, \quad (16)$$

$$b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \forall \mu \in \Lambda, \quad (17)$$

unde $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ si $(Y, (\cdot, \cdot)_Y, \|\cdot\|_Y)$ sunt doua spatii Hilbert,

- $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ forma simetrica, biliniara continua (de rang M_a)
si X -eliptica (de rang m_a) ; (18)

- $b : X \times Y \rightarrow R$ este forma biliniara continua (de rang M_b), (19)

si, in plus

$$\exists \alpha > 0 : \inf_{\mu \in Y, \mu \neq 0_Y} \sup_{v \in X, v \neq 0_X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_Y} \geq \alpha; \quad (20)$$

- Λ este submultime inchisa convexa Y ce contine 0_Y . (21)

Teorema 1. *Admitem ipotezele (18)–(21). Atunci, Problema 32 are solutie unica, (u, λ) in $X \times \Lambda$.*

Demonstratia se bazeaza pe teoria punctului sa, a se vedea [15, 18].

Curs 7

Tematica: ecuatii variationale abstracte; aplicatii (I)

Începem acest curs prin a prezenta teorema Minty-Browder, un instrument important in studiul unei clase de ecuatii variationale neliniare. Continuum cu o proprietate utila in teoria operatorilor. Apoi, vom analiza existența si unicitatea soluției slabe pentru o problema la limită aplicand Teorema Minty-Browder.

Teorema 1. (*Teorema Minty-Browder*) Fie X un spațiu Hilbert și $A : X \rightarrow X$ un operator Lipschitz și tare monoton. Atunci pentru orice $f \in X$ există un unic element $u \in X$ astfel încât

$$Au = f.$$

DEMONSTRAȚIE. Cum A este tare monoton și Lipschitz rezultă că există două constante $m > 0$ și $M > 0$ astfel încât

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X, \quad (1)$$

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2)$$

Fie $f \in X$ și fie $\rho > 0$ dat. Considerăm operatorul $S_\rho : X \rightarrow X$ definit prin

$$S_\rho u = u - \rho(Au - f) \quad \forall u \in X.$$

Din această definiție rezultă că

$$\|S_\rho u - S_\rho v\|_X = \|(u - v) - \rho(Au - Av)\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (3)$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \|S_\rho u - S_\rho v\|_X^2 &= \|(u - v) - \rho(Au - Av)\|_X^2 \\ &= \|u - v\|_X^2 - 2\rho(Au - Av, u - v)_X + \rho^2 \|Au - Av\|_X^2 \\ &\leq (1 - 2\rho m + \rho^2 M^2) \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \end{aligned}$$

Se observă ușor că dacă $0 < \rho < \frac{2m}{M^2}$ atunci $0 \leq 1 - 2\rho m + \rho^2 M^2 < 1$ și, cu această alegere a lui ρ , rezultă că

$$\|S_\rho u - S_\rho v\|_X \leq k(\rho) \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X, \quad (4)$$

unde $k(\rho) = (1 - 2\rho m + \rho^2 M^2)^{\frac{1}{2}} \in [0, 1)$. Fie $\rho_0 \in (0, \frac{2m}{M^2})$. Inegalitatea (4) arată că S_{ρ_0} este o contracție pe spațiul X și, utilizând Teorema lui Banach de punct fix, obținem că există un unic punct fix $u \in X$ astfel încât

$$S_{\rho_0} u = u - \rho_0(Au - f) = u. \quad (5)$$

Din (5) rezulta $Au = f$. Deci ecuația operatorială are drept soluție unicul punct fix al lui S_{ρ_0} .

Studiul unicității Presupunem ca ecuația operatorială are două soluții, $u, v \in V$. Asadar, $Au = f$ și $Av = f$. Rezultă că

$$(Au, u - v)_X = (f, u - v)_X, \quad (Av, u - v)_X = (f, u - v)_X.$$

Scazând aceste egalități obținem

$$(Au - Av, u - v)_X = 0.$$

Din (1) rezulta că $u = v$, și avem astfel asigurată și partea de unicitate. $\square$

Propoziția 2. (Stabilitatea) Există $c > 0$ astfel încât

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq c \cdot \|f_1 - f_2\|_X,$$

unde u_1 și u_2 sunt soluțiile ecuației

$$Au = f,$$

corespunzătoare datelor $f_1, f_2 \in X$.

DEMONSTRAȚIE.

$$(Au_1, v - u_1)_X = (f_1, v - u_1)_X$$

$$(Au_2, v - u_2)_X = (f_2, v - u_2)_X.$$

Atunci

$$(Au_1 - Au_2, u_2 - u_1)_X = (f_1 - f_2, u_2 - u_1)_X,$$

care este echivalent cu

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X = (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_X.$$

Deci

$$m_A \|u_1 - u_2\|_X^2 \leq \|f_1 - f_2\|_X \cdot \|u_1 - u_2\|_X.$$

Dacă $u_1 \neq u_2$ atunci $\|u_1 - u_2\|_X \neq 0$, deci

$$m_A \|u_1 - u_2\|_X^2 \leq \|f_1 - f_2\|_X.$$

În acest caz, $c = \frac{1}{m_A}$.

Dacă $\|u_1 - u_2\|_X = 0$ atunci

$$0 \leq c \cdot 0$$

care este adevărată pentru orice constantă pozitivă, în particular cu $c = \frac{1}{m_A}$.

Așadar, inegalitatea cerută are loc pentru

$$c = \frac{1}{m_A}.$$

□

Propoziția 3. *Fie X un spațiu Hilbert. Considerăm operatorul $A : X \rightarrow X$ tare monoton și Lipschitz iar $B : X \rightarrow X$ operator monoton și Lipschitz. Atunci operatorul $A + B$ este tare monoton și Lipschitz.*

DEMONSTRAȚIE. Faptul că $A : X \rightarrow X$ este tare monoton și Lipschitz înseamnă că există $m_A > 0$, respectiv $L_A > 0$ astfel încât

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m_A \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X \quad (6)$$

și

$$\|Au - Av\|_X \leq L_A \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X \quad (7)$$

Faptul că $B : X \rightarrow X$ este operator monoton și Lipschitz înseamnă că

$$(Bu - Bv, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X \quad (8)$$

și există $L_B > 0$ astfel încât

$$\|Bu - Bv\|_X \leq L_B \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X \quad (9)$$

Facem notația $C = A + B$. În continuare, arătăm că C este tare monoton și Lipschitz.

- C tare monoton:

Fie $u, v \in X$.

$$(Cu - Cv, u - v)_X = (Au + Bu - Av - Bv, u - v)_X = (Au - Av, u - v)_X + (Bu - Bv, u - v)_X.$$

Ținând cont de (6) și (8) obținem

$$(Cu - Cv, u - v)_X \geq m_A \|u - v\|_X^2.$$

Deci C este tare monoton. Putem lua $m_C = m_A$.

- C Lipschitz:

Fie $u, v \in X$.

$$\|Cu - Cv\|_X = \|Au + Bu - Av - Bv\|_X \leq \|Au - Av\|_X + \|Bu - Bv\|_X.$$

Ținând cont de (7) și (9) obținem

$$\|Cu - Cv\|_X \leq L_A\|u - v\|_X + L_B\|u - v\|_X = (L_A + L_B)\|u - v\|_X.$$

Putem lua $L_C = L_A + L_B > 0$. Deci C este Lipschitz.

□

Aplicatii

Fie problema la limita.

PROBLEMA 33. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (10)$$

$$u(0) = 0, \quad (11)$$

$$u'(1) = h(u(1)), \quad (12)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 \mid |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Amintim ca numim soluție în sens slab pentru Problema 33 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_0^1 u'v'dx + h(u(1))v(1) = \int_0^1 fvd x \quad \forall v \in V, \quad (13)$$

dat fiind $f \in L^2(0, 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Lipschitz și monotonă.

Teorema 4. Problema 33 are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Fie $A : V \rightarrow V$. Cum aplicația $v \mapsto \int_0^1 u'v'dx + h(u(1))v(1)$ este liniară și continuă, aplicând Teorema de reprezentare a lui Riesz găsim că pentru $u \in V$, Au este unicul element din V astfel încât

$$(Au, v)_V = \int_0^1 u'v'dx + h(u(1))v(1).$$

Pe de altă parte, cum $v \mapsto \int_0^1 f v dx$ este liniară și continuă, din Teorema de reprezentare a lui Riesz obținem

$$\int_0^1 f v dx = (\tilde{f}, v)_V.$$

Astfel, relația (13) este echivalentă cu

$$(Au, v)_V = (\tilde{f}, v)_V \quad \forall v \in V,$$

care se mai poate scrie

$$(Au - \tilde{f}, v)_V = 0 \quad \forall v \in V.$$

Alegând $v = Au - \tilde{f}$ găsim

$$\|Au - \tilde{f}\|^2 = 0,$$

ceea ce ne conduce la

$$Au = \tilde{f}.$$

În continuare, vom arăta că operatorul $A : V \rightarrow V$,

$$(Au, v)_V = \int_0^1 u' v' dx + h(u(1))v(1)$$

este tare monoton și Lipschitz.

- A tare monoton:

$$\begin{aligned} (Au - Av, u - v)_V &= (Au, u - v)_V - (Av, u - v)_V = \int_0^1 u'(u' - v') dx \\ &\quad + h(u(1))(u - v)(1) - \int_0^1 v'(u' - v') dx + h(v(1))(u - v)(1) \\ &= \int_0^1 (u' - v')^2 dx + (h(u(1)) - h(v(1))) \cdot (u(1) - v(1)). \end{aligned}$$

Cum h este monoton, avem

$$(h(u(1)) - h(v(1))) \cdot (u(1) - v(1)) \geq 0.$$

Așadar,

$$(Au - Av, u - v)_V \geq \|u' - v'\|_{L^2(0,1)}^2 = \|(u - v)'\|_{L^2(0,1)}^2 = \|u - v\|_V^2.$$

Pot lua $m_A = 1$. Deci A tare monoton.

- A Lipschitz:

Știm că

$$\|Au - Av\|_V = \sup_{w \in V, w \neq 0} \frac{(Au - Av, w)_V}{\|w\|_V}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{Evaluăm cantitatea } \frac{(Au - Av, w)_V}{\|w\|_V}. \\
\frac{(Au - Av, w)_V}{\|w\|_V} &= \frac{(Au, w)_V - (Av, w)_V}{\|w\|_V} \\
&= \frac{\int_0^1 u' w' dx + h(u(1))w(1) - \int_0^1 v' w' dx - h(v(1))w(1)}{\|w\|_V} \\
&= \frac{\int_0^1 (u' - v') w' dx + (h(u(1)) - h(v(1))) \cdot w(1)}{\|w\|_V} \\
&\leq \frac{|\int_0^1 (u' - v') w' dx| + |(h(u(1)) - h(v(1))) \cdot w(1)|}{\|w\|_V} \\
&\leq \frac{\|u' - v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} + L_h |u(1) - v(1)| \cdot |w(1)|}{\|w\|_V}.
\end{aligned}$$

Vom evalua separat câteva cantități ce apar în această inegalitate.

$$|w(1)| \leq \max_{x \in [0,1]} |w(x)| = \|w\|_{C([0,1])} \leq c \|w\|_{H^1(0,1)} \leq c \tilde{C}_P \cdot \|w\|_V.$$

$$|u(1) - v(1)| \leq c \cdot \tilde{C}_P \cdot \|u - v\|_V.$$

$$\|w'\|_{L^2(0,1)} = \|w\|_V.$$

$$\|u' - v'\|_{L^2(0,1)} = \|u - v\|_V.$$

Ținând cont de aceste relații, găsim

$$\frac{(Au - Av, w)_V}{\|w\|_V} \leq \frac{(\|u - v\|_V + L_h \cdot c \cdot \tilde{C}_P \cdot \|u - v\|_V) \|w\|_V}{\|w\|_V} = (1 + L_h \cdot c \cdot \tilde{C}_P) \|u - v\|_V.$$

Trecem la supremum. Prin urmare,

$$\|Au - Av\|_V \leq (1 + L_h \cdot c \cdot \tilde{C}_P) \|u - v\|_V.$$

Deci, A este operator Lipschitz. Aplicând Teorema Minty-Browder găsim că Problema 33 are o unică soluție. $\square$

Consideram în continuare următoarea problema la limita.

PROBLEMA 34.

$$\operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K \left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x}) \right)) + f_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega;$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1;$$

$$(\mu(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K \left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x}) \right)) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2,$$

unde Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui $\partial\Omega$, $\mu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $K = \bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, k)$ ($k > 0$), ($\beta > 0$), $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Admitem urmatoarele ipoteze:

- (1) Ω domeniu marginit
- (2) $|\Gamma_i| > 0$ ($i \in \{1, 2\}$)
- (3) $\mu \in C(\bar{\Omega})$; $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$
- (4) $\beta > 0$
- (5) $k > 0$
- (6) $f_0 \in L^2(\Omega)$
- (7) $f_2 \in L^2(\Gamma_2)$

Definiția 5. Numim soluție în sens slab pentru Problema 34 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} (\mu \nabla u + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Teorema 6. *In ipotezele anuntate anterior, Problema 34 are o unica solutie slaba.*

DEMONSTRAȚIE. *Ind.* Relatia integrala

$$\int_{\Omega} (\mu \nabla u + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

este echivalenta cu ecuatia operatoriala

$$Au = \bar{f}$$

unde

$$A : V \rightarrow V, (Au, v)_V = \int_{\Omega} (\mu \nabla u + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \nabla v dx$$

si

$$\bar{f} \in V, (\bar{f}, v)_V = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V.$$

Utilizand proprietatile operatorului de proiectie (monotonie si non-expansivitate) precum si Propozitia 3 se demonstreaza ca A este operator tare monoton si Lipschitz.

Aplicam Teorema Minty-Browder. $\square$

O alta aplicatie este rezolvarea urmatoarei probleme la limita.

PROBLEMA 35.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \tag{14}$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \tag{15}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \text{ pe } \Gamma_2 \tag{16}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 \mid |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel încât $|\Gamma_1| > 0$.

Definiția 7. Numim soluție în sens slab pentru Problema 35 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} h(\gamma u) \gamma v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

Teorema 8. Problema 35 are o unică soluție slabă.

DEMONSTRAȚIE. *Ind.* Relatia integrală

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} h(\gamma u) \gamma v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V.$$

este echivalentă cu ecuația operatorială

$$Au = \bar{f}$$

unde

$$A : V \rightarrow V, (Au, v)_V = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} h(\gamma u) \gamma v d\Gamma$$

și

$$\bar{f} \in V, (\bar{f}, v)_V = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V.$$

Utilizând proprietățile funcției h (monotonă și Lipschitz) precum și Propoziția 3 se demonstrează că A este operator tare monoton și Lipschitz.

Aplicăm Teorema Minty-Browder. □

Seminar 7

Pentru început, vom vedea un exemplu de funcție h neliniară în legătură cu studiul problemei

PROBLEMA 36.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \text{ pe } \Gamma_2 \quad (3)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 \mid |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel încât $|\Gamma_1| > 0$.

analizată la curs.

Fie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin

$$h(r) = \begin{cases} r, & \text{când } r \geq 0 \\ 0, & \text{când } r < 0 \end{cases}$$

Vom arăta că funcția h definită astfel este Lipschitz și monotonă.

1) h este monotonă. Fără a restrânge generalitatea putem fixa o ordine între r_1, r_2 presupunând ca $r_1 \geq r_2$.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ($r_1 \geq r_2$).

Pentru a demonstra monotonia lui h , trebuie să arătăm că

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

- Dacă $r_1, r_2 \geq 0$ atunci

$$h(r_1) - h(r_2) = r_1 - r_2.$$

Avem

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) = (r_1 - r_2)^2 \geq 0.$$

- Dacă $r_1, r_2 < 0$ atunci

$$h(r_1) - h(r_2) = 0.$$

Avem

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) = 0 \geq 0.$$

- Dacă $r_1 \geq 0, r_2 < 0$ atunci

$$h(r_1) - h(r_2) = r_1.$$

Avem

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) = r_1(r_1 - r_2) \geq 0.$$

În concluzie, h este monotonă.

- 2) h este Lipschitz. Ca mai sus, fara a restrange generalitatea putem fixa o ordine între r_1, r_2 presupunand ca $r_1 \geq r_2$.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ($r_1 \geq r_2$).

Pentru a demonstra că h este Lipschitz, trebuie să aratăm că există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$|h(r_1) - h(r_2)| \leq L|r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

- Dacă $r_1, r_2 \geq 0$ atunci

$$|h(r_1) - h(r_2)| = |r_1 - r_2| \leq |r_1 - r_2|.$$

- Dacă $r_1, r_2 < 0$ atunci

$$|h(r_1) - h(r_2)| = 0 \leq |r_1 - r_2|.$$

- Dacă $r_1 \geq 0, r_2 < 0$ atunci

$$|h(r_1) - h(r_2)| = |r_1|.$$

Cum $r_2 < 0$, înseamnă că $r_1 - r_2 \geq r_1$. Deci

$$|h(r_1) - h(r_2)| = |r_1| \leq |r_1 - r_2|.$$

Concluzionăm că h este Lipschitz. Putem lua $L = 1$, deci pentru acest exemplu avem chiar non-expansivitate.

Considerăm următoarea problemă la limită.

PROBLEMA 37. Găsiți $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-\Delta u + \alpha u = f \text{ în } \Omega, \quad (4)$$

$$u = 0 \text{ pe } \partial\Omega, \quad (5)$$

unde $\Omega \in \mathbb{R}^N$, ($N > 1$) este un domeniu mărginit, cu frontiera netedă, $f \in L^2(\Omega)$ și $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Ne propunem să introducem notiunea de soluție slabă și să studiem existența și unicitatea soluției în sens slab pentru Problema 37 în funcție de parametrul α .

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 37.

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul $H_0^1(\Omega)$.

Fie $v \in H_0^1(\Omega)$.

Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx + \int_{\Omega} \alpha u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Utilizând formula lui Green pentru spații Sobolev găsim

$$-\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (6)$$

Cum $v \in H_0^1(\Omega)$, avem

$$\gamma v = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega. \quad (7)$$

Ținând cont de (7), relația (6) devine

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Definiția 1. Numim soluție în sens slab pentru Problema 37 o funcție $u \in H_0^1(0, 1)$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(0, 1),$$

dat fiind $f \in L^2(0, 1)$.

În ceea ce urmează vom studia existența și unicitatea soluției slabe în sensul introdus anterior.

Fie $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} u v dx$. Vom studia dacă aplicația a este biliniară, continuă și H_0^1 -eliptică. Cu definiția se poate arăta ușor că a este forma biliniară.

- a continuă:

Fie $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| + |\alpha| \left| \int_{\Omega} uv dx \right| \\
&= |(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N} + |\alpha| |(u, v)_{L^2(\Omega)}| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |\alpha| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + |\alpha| C_P^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&= (1 + |\alpha| C_P^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Așadar, a este continuă, indiferent de valoarea lui α .

- a H_0^1 –eliptică:

Fie $u \in H_0^1(\Omega)$.

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Dacă $\alpha > 0$:

$$a(u, u) = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \alpha \int_{\Omega} u^2 dx \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Deci a este H_0^1 –eliptică atunci când $\alpha > 0$.

Încercăm și o altă cale care să permită și valori negative pentru α .

$$\begin{aligned}
-\alpha(u, u)_{L^2(\Omega)} &\leq |-\alpha(u, u)_{L^2(\Omega)}| \\
&\leq |\alpha| |(u, u)_{L^2(\Omega)}| \\
&\leq |\alpha| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |\alpha| (C_P)^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \\
&= |\alpha| (C_P)^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Avem:

$$\alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq -|\alpha| \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
a(u, u) &\geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - |\alpha| (C_P)^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&= (1 - |\alpha| (C_P)^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Pentru ca a să fie H_0^1 –eliptică, trebuie ca $1 - |\alpha| (C_P)^2$ să fie pozitiv. Astfel, se impune $|\alpha| < \frac{1}{(C_P)^2}$.

În concluzie, a este H_0^1 –eliptică și atunci când $|\alpha| < \frac{1}{(C_P)^2}$.

Fie $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx$.

φ este liniar și continuu.

Așadar, Problema 37 are soluție unică atunci când $\alpha \in (-\frac{1}{C_P^2}, \infty)$ în baza Lemei Lax-Milgram, unde C_P este constanta Poincaré.

Curs 8

Tematica: ecuatii variationale abstracte; aplicatii (II); elemente de analiza convexa
Continuam discutia inceputa cursul trecut privind ecuatii variationale abstracte neliniare atragand atentia asupra Lemei Lax-Milgram neliniară.

Considerăm problema variatională urmatoare.

Sa se determine $u \in X$ astfel încât

$$(P) \quad a(u, v) = b(v) \quad \forall v \in X$$

admitand urmatoarele ipoteze:

- (H1) $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ functionala liniară si continuă;
- (H2) $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ si, $\forall w \in X$, aplicatia $v \mapsto a(w, v)$ este functionala liniară și continuă;
- (H3) există $m_a > 0$ astfel încât

$$a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq m_a \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X,$$

și există $L_a > 0$ astfel încât

$$|a(u, w) - a(v, w)| \leq L_a \|u - v\|_X \cdot \|w\|_X \quad \forall u, v, w \in X.$$

Teorema 1. (*Lema Lax-Milgram neliniară*) *Admitem ipotezele (H1)-(H3). Problema (P) are soluție unică.*

DEMONSTRAȚIE. Definim operatorul $A : X \rightarrow X$ cu ajutorul aplicatiei a .

Pentru $w \in X$, Aw este elementul din X care verifică

$$(Aw, u)_X = a(w, u) \quad \forall u \in X.$$

Vom arăta în continuare că A este tare monoton și Lipschitz.

- A tare monoton:

$$\begin{aligned}(Au - Av, u - v)_X &= (Au, u - v)_X - (Av, u - v)_X \\ &= a(u, u - v) - a(v, u - v) \\ &\geq m_a \|u - v\|_X^2.\end{aligned}$$

Deci operatorul A este tare monoton.

- A Lipschitz:

$$\|Au - Av\|_X = \sup_{w \in X, w \neq 0} \frac{(Au - Av, w)_X}{\|w\|_X} = \sup_{w \in X, w \neq 0} \frac{a(u, w) - a(v, w)}{\|w\|_X}$$

Dar

$$\frac{a(u, w) - a(v, w)}{\|w\|_X} \leq \frac{L_a \|u - v\|_X \cdot \|w\|_X}{\|w\|_X} = L_a \|u - v\|_X.$$

Trecem la supremum.

Rezultă că operatorul A este și operator Lipschitz.

Utilizând teorema de reprezentare a lui Riesz, există și este unic un element $z \in X$ astfel încât

$$b(v) = (z, v)_X \quad \forall v \in X.$$

Așadar, problema (P) este echivalentă cu problema găsirii unui element $u \in X$ astfel încât

$$(Au, v)_X = (z, v)_X \quad \forall v \in X,$$

echivalent cu

$$Au = z.$$

Existența și unicitatea soluției problemei (P) este asigurată de Teorema Minty-Browder. $\square$

Aplicații: studiul existenței și unicității soluției slabe pentru probleme la limita precum

PROBLEMA 38. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

$$u'(1) = h(u(1)), \tag{3}$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 \mid |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 39.

$$\operatorname{div}(\mu(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2}\nabla u(\mathbf{x})\right)) + f_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega;$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1;$$

$$(\mu(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K\left(\frac{1}{2}\nabla u(\mathbf{x})\right)) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2,$$

unde Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui $\partial\Omega$, $|\Gamma_1| > 0$, $\mu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $K = \bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, k)$ ($k > 0$), $(\beta > 0)$, $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

PROBLEMA 40.

$$-\Delta u = f \quad \text{în } \Omega, \tag{4}$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \tag{5}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \tag{6}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 \mid |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel încât $|\Gamma_1| > 0$.

Incepand de cursul urmator vom aborda elemente de teoria inegalitatilor variationale teorie in care analiza convexa joaca un rol important. De aceea, prezentam in a doua parte a prezentului curs cateva instrumente utile de analiza convexa.

Elemente de analiza convexa

Definiția 2. Fie X un spațiu liniar și $K \neq \emptyset$ o submulțime a lui X . Spunem că o funcție $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă dacă

$$\varphi((1-t)u + tv) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(v) \quad \forall u, v \in K, \forall t \in [0, 1]. \tag{7}$$

Funcția φ este strict convexă dacă inegalitatea (7) este strictă pentru $u \neq v$ și $t \in (0, 1)$.

Exemplu de funcție convexă: $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Remarca 3. Dacă $\varphi, \psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ sunt convexe și $\lambda \geq 0$ atunci funcțiile $\varphi + \psi$ și $\lambda \cdot \varphi$ sunt, de asemenea, convexe.

Remarca 4. Compunerea a două funcții convexe nu este neapărat convexă.

De exemplu, pentru funcțiile convexe $f(x) = x^2$ și $g(x) = -x$, $(g \circ f)(x) = -x^2$, care este funcție concavă.

Remarca 5. Compunerea dintre o funcție convexă strict crescătoare și o funcție convexă este o funcție convexă.

Definiția 6. Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu normat și fie K o submulțime nevidă, închisă și convexă a lui X . O funcție $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ se numește inferior semicontinuu (i.s.c.) în punctul $u \in K$ dacă

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) \quad (8)$$

pentru orice șir $(u_n)_n \subset K$ convergent la u în X .

Funcția φ este i.s.c. dacă este i.s.c. în fiecare punct $u \in K$.

Când inegalitatea (8) are loc pentru orice șir $(u_n)_n \subset K$ slab convergent la u în X , funcția φ se numește slab inferior semicontinuu în punctul $u \in K$. Funcția φ este slab i.s.c. dacă este slab i.s.c. în fiecare punct $u \in K$.

Cum convergența tare pe X implică convergența slabă, rezultă că o funcție slab inferior semicontinuu este inferior semicontinuu. Mai mult, are loc următorul rezultat.

Propoziția 7. Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu Banach, K o submulțime nevidă, închisă și convexă a lui X și $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă. Atunci φ este inferior semicontinuu dacă și numai dacă φ este slab inferior semicontinuu.

Propoziția 8. Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spațiu normat și fie $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară, continuă, pozitivă și simetrică. Atunci funcția $v \mapsto (v, v)$ este strict convexă și inferior semicontinuu.

Demonstrația acestei Propoziții poate fi găsită în [50], pag. 25.

Definiția 9. Fie $(X, (\cdot, \cdot))$ un spațiu înzestrat cu un produs scalar, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ și $u \in X$. Atunci φ este diferențiabilă Gâteaux în u dacă există un element $\nabla\varphi(u) \in X$ astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X. \quad (9)$$

Elementul $\nabla\varphi(u)$ din (9) este unic și se numește gradientul Gâteaux al lui φ în punctul u . Funcția $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Gâteaux dacă este diferențiabilă Gâteaux în orice punct $u \in X$. În acest caz, operatorul $\nabla\varphi : X \rightarrow X$ care asociază fiecărui element $u \in X$ elementul $\nabla\varphi(u)$ se numește gradientul Gâteaux al lui φ .

Convexitatea funcțiilor diferențiabile Gâteaux poate fi caracterizată în felul următor.

Propoziția 10. Fie $(X, (\cdot, \cdot))$ un spațiu înzestrat cu un produs scalar și $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă Gâteaux. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) φ este o funcție convexă;
- ii) φ satisface inegalitatea

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_X \quad \forall u, v \in X.$$

DEMONSTRAȚIE. Admitem că φ este convexă.

$$(\nabla\varphi(u), v - u)_X = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X.$$

Dar

$$\begin{aligned} \varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u) &= \varphi((1 - t)u + tv) - \varphi(u) \\ &\leq (1 - t)\varphi(u) + t\varphi(v) - \varphi(u) = t(\varphi(v) - \varphi(u)) \end{aligned}$$

deci,

$$(\nabla\varphi(u), v - u)_X \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\varphi(v) - \varphi(u))}{t} = \varphi(v) - \varphi(u).$$

Reciproc, admitem că

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_X \quad \forall v \in X$$

și demonstrăm că φ este convexă.

Fie $t \in (0, 1)$. Considerăm elementul

$$w = (1 - t)u + tv \quad \forall u, v \in X.$$

Avem

$$\begin{aligned} \varphi(v) - \varphi(w) &\geq (\nabla\varphi(w), v - w)_X, \\ \varphi(u) - \varphi(w) &\geq (\nabla\varphi(w), u - w)_X. \end{aligned}$$

Înmulțind prima inegalitate cu t și a doua inegalitate cu $(1 - t)$, după adunarea inegalităților obținute găsim

$$t\varphi(v) + (1 - t)\varphi(u) - \varphi((1 - t)u + tv) \geq (\nabla\varphi(w), t(v - w) + (1 - t)(u - w))_X.$$

Observăm că $t(v - w) + (1 - t)(u - w) = 0$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} & t(v - (1 - t)u - tv) + (1 - t)(u - (1 - t)u - tv) \\ &= t((1 - t)v - (1 - t)u) + (1 - t)(tu - tv) \\ &= t(1 - t)(v - u) + (1 - t)t(u - v) = 0 \end{aligned}$$

□

Pentru o caracterizare mai completa a convexitatii a se vedea [50], pag. 26-27.

Corolar 11. Fie $(X, (\cdot, \cdot))$ un spațiu înzestrat cu un produs scalar și $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și diferențială Gâteaux. Atunci φ este i.s.c.

Inegalitatea ce apare în caracterizarea convexitatii din Propozitia 10 sugerează o generalizare a noțiunii de gradient pentru funcțiile convexe.

Definiția 12. Spunem că $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ este subdiferențiabilă într-un punct $u \in X$ dacă există $f \in X$ astfel încât

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Elementul f se numește subgradient al lui φ în u . Mulțimea subgradientilor lui φ în u se numește subdiferențială lui φ în u și se notează cu $\partial\varphi(u)$,

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X : \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X\}.$$

Notăm prin $\text{dom}\partial\varphi$ mulțimea definită după cum urmează

$$\text{dom}\partial\varphi = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}.$$

Amintim aici că pentru o funcție $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$, domeniul lui φ este mulțimea

$$\text{dom}\varphi = \{u \in X : \varphi(u) < \infty\}.$$

Notăm că

$$\text{dom}\partial\varphi \subset \text{dom}\varphi.$$

Într-adevăr, fie $u \in \text{dom}\partial\varphi$. Există $f \in \partial\varphi(u)$ astfel încât

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Dacă $\varphi(u) = \infty$ deducem că

$$-\infty < (f, v - u)_X \leq -\infty,$$

ceea ce este imposibil. Deci $\varphi(u) < \infty$. Prin urmare, $u \in \text{dom } \varphi$.

2^X notează mulținea părților lui X .

Definiția 13. Operatorul multivoc $\partial\varphi : X \rightarrow 2^X$ care duce elementele $u \in X$ în $\partial\varphi(u)$ se numește subdiferențiala lui φ .

O funcție φ este subdiferențiabilă dacă este subdiferențiabilă în toate elementele lui X , adică

$$\text{dom}(\partial\varphi) = X.$$

Lema 14. Fie $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ o aplicație subdiferențiabilă. Atunci φ este convexă, proprie și inferior semicontinuă.

DEMONSTRAȚIE. Deoarece φ este subdiferențiabilă pentru orice $u \in X$, există $f_u \in X$ astfel încât

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f_u, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Prin urmare, $\varphi(u) < \infty$ pentru orice $u \in X$. Deci φ este funcție proprie.

Fie $u, v \in X$ și $t \in (0, 1)$. Considerăm elementul $w = (1 - t)u + tv$.

Fie $f \in \partial\varphi(w)$.

$$\varphi(v) - \varphi(w) \geq (f, v - w)_X,$$

$$\varphi(u) - \varphi(w) \geq (f, u - w)_X.$$

Înmulțind prima inegalitate cu t și a doua inegalitate cu $(1 - t)$, după adunarea inegalităților obținute găsim

$$t\varphi(v) + (1 - t)\varphi(u) - \varphi((1 - t)u + tv) \geq 0,$$

deci φ este convexă.

Demonstrăm acum că φ este inferior semicontinuă. Pentru aceasta, considerăm $(u_n)_n \subset X$ astfel încât $u_n \rightarrow u$ în X , și $f \in \partial\varphi(u)$.

$$\varphi(u_n) - \varphi(u) \geq (f, u_n - u)_X \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trecem la limită inferioară și obținem

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n).$$

Deci φ este i.s.c.

□

Seminar 8

Exercițiul 1. Fie X un spațiu Hilbert. Arătați că dacă operatorul $A : X \rightarrow X$ este simetric, atunci el este liniar.

Fie $u, v, w \in X$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned}(A(\alpha u + \beta v), w)_X &= (\alpha u + \beta v, Aw)_X = \alpha(u, Aw)_X + \beta(v, Aw)_X \\ &= \alpha(Au, w)_X + \beta(Av, w)_X = (\alpha Au + \beta Av, w)_X.\end{aligned}$$

Rezultă că

$$(A(\alpha u + \beta v) - \alpha Au - \beta Av, w)_X = 0 \quad \forall w \in X.$$

Alegem $w = A(\alpha u + \beta v) - \alpha Au - \beta Av$. Atunci

$$\|A(\alpha u + \beta v) - \alpha Au - \beta Av\|_X^2 = 0,$$

ceea ce presupune

$$A(\alpha u + \beta v) - \alpha Au - \beta Av = 0,$$

adică

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av.$$

Deci A este liniar.

Exercițiul 2. Fie $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ o funcție convexă și diferențiabilă Gâteaux. Atunci

- i) φ este subdiferențiabilă;
- ii) $\partial\varphi$ este operator univoc pe X și

$$\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\} \quad \forall u \in X.$$

- i) Utilizând caracterizarea convexității pentru functionale diferențiabile Gâteaux deducem că φ este subdiferențiabilă,

$$\nabla\varphi(u) \in \partial\varphi(u).$$

ii) Fie $u \in X$ și $\varphi \in \partial\varphi(u)$.

$$\varphi(w) - \varphi(u) \geq (f, w - u)_X \quad \forall w \in X.$$

Luăm $w = u + tv$, unde $t \in \mathbb{R}, t > 0$. Atunci

$$\varphi(u + tv) - \varphi(u) \geq (f, tv)_X \quad \forall v \in X.$$

$$\frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} \geq \frac{(f, tv)_X}{t} \quad \forall v \in X.$$

Trecând la limită când $t \rightarrow 0_+$ în relația de mai sus obținem

$$(\nabla\varphi(u), v)_X \geq (f, v)_X \quad \forall v \in X.$$

Luând $-v$ în loc de v mai sus găsim

$$(\nabla\varphi(u), v)_X \leq (f, v)_X \quad \forall v \in X.$$

Deci,

$$(\nabla\varphi(u), v)_X = (f, v)_X \quad \forall v \in X$$

și de aici obținem

$$\nabla\varphi(u) = f.$$

Remarca 3. Dacă funcția φ nu este convexă, afirmația din Exercițiul 2 nu mai este valabilă.

Într-adevăr, fie $X = \mathbb{R}$ și $\varphi(u) = -u^2$. Se verifică ușor că φ este diferențiabilă Gâteaux și $\nabla\varphi(u) = -2u$ pentru oricare $u \in \mathbb{R}$. Totuși, φ nu este subdiferențiabilă în niciun punct $u \in \mathbb{R}$.

Pentru a demonstra această afirmație, presupunem că φ este subdiferențiabilă în $u \in \mathbb{R}$ și fie $f \in \partial\varphi(u)$.

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq f(v - u) \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Așadar,

$$-v^2 + u^2 \geq f(v - u) \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

sau echivalent,

$$(v - u)(f + v + u) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Trecând la limită când $v \rightarrow \infty$ ajungem la o contradicție.

Exercițiul 4. Fie $A : X \rightarrow X$ un operator simetric astfel încât

$$(Au, u)_X \geq 0 \quad \forall u \in X.$$

Fie $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(Au, u)_X.$$

Atunci φ este convexă și inferior semicontinuă. În plus, φ este subdiferențibilă și

$$\partial\varphi(u) = \{Au\} \quad \forall u \in X.$$

Demonstrăm că φ este convexă. Pentru aceasta considerăm $u, v \in X$ și $t \in [0, 1]$. Evaluăm

$$\varphi(tu + (1-t)v) - t\varphi(u) - (1-t)\varphi(v)$$

cu ajutorul definiției lui φ . Astfel, obținem

$$\begin{aligned} & \varphi(tu + (1-t)v) - t\varphi(u) - (1-t)\varphi(v) \\ &= \frac{1}{2}[(A(tu + (1-t)v), tu + (1-t)v)_X - t(Au, u)_X - (1-t)(Av, v)_X]. \end{aligned}$$

Deoarece A este operator simetric, A este și operator liniar. Deci

$$\begin{aligned} & \varphi(tu + (1-t)v) - t\varphi(u) - (1-t)\varphi(v) = \\ &= \frac{1}{2}[t^2(Au, u)_X + 2t(1-t)(Au, v)_X + (1-t)^2(Av, v)_X - t(Au, u)_X - (1-t)(Av, v)_X] \\ &= \frac{1}{2}[t(t-1)(Au, u)_X + t(t-1)(Au, v)_X + t(t-1)(Av, u)_X + (t-1)(-t)(Av, v)_X] \\ &= \frac{1}{2}t(t-1)[(Au, u)_X - (Au, v)_X - (Av, u)_X + (Av, v)_X] \\ &= \frac{1}{2}t(t-1)(A(u-v), u-v)_X. \end{aligned}$$

Cum A este operator pozitiv, avem

$$(A(u-v), u-v)_X \geq 0,$$

deci

$$\varphi(tu + (1-t)v) - t\varphi(u) - (1-t)\varphi(v) \leq 0.$$

Demonstrăm în continuare că φ este inferior semicontinuă. Fie $u_n \rightarrow u$ în X .

$$\begin{aligned} \varphi(u_n) - \varphi(u) &= \frac{1}{2}(Au_n, u_n)_X - \frac{1}{2}(Au, u)_X \\ &= \frac{1}{2}(Au_n - Au, u_n)_X + \frac{1}{2}(Au, u_n)_X - \frac{1}{2}(Au, u)_X \\ &= \frac{1}{2}(Au_n - Au, u_n - u)_X + \frac{1}{2}(Au_n - Au, u)_X + \frac{1}{2}(Au, u_n - u)_X. \end{aligned}$$

Deoarece A este simetric, avem

$$(Au_n - Au, u)_X = (u_n - u, Au)_X = (Au, u_n - u)_X.$$

Deci

$$\varphi(u_n) - \varphi(u) = \frac{1}{2}(Au_n - Au, u_n - u)_X + (Au, u_n - u)_X.$$

Ținând cont de proprietățile operatorului A

$$(Au_n - Au, u_n - u)_X \geq 0.$$

Prin urmare,

$$\varphi(u) \leq \varphi(u_n) + \|Au\|_X \cdot \|u_n - u\|_X.$$

Trecem acum la limită inferioară și obținem

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n).$$

Pentru a demonstra că φ este subdiferențiabilă este suficient (știind deja că φ este convexă) să demonstrăm că φ este diferențiabilă Gâteaux. Pentru aceasta, fie $u \in X$. Evaluăm

$$\frac{\varphi(u + tv) - \varphi(v)}{t} \quad \forall v \in X.$$

Utilizând definiția lui φ avem

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(v)}{t} &= \frac{1}{2t}((A(u + tv), u + tv)_X - (Au, u)_X) \\ &= \frac{1}{2t}(t^2(Av, v)_X + 2t(Au, v)_X + (A, u)_X - (A, u)_X). \end{aligned}$$

Deci

$$\frac{\varphi(u + tv) - \varphi(v)}{t} = \frac{t}{2}(Av, v)_X + (Au, v)_X.$$

Trecând la limită când $t \rightarrow 0_+$ deducem

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(v)}{t} = (Au, v)_X.$$

Așadar,

$$\nabla \varphi(u) = Au \quad \forall u \in X.$$

Utilizând Exercițiul 2, stim ca $\partial \varphi$ este operator univoc

$$\partial \varphi(u) = \{Au\}.$$

Exercițiul 5. Fie $\varphi_v(u) = a(u, v)$ unde a este formă biliniară, continuă, X -eliptică și simetrică. Studiați diferențiabilitatea Gâteaux a lui φ_v .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_v(u + tv) - \varphi_v(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(u + tw, v) - a(u, v)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(u, v) + ta(w, v) - a(u, v)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot a(w, v)}{t} \\ &= a(w, v) = \varphi_v(w). \end{aligned}$$

În continuare, arătăm că aplicația

$$v \mapsto f_w(v) = a(w, v)$$

este liniară și continuă.

- f_w liniară:

$$f_w(\alpha v_1 + \beta v_2) = a(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha a(v_1, w) + \beta a(v_2, w) = \alpha f_w(v_1) + \beta f_w(v_2).$$

Deci f_w este liniară.

- f_w continuă:

$$|f_w(v)| = |a(w, v)| \leq M \|w\|_X \cdot \|v\|_X,$$

deci f_w este continuă.

Din Teorema de reprezentare a lui Riesz rezultă că există un unic element $\nabla \varphi_v(u) \in X$ astfel încât

$$a(w, v) = (\nabla \varphi_v(u), v)_X.$$

Priun urmare,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_v(u + tv) - \varphi_v(u)}{t} = (\nabla \varphi_v(u), v)_X.$$

Deci φ_v este diferențiabilă Gâteaux.

Curs 9

Tematica: inegalitati variationale de tipul I; aplicatii

Fie X un spațiu Hilbert înzestrat cu produsul scalar $(\cdot, \cdot)_X$ și norma $\|\cdot\|_X$. Considerăm un operator $A : X \rightarrow X$, o submulțime $K \subset X$ și un element $f \in X$. Ne propunem să găsim un element $u \in K$ care să verifice

$$(Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1)$$

O inegalitate de forma (1) se numește inegalitate variațională eliptică de prima speță. Vom prezenta acum un rezultat de existență și unicitate.

Teorema 1. *Fie X un spațiu Hilbert și fie $K \subset X$ o submulțime nevidă închisă și convexă. Presupunem că operatorul $A : K \rightarrow X$ este tare monoton și Lipschitz. Atunci, pentru fiecare $f \in X$ inegalitatea variațională (1) are o unică soluție.*

DEMONSTRAȚIE. Cum A este tare monoton și Lipschitz rezultă că există două constante $m > 0$ și $M > 0$ astfel încât

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X, \quad (2)$$

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (3)$$

Fie $f \in X$ și fie $\rho > 0$ dat. Considerăm operatorul $S_\rho : K \rightarrow K$ definit prin

$$S_\rho u = \mathcal{P}_K(u - \rho(Au - f)) \quad \forall u \in K,$$

unde $\mathcal{P}_K$ reprezintă operatorul de proiecție pe K . Mai mult, utilizând proprietatea operatorului de proiecție pe K

$$\|\mathcal{P}_K u - \mathcal{P}_K v\|_X \leq \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X,$$

rezultă că

$$\|S_\rho u - S_\rho v\|_X \leq \|(u - v) - \rho(Au - Av)\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Utilizând argumente similare celor folosite în demonstrația Teoremei Minty-Browder, cu o alegere potrivită pentru ρ , $\rho \in (0, \frac{2m}{M^2})$, avem

$$\|S_\rho u - S_\rho v\|_X \leq k(\rho) \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K,$$

unde $k(\rho) = (1 - 2\rho m + \rho^2 M^2)^{\frac{1}{2}} \in (0, 1)$ și m, M sunt constantele din (2) și (3).

Din Teorema lui Banach de punct fix rezultă că există un unic $u \in K$ astfel încât

$$S_\rho u = \mathcal{P}_K(u - \rho(Au - f)) = u. \quad (4)$$

Cu inegalitatea de caracterizare a proiecției (vezi primul curs),

$$\mathcal{P}_K(u - \rho(Au - f)) = u$$

echivalent cu

$$u \in K, \quad (u, v - u)_V \geq (u - \rho(Au - f), v - u)_V \quad \forall v \in K.$$

Cum $\rho > 0$ rezulta ca u (unicul punct fix al operatorului S_ρ) satisface (1), ceea ce demonstrează partea de existență a teoremei.

Studiul unicității Fie două soluții $u \in K$ și $v \in K$ pentru (1). Rezultă că

$$(Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X, \quad (Av, u - v)_X \geq (f, u - v)_X.$$

Adunând aceste inegalități obținem

$$(Au - Av, v - u)_X \leq 0.$$

Cum A este tare monoton, rezulta $u = v$, demonstrând astfel unicitatea soluției. $\square$

Aplicații

Fie problema la limita.

PROBLEMA 41. *Sa se determine $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (5)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (6)$$

$$u \leq 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \text{ pe } \Gamma_3, \quad (8)$$

unde $\Omega \in \mathbb{R}^N$, ($N > 1$) domeniu mărginit, cu frontiera netedă, $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este Lipschitz și monotonă, iar $|\Gamma_i| > 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$) partitie a frontierei lui Ω .

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție în sens slab pentru Problema 41 și să studiem existența și unicitatea acesteia. Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică Problema 41.

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

Fie $v \in V$.

Înmulțim cu v prima linie a problemei și integrăm.

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Utilizând formula lui Green pentru spații Sobolev găsim

$$-\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (9)$$

Ținând cont de (6) și (8), relația (9) devine

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_2} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} h(u) \gamma v d\Gamma = \int_{\Omega} f v dx. \quad (10)$$

Testand cu $v - u$ în (10) obținem

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx - \int_{\Gamma_2} \gamma (v - u) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} h(u) \gamma (v - u) d\Gamma = \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad (11)$$

pentru orice $v \in V$. Analizăm acum integrala pe Γ_2 .

$$\int_{\Gamma_2} \gamma (v - u) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} (\gamma v - \gamma u) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Din (7) avem că

$$\int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 0,$$

deci

$$\int_{\Gamma_2} \gamma (v - u) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Așadar, relația (11) se poate scrie

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_3} h(u) \gamma (v - u) d\Gamma = \int_{\Omega} f (v - u) dx + \int_{\Gamma_2} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma, \quad (12)$$

pentru orice $v \in V$. Din relația (7) avem

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ și } \gamma v \leq 0.$$

Prin urmare,

$$\int_{\Gamma_2} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma \geq 0, \quad \forall v \in K \quad (13)$$

unde

$$K = \{v \in V : v \leq 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_2\}.$$

Din relațiile (13) și (12) găsim

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_3} h(u) \gamma(v - u) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in K. \quad (14)$$

Definim $A : V \rightarrow V$ prin

$$(Au, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_3} h(\gamma u) \gamma(v - u) d\Gamma$$

și

$$\int_{\Omega} f v dx = (\tilde{f}, v)_V.$$

Ținând cont de acestea, relația (14) poate fi scrisă

$$(Au, v - u)_V \geq (\tilde{f}, v - u)_V, \forall v \in K. \quad (15)$$

Definiția 2. Numim soluție în sens slab pentru Problema 41 o funcție $u \in K$ ce verifică (15), $\forall v \in K$.

Teorema 3. Problema 41 are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Studiem existența și unicitatea soluției cu Teorema ???. Vom arăta mai întâi că mulțimea K este nevidă, convexă și închisă.

- K nevidă:

Observăm că $0_V \in K$, deci mulțimea este nevidă.

- K convexă:

Fie $u, v \in K$ și $\lambda \in [0, 1]$.

Faptul că $u, v \in K$ înseamnă că

$$\gamma u \leq 0 \text{ pe } \Gamma_2 \quad (16)$$

și

$$\gamma v \leq 0 \text{ pe } \Gamma_2. \quad (17)$$

Înmulțind relația (16) cu λ și relația (17) cu $(1 - \lambda)$ și adunând cele două relații obținem

$$\lambda \gamma u + (1 - \lambda) \gamma v \leq 0 \text{ pe } \Gamma_2. \quad (18)$$

Cum γ este operator liniar, putem scrie relația (18) astfel:

$$\gamma(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq 0 \text{ pe } \Gamma_2.$$

Așadar, $\lambda u + (1 - \lambda)v \in K$, deci mulțimea K este convexă.

-
- K închisă:

Fie $(u_n)_n \subset K$ un şir astfel încât $u_n \rightarrow u$ în V când $n \rightarrow \infty$. Vom arăta că $u \in K$.

Din $(u_n)_n \subset K$ avem

$$\gamma u_n \leq 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_2. \quad (19)$$

Din faptul că $u_n \rightarrow u$ în V , cum operatorul γ este continuu obţinem

$$\gamma u_n \rightarrow \gamma u \text{ în } L^2(\partial\Omega).$$

Rezultă că există un subsir $u_{n'}$ astfel încât

$$\gamma u_{n'}(x) \rightarrow \gamma u(x) \text{ a.p.t. pe } \partial\Omega \quad (20)$$

(vezi teorema în [5]).

Din (19) şi (20) rezultă

$$\gamma u(x) \leq 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_2.$$

Aşadar, $u \in K$.

În continuare, arătăm că operatorul $A : V \rightarrow V$,

$$(Au, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_3} h(\gamma u) \gamma v d\Gamma$$

este Lipschitz şi tare monoton.

- A Lipschitz:

Ştim că

$$\|Au - Av\|_V = \sup_{w \in V, w \neq 0} \frac{(Au - Av, w)_V}{\|w\|_V}.$$

Evaluăm cantitatea $\frac{(Au-Av, w)_V}{\|w\|_V}$.

$$\begin{aligned}
\frac{(Au - Av, w)_V}{\|w\|_V} &= \frac{(Au, w)_V - (Av, w)_V}{\|w\|_V} \\
&= \frac{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx + \int_{\Gamma_3} h(\gamma u) \gamma w d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx + \int_{\Gamma_3} h(\gamma v) \gamma w d\Gamma}{\|w\|_V} \\
&= \frac{\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla v) \cdot \nabla w dx + \int_{\Gamma_3} (h(\gamma u) - h(\gamma v)) \gamma w d\Gamma}{\|w\|_V} \\
&\leq \frac{|\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla v) \cdot \nabla w dx|}{\|w\|_V} + \frac{|\int_{\Gamma_3} (h(\gamma u) - h(\gamma v)) \gamma w d\Gamma|}{\|w\|_V} \\
&\leq \frac{\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Gamma_3} |h(\gamma u) - h(\gamma v)| \cdot |\gamma w| d\Gamma}{\|w\|_V} \\
&\leq \frac{\|\nabla(u - v)\|_V \cdot \|\nabla w\|_V + L_h \int_{\Gamma_3} (\gamma v - \gamma u) \cdot |\gamma w| d\Gamma}{\|w\|_V} \\
&\leq \frac{\|\nabla(u - v)\|_V \cdot \|\nabla w\|_V + L_h \|\gamma v - \gamma u\|_{L^2(\Gamma_3)} \cdot \|\gamma w\|_{L^2(\Gamma_3)}}{\|w\|_V}.
\end{aligned}$$

Vom evalua separat câteva cantități ce apar în această inegalitate.

$$\|\gamma w\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \|\gamma w\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c_{tr} \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq c_{tr} \cdot \tilde{C}_p \cdot \|w\|_V.$$

$$\|\gamma v - \gamma u\|_{L^2(\Gamma_3)} = \|\gamma(v - u)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_{tr} \cdot \tilde{C}_p \cdot \|v - u\|_V.$$

Ținând cont de aceste relații, găsim

$$\begin{aligned}
\frac{(Au - Av, w)_V}{\|w\|_V} &\leq \frac{(\|u - v\|_V + L_h \cdot c \cdot \tilde{C}_p \cdot \|u - v\|_V) \cdot \|w\|_V}{\|w\|_V} \\
&= (1 + L_h \cdot c \cdot \tilde{C}_p) \|u - v\|_V.
\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\|Au - Av\|_V \leq (1 + L_h \cdot c \cdot \tilde{C}_p) \|u - v\|_V.$$

- A tare monoton:

Fie $u, v \in V$.

$$\begin{aligned}
(Au - Av, u - v)_V &= (Au, u - v)_V - (Av, u - v)_V \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx + \int_{\Gamma_3} h(\gamma u) \gamma(v - u) d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(v - u) dx + \int_{\Gamma_3} h(\gamma v) \gamma(v - u) d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla v)^2 dx + \int_{\Gamma_3} (h(\gamma u) - h(\gamma v)) \cdot (\gamma u - \gamma v) d\Gamma \\
&\geq \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \|u - v\|_V^2.
\end{aligned}$$

Pot lua $m_A = 1$.

Aplicând Teorema 1 găsim că Problema 41 are o unică soluție slabă. $\square$

Studiem în continuare inegalitatea variațională

$$(Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K \quad (21)$$

utilizând o metodă de penalizare.

Pentru aceasta, considerăm un operator G ce satisface următoarele condiții:

- (a) $G : X \rightarrow X$ este operator Lipschitz;
- (b) $(Gu, v - u)_X \leq 0 \quad \forall u \in X, v \in K$;
- (c) $Gu = 0_X$ dacă și numai dacă $u \in K$.

Pentru orice $\mu > 0$ considerăm problema găsirii unui element u_μ astfel încât

$$Au_\mu + \frac{1}{\mu} \cdot Gu_\mu = f. \quad (22)$$

Avem următorul rezultate de existență, unicitate și convergență.

Teorema 4. *Fie X un spațiu Hilbert și fie $K \subset X$ o submulțime nevidă închisă și convexă. Presupunem că operatorul $A : X \rightarrow X$ este tare monoton și Lipschitz, G este un operator ce verifică condițiile (a) – (c) și $f \in X$. Atunci:*

- (1) *Pentru fiecare $\mu > 0$ există un unic element u_μ care verifică ecuația neliniară (22);*
- (2) *Există un unic element u ce verifică inegalitatea variațională (21);*
- (3) *soluția u_μ a ecuației (22) converge tare la soluția u a inegalității variaționale (21), adică*

$$u_\mu \rightarrow u \text{ în } X \text{ când } \mu \rightarrow \infty.$$

Pentru detalii a se consulta [50].

Aplicatii

Fie problema la limita

PROBLEMA 42. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (23)$$

$$u(0) = 0, \quad (24)$$

$$u(1) \leq 0, u'(1) \leq 0, u(1)u'(1) = 0, \quad (25)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$.

Fie

$$K = \{v \in V \mid v(1) \leq 0\} = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0, v(1) \leq 0\}.$$

Definiția 5. Numim soluție în sens slab pentru Problema 42 o funcție $u \in K$ ce verifică

$$\int_0^1 u'(v' - u')dx \geq \int_{\Omega} f(v - u)dx, \quad \forall v \in K.$$

Teorema 6. Problema 42 are o unica solutie slaba in sensul introdus anterior.

DEMONSTRAȚIE. Ind. Relatia integrala

$$\int_0^1 u'(v' - u')dx \geq \int_{\Omega} f(v - u)dx, \quad \forall v \in K.$$

se scrie echivalent

$$u \in K, (Au, v - u)_V \geq (\bar{f}, v - u)_V \quad \forall v \in K,$$

unde

$$A : V \rightarrow V, (Au, v)_V = \int_0^1 u' v' dx$$

si

$$\bar{f} \in V, (\bar{f}, v)_V = \int_{\Omega} f v dx.$$

Operatorul A este tare monoton si Lipschitz iar K este submultime nevida inchisa convexa. Putem aplica Teorema ??.

□

Fie problema la limita

PROBLEMA 43.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (26)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (27)$$

$$u \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2 \quad (28)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel încat $|\Gamma_1| > 0$.

Fie

$$K = \{v \in V \mid v \leq 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_2\}.$$

Definiția 7. Numim soluție în sens slab pentru Problema 43 o funcție $u \in K$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in K.$$

Teorema 8. Problema 43 are o unica solutie slaba in sensul introdus anterior.

DEMONSTRAȚIE. Ind. Relatia integrala

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in K$$

se scrie echivalent

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_V \geq (\bar{f}, v - u)_V \quad \forall v \in K,$$

unde

$$A : V \rightarrow V, \quad (Au, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

si

$$\bar{f} \in V, \quad (\bar{f}, v)_V = \int_{\Omega} f v dx.$$

Operatorul A este tare monoton si Lipschitz iar K este submultime nevida inchisa convexa. Putem aplica Teorema 1. $\square$

Seminar 9

Fie problema la limita

PROBLEMA 44. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad (2)$$

$$u(1) \leq g, u'(1) \leq 0, (u(1) - g)u'(1) = 0, \quad (3)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

Fie

$$K = \{v \in V \mid v(1) \leq g\} = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0, v(1) \leq g\}.$$

Numim soluție în sens slab pentru Problema 44 o funcție $u \in K$ ce verifică

$$\int_0^1 u'(v' - u')dx \geq \int_{\Omega} f(v - u)dx, \quad \forall v \in K.$$

Problema 44 are o unică soluție slabă în sensul introdus anterior. Într-adevăr, relația integrală

$$\int_0^1 u'(v' - u')dx \geq \int_{\Omega} f(v - u)dx, \quad \forall v \in K.$$

se scrie echivalent

$$u \in K, (Au, v - u)_V \geq (\bar{f}, v - u)_V \quad \forall v \in K,$$

unde

$$A : V \rightarrow V, (Au, v)_V = \int_0^1 u' v' dx$$

și

$$\bar{f} \in V, (\bar{f}, v)_V = \int_{\Omega} f v dx.$$

Operatorul A este tare monoton și Lipschitz iar K este submultime nevidă închisă convexă. Putem aplica Teorema 1.

Fie problema la limita

PROBLEMA 45.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (4)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (5)$$

$$u \leq g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad (u - g) \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2 \quad (6)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $g > 0$ iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ astfel încât $|\Gamma_1| > 0$.

Fie

$$K = \{v \in V \mid v \leq g \text{ a.p.t. pe } \Gamma_2\}.$$

Numim soluție în sens slab pentru Problema 45 o funcție $u \in K$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in K.$$

Problema 45 are o unică soluție slabă în sensul introdus anterior.

Relația integrală

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in K$$

se scrie echivalent

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_V \geq (\bar{f}, v - u)_V \quad \forall v \in K,$$

unde

$$A : V \rightarrow V, \quad (Au, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

și

$$\bar{f} \in V, \quad (\bar{f}, v)_V = \int_{\Omega} f v dx.$$

Operatorul A este tare monoton și Lipschitz iar K este submultime nevidă închisă convexă. Putem aplica Teorema 1.

Exercițiul 1. Fie $A : X \rightarrow X$ un operator simetric și pozitiv, $\varphi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ o funcțională subdiferențiabilă iar $\psi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ o funcțională definită prin

$$\psi(u) = \frac{1}{2}(Au, u)_X + \varphi(u).$$

Atunci ψ este subdiferențiabilă și

$$\partial\psi(u) = Au + \partial\varphi(u) \quad \forall u \in X.$$

Fie $u \in X$ și $f \in Au + \partial\varphi(u)$. Atunci,

$$f = Au + g, \quad g \in \partial\varphi(u).$$

Cum $g \in \partial\varphi(u)$,

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (g, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (7)$$

Să evaluăm cantitatea

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(Av, v)_X - \frac{1}{2}(Au, u)_X &= \frac{1}{2}(Av - Au, v)_X + \frac{1}{2}(Au, v)_X - \frac{1}{2}(Au, u)_X \\ &= \frac{1}{2}(Av - Au, v - u)_X + \frac{1}{2}(Av - Au, u)_X + \frac{1}{2}(Au, v - u)_X \\ &= \frac{1}{2}(Av - Au, v - u)_X + \frac{1}{2}(v - u, Au)_X + \frac{1}{2}(Au, v - u)_X \\ &= \frac{1}{2}(Av - Au, v - u)_X + (Au, v - u)_X \\ &\geq (Au, v - u)_X. \end{aligned}$$

Așadar,

$$\frac{1}{2}(Av, v)_X - \frac{1}{2}(Au, u)_X \geq (Au, v - u)_X. \quad (8)$$

Sumând (9) și (10) obținem

$$\psi(v) - \psi(u) \geq (Au + g, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Deci $f \in \partial\psi(u)$.

Prin urmare,

$$Au + \partial\varphi(u) \subset \partial\psi(u).$$

Să demonstrăm acum incluziunea inversă

$$\partial\psi(u) \subset Au + \partial\varphi(u).$$

Fie $f \in \partial\psi(u)$.

$$\frac{1}{2}(Av, v)_X + \varphi(v) - \frac{1}{2}(Au, u)_X - \varphi(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Fie $w \in X$ și $t \in (0, 1)$. Punând $v = u + t(w - u)$ și utilizând convexitatea lui φ obținem

$$\frac{1}{2}t^2(A(w - u), w - u)_X + t(Au, w - u)_X + t(\varphi(w) - \varphi(u)) \geq t(f, w - u)_X.$$

Împărțim prin t și trecem la limită când $t \rightarrow 0$. Obținem

$$(Au, w - u)_X + \varphi(w) - \varphi(u) \geq (f, w - u)_X,$$

de unde

$$\varphi(w) - \varphi(u) \geq (f - Au, w - u)_X.$$

Deoarece $w \in X$ era un element arbitrar al lui X , obținem

$$f - Au \in \partial\varphi(u).$$

Utilizând cele două incluziuni obținute, deducem că

$$\partial\psi(u) = Au + \partial\varphi(u).$$

Exercițiul 2. Fie $K \subset X, K \neq \emptyset$ închis, convex și $\mathcal{P}_K : X \rightarrow K$ operatorul de proiecție pe K . Fie $\mu > 0$ și funcționala $\mathcal{G}_\mu : X \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{G}_\mu(u) = \frac{1}{2\mu} \|u - \mathcal{P}_K u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Atunci $\mathcal{G}_\mu$ este Gâteaux diferențiabilă și

$$\nabla \mathcal{G}_\mu(u) = \frac{1}{\mu}(u - \mathcal{P}_K u) \quad \forall u \in X.$$

Fie $G_\mu : X \rightarrow \mathbb{R}$ operatorul

$$G_\mu(u) = \frac{1}{\mu}(u - \mathcal{P}_K u) \quad \forall u \in X.$$

Să evaluăm

$$\mathcal{G}_\mu(v) - \mathcal{G}_\mu(u) - (G_\mu(u), v - u)_X$$

utilizând definiția funcționalei $\mathcal{G}_\mu$ și a operatorului G_μ .

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\mu(v) - \mathcal{G}_\mu(u) - (G_\mu(u), v - u)_X &= \frac{1}{2\mu} \|v - \mathcal{P}_K v\|_X^2 - \frac{1}{2\mu} \|u - \mathcal{P}_K u\|_X^2 - \frac{1}{\mu} (u - \mathcal{P}_K u, v - u)_X \\ &= \frac{1}{2\mu} (v - \mathcal{P}_K v, v - \mathcal{P}_K v)_X - \frac{1}{2\mu} (u - \mathcal{P}_K u, u - \mathcal{P}_K u)_X - \frac{2}{2\mu} (u - \mathcal{P}_K u, v - u)_X \\ &= \frac{1}{2\mu} [\|(v - u) - (\mathcal{P}_K v - \mathcal{P}_K u)\|_X^2 + 2(\mathcal{P}_K u - u, \mathcal{P}_K v - \mathcal{P}_K u)_X]. \end{aligned}$$

Prin urmare, folosind inegalitatea de caracterizare a proiecției (vezi primul curs) deducem că

$$\mathcal{G}_\mu(v) - \mathcal{G}_\mu(u) \geq (G_\mu(u), v - u)_X \quad \forall u \in X.$$

De asemenea, prin calcule elementare obținem

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\mu(v) - \mathcal{G}_\mu(u) - (G_\mu(u), v - u)_X &= \frac{1}{2\mu} \|v - u\|_X^2 - \frac{1}{2\mu} \|\mathcal{P}_K v - \mathcal{P}_K u\|_X^2 - \frac{1}{\mu} (\mathcal{P}_K v - v, \mathcal{P}_K u - \mathcal{P}_K v)_X. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\mathcal{G}_\mu(v) - \mathcal{G}_\mu(u) - (G_\mu(u), v - u)_X \leq \frac{1}{2\mu} \|v - u\|_X^2 \quad \forall u, v \in X.$$

Am obținut așadar,

$$0 \leq \mathcal{G}_\mu(v) - \mathcal{G}_\mu(u) - (G_\mu(u), v - u)_X \leq \frac{1}{2\mu} \|v - u\|_X^2,$$

pentru orice $u, v \in X$.

Deci

$$0 \leq \frac{\mathcal{G}_\mu(u + tv) - \mathcal{G}_\mu(u)}{t} - \frac{(G_\mu(u), u + tv - u)_X}{t} \leq \frac{t}{2} \|v\|_X^2.$$

Trecând la limită a când $t \rightarrow 0$ și aplicând criteriul cleștelui găsim

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G}_\mu(u + tv) - \mathcal{G}_\mu(u)}{t} = (G_\mu(v), v)_X.$$

Prin urmare, $\mathcal{G}_\mu$ este diferențiabilă Gâteaux și

$$\nabla \mathcal{G}_\mu = G_\mu.$$

Curs 10

Tematica: inegalitati variationale de tipul II; aplicatii

Fie X un spațiu Hilbert înzestrat cu produsul scalar $(\cdot, \cdot)_X$ și norma $\|\cdot\|_X$. Considerăm o submulțime $K \subset X$, un operator $A : K \rightarrow X$, o funcție $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ și un element $f \in X$.

Ne propunem să rezolvăm problema găsirii unui element u astfel încât

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1)$$

O inegalitate variațională eliptică de forma (1) se numește inegalitate variațională eliptică de speța a doua.

Pentru studiul inegalității (1) considerăm următoarele ipoteze:

- (H1) K este o submulțime nevidă închisă convexa a lui X ;
- (H2) $A : K \rightarrow X$ este un operator tare monoton (de rang m) și Lipschitz (de rang M)
- (H3) $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcțională convexă și inferior semicontinuă.

Teorema 1. *Fie X un spațiu Hilbert și presupunem că au loc ipotezele (H1)-(H3). Atunci, pentru orice $f \in X$, inegalitatea variațională (1) are o unică soluție.*

Lema 2. *Fie X un spațiu Hilbert, $K \subset X$ o submulțime nevidă, închisă și convexă a lui X , $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară continuă, simetrică și X -eliptică și $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și inferior semicontinuă. Atunci, pentru orice $f \in X$, există un unic element $u \in K$ astfel încât*

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

DEMONSTRAȚIE. *Ind.* Fie funcționala

$$J : K \rightarrow \mathbb{R} \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)_X.$$

Un element $u \in K$ verifica

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K$$

daca si numai daca

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K.$$

In plus, J are un unic minim in K . Prin urmare există un unic element $u \in K$ astfel încât

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K,$$

u fiind unicul punct de minim al lui J in K . Pentru detalii de demonstratie a se vedea paginile 30-31 in [50]. $\square$

Lema 3. *Admitem ipotezele (H1) și (H3). Atunci, pentru fiecare $f \in X$ există un unic element u astfel încât*

$$u \in K, \quad (u, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (2)$$

Mai mult, dacă u_1 și u_2 sunt soluții ale inegalității (2) pentru $f = f_1 \in X$ și $f = f_2 \in X$, respectiv, atunci

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq \|f_1 - f_2\|_X.$$

DEMONSTRAȚIE. Prima parte a aceste leme este o consecință directă a Lemei 2. Mai departe, fie $f_1, f_2 \in X$ și $u_1, u_2 \in K$ astfel încât

$$(u_1, v - u_1)_X + j(v) - j(u_1) \geq (f_1, v - u_1)_X \quad \forall v \in K. \quad (3)$$

$$(u_2, v - u_2)_X + j(v) - j(u_2) \geq (f_2, v - u_2)_X \quad \forall v \in K. \quad (4)$$

Luând $v = u_2$ în (3) și $v = u_1$ în (4) și adunând inegalitățile obținute găsim

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_X,$$

ceea ce implică

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq \|f_1 - f_2\|_X.$$

$\square$

Lema 3 ne permite să introducem următoarea definiție.

Definiția 4. Fie X un spațiu Hilbert, $K \subset X$ o submulțime nevidă, închisă și convexă a lui X și $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și inferior semicontinuă. Atunci, pentru fiecare $f \in X$, soluția u a inegalității variaționale (2) se numește element proximal în raport cu j , notat cu $\text{prox}_j f$. Operatorul $\text{prox}_j f : X \rightarrow K$ definit prin $f \mapsto \text{prox}_j f$ se numește operator de proximitate al funcției j .

Observăm că Lema 3 spune că operatorul prox_j este nonexpansiv, adică

$$\|\text{prox}_j f_1 - \text{prox}_j f_2\|_X \leq \|f_1 - f_2\|_X \quad \forall f_1, f_2 \in X. \quad (5)$$

În final, remarcăm că dacă K este o submulțime nevidă, închisă și convexă a lui X , putem considera operatorul proximal al funcției zero pe K , notat prox_K . Din definiția anterioară rezultă că $u = \text{prox}_K f$ dacă și numai dacă

$$u \in K \quad (u, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Mai mult, $\text{prox}_K = \mathcal{P}_K$, unde $\mathcal{P}_K$ este operatorul de proiecție pe K .

Putem oferi acum demonstrația Teoremei ??.

DEMONSTRAȚIE. Fie $f \in X$ și fie $\rho > 0$. Cum $\rho j : K \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție convexă și i.s.c., putem defini un operator $S_\rho : K \rightarrow K$ prin

$$S_\rho(v) = \text{prox}_{\rho j}(\rho f - \rho A v + v) \quad \forall v \in K. \quad (6)$$

Mai mult, utilizând (6) și (5) găsim

$$\|S_\rho u - S_\rho v\|_X \leq \|(u - v) - \rho(Au - Av)\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Fie $\rho \in (0, \frac{2m}{M^2})$.

$$\|S_\rho u - S_\rho v\|_X \leq k(\rho) \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K,$$

unde $k(\rho) = (1 - 2\rho m + \rho^2 M^2)^{\frac{1}{2}} \in (0, 1)$.

În continuare, utilizăm Teorema lui Banach de punct fix pentru a vedea că există $u \in K$ astfel încât

$$S_\rho u = \text{prox}_{\rho j}(\rho f - \rho A u + u).$$

Din Definiția 4 obținem

$$(u, v - u)_X + \rho j(v) - \rho j(u) \geq (\rho f - \rho A u + u, v - u)_X \quad \forall v \in K,$$

adică,

$$\rho [(Au, v - u)_X + j(v) - j(u)] \geq \rho (f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Cum $\rho > 0$, deducem din inegalitatea de mai sus că u , unicul punct fix al lui S_ρ , este o soluție a inegalității variaționale (1), ceea ce demonstrează partea de existență a teoremei.

Pentru a arăta unicitatea, presupunem că $u_1, u_2 \in K$ sunt două soluții ale inegalității 1. Atunci,

$$(Au_1, v - u_1)_X + j(v) - j(u_1) \geq (f, v - u_1)_X \quad \forall v \in K,$$

$$(Au_2, v - u_2)_X + j(v) - j(u_2) \geq (f, v - u_2)_X \quad \forall v \in K.$$

Luând $v = u_2$ în prima inegalitate, $v = u_1$ în a doua inegalitate și adunând relațiile obținute, găsim

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \leq 0.$$

Din această inegalitate și faptul că A este tare monoton găsim $u_1 = u_2$, ceea ce demonstrează și unicitatea soluției. $\square$

Aplicatii

Fie problemă la limită.

PROBLEMA 46. *Sa se determine $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (7)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (8)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0, \text{ pe } \Gamma_2, \quad (9)$$

unde $\Omega \in \mathbb{R}^N$, ($N > 1$) un domeniu mărginit, cu frontiera netedă, $f \in L^2(\Omega)$, $g > 0$ este o constantă, iar Γ_1, Γ_2 , o partiție a lui Γ astfel încat $|\Gamma_1| > 0$.

Amintim ca numim soluție în sens slab pentru Problema 46 o funcție $u \in V$ ce verifică inegalitatea

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) dx + j(v) - j(u) \geq \int_{\Omega} f \gamma v dx \quad \forall v \in V.$$

unde $j : V \rightarrow \mathbb{R}$, $j(v) = \int_{\Gamma_2} g |\gamma v| d\Gamma$.

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

Teorema 5. *Problema 46 are o unica solutie slaba*

DEMONSTRAȚIE. Verificam ipotezele Teoremei 1.

Operatorul $A : V \rightarrow V$,

$$(Au, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

este operator tare monoton si Lipschitz.

În plus, funcționala $j : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$j(v) = \int_{\Gamma_2} g |\gamma v| d\Gamma$$

este convexă și inferior semicontinuuă. Într-adevar, convexitatea lui j rezultă ușor, aplicând definiția funcției convexe. Ne propunem acum să arătăm că j este inferior

semicontinuă. Pentru aceasta, vom arăta că j este continuă, folosind criteriul lui Heine. Fie $(v_n)_n \subset V$ un șir astfel încât $v_n \rightarrow v$ în V când $n \rightarrow \infty$. Arătăm că $j(v_n) \rightarrow j(v)$ în $\mathbb{R}$ când $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} |j(v_n) - j(v)| &= \left| \int_{\Gamma_2} g|\gamma v_n| d\Gamma - \int_{\Gamma_2} g|\gamma v| d\Gamma \right| = \left| \int_{\Gamma_2} g(|\gamma v_n| - |\gamma v|) d\Gamma \right| \\ &\leq \int_{\Gamma_2} g|\gamma v_n - \gamma v| d\Gamma = \int_{\Gamma_2} g|\gamma(v_n - v)| d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_2} F|\gamma(v_n - v)| d\Gamma, \end{aligned}$$

unde $F \in L^2(\Gamma_2)$, $F(x) = g$ a.p.t. pe Γ_2 . Atunci

$$\begin{aligned} |j(v_n) - j(v)| &= (F, \gamma(v_n - v))_{L^2(\Gamma_2)} \leq \|F\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\gamma(v_n - v)\|_{L^2(\Gamma_2)} \\ &\leq g\sqrt{|\Gamma_2|} \|\gamma(v_n - v)\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq g\sqrt{|\Gamma_2|} c_{tr} \|(v_n - v)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq g\sqrt{|\Gamma_2|} c_{tr} \tilde{C}_p \|(v_n - v)\|_V. \end{aligned}$$

Aplicând criteriul cleștelui găsim că

$$|j(v_n) - j(v)| \rightarrow 0,$$

deci j este continuă. Prin urmare, este j inferior semicontinuă. $\square$

Remarca 6. Se poate demonstra ușor ca j este seminorma marginita. Prin urmare j este continua.

Fie problema la limita.

PROBLEMA 47. *Sa se determine $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (10)$$

$$u(0) = 0, \quad (11)$$

$$|u'(1)| \leq g, u'(1) = -g \frac{u(1)}{|u(1)|} \text{ dacă } u(1) \neq 0 \quad (12)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

$$V = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0\}.$$

Fie

$$A : V \rightarrow V \quad (Au, v)_V = \int_0^1 u'v' dx \quad (13)$$

$$\bar{f} \in V, \quad (\bar{f}, v)_V = \int_0^1 f v dx \quad (14)$$

$$j : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad j(v) = g|v(1)|. \quad (15)$$

Numim soluție în sens slab pentru Problema 47 o funcție $u \in K$ ce verifică

$$(Au, v - u)_V + j(v) - j(u) \geq (\bar{f}, v - u)_V \quad \forall v \in V \quad (16)$$

unde a , j și $\bar{f}$ sunt definite în (13), (15) și (14).

Teorema 7. *Problema 47 are o unică soluție în sens slab, în sensul introdus anterior.*

DEMONSTRAȚIE. Verificăm ipotezele Teoremei 1.

Operatorul $A : V \rightarrow V$,

$$(Au, v)_V = \int_0^1 u'v' dx$$

este operator tare monoton și Lipschitz.

În plus, funcționala $j : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$j(v) = g|v(1)|$$

este convexă și continuă (deci și inferior semicontinuă). Într-adevar, convexitatea lui j rezultă ușor, aplicând proprietățile modulului.

Ne propunem acum să arătăm că j este continuă.

Fie $(v_n)_n \subset V$ un șir astfel încât $v_n \rightarrow v$ în V când $n \rightarrow \infty$. Arătăm că $j(v_n) \rightarrow j(v)$ în $\mathbb{R}$ când $n \rightarrow \infty$.

Utilizând teorema de scufundare a lui $H^1(0, 1)$ în $C([0, 1])$ precum și o inegalitate de tip Poincaré obținem

$$|j(v_n) - j(v)| \leq g c \tilde{C}_p \|v_n - v\|_V.$$

Aplicând criteriul cleștelui găsim că

$$|j(v_n) - j(v)| \rightarrow 0,$$

deci j este continuă. □

Seminar 10

Fie X un spatiu Hilbert, A un operator tare monoton (m) si Lipschitz (M), j functionala convexa si Gâteaux diferentiabila (deci si inferior semicontinua) si $f \in X$.

Consideram problema variationala: Sa se determine $u \in X$ astfel incat

$$(P_v) \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Fie u soluția unică a lui (P_v) .

$$j(v) - j(u) \geq (f - Au, v - u)_X \quad \forall v \in X$$

Prin urmare

$$f - Au \in \partial j(u).$$

Deoarece j functionala convexa si Gâteaux diferentiabila,

$$\partial j(u) = \{\nabla j(u)\}.$$

Prin urmare,

$$f - Au = \nabla j(u).$$

Asadar, daca u verifica

$$j(v) - j(u) \geq (f - Au, v - u)_X \quad \forall v \in X$$

atunci

$$Au + \nabla j(u) = f.$$

Dar si invers

daca u verifica ecuatia

$$Au + \nabla j(u) = f,$$

atunci

$$f - Au \in \partial j(u) = \{\nabla j(u)\}.$$

Deci

$$j(v) - j(u) \geq (f - Au, v - u)_X$$

si de aici

$$(Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Concluzie: daca j functionala convexa si Gâteaux diferentiabila, atunci inegalitatea variationala de speța a doua

$$(Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X$$

este echivalenta cu ecuatia (posibil neliniara)

$$Au + \nabla j(u) = f.$$

Considerăm acum inegalitatea variațională

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K$$

în cazul când $K = X$.

În ceea ce urmează vom presupune că $A : X \rightarrow X$, $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ și $f \in X$ sunt dați și considerăm problema găsirii unui element $u \in X$ astfel încât

$$u \in X, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (1)$$

Fie $\rho > 0$ un parametru. Presupunem de asemenea că există o familie de funcționale (j_ρ) ce satisface

- (a) $j_\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție convexă diferențiabilă Gâteaux pentru fiecare $\rho > 0$;
- (b) $\nabla j_\rho : X \rightarrow X$ este un operator Lipschitz pentru fiecare $\rho > 0$.
- (c) Există $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ astfel încât
 - (c1) $|j_\rho(v) - j(v)| \leq F(\rho) \quad \forall v \in X$, pentru fiecare $\rho > 0$;
 - (c2) $\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = 0$.

Pentru fiecare $\rho > 0$ considerăm problema găsirii unui element u_ρ astfel încât

$$Au_\rho + \nabla j_\rho(u_\rho) = f. \quad (2)$$

Avem următorul rezultat de existență, unicitate și convergență.

Teorema 1. Fie X un spațiu Hilbert. Presupunem că $A : X \rightarrow X$ este un operator tare monoton și Lipschitz, $j : X \rightarrow \mathbb{R}$, (j_ρ) este o familie de funcționale ce verifică ipotezele (a)-(c) și $f \in X$. Atunci:

- (1) pentru fiecare $\rho > 0$ există un unic element u_ρ ce verifică ecuația neliniară (2);
- (2) există un unic element u ce verifică inegalitatea variațională (1);
- (3) soluția u_ρ a ecuației neliniare (2) converge tare la soluția u din (1), adică

$$u_\rho \rightarrow u \text{ când } \rho \rightarrow \infty.$$

Detalii pot fi găsite în [50].

Considerăm problema

$$(P^\rho) \quad (Au_\rho, v - u_\rho)_X + j_\rho(v) - j_\rho(u) \geq (f, v - u_\rho)_X \quad \forall v \in X.$$

Admitem că $j_\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă, i.s.c., $A : X \rightarrow X$ este operator tare monoton și Lipschitz. În plus, admitem că există $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$(I_1^\rho) \quad \begin{cases} |j_\rho(v) - j(v)| \leq F(\rho) & \forall v \in X, \rho > 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = 0. \end{cases}$$

Admitem că pentru $A : X \rightarrow X$ tare monoton și Lipschitz și $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexă, i.s.c. problema

$$(P_v) \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X$$

are soluție unică.

Atunci

$$u_\rho \rightarrow u \text{ în } X \text{ când } \rho \rightarrow 0.$$

Intr-adevar.

$$(Au_\rho, v - u_\rho)_X + j_\rho(v) - j_\rho(u_\rho) \geq (f, v - u_\rho)_X \quad \forall v \in X \quad (3)$$

$$(Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (4)$$

Punând $v = u$ în (3) și $v = u_\rho$ în (4) și sumând relațiile obținute obținem

$$\begin{aligned} (Au_\rho - Au, u_\rho - u)_X &\leq j_\rho(u) - j(u) - (j_\rho(u_\rho) - j(u_\rho)) \\ &\leq |j_\rho(u) - j(u)| + |j_\rho(u_\rho) - j(u_\rho)| \\ &\leq 2F(\rho). \end{aligned}$$

Cum A este tare monoton,

$$m_A \|u - u_\rho\|_X^2 \leq 2F(\rho).$$

Deducem de aici că

$$u_\rho \rightarrow u \text{ în } X \text{ când } \rho \rightarrow 0.$$

Curs 11

Tematica: inegalitati cvasivariationale; aplicatii

Inegalitățile pe care le vom studia în acest curs sunt guvernate de o bifuncțională j ce depinde de soluție. Așadar, fie X un spațiu Hilbert, $K \subseteq X$ o submulțime nevidă închisă și convexă, un operator $A : K \rightarrow X$, o bifuncțională $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ și un element $f \in X$, considerăm problema găsirii unui element u astfel încât

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1)$$

O problemă de forma (1) se numește *inegalitate eliptică cvasivariațională*.

Studiul acestei inegalități se poate face cu două metode.

- **Metoda 1: argument Banach**

Admitem următoarele ipoteze pentru bifuncționala j .

$$\left. \begin{array}{l} j : K \times K \rightarrow \mathbb{R} \text{ și} \\ \text{(a) pentru fiecare } \eta \in K, j(\eta, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ este convexă și i.s.c.} \\ \text{(b) există } \alpha \geq 0 \text{ astfel încât} \\ \quad j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \quad \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in K. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Primul rezultat este următorul.

Teorema 1. *Fie X un spațiu Hilbert și presupunem că operatorul $A : X \rightarrow X$ este tare monoton și Lipschitz. Presupunem de asemenea că (2) are loc și, mai mult, $m > \alpha$, unde m este constanta din definiția de tare monotonie a lui A . Atunci, pentru fiecare $f \in X$, inegalitatea eliptică cvasivariațională (1) are soluție unică.*

Demonstrația Teoremei 1 va fi realizată în mai mulți pași. Presupunem în ceea ce urmează că (2) are loc, A este tare monoton și Lipschitz și fie $f \in X$. Pentru primul pas, pentru fiecare $\eta \in K$ considerăm problema auxiliară

ce constă în găsirea unui element $u_\eta \in K$ ce verifică inegalitatea eliptică variațională

$$(Au_\eta, v - u_\eta)_X + j(\eta, v) - j(\eta, u_\eta) \geq (f, v - u_\eta)_X \quad \forall v \in K. \quad (3)$$

Avem următorul rezultat de existență și unicitate.

Lema 2. *Pentru fiecare $\eta \in K$ există o unică soluție $u_\eta \in K$ a inegalității (3).*

În continuare, considerăm operatorul $\Lambda : K \rightarrow K$ definit prin

$$\Lambda\eta = u_\eta \quad \forall \eta \in K, \quad (4)$$

unde $u_\eta \in K$ este unica soluție din (3), garantată de Lema 2. Avem următorul rezultat de punct fix.

Lema 3. *Dacă $m > \alpha$ atunci Λ are un unic punct fix $\eta^* \in K$.*

DEMONSTRAȚIE. Fie $\eta_1, \eta_2 \in K$ și fie u_i soluția lui (3) pentru $\eta = \eta_i$, adică $u_i = u_{\eta_i}$, $i = 1, 2$. Avem

$$\begin{aligned} (Au_1, v - u_1)_X + j(\eta_1, v) - j(\eta_1, u_1) &\geq (f, v - u_1)_X \quad \forall v \in X, \\ (Au_2, v - u_2)_X + j(\eta_2, v) - j(\eta_2, u_2) &\geq (f, v - u_2)_X \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

Luăm $v = u_2$ în prima inegalitate, $v = u_1$ în a doua inegalitate și adunând relațiile obținute găsim

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \leq j(\eta_1, u_2) - j(\eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2).$$

Utilizăm acum proprietățile (1)(b) și cea de tare monotonie ale lui A și, respectiv, j , pentru a vedea că

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq \frac{\alpha}{m} \|\eta_1 - \eta_2\|_X. \quad (5)$$

Cum $m > \alpha$ inegalitatea (5) ne spune că operatorul Λ dat de (4) este o contracție pe spațiul X și, prin urmare, Lemma 3 rezultă din Teorema lui Banach de punct fix. $\square$

Suntem în masura acum să prezentăm demonstrația Teoremei 1.

DEMONSTRAȚIE. Fie η^* punctul fix al operatorului Λ obținut în Lema 3. Cum $\eta^* = \Lambda\eta^* = u_{\eta^*}$ din relația (3) rezultă că η^* este o soluție a inegalității variaționale (1). Prin urmare, partea de existență a demonstrației este încheiată.

Acum, fie u o soluție pentru (1) și fie $\eta = u$. Rezultă că u este o soluție a inegalității variaționale (3) și, cum din Lema 2 această inegalitate are o unică soluție u_η , avem $u = u_\eta$. Această egalitate arată că $\eta = u_\eta$ și, ținând cont de definiția (4) a operatorului Λ deducem că $\eta = \Lambda\eta$. Cum operatorul Λ are un unic punct fix, notat η^* , găsim că $\eta = \eta^*$, ceea ce arată că $u = \eta^*$, și cu aceasta se încheie demonstrația unicității. $\square$

• **Metoda 2: argument Schauder**

În aceasta noua abordare admitem următoarele ipoteze: X spațiu Hilbert, A operator tare monoton și Lipschitz, $K \subseteq X$ submultime convexă și închisă astfel încât $0_X \in K$, și în plus,

$$\left. \begin{array}{l} \forall \eta \in K, \text{ aplicatia } v \mapsto j(\eta, v) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ este} \\ \text{este funcție convexă } j(\eta, v) \geq 0 \forall v \in K \text{ și } j(\eta, 0_X) = 0. \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pentru orice siruri } \{\eta_n\} \subset K \text{ și } \{u_n\} \subset K \text{ astfel încât} \\ \eta_n \rightharpoonup \eta \in X, \ u_n \rightharpoonup u \in X \text{ și pentru oricare } v \in K, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n)] \leq j(\eta, v) - j(\eta, u). \end{array} \right\} \quad (7)$$

Teorema 4. *În ipotezele anuntate anterior, pentru oricare $f \in X$ inegalitatea cvasivariațională (1) are cel puțin o soluție.*

Lema 5. *[50] Pentru oricare $\eta \in X$, inegalitatea (3) are o unică soluție $u_\eta \in X$. În plus,*

$$\|u_\eta\|_X \leq \frac{1}{m} (\|f\|_X + \|A0_X\|_X). \quad (8)$$

Lema 6. *[50] Operatorul $\Lambda : X \rightarrow X$ este slab continuu, i.e. $\eta_n \rightharpoonup \eta$ în X implică $\Lambda\eta_n \rightharpoonup \Lambda\eta$ în X .*

Lema 7. *[50] Operatorul $\Lambda : X \rightarrow X$ este complet continuu i.e. $\eta_n \rightharpoonup \eta$ în X implică $\Lambda\eta_n \rightarrow \Lambda\eta$ în X .*

Lema 8. *[[50]] Operatorul Λ este compact, i.e. este continuu și duce mulțimi marginite în mulțimi relativ compacte.*

DEMONSTRATIA TEOREMEI 4. Fie $f \in X$ și

$$K = \{ v \in X : \|v\|_X \leq \frac{1}{m} (\|f\|_X + \|A0_X\|_X) \}.$$

K este o submulțime nevidă închisă convexă a lui X .

Fie Λ operatorul introdus în (4).

Din Lema 5 rezultă că $\Lambda\eta \in K$ pentru oricare $\eta \in X$. Prin urmare, putem considera restricția la K , $\Lambda : K \rightarrow K$.

Potrivit Lemei 8, operatorul Λ este compact. Prin urmare putem utiliza Teorema Schauder pentru a deduce că există cel puțin un $\eta^* \in K$ astfel încât

$$\Lambda\eta^* = \eta^*.$$

Din definiția lui Λ (4) rezultă că $u_{\eta^*} = \eta^*$ și scriind (3) pentru $\eta = \eta^*$, observăm că η^* este o soluție a inegalității (1). $\square$

Teoremele 1 și ?? furnizează rezultate de existență în studiul inegalităților cvasivariaționale eliptice. Primul rezultat este și un rezultat de unicitate, dar se impune o ipoteză de micime. Al doilea rezultat nu utilizează o ipoteză de micime dar afirmă doar existența soluției. Studiul unicității poate fi realizat doar sub ipoteze suplimentare.

Pentru detalii a se consulta [50].

Aplicatie

Fie problema la limita.

PROBLEMA 48.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \tag{9}$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ pe } \Gamma_2 \tag{11}$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g(|u|), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0, \text{ pe } \Gamma_3, \tag{12}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_2)$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție Lipschitz dată iar Γ este partiționată în $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, $|\Gamma_1| > 0$.

Numim soluție în sens slab pentru Problema 48 o funcție $u \in V$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_2} g(|\gamma u|)(|\gamma v| - |\gamma u|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in V.$$

Teorema 9. *Daca $L_g c_{tr} \tilde{C}_P < 1$ atunci Problema 48 are o unica solutie slaba.*

DEMONSTRAȚIE. *Ind.* Verificam ipotezele Teoremei 1.

Notam ca relatia integrala

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx + \int_{\Gamma_2} g(|\gamma u|)(|\gamma v| - |\gamma u|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in V$$

este echivalenta cu inegalitatea cvasivariationala

$$(Au, v - u)_V + j(u, v) - j(u, u) \geq (\bar{f}, v - u) \quad \forall v \in V, \quad (13)$$

unde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}$$

$$A : V \rightarrow V, (Au, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$j : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad j(u, v) = \int_{\Gamma_2} g(|\gamma u|)|\gamma v| d\Gamma$$

si

$$\bar{f} \in V, (\bar{f}, v)_V = \int_{\Omega} f v dx.$$

V este spatiu Hilbert, A este operator tare monoton si Lipschitz. Pot lua $m = M = 1$. Verificam ipotezele pentru bifunctionala j . Pot lua $\alpha = L_g c_{tr} \tilde{C}_P$. $\square$

Seminar 11

Fie X un spatiu Hilbert, A operator tare monoton si Lipschitz si j o bifunctionala ce verifica ipotezele:

$$\left. \begin{array}{l} j : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \text{ și} \\ \text{(a) pentru fiecare } \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ este convexă și i.s.c. în } X. \\ \text{(b) există } \alpha \geq 0 \text{ astfel încât} \\ \quad j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \quad \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Fie problema

$$(P_q) \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Fie u soluția unică a lui (P_q) .

$$j(u, v) - j(u, u) \geq (f - Au, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Să presupunem că $\forall \eta \in X, j(\eta, \cdot)$ este diferențiabilă Gâteaux.

Atunci

$$f - Au = \nabla_2 j(u, u)$$

echivalent cu

$$Au + \nabla_2 j(u, u) = f.$$

Si invers, daca u verifica

$$Au + \nabla_2 j(u, u) = f$$

atunci

$$f - Au = \nabla_2 j(u, u)$$

Presupunand ca $\forall \eta \in X, j(\eta, \cdot)$ este diferențiabilă Gâteaux,

$$f - Au \in \partial_2 j(u, u)$$

deci

$$j(u, v) - j(u, u) \geq (f - Au, v - u)_X \quad \forall v \in X.$$

Asadar, in acest caz special de diferenciabilitate Gâteaux, inegalitatea cvasivariațională este echivalentă cu o ecuație.

Considerăm problema

$$(P_q^\rho) \quad (Au_\rho, v - u_\rho)_X + j_\rho(u_\rho, v) - j_\rho(u_\rho, u_\rho) \geq (f, v - u_\rho)_X \quad \forall v \in X.$$

Admitem că

$$(I_2^\rho) \begin{cases} j_\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall \eta \in X, j_\rho(\eta, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexă, i.s.c.} \\ \exists \alpha_\rho \geq 0 : j_\rho(\eta_1, v_2) - j_\rho(\eta_1, v_1) + j_\rho(\eta_2, v_1) - j_\rho(\eta_2, v_2) \\ \qquad \leq \alpha_\rho \|\eta_1 - \eta_2\|_X \cdot \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in X. \end{cases} \quad (0 < \alpha_\rho < m_A).$$

Deoarece $\alpha_\rho < m_A$, deducem că (P_q^ρ) are soluție unică $u_\rho \in X$.

Fie $u \in X$ soluția unică a Problemei (P_q) .

Presupunem în ceea ce urmează că

$$(I_\rho^3) \begin{cases} |j_\rho(u_\rho, v) - j(u_\rho, u)| \leq F(\rho) \rightarrow 0 \text{ când } \rho \rightarrow 0 \\ |j_\rho(u_\rho, u_\rho) - j(u_\rho, u_\rho)| \leq G(\rho) \rightarrow 0 \text{ când } \rho \rightarrow 0 \end{cases}$$

Fie u_ρ unica soluție a problemei (P_q^ρ) și u unica soluție a problemei (P_q) .

Atunci

$$u_\rho \rightarrow u \text{ în } X \text{ când } \rho \rightarrow 0.$$

Intr-adevar, fie $v = u$ în (P_q^ρ) și $v = u_\rho$ în (P_q) . Sumând inegalitățile obținute găsim

$$\begin{aligned} (Au_\rho - Au, u_\rho - u)_X &\leq j_\rho(u_\rho, u) - j_\rho(u_\rho, u_\rho) + j(u, u_\rho) - j(u, u) \\ &= j(u, u_\rho) - j(u, u) + j(u_\rho, u) - j(u_\rho, u_\rho) \\ &\quad + j_\rho(u_\rho, u) - j(u_\rho, u) - (j_\rho(u_\rho, u_\rho) - j(u_\rho, u_\rho)) \\ &\leq \alpha \|u - u_\rho\|^2 + |j_\rho(u_\rho, u) - j(u_\rho, u)| + |j_\rho(u_\rho, u_\rho) - j(u_\rho, u_\rho)| \end{aligned}$$

Cum A este tare monoton,

$$\begin{aligned} (m_A - \alpha) \|u - u_\rho\|^2 &\leq |j_\rho(u_\rho, u) - j(u_\rho, u)| + |j_\rho(u_\rho, u_\rho) - j(u_\rho, u_\rho)| \\ &\leq F(\rho) + G(\rho). \end{aligned}$$

Trecem la limită când $\rho \rightarrow 0$ și deducem că

$$u_\rho \rightarrow u \text{ în } X.$$

Curs 12

Tematica:

- scurta introducere in teoria inegalitatilor hemivariationale, variational-hemivariationale; aplicatii
- probleme neliniare guvernate de operatorul p-Laplace

Dupa cum am observat in cursurile anterioare, teoria inegalitatilor variationale se bazeaza pe argumente precum: monotonie, convexitate, continuitate, diferenciabilitate. In lipsa convexitatii, problemele la limita pot conduce prin formulari variationale la alte tipuri de inegalitati numite *inegalitati hemivariationale* (probleme matematice bazate pe gradientul generalizat al lui Clarke).

In 1983 in [40] Panagiotopoulos a introdus pentru prima data inegalitatile hemivariationale si le-a analizat cu ajutorul derivatei directionale generalizate (gradientul generalizat al lui Clarke, a se vedea [14]). Lucrarea [40] a fost urmata de un numar mare de lucrari in care multe tipuri de inegalitati hemivariationale sau variational-hemivariationale au fost analizate in spatii infinit dimensionale; a se vedea de exemplu [9, 22, 34, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 46].

Teoria inegalitatilor hemivariationale se aplica in mecanica neneteda si in inginerie; mecanica contactului este o sursa foarte bogata de aplicatii pentru aceasta teorie; a se vedea de exemplu [11, 12].

Incepem prin a prezenta cateva elemente de analiza neliniara neneteda; se vedea de exemplu [31] si lista referintelor acestei lucrari.

Fie E un spatiu Banach reflexiv.

Definiția 1. O functie $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este Lipschitz pe E , daca exista $k > 0$ astfel incat

$$|\Psi(v) - \Psi(w)| \leq k\|v - w\|_E \quad \forall v, w \in E.$$

Definiția 2. O funcție $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este *local Lipschitz în* $u \in E$ (de rang k), dacă există o vecinătate U a lui u și $k = k(U) > 0$ astfel încât

$$|\Psi(v) - \Psi(w)| \leq k\|v - w\|_E \quad \forall v, w \in U.$$

O funcție $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este local Lipschitz pe E , dacă Ψ este local Lipschitz în fiecare $u \in E$.

Fie $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională local Lipschitz pe E . Gradientul generalizat Clarke al funcției Ψ în $u \in E$ este definit astfel:

$$\partial\Psi(u) = \{\zeta \in E' : \Psi^0(u; v) \geq (\zeta, v)_{E', E}, \quad \forall v \in E\}$$

unde $\Psi^0(u; v)$ este derivata generalizată Clarke a lui Ψ în $u \in E$ în raport cu direcția $v \in E$, adică

$$\Psi^0(u; v) = \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\Psi(w + tv) - \Psi(w)}{t},$$

a se vedea pentru detalii [14, 34, 37, 38, 40, 41, 42, 43].

Propoziția 3. Fie $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională local Lipschitz în $u \in E$ (de rang k). Atunci

(1) aplicația $v \rightarrow \Psi^0(u; v)$ este finită, pozitiv omogenă, subaditivă pe E și satisface

$$|\Psi^0(u; v)| \leq k\|v\|_X. \quad (1)$$

(2) $(u, v) \rightarrow \Psi^0(u; v)$ este superior semicontinua.

Demonstratia Propoziției 3 se poate găsi în [14], pagina 25; a se vedea de asemenea [38] pagina 13.

Remarca 4. În general, dacă $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este local Lipschitz în $u \in E$ (de rang k), atunci k depinde de u , k depinzând de o vecinătate U a lui u . În particular, dacă $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este Lipschitz pe E , atunci, în (1), k este o constantă strict pozitivă independentă de u deoarece putem considera $U = E$ pentru oricare $u \in E$.

Dacă $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcțională convexă, vom nota cu $\bar{\partial}\Phi(u)$ subdiferențiala lui Φ în u , adică

$$\bar{\partial}\Phi(u) = \{\zeta \in E' : \Phi(v) - \Phi(u) \geq (\zeta, v - u)_{X', X}, \quad \forall v \in E\}.$$

Amintim că E' notează dualul lui E .

O inegalitate de forma urmatoare

$$\langle Au, v - u \rangle + \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}); v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) d\Gamma \geq \langle \Phi, v - u \rangle \quad \forall v \in E,$$

se numeste inegalitate hemivariationala. Pentru detalii (inclusiv aplicatii in mecanica contactului a se consulta [11]).

Putem de asemenea intalni inegalitati de forma

$$\begin{aligned} (Au, v - u)_{X', X} + j(v) - j(u) + \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}, u_T(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, u_T(\mathbf{x}); v_T(\mathbf{x}) - u_T(\mathbf{x})) d\Gamma \\ \geq (f, v - u)_{X', X} \quad \text{for all } v \in X; \end{aligned}$$

sau, mai general

$$\begin{aligned} W(v) - W(u) + \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}, u_T(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, u_T(\mathbf{x}); v_T(\mathbf{x}) - u_T(\mathbf{x})) d\Gamma \geq (f, v - u)_{X', X} \\ \text{for all } v \in X \end{aligned}$$

Acestea se numesc inegalitati variational-hemivariationale. Pentru detalii (inclusiv aplicatii in mecanica contactului) a se consulta de exemplu [12].

Continuam acest curs cu o discutie privind rezolvarea in sens slab a unor probleme la limita guvernate de operatorul p -Laplace.

Amintim pentru inceput un rezultat de minimizare ce va fi util in cele ce urmeaza.

Teorema 5. *Fie E un spatiu Banach reflexiv si fie $K \subseteq E$ o submultime nevida inchisa convexa a lui E . Fie $\varphi : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ o functionala proprie ($\varphi \not\equiv \infty$) convexa inferior semicontinua. Atunci φ este marginita inferior pe K daca una din urmatoarele conditii este satisfacuta:*

i) K este marginit;

ii) φ este coerciva, i.e. $\varphi(u) \rightarrow \infty$ cand $\|u\|_E \rightarrow \infty$.

Mai mult, daca φ este strict convexa atunci φ isi atinge minimul intr-un singur punct in K .

Demonstratia se poate gasi de exemplu in [5, 50].

Consideram urmatoarea problema la limita: sa se determine $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat

$$-\Delta_p u = f \quad x \in \Omega \tag{2}$$

$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu marginit cu frontiera neteda $\Gamma = \partial\Omega$, $p \geq 2$, $f \in L^{p'}(\Omega)$.
Operatorul

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u)$$

se numeste operator p -Laplace.

Ne propunem sa introducem notiunea de solutie slaba pentru problema (2)-(3) si sa studiem apoi existenta si unicitatea acesteia.

Fie u o functie suficient de neteda ce verifica (2)-(3).

Consideram $W_0^{1,p}(\Omega)$ drept spatiu al functiilor test.

Notam ca pentru oricare $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) v \, dx = \int_{\Gamma} \|\nabla u\|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Prin urmare, pentru oricare $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) v \, dx = - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (4)$$

Fie $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Din (2) obtinem

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Utilizand acum (4) obtinem

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definiția 6. Numim solutie slaba pentru problema (2)-(3) o functie $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ce verifica

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (5)$$

Teorema 7. Fie $p \geq 2$ si $f \in L^{p'}(\Omega)$. Atunci problema (2)-(3) are o unica solutie.

DEMONSTRAȚIE. Fie functionala $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla v(\mathbf{x})\|^p \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Functionala J este strict convexa si coerciva ($\lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty} J(u) = \infty$).

Functionala J este diferentiabila Gâteaux. Gradientul Gâteaux notat cu $\nabla J(u)$, verifica urmatoarea relatie.

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} f v dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega); \quad (6)$$

in plus,

$$J(v) - J(u) \geq (\nabla J(u), v - u)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (7)$$

iii) Functionala J este slab inferior semicontinua pe $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Observam ca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ verifica (5) daca si numai daca $(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$ for all $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Din (7) rezulta ca daca

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

atunci

$$J(v) \geq J(u) \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dar si invers, daca $J(v) \geq J(u)$ for all $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ atunci

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$$

for all $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Intr-adevar, deoarece

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = (\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)},$$

cum

$$J(u + tv) - J(u) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

rezulta ca

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \geq 0 \quad \text{daca } t > 0$$

si

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 0 \quad \text{daca } t < 0.$$

Prin urmare,

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Am aratat ca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este solutie slaba pentru problema (2)-(3) daca si numai daca u minimizeaza functionala J pe $W_0^{1,p}(\Omega)$.

In acord cu rezultatul de minimizare amintit la inceputul cursului, cum J este functionala proprie strict convexa coerciva si inferior semicontinua deducem ca J are un unic punct de minim in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

Studiul prezentat poate fi completat lecturand de exemplu [30].

TEMA Studiați rezolvarea în sens variational (în sens slab) a următoarelor probleme la limita:

$$-div(\|\nabla u(\mathbf{x})\|^{p-2}\nabla u(\mathbf{x})) = f_0(\mathbf{x}) \text{ în } \Omega, \quad (8)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \text{ on } \Gamma_1, \quad (9)$$

$$\|\nabla u(\mathbf{x})\|^{p-2}\partial_\nu u(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \text{ on } \Gamma_2, \quad (10)$$

Seminar 12

Exercițiul 1. Fie $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, cu $p \geq 2$ și $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

Considerăm funcționala $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla v\|^p dx.$$

Arătați că f este diferențiabilă Gâteaux.

Pentru a arăta că f este diferențiabilă Gâteaux, trebuie să arătăm că există $\nabla f(u) \in X$ astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = (\nabla f(u), v)_X.$$

Vom calcula această limită, ținând cont de definiția lui f .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla(u + tv)\|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^p dx}{t} \\ &= \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} (\|\nabla(u + tv)\|^p - \|\nabla u\|^p) dx}{t}. \end{aligned}$$

Introducem funcționala $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\varphi(t) = \|\nabla(u + tv)\|^p.$$

Putem scrie φ sub forma

$$\varphi(t) = \left[\left(\frac{\partial(u + tv)}{\partial x_1} \right) + \dots + \left(\frac{\partial(u + tv)}{\partial x_N} \right) \right]^{\frac{p}{2}}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= p \|\nabla(u + sv)\|^{p-2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial(u + sv)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &= p \|\nabla(u + sv)\|^{p-2} \nabla(u + sv) \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

Deci derivata în punctul zero va fi

$$\varphi'(0) = p \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Fie $t \in \mathbb{R}$. Din teorema cresterilor finite a lui Lagrange stim ca exista c intre 0 si t astfel incat

$$\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} \right| = |\varphi'(c)|.$$

Deci

$$\begin{aligned} \frac{||\nabla(u + tv)||^p - ||\nabla u||^p}{t} &= |p||\nabla(u + cv)||^{p-2} \nabla(u + cv) \cdot \nabla v| \\ &\leq p||\nabla(u + tv)||^{p-2} ||\nabla(u + cv)|| ||\nabla v|| = p||\nabla(u + cv)||^{p-1} ||\nabla v||. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = \frac{1}{p} \int_{\Omega} p ||\nabla u||^{p-1} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Cum aplicația

$$v \mapsto \frac{1}{p} \int_{\Omega} p ||\nabla u||^{p-1} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

este liniară și continuă, din Teorema de reprezentare a lui Riesz obținem că există un element pe care îl notăm $\nabla f(u)$ astfel încât

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} p ||\nabla u||^{p-1} \nabla u \cdot \nabla v dx = (\nabla f(u), v)_{X', X}.$$

Așadar, f este diferențiabilă Gâteaux.

Exercițiul 2. Fie spațiul

$$X = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

Considerăm funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(v) = \frac{1}{p} \int_{\partial\Omega} |\gamma v|^p d\Gamma.$$

Studiați diferențiabilitatea Gâteaux pentru f .

Pentru a arăta că f este diferențiabilă Gâteaux, trebuie să arătăm că există $\nabla f(u) \in X$ astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = (\nabla f(u), v)_X.$$

Vom calcula această limită, ținând cont de definiția lui f .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{|\gamma(u + tv)|^p - |\gamma u|^p}{t} d\Gamma.$$

Introducem funcționala $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\varphi(t) = |\gamma u + t\gamma v|^p.$$

Atunci

$$\varphi'(t) = p|\gamma u + t\gamma v|^{p-2}(\gamma u + t\gamma v).$$

Deci derivata în punctul zero va fi

$$\varphi'(0) = p|\gamma u|^{p-2}\gamma u\gamma v.$$

Fie $t \in \mathbb{R}$. Din teorema creșterilor finite a lui Lagrange stim că există c între 0 și t astfel încât

$$\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} \right| = |\varphi'(c)|.$$

Deci

$$\frac{|\gamma u + t\gamma v|^p - |\gamma u|^p}{t} = p|\gamma u + c\gamma v|^{p-2}|\gamma u + c\gamma v|\gamma v.$$

Prin urmare,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = p|\gamma u + c\gamma v|^{p-2}|\gamma u + c\gamma v|\gamma v.$$

Cum aplicația

$$v \mapsto \int_{\partial\Omega} p|\gamma u + c\gamma v|^{p-2}|\gamma u + c\gamma v|\gamma v d\Gamma$$

este liniară și continuă, din Teorema de reprezentare a lui Riesz obținem că există un element pe care îl notăm $\nabla f(u)$ astfel încât

$$\int_{\partial\Omega} p|\gamma u + c\gamma v|^{p-2}|\gamma u + c\gamma v|\gamma v = (\nabla f(u), v)_{X', X}.$$

Așadar, f este diferențiabilă Gâteaux.

Exercițiul 3. Fie funcția $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(v) = \int_{\partial\Omega} \varphi(\gamma v) d\Gamma,$$

unde φ este convexă și pozitivă. Arătați că f este convexă.

Fie $u, v \in X$ și $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f((1-t)u + tv) &= \int_{\partial\Omega} \varphi((1-t)\gamma u + t\gamma v) d\Gamma \\ &\leq (1-t) \int_{\partial\Omega} \varphi(\gamma u) d\Gamma + t \int_{\partial\Omega} \varphi(\gamma v) d\Gamma \\ &= (1-t)f(u) + tf(v). \end{aligned}$$

Deci f este convexă.

Curs 13

Tematica: probleme variationale mixte (I)

Consideram urmatoarea problema variationala mixta abstracta.

PROBLEMA 49. *Dat $f \in X$, $f \neq 0_X$, sa se determine $(u, \lambda) \in X \times Y$ astfel incat $\lambda \in \Lambda(u) \subset Y$ si*

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = (f, v)_X \quad \forall v \in X, \quad (1)$$

$$b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \forall \mu \in \Lambda(u). \quad (2)$$

Studiem aceasta problema in ipotezele urmatoare:

Ipoteza 1. $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ si $(Y, (\cdot, \cdot)_Y, \|\cdot\|_Y)$ sunt doua spatii Hilbert.

Ipoteza 2. $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este forma simetrica, biliniara astfel incat

$$(i_1) \exists M_a > 0 : |a(u, v)| \leq M_a \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X,$$

$$(i_2) \exists m_a > 0 : a(v, v) \geq m_a \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

Ipoteza 3. $b(\cdot, \cdot) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ este o forma biliniara astfel incat

$$(j_1) \exists M_b > 0 : |b(v, \mu)| \leq M_b \|v\|_X \|\mu\|_Y \quad \forall v \in X, \mu \in Y,$$

$$(j_2) \exists \alpha > 0 : \inf_{\mu \in Y, \mu \neq 0_Y} \sup_{v \in X, v \neq 0_X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_Y} \geq \alpha.$$

Ipoteza 4. Pentru fiecare $\varphi \in X$, $\Lambda(\varphi)$ este o submultime convexa inchisa a lui Y astfel incat $0_Y \in \Lambda(\varphi)$.

Ipoteza 5. Fie $(\eta_n)_n \subset X$ si $(u_n)_n \subset X$ doua siruri slab convergente $\eta_n \rightharpoonup \eta$ in X si $u_n \rightharpoonup u$ in X , cand $n \rightarrow \infty$.

(k_1) Pentru fiecare $\mu \in \Lambda(\eta)$, exista un sir $(\mu_n)_n \subset Y$ astfel incat $\mu_n \in \Lambda(\eta_n)$ si $\liminf_{n \rightarrow \infty} b(u_n, \mu_n - \mu) \geq 0$.

(k_2) Pentru fiecare subsir $(\Lambda(\eta_{n'}))_{n'}$ al sirului $(\Lambda(\eta_n))_n$, daca $(\mu_{n'})_{n'} \subset Y$ astfel incat

$\mu_{n'} \in \Lambda(\eta_{n'})$ si $\mu_{n'} \rightarrow \mu$ in Y cand $n' \rightarrow \infty$, atunci $\mu \in \Lambda(\eta)$.

Consideram urmatoarele submultimi.

$$K_1 = \{v \in X \mid \|v\|_X \leq \frac{1}{m_a} \|f\|_X\}; \quad K_2 = \{\mu \in Y \mid \|\mu\|_Y \leq \frac{m_a + M_a}{\alpha m_a} \|f\|_X\}, \quad (3)$$

m_a, α si M_a fiind constantele ce apar in Ipotezele 2-3.

Teorema 6. *In ipotezele 1-5, Problema 49 are cel putin o solutie. In plus, daca $(u, \lambda) \in X \times \Lambda(u)$ este o solutie a Problemei 49, atunci*

$$(u, \lambda) \in K_1 \times (\Lambda(u) \cap K_2). \quad (4)$$

DEMONSTRATIE. **Pasul 1.** Consideram urmatoarea problema auxiliara.

PROBLEMA 50. *Fie $f \in X$, $f \neq 0_X$ si $\eta \in X$. Sa se determine $u_\eta \in X$ si $\lambda_\eta \in \Lambda(\eta) \subset Y$ astfel incat*

$$a(u_\eta, v) + b(v, \lambda_\eta) = (f, v)_X \quad \text{for all } v \in X, \quad (5)$$

$$b(u_\eta, \mu - \lambda_\eta) \leq 0 \quad \text{for all } \mu \in \Lambda(\eta). \quad (6)$$

Asociem Problemei 50 urmatoarea functională.

$$\mathcal{L}_\eta : X \times \Lambda(\eta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_\eta(v, \mu) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)_X + b(v, \mu). \quad (7)$$

(u_η, λ_η) este o solutie of Problem 50 daca si numai daca este solutie pentru urmatoarea problema de punct sa.

PROBLEMA 51. *Sa se determine $u_\eta \in X$ si $\lambda_\eta \in \Lambda(\eta)$ astfel incat*

$$\mathcal{L}_\eta(u_\eta, \mu) \leq \mathcal{L}_\eta(u_\eta, \lambda_\eta) \leq \mathcal{L}_\eta(v, \lambda_\eta) \quad \forall v \in X, \mu \in \Lambda(\eta),$$

unde $\mathcal{L}_\eta$ este functională definită in (7).

Justificam in continuare ca Problema 51 are cel putin o solutie. Pentru aceasta avem nevoie de urmatoarea teorema.

Teorema 7. *[a se vedea [15], p.176] Presupunem ca*

- (i) $A \subseteq X$ si $B \subseteq Y$ sunt doua submultimi nevide inchise convexe ale spatiilor Hilbert X si Y ;
- (ii) $\forall \mu \in B$ aplicatia $v \rightarrow \mathcal{L}(v, \mu)$ este o functională convexa si inferior semicontinua;
- (iii) $\forall v \in A$ aplicatia $\mu \rightarrow \mathcal{L}(v, \mu)$ este concava si superior semicontinua

In plus, presupunem ca:

- A este marginita, sau exista $\mu_0 \in B$ astfel incat $\lim_{\|v\|_X \rightarrow \infty, v \in A} \mathcal{L}(v, \mu_0) = \infty$,
si
 - B este marginit, sau $\lim_{\|\mu\|_Y \rightarrow \infty, \mu \in B} \inf_{v \in A} \mathcal{L}(v, \mu) = -\infty$.
- Atunci $\mathcal{L}$ are cel putin un punct sa in $A \times B$.

Avem nevoie de urmatoarea definitie.

Definiția 8. Fie A and B doua multimi nevide. O pereche $(u, \lambda) \in A \times B$ se numeste *punct sa* al functionalei $\mathcal{L} : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ daca si numai daca

$$\mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \quad \forall (v, \mu) \in A \times B.$$

In acord cu Ipoteza 4, $0_Y \in \Lambda(\eta)$.

Din (i_2) in Ipoteza 2 deducem ca $\lim_{\|v\|_X \rightarrow \infty, v \in X} \mathcal{L}_\eta(v, 0_Y) = \infty$.

Daca $\Lambda(\eta)$ este nemarginit, fie $\mu \in \Lambda(\eta)$ si fie $u_\mu \in X$ unica solutie a ecuatiei

$$a(u_\mu, v) + b(v, \mu) = (f, v)_X \quad \forall v \in X, \quad (8)$$

garantata de Lema Lax-Milgram.

Deoarece $a(\cdot, \cdot)$ este forma simetrica, putem scrie

$$\inf_{v \in X} \mathcal{L}_\eta(v, \mu) = \frac{1}{2} a(u_\mu, u_\mu) - (f, u_\mu)_X + b(u_\mu, \mu).$$

Fie $v = u_\mu$ in (8). Rezulta ca

$$\inf_{v \in X} \mathcal{L}_\eta(v, \mu) \leq -\frac{m_a}{2} \|u_\mu\|_X^2. \quad (9)$$

Utilizand inf-sup proprietatea formei $b(\cdot, \cdot)$, a se vedea (j_2) in Ipoteza 3, din (8) deducem ca exista $c > 0$ astfel incat

$$\|\mu\|_Y \leq c(\|f\|_X + \|u_\mu\|_X).$$

Prin urmare,

$$\|\mu\|_Y^2 \leq 2c(\|f\|_X^2 + \|u_\mu\|_X^2). \quad (10)$$

Combining (9) and (10) we obtain

$$\lim_{\|\mu\|_Y \rightarrow \infty, \mu \in \Lambda(\eta)} \inf_{v \in X} \mathcal{L}_\eta(v, \mu) = -\infty.$$

Din Teorema 7, $\mathcal{L}_\eta$ are cel putin o solutie $(u_\eta, \lambda_\eta) \in X \times \Lambda(\eta)$. Cum $(u_\eta, \lambda_\eta) \in X \times \Lambda(\eta)$ este o solutie a Problemei 51 daca si numai daca este o solutie a Problemei 50, deducem ca Problema 50 are cel putin o solutie.

Studiul unicitatii. Fie $(u_\eta^1, \lambda_\eta^1)$ si $(u_\eta^2, \lambda_\eta^2)$ doua solutii ale Problemei 50.

Din (5) si (6) rezulta

$$a(u_\eta^1 - u_\eta^2, u_\eta^1 - u_\eta^2) = b(u_\eta^1, \lambda_\eta^2 - \lambda_\eta^1) + b(u_\eta^2, \lambda_\eta^1 - \lambda_\eta^2) \leq 0,$$

si de aici deducem ca $u_\eta^1 = u_\eta^2$.

Din (5) rezulta

$$b(v, \lambda_\eta^1 - \lambda_\eta^2) = 0$$

pentru oricare $v \in X$. Prin urmare, din inf-sup proprietatea formei $b(\cdot, \cdot)$ obtinem

$$\lambda_\eta^1 = \lambda_\eta^2.$$

Pe de alta parte, punand $v = u_\eta$ in (5) si $\mu = 0_Y$ in (6), obtinem

$$a(u_\eta, u_\eta) = (f, u_\eta)_X - b(u_\eta, \lambda_\eta) \quad \text{si} \quad -b(u_\eta, \lambda_\eta) \leq 0.$$

Din Ipotezele 2 (i_2), utilizand inegalitatea Cauchy-Schwarz putem scrie

$$m_a \|u_\eta\|_X^2 \leq \|f\|_X \|u_\eta\|_X.$$

Prin urmare,

$$u_\eta \in K_1. \tag{11}$$

Mai mult, utilizand inf-sup proprietatea formei $b(\cdot, \cdot)$, obtinem

$$\alpha \|\lambda_\eta\|_Y \leq \|f\|_X + M_a \|u_\eta\|_X. \tag{12}$$

Din (11) si (12) rezulta ca

$$\lambda_\eta \in K_2.$$

Asadar, Problema 50 are solutie unica, (u_η, λ_η) ; in plus,

$$u_\eta \in K_1 \text{ si } \lambda_\eta \in \Lambda(\eta) \cap K_2. \tag{13}$$

Pasul 2. Utilizand prima componenta a solutiei (u_η, λ_η) a Problemei 50, definim un operator dupa cum urmeaza:

$$T : X \rightarrow X \quad T(\eta) = u_\eta.$$

Demonstran in continuare ca operatorul T este slab secvential continuu, adica, pentru fiecare sir $(\eta_n)_n \subset X$, $\eta_n \rightharpoonup \eta$ in X cand $n \rightarrow \infty$, avem $T\eta_n \rightharpoonup T\eta$ in X as $n \rightarrow \infty$. Intr-adevar, fie $(\eta_n)_n \subset X$ un sir astfel incat $\eta_n \rightharpoonup \eta$ in X cand $n \rightarrow \infty$.

Fie $\Lambda_n = \Lambda(\eta_n)$, $u_n = u_{\eta_n}$ si $\lambda_n = \lambda_{\eta_n}$.

Cum $(u_n)_n \subset K_1$ si K_1 este multime marginita, exista un subsir al sirului $(u_n)_n$ notat cu $(u_{n'})_{n'}$ si un element $\tilde{u} \in X$ astfel incat $u_{n'} \rightharpoonup \tilde{u}$ in X cand $n' \rightarrow \infty$.

In plus, cum $(\lambda_n)_n \subset K_2$ si K_2 este multime marginita, exista un subsir al sirului $(\lambda_n)_n$, notat cu $(\lambda_{n'})_{n'}$, si un element $\tilde{\lambda} \in Y$ astfel incat $\lambda_{n'} \rightarrow \tilde{\lambda}$ in Y cand $n' \rightarrow \infty$. Trecand la limita cand $n' \rightarrow \infty$ in (5), obtinem

$$a(\tilde{u}, v) + b(v, \tilde{\lambda}) = (f, v)_X \quad \forall v \in X. \quad (14)$$

Cum $\lambda_{n'} \in \Lambda_{n'}$, utilizand (k_2) in Ipoteza 5 obtinem

$$\tilde{\lambda} \in \Lambda(\eta). \quad (15)$$

Fie $\mu \in \Lambda(\eta)$. Utilizand (k_1) in Ipoteza 5, exista $\mu_{n'} \in \Lambda_{n'}$ astfel incat

$$\liminf_{n' \rightarrow \infty} b(u_{n'}, \mu_{n'} - \mu) \geq 0. \quad (16)$$

Pe de alta parte,

$$b(u_{n'}, \mu_{n'} - \lambda_{n'}) \leq 0$$

sau, echivalent

$$b(u_{n'}, \mu_{n'} - \mu) + b(u_{n'}, \mu) \leq b(u_{n'}, \lambda_{n'})$$

ce implica

$$\liminf_{n' \rightarrow \infty} b(u_{n'}, \mu_{n'} - \mu) + b(\tilde{u}, \mu) \leq \limsup_{n' \rightarrow \infty} b(u_{n'}, \lambda_{n'}). \quad (17)$$

Notam ca

$$b(u_{n'}, \lambda_{n'}) = (f, u_{n'})_X - a(u_{n'}, u_{n'}).$$

Deoarece forma $a(\cdot, \cdot)$ este simetrica, biliniara, continua si X -eliptica, aplicatia $X \ni v \rightarrow a(v, v) \in \mathbb{R}$ este convexa si continua. Prin urmare, aplicatia $X \ni v \rightarrow a(v, v) \in \mathbb{R}$ este slab inferior semicontinua si

$$\limsup_{n' \rightarrow \infty} b(u_{n'}, \lambda_{n'}) \leq (f, \tilde{u})_X - a(\tilde{u}, \tilde{u}) = b(\tilde{u}, \tilde{\lambda}). \quad (18)$$

Din (16), (17) si (18) obtinem

$$b(\tilde{u}, \mu - \tilde{\lambda}) \leq 0 \quad \text{for all } \mu \in \Lambda(\eta). \quad (19)$$

Utilizand (14), (15) si (19) observam ca $(\tilde{u}, \tilde{\lambda})$ este o solutie of Problemei 50. Cum Problema 50 are solutie unica (u_η, λ_η) deducem ca $\tilde{u} = u_\eta$ si $\tilde{\lambda} = \lambda_\eta$. In consecinta, $T\eta$ este limita slaba unica a tuturor subsirurilor slab convergente ale sirului $T\eta_n$. Deci intregul sir $T\eta_n$ este slab convergent in X la $T\eta$ cand $n \rightarrow \infty$.

Pasul 3. Avem nevoie de urmatoarea teorema de punct fix.

Teorema 9. [a se vedea [2]] Fie E spatiu vectorial topologic, metrizable, local convex, fie C o submultime convexa slab compacta a lui E si fie $f : C \rightarrow C$ o aplicatie slab secvential continua. Atunci f are cel putin un punct fix.

Observam ca pentru fiecare $\eta \in X$, avem $T\eta \in K_1$.

Deoarece K_1 este o submultime nevida inchisa convexa marginita in spatiul Banach reflexiv X , putem utiliza Teorema 9 pentru a trage concluzia ca $T : K_1 \rightarrow K_1$ are un punct fix $\eta^* \in K_1$.

Perechea $(u_{\eta^*}, \lambda_{\eta^*})$ este o solutie a Problemei 50 si cum $\eta^* = u_{\eta^*}$ deducem ca $(u_{\eta^*}, \lambda_{\eta^*})$ este o solutie a Problemei 49. Mai mult, utilizand (13) cu $\eta = \eta^*$ tragem concluzia ca $u_{\eta^*} \in K_1$ si $\lambda_{\eta^*} \in \Lambda(u_{\eta^*}) \cap K_2$.

Pasul 4. Fie $(u, \lambda) \in X \times \Lambda(u)$ o solutie a Problemei 49. Fie $v = u$ in (1) si $\mu = 0_Y$ in (2).

Astfel,

$$a(u, u) \leq (f, u)_X.$$

Tinand cont de ipotezele de lucru deducem acum ca $u \in K_1$.

Utilizand ipotezele si prima linie a Problemei 49, obtinem

$$\alpha \|\lambda\|_Y \leq \|f\|_X + M_a \|u\|_X.$$

Si de aici, cum $u \in K_1$ rezulta ca $\lambda \in K_2$.

Prin urmare, (4) se verifica.

□

Seminar 13

Tematica: Lista de probleme recapitulative

PROBLEMA 52. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad (2)$$

$$u'(1) = h(u(1)), \quad (3)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 : |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 53. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (4)$$

$$u(0) = 0, \quad (5)$$

$$u(1) \leq g, \quad u'(1) \leq 0, \quad (u(1) - g)u'(1) = 0, \quad (6)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

PROBLEMA 54. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (7)$$

$$u(0) = 0, \quad (8)$$

$$|u'(1)| \leq g, \quad u'(1) = -g \frac{u(1)}{|u(1)|} \text{ dacă } u(1) \neq 0 \quad (9)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

PROBLEMA 55. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (10)$$

$$u(0) = 0, \quad (11)$$

$$u'(1) = h(u(1)), \quad (12)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 \mid |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 56. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (13)$$

$$u(0) = 0, \quad (14)$$

$$u(1) \leq g, u'(1) \leq 0, \quad (15)$$

$$(u(1) - g)u'(1) = 0, \quad (16)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

PROBLEMA 57. Găsiți $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-u'' = f \text{ în } (0, 1), \quad (17)$$

$$u(0) = 0, \quad (18)$$

$$|u'(1)| \leq g, u'(1) = -g \frac{u(1)}{|u(1)|} \text{ dacă } u(1) \neq 0 \quad (19)$$

unde $f \in L^2(0, 1)$ și $g > 0$.

PROBLEMA 58.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (20)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (21)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \text{ pe } \Gamma_2 \quad (22)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 \mid |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ . $|\Gamma_1| > 0$.

PROBLEMA 59.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (23)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (24)$$

$$u \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2 \quad (25)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ . $|\Gamma_1| > 0$.

PROBLEMA 60.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (26)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ pe } \Gamma_2, \quad (28)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0, \text{ pe } \Gamma_3, \quad (29)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $g > 0$ este o constantă, iar Γ este partiționată în $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. $|\Gamma_1| > 0$

PROBLEMA 61.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (30)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (31)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g(|u|), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0, \text{ pe } \Gamma_2, \quad (32)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_2)$, g o funcție data iar Γ este partiționată în Γ_1, Γ_2 , $|\Gamma_1| > 0$.

PROBLEMA 62.

$$\operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K \left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x}) \right)) + f_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{în } \Omega;$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1;$$

$$(\mu(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) + \beta(\nabla u(\mathbf{x})) - P_K \left(\frac{1}{2} \nabla u(\mathbf{x}) \right)) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2,$$

unde Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui $\partial\Omega$, $|\Gamma_1| > 0$, $\mu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $K = \bar{B}(0_{\mathbb{R}^2}, k)$ ($k > 0$), $(\beta > 0)$, $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

PROBLEMA 63.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (33)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ pe } \Gamma_2, \quad (35)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u) \text{ pe } \Gamma_3 \quad (36)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $g > 0$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Lipschitz și monotonă, adică

$$\exists L_h > 0 \quad |h(r_1) - h(r_2)| \leq L_h |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

și

$$(h(r_1) - h(r_2), r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

iar $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ este o partiție a lui Γ , $|\Gamma_1| > 0$.

PROBLEMA 64.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (37)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (38)$$

$$u \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2 \quad (39)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, iar Γ_1, Γ_2 este o partiție a lui Γ , $|\Gamma_1| > 0$.

PROBLEMA 65. Găsiți $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (40)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ pe } \Gamma_2, \quad (42)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0, \text{ pe } \Gamma_3, \quad (43)$$

unde $\Omega \in \mathbb{R}^N$, ($N > 1$) este un domeniu mărginit, cu frontiera netedă, $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_2)$, $g > 0$ este o constantă, iar $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ o partiție a lui Γ astfel încât $|\Gamma_1| > 0$.

PROBLEMA 66. Găsiți $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (44)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (45)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0 \text{ pe } \Gamma_2, \quad (46)$$

unde $\Omega \in \mathbb{R}^N, (N > 1)$ este un domeniu mărginit, cu frontiera netedă. $f \in L^2(\Omega)$, $g > 0$ este o constantă, iar Γ_1, Γ_2 , o partiție a lui Γ , $|\Gamma_1| > 0$.

PROBLEMA 67.

$$-\Delta u = f \text{ în } \Omega, \quad (47)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1, \quad (48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ pe } \Gamma_2, \quad (49)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq g(|u|), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \text{ dacă } u \neq 0 \text{ pe } \Gamma_3, \quad (50)$$

unde $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_2)$, g o funcție dată iar Γ este partiționată în $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, $|\Gamma_1| > 0$.

Curs 14

Tematica: probleme variationale mixte (II)

In prima parte a acestui curs ilustram teoria din cursul anterior cu un exemplu. Apoi prezentam o aplicatie in mecanica contactului.

Fie

$$X = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \quad \text{a.p.t. pe } \Gamma_1 \right\} \quad (1)$$

unde Ω este un domeniu marginit in $\mathbb{R}^2$ cu frontiera Lipschitz Γ , γ este operatorul urma Sobolev, si Γ_1 este o submultime a lui Γ cu masura superficiala pozitiva.

Spatiul X este un spatiu Hilbert inzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_X = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in X,$$

si norma indusa

$$\|v\|_X = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall v \in X.$$

Fie $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ forma biliniara

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in X \quad (2)$$

unde

$$\mu \in L^\infty(\Omega), \quad \mu(x) \geq \mu^* > 0 \text{ a.p.t. in } \Omega. \quad (3)$$

Forma $a(\cdot, \cdot)$ verifica Ipoteza 2 cu

$$M_a = \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ si } m_a = \mu^*. \quad (4)$$

Fie $\Gamma_3 \subset \Gamma$ astfel incat $\Gamma_3 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

Consideram spatiul

$$S = \gamma(X). \quad (5)$$

precum si dualul lui S ,

$$Y = S'. \quad (6)$$

Spatiul Y este evident un spatiu Hilbert.

Fie $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$,

$$b(v, \zeta) = \langle \zeta, \gamma v|_{\Gamma_3} \rangle, \quad (7)$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul in dualitate intre spatiile Y si S .

Sa justificam (j_1) in Ipoteza 3. Observam ca

$$|b(v, \mu)| \leq \|\mu\|_Y \|\gamma v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

deoarece $\gamma(X) = \{\tilde{v} = \gamma v \mid v \in X\}$ este un subspatiu inchis al lui $H^{1/2}(\Gamma)$, a se vedea [29].

Amintim aici ca $H^{1/2}(\Gamma)$ este imaginea lui $H^1(\Omega)$ prin γ i.e. $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma(H^1(\Omega))$ si $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ este operator liniar si continuu.

Deoarece $\|\cdot\|_X$ si $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ sunt norme echivalente, deducem ca exista $M_b > 0$ astfel incat (j_1) se verifica.

Amintim de asemenea ca exista un operator liniar si continuu $\mathcal{Z}$ astfel incat

$$\mathcal{Z} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega) \quad \gamma(\mathcal{Z}(\zeta)) = \zeta \quad \forall \zeta \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Operatorul $\mathcal{Z}$ este *inversul la dreapta* al operatorului γ .

Notam ca,

$$\gamma(\mathcal{Z}(\gamma w)) = \gamma w \quad \forall w \in X.$$

Deoarece, pentru oricare $w \in X$, $\mathcal{Z}(\gamma w)$ are aceeasi urma ca si w , deducem ca pentru oricare $w \in X$, $\mathcal{Z}(\gamma w) \in X$.

Demonstram acum (j_2) in Ipoteza 3.

$$\begin{aligned} \|\mu\|_Y &= \sup_{\gamma w \in S, \gamma w \neq 0_S} \frac{\langle \mu, \gamma w \rangle}{\|\gamma w\|_S} \\ &\leq c \sup_{\gamma w \in S, \gamma w \neq 0_S} \frac{b(\mathcal{Z}(\gamma w), \mu)}{\|\mathcal{Z}(\gamma w)\|_X} \\ &\leq c \sup_{v \in X, v \neq 0_X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X}, \end{aligned}$$

unde $c > 0$.

Putem lua

$$\alpha = \frac{1}{c}. \quad (8)$$

In plus, pentru oricare $\varphi \in X$, introducem o submultime a lui Y ,

$$\Lambda(\varphi) := \left\{ \zeta \in Y : \langle \zeta, \gamma w \rangle \leq \int_{\Gamma_3} g(\mathbf{x}, |\gamma \varphi(\mathbf{x})|) |\gamma w(\mathbf{x})| d\Gamma \quad \forall w \in X \right\}, \quad (9)$$

unde $g : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o functie astfel incat

$$\left. \begin{aligned} &\exists L_g > 0 : |g(\mathbf{x}, r_1) - g(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_g |r_1 - r_2| \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3; \\ &\text{aplicatia } \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, r) \text{ este masurabila Lebesgue pe } \Gamma_3, \text{ for all } r \in \mathbb{R}; \\ &\text{aplicatia } \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, 0) \text{ apartine lui } L^2(\Gamma_3). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dam mai jos un exemplu:

$$g(\mathbf{x}, r) = k(1 + \delta e^{-r}); \quad k, \delta > 0. \quad (11)$$

Evident, $0_Y \in \Lambda(\varphi)$. De asemenea, $\Lambda(\varphi)$ este o submultime convexa inchisa a spatiului Y . Prin urmare, Ipoteza 4 este verificata.

Verificam acum Ipoteza 5. Incepem prin a considera $(\eta_n)_n \subset X$ si $(u_n)_n \subset X$ doua siruri slab convergente, $\eta_n \rightharpoonup \eta$ in X si $u_n \rightharpoonup u$ in X , cand $n \rightarrow \infty$.

Pentru a verifica (k_1) in Ipoteza 5, consideram $\mu \in \Lambda(\eta)$. Definim $\mu_n \in Y$ dupa cum urmeaza:

$$\begin{aligned} \langle \mu_n, \gamma w \rangle &= \int_{\Gamma_3} g(\mathbf{x}, |\gamma \eta_n(\mathbf{x})|) \operatorname{sgn} \gamma u_n(\mathbf{x}) \gamma w(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} g(\mathbf{x}, |\gamma \eta(\mathbf{x})|) |\gamma u_n(\mathbf{x})| d\Gamma \\ &\quad + \langle \mu, \gamma u_n \rangle \quad \forall \gamma w \in S, \end{aligned} \quad (12)$$

unde

$$\operatorname{sgn} \gamma u_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{daca } \gamma u_n(\mathbf{x}) > 0; \\ 0 & \text{daca } \gamma u_n(\mathbf{x}) = 0; \\ -1 & \text{daca } \gamma u_n(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Cum $\mu \in \Lambda(\eta)$, avem

$$- \int_{\Gamma_3} g(\mathbf{x}, |\gamma \eta(\mathbf{x})|) |\gamma u_n(\mathbf{x})| d\Gamma + \langle \mu, \gamma u_n|_{\Gamma_3} \rangle \leq 0.$$

Utilizand (9), deducem ca pentru oricare numar natural nenul n , avem $\mu_n \in \Lambda(\eta_n)$.

Amintim ca $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ este un compact operator si prin urmare, pentru oricare sir slab convergent in X , $\zeta_n \rightharpoonup \zeta$ in X cand $n \rightarrow \infty$, avem $\gamma \zeta_n \rightarrow \gamma \zeta$ in $L^2(\Gamma)$ cand $n \rightarrow \infty$.

Asadar, daca $\eta_n \rightharpoonup \eta$ in X si $u_n \rightharpoonup u$ in X cand $n \rightarrow \infty$, utilizand compacitatea operatorului urma putem scrie

$$\begin{aligned} \gamma \eta_n &\rightarrow \gamma \eta \text{ in } L^2(\Gamma) \text{ as } n \rightarrow \infty; \\ \gamma u_n &\rightarrow \gamma u \text{ in } L^2(\Gamma) \text{ as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

In plus,

$$|\gamma u_n| \rightarrow |\gamma u| \text{ in } L^2(\Gamma_3) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Pe de alta parte, utilizand (10) obtinem

$$g(\cdot, |\gamma\eta_n(\cdot)|) \rightarrow g(\cdot, |\gamma\eta(\cdot)|) \text{ in } L^2(\Gamma_3) \text{ cand } n \rightarrow \infty.$$

Punand $w = u_n$ in (12) putem scrie

$$\langle \mu_n - \mu, \gamma u_n \rangle = \int_{\Gamma_3} \left(g(\mathbf{x}, |\gamma\eta_n(\mathbf{x})|) - g(\mathbf{x}, |\gamma\eta(\mathbf{x})|) \right) |\gamma u_n(\mathbf{x})| d\Gamma.$$

Prin urmare, trecand la limita inferioara cand $n \rightarrow \infty$, obtinem

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} b(u_n, \mu_n - \mu) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_3} \left(g(\mathbf{x}, |\gamma\eta_n(\mathbf{x})|) - g(\mathbf{x}, |\gamma\eta(\mathbf{x})|) \right) |\gamma u_n(\mathbf{x})| d\Gamma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Utilizand iarasi proprietatile operatorului urma si ipotezele pragului de frecare deducem verificarea (k_2) in Ipoteza 5.

Prezentam in continuare o aplicatie in studiul variational al unui model mecanic in context antiplan (in mecanica contactului).

Fie problema la limita.

PROBLEMA 68. *Sa se determine $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat*

$$\operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + f_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (13)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (14)$$

$$\mu(\mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} |\mu(\mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{x})| &\leq g(\mathbf{x}, |u(\mathbf{x})|), \\ \mu(\mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{x}) &= -g(\mathbf{x}, |u(\mathbf{x})|) \frac{u(\mathbf{x})}{|u(\mathbf{x})|} \quad \text{daca } u(\mathbf{x}) \neq 0 \end{aligned} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (16)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ este undomeniu marginit cu frontiera Lipschitz Γ partitionata in trei parti masurabile cu masura pozitiva strict.

Problema 68 modeleaza deformarea antiplana a unui corp $\mathcal{B}$ cilindric, elastic si izotrop, in contact cu frecare cu un obstacoll rigig pe Γ_3 .

Daca ne raportam la un sistem cartezian de coordonate $Ox_1x_2x_3$ astfel incat generatoarele cilindrului sunt paralele cu axa Ox_3 , atunci $\Omega \subset Ox_1x_2$ noteaza sectiunea transversala a cilindrului.

Functia $\mu = \mu(x_1, x_2) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ este un coeficient de material, functia $f_0 = f_0(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este a treia componenta a densitatii fortelor volumice, $f_2 = f_2(x_1, x_2) : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ este a treia componenta a tractiunilor pe Γ_2 iar $g : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o functie data, numita *prag de frecare*; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$, $\nu_i = \nu_i(x_1, x_2)$, ($i \in \{1, 2\}$), este versorul normalei exterioare la frontiera Ω si $\partial_\nu u = \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$.

Necunoscuta problemei este functia $u = u(x_1, x_2) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ce reprezinta a treia componenta a vectorului deplasare $\mathbf{u}$. Este stiut ca, in contextul antiplan, vectorul deplasare are forma particulara $\mathbf{u} = (0, 0, u(x_1, x_2))$.

De indata ce u este determinat putem calcula tensorul tensiune astfel:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x_1} & \mu \frac{\partial u}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Modelul mecanic anterior are urmatoarea structura:

- (13) este ecuatie de echilibru
- (14) este conditia la limita in deplasari
- (15) este conditia la limita in tractiuni
- (16) este o conditie de contact cu frecare (mai precis o lege de frecare cu prag de frecare dependent de alunecare).

Admitem ipotezele:

$$f_0 \in L^2(\Omega), \quad f_2 \in L^2(\Gamma_2). \quad (17)$$

De asemenea admitem (3) si (10).

Fie u o functie suficient de neteda ce verifica Problema 68.

Utilizand Teorema de reprezentare a lui Riesz, definim $f \in X$ astfel

$$(f, v)_X = \int_{\Omega} f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \gamma v \, d\Gamma \quad \forall v \in X, \quad (18)$$

unde X este spatiul definit in (1) iar γ este operatorul de urma Sobolev.

Utilizam formula de integrare prin parti in $\mathbb{R}^N$ si putem scrie:

$$a(u, v) = (f, v)_X + \int_{\Gamma_3} \mu \partial_{\nu} u v \, d\Gamma \quad \forall v \in X, \quad (19)$$

unde forma $a(\cdot, \cdot)$ este cea definita in (2).

Definim multiplicatorul Lagrange $\lambda \in Y$,

$$\langle \lambda, z \rangle = - \int_{\Gamma_3} \mu \partial_{\nu} u z \, d\Gamma \quad \forall z \in S, \quad (20)$$

unde Y este spatiul definit in (6) iar S este spatiul definit in (5).

Tinand cont de (16), avem $\lambda \in \Lambda(u)$.

Putem rescrie (19) astfel

$$a(u, v) = (f, v)_X - \langle \lambda, \gamma v|_{\Gamma_3} \rangle \quad \forall v \in X.$$

Legea de frecare (16) cu pragul de frecare g indicat in (11) modeleaza fenomene ce apar in probleme geofizice, a se vedea de exemplu [7, 8, 45]. Pentru detalii privind modele antiplane cu frecare se poate consulta [49].

Suntem interesati sa studiem variational problema la limita mentionata anterior.

Din definitia multiplicatorului Lagrange λ , (20), si definitia formei $b(\cdot, \cdot)$, (7), obtinem

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = (f, v)_X \quad \forall v \in X. \quad (21)$$

Legea de frecare (16) ne conduce la urmatoarea identitate:

$$\int_{\Gamma_3} \mu \partial_\nu u u \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_3} g(|u|)|u| \, d\Gamma.$$

Astfel,

$$b(u, \lambda) = \int_{\Gamma_3} g(|u|)|u| \, d\Gamma. \quad (22)$$

Din definitia (9) cu $\varphi = u$ suntem condusi la

$$b(u, \zeta) \leq \int_{\Gamma_3} g(|u|)|u| \, d\Gamma \quad \forall \zeta \in \Lambda(u). \quad (23)$$

Scazand (22) din (23) ajungem la inegalitatea

$$b(u, \zeta - \lambda) \leq 0 \quad \forall \zeta \in \Lambda(u). \quad (24)$$

Prin urmare, obtinem urmatoarea formulare variationala pentru Problema 68.

PROBLEMA 69. *Sa se determine $u \in X$ si $\lambda \in \Lambda(u) \subset Y$ astfel incat se verifica (21) si (24).*

Fiecare solutie a Problemei 69 se numeste *solutie slaba* pentru Problema 68.

Teorema 1. *Admitem ipotezele (3), (10) and (17). Atunci, Problema 68 are cel putin o solutie slaba. In plus, daca (u, λ) este o solutie slaba a Problemei 68, atunci (4) se verifica, cu K_1 si K_2 in (3), X definit in (1), Y definit in (6), f definit in (18), m_a si M_a fiind constantele din (4) iar α este constanta din (8).*

Demonstratia se face aplicand Teorema 6.

Pentru detalii a se consulta [28].

Seminar 14

Tematica cursului - recapitulare

- Elemente de analiza functionala; spatii Sobolev de functii scalare, de o variabila reala
- Spatii Sobolev de functii scalare, de mai multe variabile reale
- Probleme la limita 1D- formulari variationale; solutii slabe
- Probleme la limita ND ($N > 1$)-formulari variationale; solutii slabe
- Ecuatii variationale abstracte. Aplicatii.
- Inegalitati variationale de tipul I. Aplicatii.
- Inegalitati variationale de tipul II. Aplicatii.
- Inegalitati cvasivariationale. Aplicatii.
- Inegalitati hemivariationale/ variational-hemivariationale. Aplicatii.
- Probleme la limita guvernate de operatorul p -Laplace
- Probleme variationale mixte stationare. Aplicatii

Bibliografie

1. R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, 1975.
2. O. Arino, S. Gautier and J.P. Penot. A fixed point theorem for sequentially Continuous mappings with applications to ordinary differential equations. *Funkcial. Ekvac.* **27** (1984), 273-279.
3. M. Boureanu and A. Matei, Weak solutions for antiplane models involving elastic materials with degeneracies, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, **61**(1), 73-85, 2010.
4. M.M. Boureanu, A. Matei, Singular and Degenerate Boundary Value Problems Related to the Electricity Theory, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015 (2015), Article ID 865261, 6 pages.
5. H. Brezis, *Analiză funcțională. Teorie și aplicații*, Editura Academiei Române, București, 2002,(Traducere de Prof.univ.dr. V. Rădulescu).
6. H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2010.
7. M. Campillo, C. Dascălu and I.R. Ionescu. Instability of a periodic system of faults. *Geophys. Int. J.* **159** (2004), 212-222.
8. M. Campillo and I.R. Ionescu. Initiation of antiplane shear instability under slip dependent friction. *J. Geophys. Res.* **102** B9 (1997), 363-371.
9. S. Carl, V. K. Le and D. Motreanu, Existence and comparison principles for general quasilinear variational-hemivariational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* 302 (2003), 6583.
10. M. Chipot, *Elliptic equations: An introductory course*, Birkhäuser Advanced texts, Birkhäuser Verlag, 2009.
11. N. Costea and A. Matei, Weak solutions for nonlinear antiplane problems leading to hemivariational inequalities, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, Volume 72, pp. 3669-3680, 2010.
12. N. Costea and A. Matei, Contact models leading to variational-hemivariational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 386, Issue 2, 15 February 2012, Pages 647-660.
13. K. Fan, Some properties of convex sets related to fixed point theorems, *Math. Ann.* 266 (1984), 519-537.
14. Frank H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Classics in applied mathematics, 5, SIAM 1990.
15. I. Ekeland and R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. Classics in Applied Mathematics 28. SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
16. L. Evans, Partial Differential Equations, Second Edition, AMS, 2009.
17. P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman Advanced Publishing Program, 1985.
18. J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Nečas. *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics*, in: P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.). Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam, (1996), 313-485.
19. W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.
20. P. Jebelean, *Probleme la limita eliptice. Capitole speciale de EDP*, Editura de Vest, Timisoara 2008.

-
21. D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities*, Academic Press, New York, 1980.
 22. A. Kristaly, Hemivariational inequalities systems and applications, *Mathematica* 46 (2004), 161168.
 23. A. Kufner, O. John, and S. Fucik, *Function Spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.
 24. A.J. Kurdila and M. Zabaranin, *Convex Functional Analysis*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
 25. S. Leonardi, Solvability of degenerated quasilinear elliptic equations, *Nonlinear Anal.*, **26** (1996), 1053–1060.
 26. J.L. Lions, E. Magenes, *Problemes aux limites non homogenes et applications*. Vol. 1., Paris, Dunod, 1968.
 27. T. C. Lin, Convex sets, fixed points, variational and minimax inequalities, *Bull. Austral. Math. Soc.* 34 (1986), 107117.
 28. A. Matei, On the solvability of mixed variational problems with solution-dependent sets of Lagrange multipliers, *Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 143(05), October 2013, 1047-1059.
 29. A. Matei and R. Ciurcea, Weak solutions for contact problems involving viscoelastic materials with long memory, *Math. Mech. Solids*, **16**(4) (2011), 393–405.
 30. A. Matei, S. Micu, C. Niță, Optimal control for antiplane frictional contact problems involving nonlinearly elastic materials of Hencky type *Mathematics and Mechanics of Solids*, **23**(3) (2018), 308–328.
 31. A. Matei, A mixed hemivariationalvariational problem and applications, *Computers and Mathematics with Applications (CAMWA)* Available online 4 October 2018, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.068>, Volume 77, Issue 11, 1 June 2019, Pages 2989-3000.
 32. A. Matei, On the relationship between alternative variational formulations of a frictional contact model, <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123391>, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 480, Issue 1, 1 December 2019, 123391.
 33. R.E. Megginson, *An introduction to Banach Space Theory (Graduate Texts in Mathematics)*, New York: Springer-Verlag, 183(1998).
 34. S. Migorski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Springer, 2013.
 35. P. Monk, *Numerical Mathematics and Scientific Computation. Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford University Press, 2003.
 36. D. Motreanu and P. D. Panagiotopoulos, *Minimax Theorems and qualitative properties of the solutions of hemivariational inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
 37. D. Motreanu, V. Radulescu, *Variational and Non-variational Methods in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems*, Series: Nonconvex Optimization and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Springer, 2003.
 38. Z. Nanieicz and P. D. Panagiotopoulos, *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1995.
 39. J. Necas, *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer, 2012.
 40. P. D. Panagiotopoulos, Nonconvex Energy Functions, Hemivariational Inequalities and Substationarity Principles, *Acta Mechanica* 42 (1983), 160-183.
 41. P. D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Non-convex Energy Functionals*, Birkhauser-Verlag, Basel/Boston, 1985.
 42. P. D. Panagiotopoulos, *Hemivariational inequalities, Applications to Mechanics and Engineering*, Springer Verlag, Berlin, 1993.
 43. P. D. Panagiotopoulos, M. Fundo and V. Radulescu, Existence theorems of Hartman Stampacchia type for hemivariational inequalities and applications, *J. Global Optim.* 15 (1999), 4154.

-
44. P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*, Masson, Paris, 1988.
 45. C.H. Scholz. *The mechanics of earthquakes and Faulting*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
 46. B.-S. LEE AND SALAHUDDIN. A HEMIVARIATIONAL-LIKE INEQUALITY WITH APPLICATIONS. *Journal of nonlinear and convex analysis*. 16. 141-150, 2015.
 47. M. Sofonea, Problèmes non-lineaires dans la théorie de l'élasticité, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées a l'Université de Sétif, Algérie, 1993.
 48. M. Sofonea, Problèmes Mathématiques en Elasticité et Viscoplasticité, non-lineaires dans la théorie de l'élasticité, Cours de DEA de Mathématiques Appliquées a l'Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand II), Laboratoire de Mathématiques Appliquées et URA-CNRS 1501, 1993.
 49. M. Sofonea, A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Springer, 2009.
 50. M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 2012.
 51. E. Tarafdar, A fixed point theorem equivalent to the Fan-Knaster-Kuratowski Mazurkiewicz's theorem, *J. Math. Anal. Appl.* 128 (1987), 475-479.
 52. E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems*, Springer, 1986.
 53. E. Zeidler, *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences 108, Springer, 1995.