

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

**CAPITOLE SPECIALE DE
ECUAȚII CU DERIVATE
PARȚIALE**

**Capitole speciale de EDP
(INDRUMAR)
Cursuri/Seminarii**

Andaluzia Matei

Cuprins

Saptamana 1	1
Curs 1	1
Seminar 1	6
Saptamana a2-a	9
Curs 2	9
Seminar 2	19
Saptamana a 3-a	23
Curs 3	23
Seminar 3	28
Saptamana a 4-a	30
Curs 4	30
Seminar 4	38
Săptămâna a 5-a	40
Curs 5	40
Seminar 5	46
Săptămâna a 6-a	49
Curs 6	49
Seminar 6	56
Săptămâna a 7-a	59
Curs 7	59
Seminar 7	64
Săptămâna a 8-a	66
Curs 8	66
Seminar 8	70
Săptămâna a 9-a	73

Cuprins

Curs 9	73
Seminar 9	77
Săptămâna a 10-a	79
Curs 10	79
Seminar 10	82
Săptămâna a 11-a	84
Curs 11	84
Seminar 11	87
Săptămâna a 12-a	89
Curs 12	89
Seminar 12	94
Anexa: tematica cursului	96
Bibliografie	98

Saptamana 1

Curs 1

Tematica acestui curs: derivata în sens slab; spatiul $W^{1,p}(I)$; spatiul $H^1(I)$ (def., proprietati, produs scalar, norme); spatiul $H_0^1(I)$ (def., proprietati, produs scalar, norme). Inegalitatea lui Poincaré. Alte spatii Sobolev de functii de o singura variabila (def., proprietati). Inegalitati de tip Poincaré.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ deschis și fie $f \in L^p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definiția 1. Spunem că $f \in L^p(I)$ este *derivabilă în sens slab* dacă există $g \in L^p(I)$ astfel încât

$$\int_I f \varphi' dx = - \int_I g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

g se numește derivata în sens slab (derivata Sobolev) a lui $f \in L^p(I)$.

Pentru o scriere simplificată vom scrie f' în loc de g , dar subliniem faptul ca daca f nu este de clasa C^1 dar este de clasa L^p atunci f' este evident derivata în sens slab a functiei f .

Amintim ca

$$\text{supp} \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

φ se numește funcție test.

Remarca 2. Dacă $f, \varphi \in C^1(a, b)$, știm că

$$\int_a^b f \varphi' dx = f \varphi|_a^b - \int_a^b f' \varphi dx,$$

Dacă în plus

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

atunci

$$\int_a^b f \varphi' dx = - \int_a^b f' \varphi dx.$$

Definiția 3. $f \in L^1_{loc}(I)$ daca pentru oricare compact $K \subset I$,

$$\int_K |f(x)| dx < \infty.$$

Lema fundamentală a calculului variațional in 1D. Fie $f \in L^1_{loc}(I)$. Dacă

$$\int_I f \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I),$$

atunci rezultă că

$$f = 0 \text{ a.p.t. în } I.$$

Studiul unicității derivatei slabe.

Fie $f \in L^p(a, b)$. Presupunem că $g_1, g_2 \in L^p(a, b)$ sunt derivate în sens slab.

$$\int_I f \varphi' dx = - \int_I g_1 \varphi dx,$$

$$\int_I f \varphi' dx = - \int_I g_2 \varphi dx.$$

Scăzând ultimele două relații obținem

$$0 = \int_I (g_2 - g_1) \varphi dx.$$

Cum $g_2 - g_1 \in L^p(I)$ rezulta ca $g_2 - g_1 \in L^1_{loc}(I)$. Utilizam Lema fundamentala a calculului variational si obtinem

$$g_2 = g_1 \text{ a.p.t. } x \in I.$$

Introducem următoarele spații:

$$W^{1,p}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} | f \in L^p(I), \text{ există } g \in L^p(I) \text{ a.î. } \int_I f \varphi' dx = - \int_I g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I)\},$$

$$(W^{1,p}(I) = \{f \in L^p(I), f' \in L^p(I)\}).$$

$$W^{2,p}(I) = \{f \in W^{1,p}(I), f' \in W^{1,p}(I)\} = \{f \in L^p(I), f' \in L^p(I), f'' \in L^p(I)\},$$

Avem

$$\|v\|_{W^{1,p}(I)} = \|v\|_{L^p(I)} + \|v'\|_{L^p(I)},$$

si

$$(W^{1,p}(I), \|\cdot\|_{W^{1,p}(I)})$$

este spațiu Banach.

Dacă $p = 2$, $W^{1,2}(I)$ este spațiu Hilbert. Notăm $W^{1,2}(I) = H^1(I)$.

Există $c > 0$, astfel încât

$$\|v\|_{C(\bar{I})} \leq c \|v\|_{H^1(I)}.$$

i.e. $H^1(I)$ se scufundă continuu în $C(\bar{I})$, vezi [4];

$$i : H^1(I) \rightarrow C(\bar{I}), \quad iu = u,$$

$$\|iu\|_{C(\bar{I})} \leq c \|u\|_{H^1(I)} \Leftrightarrow \|u\|_{C(\bar{I})} \leq c \|u\|_{H^1(I)}.$$

$$\|v\|_{H^1(I)} = \|v\|_{L^2(I)} + \|v'\|_{L^2(I)},$$

$$\|v\|_{C(\bar{I})} = \max_{x \in \bar{I}} |v(x)|,$$

$$(\cdot, \cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v)_{H^1(I)} = (u, v)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)}.$$

Norma indusa de acest produs scalar:

$$\|u\|_{H^1(I)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(I)}} = \sqrt{\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2}.$$

$\|\cdot\|_{H^1(I)}$ și $|||\cdot|||_{H^1(I)}$ sunt norme echivalente.

(Într-adevăr dacă $\|u\|_{L^2(I)} = a$ și $\|u'\|_{L^2(I)} = b$ a arăt că există $c_1, c_2 > 0$ astfel încât

$$c_1 \|u\|_{H^1(I)} \leq |||u|||_{H^1(I)} \leq c_2 \|u\|_{H^1(I)},$$

echivalent cu

$$c_1(a + b) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq c_2(a + b), \quad a, b > 0.$$

Aleg $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $c_2 = 1$.)

Definim

$$H_0^1(I) = \overline{C_c^1(I)}^{\|\cdot\|_{H^1(I)}}, \quad H_0^1(I) : f|_{\partial I} = 0.$$

Dacă $I = (0, 1)$ și $v \in H_0^1(0, 1) \Rightarrow v(0) = v(1) = 0$.

Definim produsul scalar și norma pe $H_0^1(I)$:

$$(u, v)_{H_0^1(I)} = (u', v')_{L^2(I)},$$

$$\|u\|_{H_0^1(I)} = \|u'\|_{L^2(I)}.$$

$(H_0^1(I), (\cdot, \cdot)_{H_0^1(I)}, \|\cdot\|_{H_0^1(I)})$ este spațiu Hilbert.

Teorema 4. [Inegalitatea lui Poincaré; a se vedea [4]] Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval deschis, mărginit. Atunci există $C_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq C_p \|u'\|_{L^2(I)}, \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Remarca 5. Există $\widetilde{C}_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \widetilde{C}_p \|u'\|_{L^2(I)}.$$

$$\|u\|_{H^1(I)} = \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)} \leq (1 + C_p) \|u'\|_{L^2(I)}, \text{ pot lua } \widetilde{C}_p = 1 + C_p.$$

Fie $I = (0, 1)$ și

$$V = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = 0\}.$$

Vrem să arătăm că V este spațiu Hilbert.

Cum orice subspațiu închis al unui spațiu Hilbert este spațiu Hilbert arătăm că V este subspațiu închis al spațiului $H^1(0, 1)$.

V este subspațiu liniar. Intr-adevar, $\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V$.
 $\alpha u + \beta v \in H^1(0, 1)$ și $(\alpha u + \beta v)(0) = \alpha u(0) + \beta v(0) = 0$.

Pentru a demonstra închiderea,

$\forall (v_n)_n \subset V$ șir convergent,

$$v_n \rightarrow v \text{ când } n \rightarrow \infty \left(\|v_n - v\|_{H^1(I)} \rightarrow 0 \right).$$

Arăt că $v \in V$.

Cum $(v_n)_n \subset H^1(0, 1)$ și $v_n \rightarrow v$ când $n \rightarrow \infty$ în $H^1(0, 1)$ rezultă că $v \in H^1(0, 1)$.
 Arătăm acum că $v(0) = 0$.

$$0 \leq |v(0)| = |v(0) - v_n(0) + v_n(0)| \leq |v(0) - v_n(0)| + |v_n(0)| = |(v_n - v)(0)| \leq \max_{x \in [0, 1]} |(v_n - v)(x)| = \|v_n - v\|_{C(\bar{I})} \leq c \|v_n - v\|_{H^1(0, 1)}, \quad \bar{I} = [0, 1].$$

Rezultă că $|v(0)| = 0 \Rightarrow v(0) = 0$.

$(V, (\cdot, \cdot)_{H^1(0, 1)}, \|\cdot\|_{H^1(0, 1)})$ este spațiu Hilbert.

Definim

$$(u, v)_V = (u', v')_{L^2(I)},$$

$$\|u\|_V = \|u'\|_{L^2(I)}.$$

$(V, (\cdot, \cdot)_V, \|\cdot\|_V)$ este spațiu Hilbert.

Inegalitate de tip Poincaré

Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval deschis, mărginit. Atunci există $C_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq C_p \|u'\|_{L^2(I)}, \quad \forall u \in V.$$

Tema (facultativa)

- Verificați că orice șir Cauchy din $W^{1,p}(I)$ este șir convergent.
- Proprietăți ale spațiilor $W^{1,p}(I)$ (reflexivitate, separabilitate).

Seminar 1

- *Exercitiul 1*

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

$$I = (-1, 1), f \in L^p(I) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

$$\int_I f \varphi' dx = \int_{-1}^0 (-x) \varphi' dx + \int_0^1 x \varphi' dx = (-x) \varphi(x) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-1) \varphi dx + x \varphi(x) \Big|_0^1 -$$

$$\int_0^1 1 \varphi dx = - \left(\int_{-1}^0 (-1) \varphi dx + \int_0^1 1 \varphi dx \right) = - \int_{-1}^1 g \varphi dx,$$

$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ (suport compact, în capetele intervalului funcția ia valoarea 0).

Prin urmare,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

este derivata în sens slab a lui f .

- *Exercitiul 2*

Fie $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Derivata în sens slab pentru f este

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

$$f \in L^p(-1, 1), g \in L^p(-1, 1) \Rightarrow f \in W^{1,p}(-1, 1).$$

Ne punem întrebarea $f \in W^{2,p}(-1, 1)$?

$$\int_{-1}^1 f' \varphi' dx = - \int_{-1}^1 h \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(-1, 1),$$

dar

$$\int_{-1}^1 f' \varphi' dx = \int_{-1}^1 g \varphi' dx = \int_{-1}^0 (-\varphi') dx + \int_0^1 \varphi' dx$$

$$= -\varphi \Big|_{-1}^0 + \varphi \Big|_0^1 = -\varphi(0) + \varphi(-1) + \varphi(1) - \varphi(0) = -2\varphi(0),$$

rezultă

$$-2\varphi(0) = - \int_{-1}^1 h\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(-1, 1). \quad (1)$$

Fie $\varphi \in C_c^1(0, 1)$. Relația (1) este echivalentă cu

$$0 = - \int_0^1 h\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(0, 1).$$

Cu lema fundamentală a calculului variațional rezultă că

$$h = 0 \text{ a.p.t. în } (0, 1).$$

Fie acum $\varphi \in C_c^1(-1, 0)$. Relația (1) este echivalentă cu

$$0 = - \int_{-1}^0 h\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(-1, 0).$$

Cu lema fundamentală a calculului variațional rezultă că

$$h = 0 \text{ a.p.t. în } (-1, 0).$$

Din cele de mai sus avem

$$h = 0 \text{ a.p.t. în } (-1, 1),$$

deci rezultă cu (1),

$$\varphi(0) = 0,$$

și am ajuns la o contradicție deci $f \notin W^{2,p}(-1, 1)$.

- Fie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(a, b)$.

Fie $t_0 \in (a, b)$.

$$f'(t_0) = \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{f(x) - f(t_0)}{x - t_0}.$$

Cum f este definită pe un interval mărginit rezultă ca $f \in L^\infty(a, b)$

Deci

$$f \in L^p(a, b), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Fie $p < \infty$.

$$\int_I f\varphi' dx = f\varphi|_a^b - \int_a^b f'\varphi dx, \quad \varphi \in C_c^1(a, b).$$

Cum $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ rezultă că

$$\int_I f\varphi' dx = - \int_I f'\varphi dx.$$

Fie $g = f'$, $f' \in L^p(a, b)$ ($f \in C^1(a, b) \Rightarrow f'$ continuă, f' definită pe mărginit).

Deci derivata clasica coincide cu derivata in sens slab.

Exemplu: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

$$f \in C^1(a, b)$$

$$f'(x) = e^x$$

este derivata in sens slab a lui f .

Pentru exemple interesante fac trimitere la [6].

Saptamana a2-a

Curs 2

Tematica acestei saptamani: Probleme la limita de tip Dirichlet 1D (introducerea notiunii de solutie slaba, studiul existentei si unicitatii solutiei slabe, studiul marginirii si stabilitatii solutiei slabe)

Fie problema la limita

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$u : I \rightarrow \mathbb{R}$ este necunoscuta iar $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ reprezintă data problemei.

Numim *soluție clasică* o funcție $u \in C^2(\bar{I})$ care verifică (1).

Introducem in continuare notiunea de *soluție slabă*.

Alegem drept spațiu al funcției test, spațiul $H_0^1(I) = \overline{C_c^1(I)}^{\|\cdot\|_{H^1(I)}}$.

Subliniem că

$$v \in H_0^1(I) \Rightarrow v|_{\partial I} = 0, \quad (v(0) = v(1) = 0).$$

Fie $v \in H_0^1(I)$. Înmulțind prima ecuație din (1) cu v și integrând pe I obținem

$$\int_I (-u''v) dx + \int_I uv dx = \int_I f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I), f \in L^2(I),$$

(u funcție suficient de netedă.)

Folosind formula de integrare prin părți și ținând cont de faptul că $v(0) = v(1) = 0$ obținem

$$\int_I u'v' dx + \int_I uv dx = \int_I f v dx. \quad (2)$$

Definiția 1. Dat $f \in L^2(I)$, numesc soluție slabă pentru problema (1), o funcție $u \in H_0^1(I)$ care verifică (2), $\forall v \in H_0^1(I)$.

Teorema 2. Problema (1) are o unică soluție slabă.

DEMONSTRAȚIE. $H = H_0^1(I)$ este spațiu Hilbert.

Fie $a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ date de relațiile:

$$a(u, v) = \int_I (u'v' + uv) dx,$$

$$\varphi(v) = \int_I f v dx.$$

Arătăm că a este o formă biliniară simetrică, continuă și H_0^1 -eliptică (coercivă). a)
 a formă biliniară dacă:

$$\begin{cases} a(\alpha u + \beta w, v) = \alpha a(u, v) + \beta a(w, v), \\ a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w), \quad \forall u, v, w \in H_0^1(I), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Fie $u, v, w \in H_0^1(I)$, și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta w, v) &= \\ &= \int_I [(\alpha u + \beta w)'v' + (\alpha u + \beta w)v] dx \\ &= \int_I [(\alpha u' + \beta w')v' + (\alpha u + \beta w)v] dx \\ &= \int_I (\alpha u'v' + \beta w'v') dx + \int_I (\alpha uv + \beta wv) dx \\ &= \alpha \int_I u'v' dx + \beta \int_I w'v' dx + \alpha \int_I uv dx + \beta \int_I wv dx \\ &= \alpha \int_I (u'v' + uv) dx + \beta \int_I (w'v' + wv) dx \\ &= \alpha a(u, v) + \beta a(w, v). \end{aligned}$$

În mod similar se arată că $a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w)$. Prin urmare, a este o formă biliniară.

b) a este continuă dacă

$$\exists m_a > 0 \text{ a.î. } |a(u, v)| \leq m_a \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}, \quad \forall u, v \in H_0^1(I).$$

Fie $u, v \in H_0^1(I)$.

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_I (u'v' + uv) dx \right| = \left| \int_I u'v' dx + \int_I uv dx \right| \\
 &\leq \left| \int_I u'v' dx \right| + \left| \int_I uv dx \right| = |(u', v')_{L^2(I)}| + |(u, v)_{L^2(I)}| \\
 &\leq \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \\
 &\leq \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} + C_p^2 \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} \\
 &= (1 + C_p^2) \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}.
 \end{aligned}$$

Pot lua $m_a = 1 + C_p^2$.

Am folosit pe rând mai sus: inegalitatea triunghiului, inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea lui Poincaré.

c) a este coercivă (sau $H_0^1(I)$ -eliptică) dacă

$$\exists M_a > 0 \text{ a. i. } a(u, u) \geq M_a \|u\|_{H_0^1(I)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Fie $u \in H_0^1(I)$.

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= \int_I [(u')^2 + u^2] dx = \int_I (u')^2 dx + \int_I u^2 dx \\
 &= \|u'\|_{L^2(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^2 \geq \|u'\|_{L^2(I)}^2 = \|u\|_{H_0^1(I)}^2.
 \end{aligned}$$

Pot lua $M_a = 1$.

d) a este simetrică (evident).

Acum, arătam că φ este aplicație liniară și continuă.

e) φ este aplicație liniară dacă

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v), \quad \forall u, v \in H_0^1(I), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Fie $u, v \in H_0^1(I)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \int_I f(\alpha u + \beta v) dx = \alpha \int_I f u dx + \beta \int_I f v dx = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v).$$

f) φ este continuă dacă

$$\exists K > 0 \text{ a.i. } |\varphi(v)| \leq K \|v\|_{H_0^1(I)}, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Fie $v \in H_0^1(I)$,

$$\begin{aligned}
 |\varphi(v)| &= \left| \int_I f v dx \right| = |(f, v)_{L^2(I)}| \\
 &\leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq C_p \|f\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} = C_p \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}.
 \end{aligned}$$

Am folosit pe rând inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea lui Poincaré. Pot lua $K = C_p \|f\|_{L^2(I)} > 0$.

Acum, cu Lema lui Lax-Milgram rezultă că

$$\exists! u \in H_0^1(I) \text{ astfel încât } a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

În plus, unica soluție u este punctul de minim al funcționalei asociată problemei noastre

$$J : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v).$$

Prin urmare,

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

și demonstrația se încheie. □

Boot-strap (plus de regularitate); întoarcerea la soluția clasică

Arat pentru început că

$$u \in H_0^1(I) \cap H^2(I).$$

$$\int_I u'v' dx + \int_I uv dx = \int_I f v dx \Leftrightarrow \int_I u'v' dx = \int_I (f - u)v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

echivalent cu

$$\int_I u'v' dx = - \int_I (-f + u)v dx, \quad \forall v \in C_c^1(I).$$

Rezultă

$$(u')' = u - f \in L^2(I),$$

și deci

$$u \in H^2(I).$$

Admitem acum că $f \in C(\bar{I})$. Cum $u \in H_0^1(I)$, rezultă că $u \in C(\bar{I})$. Prin urmare,

$$u - f = (u')' \in C(\bar{I}).$$

Utilizam Teorema VIII.2 din [4] (pag.177):

$$u \in H^1 \text{ și } u' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^1(\bar{I})$$

$$u' \in H^1 \text{ și } u'' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u' \in C^1(\bar{I})$$

$$u \in C^1(\bar{I}) \text{ și } u' \in C^1(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^2(\bar{I}).$$

Asadar,

$$u \in C^2(\bar{I}).$$

Cum

$$\int_I u'v' dx = u'v|_0^1 - \int_I u''v dx = - \int_I u''v dx$$

și, așa cum am văzut mai sus

$$\int_I u'v' dx = - \int_I (-f + u)v dx, \quad \forall v \in C_c^1(I),$$

obținem

$$- \int_I u''v dx = \int_I (f - u)v dx,$$

trecând într-o parte obținem

$$\int_I (-u'' + u - f)v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(I), \forall v \in C_c^1(I).$$

Cu lema fundamentală a calculului variațional rezultă

$$-u'' + u = f \text{ a.p.t. pe } I.$$

Cum însă u'' , u și f sunt funcții continue, deducem că

$$-u'' + u = f \text{ peste tot pe } I.$$

Tehnica folosită aici poartă numele de *boot-strap*.

Remarca 3. Cum φ este aplicație liniară și continuă, cu teorema de reprezentare a lui Riesz avem

$$\exists! g \in H_0^1(I) \text{ a.î. } \varphi(v) = (g, v)_{H_0^1(I)} = (f, v)_{L^2(I)} \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Prin urmare, avem

$$a(u, v) = (g, v)_{H_0^1(I)}, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Introducem,

$$\Phi : H_0^1(I) \rightarrow H_0^1(I), \quad \Phi(g) = u,$$

unica soluție asigurată de Lax Milgram.

Arătăm că Φ este aplicație Lipschitz:

$$\exists L > 0 \text{ a.î. } \|\Phi(g_1) - \Phi(g_2)\|_{H_0^1(I)} \leq L \|g_1 - g_2\|_{H_0^1(I)}.$$

(Să amintim! Fie $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spații normate. $T : X \rightarrow Y$ se numește operator Lipschitz dacă $\exists L > 0$ astfel încât

$$\|Tu - Tv\|_Y \leq L \|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Orice operator Lipschitz este continuu, nu și invers.)

Acum avem

$$\|\Phi(g_1) - \Phi(g_2)\|_{H_0^1(I)} = \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(I)},$$

unde u_1, u_2 sunt soluțiile corespunzătoare datelor g_1, g_2 ,

$$a(u_1, v) = (g_1, v)_{H_0^1(I)},$$

$$a(u_2, v) = (g_2, v)_{H_0^1(I)}, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Scăzând ultimele două relații avem

$$a(u_1 - u_2, v) = (g_1 - g_2, v)_{H_0^1(I)}, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Aleg $v = u_1 - u_2$ și avem

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = (g_1 - g_2, u_1 - u_2)_{H_0^1(I)}$$

dar folosind $H_0^1(I)$ -elipticitatea lui a și inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă

$$\begin{aligned} M_a \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(I)}^2 &\leq (g_1 - g_2, u_1 - u_2)_{H_0^1(I)} \\ &\leq \left| (g_1 - g_2, u_1 - u_2)_{H_0^1(I)} \right| \leq \|g_1 - g_2\|_{H_0^1(I)} \cdot \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(I)}, \end{aligned}$$

de unde rezultă că

$$\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(I)} \leq \frac{1}{M_a} \|g_1 - g_2\|_{H_0^1(I)}, \quad u_1 \neq u_2. \quad (3)$$

Notam ca (3) este adevarat si pentru $u_1 = u_2$.

Pot lua $L = \frac{1}{M_a}$. Inegalitatea (3) indică ”stabilitatea soluției slabe.”

Arătăm că Φ este liniară:

$$\Phi(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \Phi(g_1) + \beta \Phi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in H_0^1(I), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Avem

$$a(u_1, v) = (g_1, v)$$

$$a(u_2, v) = (g_2, v),$$

de unde rezultă

$$a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = (\alpha g_1 + \beta g_2, v).$$

Fie

$$a(u_3, v) = (\alpha g_1 + \beta g_2, v),$$

și rezultă

$$a(u_3 - (\alpha u_1 + \beta u_2), v) = 0.$$

Aleg $v = u_3 - (\alpha u_1 + \beta u_2)$ și rezultă

$$a(u_3 - (\alpha u_1 + \beta u_2), u_3 - (\alpha u_1 + \beta u_2)) = 0.$$

Acum folosind $H_0^1(I)$ -elipticitatea formei a rezultă

$$M_a \|u_3 - (\alpha u_1 + \beta u_2)\|_{H_0^1(I)}^2 \leq 0.$$

Prin urmare

$$\|u_3 - (\alpha u_1 + \beta u_2)\|_{H_0^1(I)} = 0,$$

si deci

$$u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2.$$

Este Φ continuă? Φ este continuă dacă

$$\exists K > 0 \text{ a.î. } \|\Phi(g)\|_{H_0^1(I)} \leq K \|g\|_{H_0^1(I)}.$$

Avem $\Phi(0) = 0$ (orice operator liniar duce pe 0 în 0) și

$$\begin{aligned} \|\Phi(g)\|_{H_0^1} &= \|\Phi(g) - \Phi(0)\|_{H_0^1(I)} \\ &\leq L \|g - 0\|_{H_0^1(I)} = L \|g\|_{H_0^1(I)}. \end{aligned}$$

Deci putem lua $K = L$.

În continuare vrem să arătăm că

$$\exists M(g) \geq 0 \text{ a.î. } \|u\|_{H_0^1(I)} \leq M(g).$$

Avem

$$a(u, v) = (g, v)_{H_0^1(I)}.$$

Alegem $v = u$ și din faptul că forma a este coercivă avem

$$\begin{aligned} M_a \|u\|_{H_0^1(I)}^2 &\leq a(u, u) = (g, u)_{H_0^1(I)} \\ &\leq \left| (g, u)_{H_0^1(I)} \right| \leq \|g\|_{H_0^1(I)} \cdot \|u\|_{H_0^1(I)}, \end{aligned}$$

de unde se obține

$$\|u\|_{H_0^1(I)} \leq \frac{1}{M_a} \|g\|_{H_0^1(I)},$$

și prin urmare

$$M(g) = \frac{1}{M_a} \|g\|_{H_0^1(I)}.$$

Fie următoarea problemă

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ și $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2(I)$.

Soluție clasică: $u \in C^2([0, 1])$ ce verifică (4).

Soluție slabă: $u \in H_0^1(0, 1)$ astfel încât

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I), f \in L^2(I) \text{ dat}.$$

Spațiul funcțiilor test este $H_0^1(I)$.

Fie $v \in H_0^1(I)$, avem

$$-\int_0^1 u''v dx = \int_0^1 f v dx \Leftrightarrow -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx.$$

Problema (4) are o unică soluție slabă.

Fie $a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ date de relațiile:

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx,$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

a) a formă biliniară;

b) a formă continuă, echivalent cu

$$\exists M_a > 0 \text{ a.î. } |a(u, v)| \leq M_a \|u\|_{H_0^1(I)} \cdot \|v\|_{H_0^1(I)}.$$

Fie $u, v \in H_0^1(I)$,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u'v' dx \right| = |(u', v')_{L^2(I)}| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(I)} \cdot \|v'\|_{L^2(I)} = \|u\|_{H_0^1(I)} \cdot \|v\|_{H_0^1(I)}. \end{aligned}$$

Am folosit inegalitatea Cauchy-Schwarz. Pot lua $M_a = 1$.

c) a formă coercivă, echivalent cu

$$\exists m_a > 0 \text{ a.î. } a(u, u) \geq m_a \|u\|_{H_0^1(I)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(I).$$

Fie $u \in H_0^1(I)$,

$$a(u, u) = \int_0^1 (u')^2 dx = \|u'\|_{L^2(I)}^2 = \|u\|_{H_0^1(I)}^2.$$

Luăm $m_a = 1$.

d) a simetrică (evident).

φ este aplicație liniară și continuă (am vazut la problema anterioară).

Aplicăm Lema Lax- Milgram și tragem concluzia că problema (4) are o unică soluție slabă u ce minimizează funcționala

$$J : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 dx - \int_0^1 f v dx.$$

Prin urmare,

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Boot-strap procedure (plus de regularitate).

Cu Lax- Milgram: $u \in H_0^1(I)$.

De fapt, $u \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$.

Intr-adevar,

$$\int_0^1 u' v' dx = - \int_0^1 (-f) v dx,$$

rezultă

$$(u')' = -f.$$

Cum $-f \in L^2(I)$ rezultă

$$(u')' \in L^2(I),$$

și prin urmare

$$u \in H^2(I).$$

Intoarcerea la soluția clasică.

Presupunem că $f \in C([0, 1])$.

Cum $(u')' = -f$ și $-f \in C([0, 1])$ rezultă că

$$u \in C^2([0, 1]).$$

Intr-adevar, utilizand *Teorema VIII.2* din [4] (pag.177):

$$u \in H^1(I) \text{ și } u' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^1(\bar{I})$$

$$u' \in H^1(I) \text{ și } (u')' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u' \in C^1(\bar{I})$$

$$\text{Acum, din } u \in C^1(\bar{I}) \text{ și } u' \in C^1(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^2(\bar{I}).$$

$$\int_0^1 u' v' dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I) \supset C_c(I), (C_c(I) \subset \overline{C_c^1(I)} = H_0^1(I)).$$

Cum

$$\int_0^1 u' v' dx = u' v|_0^1 - \int_0^1 u'' v dx,$$

rezultă că

$$-\int_0^1 u'' v dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in C_c(I),$$

și prin urmare

$$\int_0^1 (u'' + f) v dx = 0, \quad \forall v \in C_c(I).$$

Cu lema fundamentală a calculului variațional rezultă că

$$u'' + f = 0 \text{ a.p.t.} \Rightarrow -u'' = f \text{ a.p.t. pe } I.$$

Deoarece u'' și f sunt funcții continue avem de fapt

$$u'' + f = 0 \text{ peste tot pe } I.$$

Seminar 2

- **Problemă Dirichlet neomogenă** Fie următoarea problemă

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \end{cases} \quad (5)$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \neq 0$.

Metoda 1.-Lax-Migram

Metoda 2.-Stampacchia ([4])

Metoda 1

Fie $\tilde{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\tilde{u}(0) = \alpha$ și $\tilde{u}(1) = \beta$. De exemplu,

$$\tilde{u}(x) = (1 - x)\alpha + x\beta.$$

Prin urmare, avem

$$\begin{cases} \tilde{u}(0) - u(0) = 0, \\ \tilde{u}(1) - u(1) = 0. \end{cases}$$

Definim acum,

$$U : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(x) = \tilde{u}(x) - u(x),$$

și avem $U(0) = 0, U(1) = 0$.

Luând în considerare definirea lui U , faptul că $U''(x) = \tilde{u}''(x) - u''(x)$ și că $\tilde{u}''(x) = 0$ rezultă

$$-u'' + u = (U'' - \tilde{u}'') + \tilde{u} - U = U'' + \tilde{u} - U.$$

Prin urmare, obținem următoarea problemă pentru U :

$$\begin{cases} U'' - U = f - \tilde{u} \text{ în } I = (0, 1) \\ U(0) = U(1) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

și $f - \tilde{u} \in L^2(I)$.

Conform Lemei Lax-Milgram rezultă că problema are o soluție slabă unică $U \in H_0^1(I)$.

- Fie problema

$$\begin{cases} -u_i''(x) = f_i(x), \quad x \in I = (0, 1) \\ u_i(0) = u_i(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

unde

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1-x, & x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

și

$$f_3(x) = \delta_{1/2}.$$

Introduceți noțiunea de soluție slabă pentru fiecare dintre cele 3 probleme la limită și studiați regularitatea.

δ este funcția Dirak:

$$\begin{cases} \delta(0) = \infty, \\ \delta(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0. \end{cases}$$

$(-1, 1)$ interval centrat în 0 $\Rightarrow \int_I \delta(x) dx = 1$.

$\delta_{1/2}$ este dată de:

$$\begin{cases} \delta_{1/2}(1/2) = \infty, \\ \delta_{1/2}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Avem relația

$$\delta_{1/2}(x) = \delta(x - \frac{1}{2}).$$

Din

$$\int_0^1 f_3^2(x) dx = \int_0^{1/2} f_3^2(x) dx + \int_{1/2}^1 f_3^2(x) dx = 0 + 0 = 0 < \infty,$$

rezultă

$$f_3 \in L^2(0, 1).$$

Dat $f_i \in L^2(I)$, $i \in \overline{1, 3}$, numim soluție slabă pentru problema (7) o funcție $u \in H_0^1(I)$ astfel încât $a(u, v) = \varphi(v)$, $\forall v \in H_0^1(I)$, unde

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx,$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f_i v dx.$$

Prin urmare, avem

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f_i v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

În plus, prin procedeul de boot-strap,:

$$u \in H_0^1(I) \cap H^2(I).$$

Observație. Pentru că $f_1 \in C(\bar{I})$, soluția slabă a problemei (7) cu data corespunzătoare f_1 este și soluție clasică.

Căutăm expresia lui u_1 (soluția corespunzătoare datei f_1):

$$\begin{cases} -u_1''(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \\ u_1(0) = u_1(1) = 0. \end{cases}$$

$$u_1 \in C^2([0, 1]).$$

$$\text{Dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_1'(x) = -\frac{x^2}{2} - c_1 \Rightarrow u_1(x) = -\frac{x^3}{6} - c_1x + d_1.$$

$$\text{Dacă } \frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow u_1'(x) = \frac{x^2}{2} - x - c_2 \Rightarrow u_1(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - c_2x + d_2.$$

$$\text{Din } u_1(0) = 0 \Rightarrow d_1 = 0, \text{ și din } u_1(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - c_2 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 - c_2 = \frac{1}{3}.$$

Din faptul că $u_1 \in C^2([0, 1])$ avem

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} u_1(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} u_1(x),$$

și

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} u_1(x) = -\frac{1}{48} - \frac{c_1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} u_1(x) = \frac{1}{48} - \frac{1}{8} - \frac{c_2}{2} + d_2.$$

de unde obținem

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + d_2 + \frac{c_1 - c_2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12} = d_2 + \frac{c_1 - c_2}{2}.$$

Acum

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x < \frac{1}{2}} u_1'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}} u_1'(x),$$

deci

$$-\frac{1}{8} - c_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - c_2,$$

de unde obținem

$$c_1 - c_2 = \frac{1}{4}.$$

Facând înlocuirile mai sus obținem

$$\frac{1}{12} = d_2 + \frac{1}{8} \Rightarrow d_2 = -\frac{1}{24},$$

$$-\frac{1}{24} - c_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{8},$$
$$c_1 = \frac{1}{4} + c_2 = -\frac{1}{8}.$$

În concluzie, avem următoarea formă pentru u_1 :

$$u_1(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{8}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{24}, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Asemănător celelalte două cazuri pentru u_2 și u_3 .

Saptamana a 3-a

Curs 3

Tematica acestei saptamani: Probleme Sturm- Liouville

Fie următoarea problemă Dirichlet omogena:

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Studiem aceasta problema in urmatoarele ipoteze:

$$\begin{cases} p \in C^1(\bar{I}), q \in C(\bar{I}), \\ p(x) \geq \alpha > 0, q(x) \geq 0, \forall x \in \bar{I}, \\ f \in L^2(I). \end{cases} \quad (2)$$

Funcțiile care apar în problema noastră sunt definite astfel: $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Spațiul funcțiilor test este $H_0^1(I)$.

Fie $v \in H_0^1(I)$,

$$-\int_0^1 (pu')'v dx + \int_0^1 quv dx = \int_0^1 f v dx,$$

dar

$$-\int_0^1 (pu')'v dx = -pu'v|_0^1 + \int_0^1 pu'v' dx = \int_0^1 pu'v' dx,$$

și prin urmare avem

$$\int_0^1 (pu'v' + quv) dx = \int_0^1 f v dx.$$

Definiția 1. Date f, p, q în (2), numim soluție slabă pentru (5) o funcție $u \in H_0^1(I)$ astfel încât

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

unde $a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt date de

$$a(u, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv) dx$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Teorema 2. *Problema (5) are o unică soluție în sens slab.*

DEMONSTRAȚIE. a biliniară (evident).

a continuă;

Fie $u, v \in H_0^1(I)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 pu'v' dx + \int_0^1 quv dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 pu'v' dx \right| + \left| \int_0^1 quv dx \right| = |(pu', v')_{L^2(I)}| + |(qu, v)_{L^2(I)}| \\ &\leq \|pu'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|qu\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \\ &\leq \|p\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} + C_p^2 \|q\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} \\ &= \left(\|p\|_{L^\infty(I)} + C_p^2 \|q\|_{L^\infty(I)} \right) \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}. \end{aligned}$$

Pot lua $m_a = \|p\|_{L^\infty(I)} + C_p^2 \|q\|_{L^\infty(I)}$.

Am folosit pe rând mai sus: inegalitatea triunghiului, inegalitatea Cauchy-Schwarz, inegalitatea lui Poincaré și relațiile:

$$\|pu'\|_{L^2(I)}^2 = \int_0^1 p^2(u')^2 dx \leq \|p\|_{L^\infty(I)}^2 \|u'\|_{L^2(I)}^2,$$

de unde rezultă

$$\|pu'\|_{L^2(I)} \leq \|p\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^2(I)},$$

și

$$\begin{aligned} \|qu\|_{L^2(I)} &\leq \|q\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^2(I)} \\ &\leq \|q\|_{L^\infty(I)} \cdot C_p \|u\|_{H_0^1(I)}. \end{aligned}$$

a este coercivă.

Fie $u \in H_0^1(I)$.

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 [p(u')^2 + qu^2] dx \geq \int_0^1 p(u')^2 dx \\ &\geq \alpha \int_0^1 (u'(x))^2 dx = \alpha \|u'\|_{L^2(I)}^2 = \alpha \|u\|_{H_0^1(I)}^2. \end{aligned}$$

Pot lua $M_a = \alpha$.

φ este aplicație liniară și continuă (vezi calculul de la Problema Dirichlet omogenă).

Acum, cu Lema Lax-Milgram rezultă că (5) are o unică soluție slabă. $\square$

Fie următoarea problemă Dirichlet omogenă:

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Admitem următoarele ipoteze:

$$\begin{cases} p \in C^1(\bar{I}), r \in C(\bar{I}), q \in C(\bar{I}), \\ p(x) \geq \alpha > 0, r^2(x) \leq \alpha, q(x) \geq 1, \forall x \in \bar{I}, \\ f \in L^2(I). \end{cases} \quad (4)$$

Spațiul funcțiilor test este $H_0^1(I)$.

Fie $v \in H_0^1(I)$,

$$-\int_0^1 (pu')'v dx + \int_0^1 ru'v dx + \int_0^1 quv dx = \int_0^1 f v dx,$$

dar

$$-\int_0^1 (pu')'v dx = -pu'v|_0^1 + \int_0^1 pu'v' dx = \int_0^1 pu'v' dx,$$

și prin urmare avem

$$\int_0^1 pu'v' dx + \int_0^1 ru'v dx + \int_0^1 quv dx = \int_0^1 f v dx.$$

Definiția 3. Date f, p, r, q în (4), numim soluție slabă pentru (3) o funcție $u \in H_0^1(I)$ astfel încât

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

unde $a : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt date de

$$a(u, v) = \int_0^1 pu'v' dx + \int_0^1 ru'v dx + \int_0^1 quv dx$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Teorema 4. Problema (3) are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. a biliniară (evident).

a continuă.

Fie $u, v \in H_0^1(I)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|p\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} \\ &+ \|r\|_{L^\infty(I)} \cdot C_p \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} \\ &+ C_p^2 \|q\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)} \\ &= \left(\|p\|_{L^\infty(I)} + C_p \|r\|_{L^\infty(I)} + C_p^2 \|q\|_{L^\infty(I)} \right) \|u\|_{H_0^1(I)} \|v\|_{H_0^1(I)}. \end{aligned}$$

a este coercivă.

Fie $u \in H_0^1(I)$ și avem următoarea relație

$$\begin{aligned} - \int_0^1 ru'udx &\leq \left| \int_0^1 ru'udx \right| \leq \int_0^1 \frac{r^2(x)[u'(x)]^2}{2} dx \\ &+ \int_0^1 \frac{[u(x)]^2}{2} dx \leq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H_0^1(I)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned}$$

Am folosit faptul că

$$a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

unde $a = r(x)u'(x)$ și $b = u(x)$.

Acum,

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 p(u')^2 dx + \int_0^1 ru'udx + \int_0^1 qu^2 dx \\ &\geq \alpha \|u\|_{H_0^1(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^2 - \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H_0^1(I)}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(I)}^2 \\ &= \left(\alpha - \frac{\alpha}{2} \right) \|u\|_{H_0^1(I)}^2 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \|u\|_{L^2(I)}^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{H_0^1(I)}^2. \end{aligned}$$

φ este aplicație liniară și continuă (vezi calculul de la Problema Dirichlet omogenă).

Acum, cu Lema lui Lax-Milgram rezultă că (3) are o unică soluție slabă. $\square$

Tema Studiați următoarea problemă la limita:

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = 0 \text{ } u'(1) = g. \end{cases} \quad (5)$$

Considerati pe rand cazurile $g \neq 0$, respectiv $g = 0$.

Seminar 3

Consideram o problema la limita cu condiții la limită periodice.

Fie următoarea problemă

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1). \end{cases} \quad (6)$$

Fie $H = \{v \in H^1(I) \mid v(0) = v(1)\}$. Vrem să arătăm că H este spațiu Hilbert și prin urmare vom arăta că este subspațiu închis al spațiului Hilbert $H^1(I)$.

H subspațiu al lui $H^1(I)$.

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in H$. Arăt că $\alpha u + \beta v \in H$.

Evident $\alpha u + \beta v \in H^1(I)$ și

$$(\alpha u + \beta v)(0) = \alpha u(0) + \beta v(0) = \alpha u(1) + \beta v(1) = (\alpha u + \beta v)(1).$$

Studiem închiderea.

Fie $(v_n)_n \subset H$ astfel încât $v_n \rightarrow v$ când $n \rightarrow \infty$ în $H^1(I)$.

Arăt că $v \in H$. Evident $v \in H^1(I)$. Rămâne de arătat că $v(0) - v(1) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq |v(0) - v(1)| = |v(0) - v_n(0) + v_n(0) - v_n(1) + v_n(1) - v(1)| \\ &\leq |v(0) - v_n(0)| + |v_n(1) - v(1)| \\ &= |(v_n - v)(0)| + |(v_n - v)(1)| \\ &\leq 2 \max_{x \in [0,1]} |(v_n - v)(x)| = 2 \|v_n - v\|_{C([0,1])} \\ &\leq 2c \|v_n - v\|_{H^1(I)}, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Trecând la limită când $n \rightarrow \infty$ rezultă că

$$v(0) = v(1).$$

Deci H este spațiu Hilbert, $(H, (\cdot, \cdot)_{H^1(I)}, \|\cdot\|_{H^1(I)})$.

Fie $v \in H$,

$$-\int_0^1 u'' v dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 f v dx,$$

dar

$$-\int_0^1 u'' v dx = -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx$$

$$= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 u'v' dx,$$

și prin urmare avem

$$\int_0^1 (u'v' + uv) dx = \int_0^1 f v dx.$$

Definiția 5. Date $f \in L^2(I)$, numim soluție slabă pentru (6) o funcție $u \in H$ astfel încât

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H,$$

unde $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ sunt date de

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx.$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Temă 1) De finalizat exercițiul cu Lax-Milgram.

2) Să se studieze următoarea problemă:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ \alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = 0 \\ \alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = 0. \end{cases}$$

Saptamana a 4-a

Curs 4

Tematica acestui curs: Probleme Neumann; Probleme mixte.

- **Problema Neumann omogenă**

Fie următoarea problemă

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Introduceți noțiunea de soluție slabă și studiați existența și unicitatea acesteia. Spațiul funcțiilor test este $H^1(I)$.

Fie $v \in H^1(I)$ și avem

$$\int_0^1 (-u''v)dx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdxdx, \quad \forall v \in H^1(I), f \in L^2(I),$$

Folosind formula de integrare prin părți obținem

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdxdx,$$

și prin urmare

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 fvdxdx.$$

Definiția 1. Dat $f \in L^2(I)$, numesc soluție slabă pentru problema (1), o funcție $u \in H^1(I)$ care verifică

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 fvdxdx, \quad \forall v \in H^1(I).$$

Teorema 2. Problema (1) are o unică soluție slabă.

DEMONSTRAȚIE. Fie $a : H^1(I) \times H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ date de relațiile:

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx,$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Arătăm că a este o formă biliniară simetrică, continuă și coercivă.

a) a formă biliniară și simetrică (evident);

b) a este continuă.

Fie $u, v \in H^1(I)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx \right| \\ &\leq |(u', v')_{L^2(I)}| + |(u, v)_{L^2(I)}| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \\ &\leq 2 \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Pot lua $m_a = 2$.

Am folosit: inegalitatea triunghiului, inegalitatea Cauchy-Schwarz și relațiile:

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L^2(I)} &\leq \|u\|_{H^1(I)}, \\ \|u\|_{L^2(I)} &\leq \|u\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Ultimele două relații sunt valabile și pentru v .

c) a este coercivă.

Fie $u \in H^1(I)$. Evaluăm

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 [(u')^2 + u^2] dx = \int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 u^2 dx \\ &= \|u'\|_{L^2(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^2 = \|u\|_{H^1(I)}^2. \end{aligned}$$

Pot lua $M_a = 1$.

Acum, arătăm că φ este aplicație liniară și continuă.

d) φ este aplicație liniară, evident.

e) φ este continuă.

Fie $v \in H^1(I)$,

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &= \left| \int_0^1 f v dx \right| = |(f, v)_{L^2(I)}| \\ &\leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Am folosit pe rând inegalitatea Cauchy-Schwarz și relația

$$\|v\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{H^1(I)}.$$

Pot lua $C_p = \|f\|_{L^2(I)} > 0$.

Acum, cu Lema Lax-Milgram rezultă că problema (1) are o unică soluție slabă. $\square$

Ne propunem acum să studiem următoarea problemă

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Spațiul funcțiilor test este $H^1(I)$.

Fie $v \in H^1(I)$ și avem

$$\int_0^1 (-u''v)dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H^1(I), f \in L^2(I),$$

Folosind formula de integrare prin părți obținem

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 f v dx,$$

și prin urmare

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 f v dx.$$

Fie $a : H^1(I) \times H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ date de relațiile:

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v'dx,$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

a) a formă biliniară și simetrică (evident);

b) a este continuă.

Fie $u, v \in H^1(I)$.

$$|a(u, v)| = \left| \int_0^1 u'v'dx \right| = |(u', v')_{L^2(I)}|$$

$$\leq \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} \leq \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}.$$

Pot lua $m_a = 1$.

c) a este coercivă???

Fie $u \in H^1(I)$,

$$a(u, u) = \int_0^1 (u')^2 dx = \|u'\|_{L^2(I)}^2.$$

Constatam ca in acest caz nu putem proba coercivitatea formei a . Putem considera insa o perturbare a problemei initiale pentru a "recupera" coercivitatea.

Fie $0 < \varepsilon \ll 1$ si problema:

$$\begin{cases} -u''_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u'_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Vrem să vedem dacă u_ε mărginit.

$$\int_0^1 (-u''_\varepsilon v) dx + \varepsilon \int_0^1 u_\varepsilon v dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H^1(I), f \in L^2(I).$$

Folosind formula de integrare prin părți obținem

$$-u'_\varepsilon v|_0^1 + \int_0^1 u'_\varepsilon v' dx + \varepsilon \int_0^1 u_\varepsilon v dx = \int_0^1 f v dx,$$

și prin urmare

$$\int_0^1 (u'_\varepsilon v' + \varepsilon u_\varepsilon v) dx = \int_0^1 f v dx.$$

u_ε soluție slabă dacă verifică ecuația anterioară în $H^1(I)$, dat $f \in L^2(I)$.

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + \varepsilon uv) dx.$$

a) a este continuă.

Fie $u, v \in H^1(I)$.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 \varepsilon uv dx \right| \\ &\leq |(u', v')_{L^2(I)}| + \varepsilon |(u, v)_{L^2(I)}| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \varepsilon \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \\ &\leq 2 \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

b) a este coercivă.

Fie $u \in H^1(I)$,

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 [(u')^2 + \varepsilon u^2] dx = \int_0^1 (u')^2 dx \\ &+ \varepsilon \int_0^1 u^2 dx = \|u'\|_{L^2(I)}^2 + \varepsilon \|u\|_{L^2(I)}^2 \\ &\geq \varepsilon \left(\|u'\|_{L^2(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^2 \right) = \varepsilon \|u\|_{H^1(I)}^2. \end{aligned}$$

Cu Lema Lax-Milgram rezultă soluție slabă unică.

Pentru demonstrarea *mărginirii* avem:

$$a(u_\varepsilon, v) = \varphi(v).$$

Alegem $v = u_\varepsilon$ și rezultă

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \varphi(u_\varepsilon).$$

Cum, din coercivitatea lui a avem

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{H^1(I)}^2,$$

rezultă că

$$\varphi(u_\varepsilon) \geq \varepsilon \|u_\varepsilon\|_{H^1(I)}^2,$$

și avem

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{H^1(I)}^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon} |\varphi(u_\varepsilon)| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(I)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(I)} \|u_\varepsilon\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Presupunem că $\|u_\varepsilon\|_{H^1(I)} \neq 0$ și obținem

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(I)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(I)}.$$

Notăm că inegalitatea anterioară are loc și pentru $\|u_\varepsilon\|_{H^1(I)} = 0$.

Observație: când $\varepsilon \rightarrow 0$, u_ε nu e mărginită.

- **Problema Neumann neomogenă** Fie următoarea problemă

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta, \end{cases} \quad (4)$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Avem $f \in L^2(I)$ și spațiul funcțiilor test este $H^1(I)$.

Fie $v \in H^1(I)$,

$$-\int_0^1 u'' v dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 f v dx,$$

dar

$$\begin{aligned} -\int_0^1 u'' v dx &= -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx \\ &= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' dx = -\beta v(1) + \alpha v(0) + \int_0^1 u'v' dx, \end{aligned}$$

și prin urmare avem

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 f v dx + \beta v(1) - \alpha v(0).$$

Definiția 3. Numim soluție slabă pentru (8) o funcție $u \in H^1(I)$ astfel încât

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 f v dx + \beta v(1) - \alpha v(0),$$

$\forall v \in H^1(I)$, dat $f \in L^2(I)$.

Teorema 4. Problema (8) are o unică soluție în sens slab.

DEMONSTRAȚIE. Fie $a : H^1(I) \times H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ date de relațiile:

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv)dx,$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx + \beta v(1) - \alpha v(0).$$

a este formă biliniară, continuă, coercivă și simetrică (vezi problema Neumann omogenă).

Acum, arătăm că φ este aplicație liniară și continuă.

a) φ aplicație liniară;

Fie $u, v \in H^1(I)$, $a, b \in \mathbb{R}$. φ liniară dacă:

$$\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v).$$

Avem

$$\begin{aligned} \varphi(au + bv) &= \int_0^1 f(au + bv)dx + \beta(au + bv)(1) - \alpha(au + bv)(0) \\ &= a \int_0^1 f u dx + b \int_0^1 f v dx + a\beta u(1) + b\beta v(1) - a\alpha u(0) - b\alpha v(0) = a\varphi(u) + b\varphi(v). \end{aligned}$$

b) φ aplicație continuă;

Fie $v \in H^1(I)$,

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &= \left| \int_0^1 f v dx + \beta v(1) - \alpha v(0) \right| \\ &\leq |(f, v)_{L^2(I)}| + |\beta| |v(1)| + |\alpha| |v(0)| \\ &\leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} + |\beta| \max_{x \in [0,1]} |v(x)| + |\alpha| \max_{x \in [0,1]} |v(x)| \\ &= \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} + |\beta| \|v\|_{C([0,1])} + |\alpha| \|v\|_{C([0,1])} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(I)} + |\beta| c + |\alpha| c \right) \|v\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Am utilizat: inegalitatea triunghiului, inegalitatea Cauchy-Schwarz și relațiile:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(I)} &\leq \|v\|_{H^1(I)}, \\ \exists c > 0 \text{ a.î. } \|v\|_{C([0,1])} &\leq c \|v\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Aplicăm Lax- Milgram și rezultă că ecuația

$$a(u, v) = \varphi(v)$$

are o unică soluție $u \in H^1(I)$, $\forall v \in H^1(I)$ și demonstrația se încheie. $\square$

• Probleme mixte

Fie acum, următoarea problemă

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = 0, u'(1) = h. \end{cases} \quad (5)$$

Spațiul funcțiilor test este $V = \{v \in H^1(I) \mid v(0) = 0\}$. Avem

$$(u, v)_V = (u', v')_{L^2(I)}$$

$$\|u\|_V = \|u'\|_{L^2(I)}$$

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq C_p \|u'\|_{L^2(I)} \text{ (ineg. Poincaré)}$$

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \widetilde{C}_p \|u'\|_{L^2(I)} \text{ (vezi consecinta ineg. Poincaré).}$$

$(V, (\cdot, \cdot)_V, \|\cdot\|_V)$ este spațiu Hilbert.

Fie $v \in V$,

$$-\int_0^1 u'' v dx = \int_0^1 f v dx,$$

dar

$$\begin{aligned} -\int_0^1 u''v dx &= -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx \\ &= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' dx \\ &= -hv(1) + \int_0^1 u'v' dx, \end{aligned}$$

și prin urmare avem

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx + hv(1).$$

Definiția 5. Dat $f \in L^2(I)$, numim soluție slabă pentru (5) o funcție $u \in V$ astfel încât

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in V,$$

unde $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ sunt date de

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx + hv(1).$$

Tema De studiat următoarele probleme:

(1)

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = 0, u'(1) = h, \end{cases} \quad (6)$$

în cazurile $h \neq 0$ și $h = 0$,

(2)

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (1, 2) \\ u'(1) = g, u(2) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

în cazurile $g \neq 0$ și $g = 0$.

(3)

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u'(0) = 0, u'(1) = \beta, \end{cases} \quad (8)$$

unde $\beta \neq 0$.

Seminar 4

Consideram urmatoarea problema de tip Robin.

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u'(0) - Ku(0) = 0, u(1) = 0, K \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Spațiul funcțiilor test este $W = \{v \in H^1(I) \mid v(1) = 0\}$. Avem

$$(u, v)_W = (u', v')_{L^2(I)}$$

$$\|u\|_W = \|u'\|_{L^2(I)}$$

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq C_p \|u'\|_{L^2(I)} \text{ (ineg. Poincaré)}$$

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \widetilde{C}_p \|u'\|_{L^2(I)} \text{ (vezi consecinta ineg. Poincaré)}.$$

$(W, (\cdot, \cdot)_W, \|\cdot\|_W)$ este spațiu Hilbert.

Fie $v \in W$,

$$-\int_0^1 u'' v dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 f v dx,$$

dar

$$\begin{aligned} -\int_0^1 u'' v dx &= -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx \\ &= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' dx \\ &= Ku(0)v(0) + \int_0^1 u'v' dx, \end{aligned}$$

și prin urmare avem

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 u v dx + Ku(0)v(0) = \int_0^1 f v dx.$$

Definiția 6. Date $f \in L^2(I)$, $K \geq 0$, numim soluție slabă pentru (9) o funcție $u \in W$ astfel încât

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in W,$$

unde $a : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ sunt date de

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 u v dx + Ku(0)v(0).$$

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx.$$

Avem:

a biliniară (evident);

a continuă;

Fie $u, v \in W$,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u'\|_{L^2(I)} \cdot \|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \cdot \|v\|_{L^2(I)} + |K| |u(0)| |v(0)| \\ &\leq (1 + C_p^2) \|u\|_W \|v\|_W + |K| C^2 \tilde{C}_p^2 \|u\|_W \|v\|_W \\ &= \left(1 + C_p^2 + |K| C^2 \tilde{C}_p^2\right) \|u\|_W \|v\|_W. \end{aligned}$$

c) a coercivă;

Fie $u \in W$,

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 [(u')^2 + u^2] dx + K[u(0)]^2 \\ &\geq \int_0^1 (u')^2 dx = \|u'\|_{L^2(I)}^2 = \|u\|_W^2. \end{aligned}$$

Aplicăm Lax- Milgram și rezultă că problema (9) are o unică soluție slabă.

În continuare, stabilim o relație pe care o îndeplinește K .

$$-K[u(0)]^2 \leq |K| [u(0)]^2 \Leftrightarrow K[u(0)]^2 \geq -|K| [u(0)]^2,$$

și

$$|u(0)|^2 \leq \|u\|_{C([0,1])}^2 \leq C^2 \tilde{C}_p^2 \|u\|_W^2.$$

Rezultă

$$-|K| [u(0)]^2 \geq -|K| C^2 \tilde{C}_p^2 \|u\|_W^2.$$

Acum avem,

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \|u\|_W^2 - |K| [u(0)]^2 \\ &\geq \|u\|_W^2 - |K| C^2 \tilde{C}_p^2 \|u\|_W^2 = (1 - |K| C^2 \tilde{C}_p^2) \|u\|_W^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$1 - |K| C^2 \tilde{C}_p^2 > 0 \Leftrightarrow |K| < \frac{1}{C^2 \tilde{C}_p^2}.$$

Tema

(1) Studiați următoarea problema la limita de tip Robin:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = 0, u'(1) = \alpha u(1), \end{cases} \quad (10)$$

(2) Fie $W = \{v \in H^1(I) \mid v(1) = 0\}$, $f \in L^2(\Omega)$ și $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx$.

Justificați ca φ este aplicație liniară și continuă.

Săptămâna a 5-a

Curs 5

A rezolva probleme la limita guvernate de ecuatii cu derivate partiale poate fi considerata o problema dificila in cazul in care datele problemei nu sunt functii "cum-secade" (nu sunt functii continue de exemplu). Se impune introducerea unor spatii de functii de mai multe variabile care vor fi utile la descrierea cadrului functional in care vom invata sa rezolvam o clasa de probleme la limita scrise prin intermediul unor ecuatii cu derivate partiale. Vom omite demonstratiile si ne vom concentra pe definitii si proprietati ale spatiilor de functii.

Prezentul curs este dedicat spatiilor $W^{1,p}(\Omega)$ si $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o submultime deschisa.

Definiția 1. Fie $1 \leq p \leq \infty$ si $f \in L^p(\Omega)$. Spunem ca f este derivabila partial, in sens slab, in raport cu x_i daca exista $g_i \in L^p(\Omega)$ astfel incat

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Fie $1 \leq p \leq \infty$. Evident ca daca $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ si derivatele partiale ale lui u in sens clasic sunt functii in $L^p(\Omega)$ atunci: $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si derivatele partiale in sens slab coincid cu derivatele partiale in sens clasic. Daca Ω este multime deschisa si marginita atunci $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$.

Exemplu Fie R un numar real strict pozitiv si $\Omega = B_0(R) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < R\}$ unde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Fie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + e^{x_2}$. Functia f este derivabila partial in sens slab si in raport cu x_1 si in raport cu x_2 iar derivatele partiale in sens slab coincid cu derivatele partiale in sens clasic:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_2}.$$

Daca $f \in L^p(\Omega)$ admite derivate partiale in sens slab g_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, vom face urmatoarea notatie:

$$g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Introducem acum spațiul $W^{1,p}(\Omega)$.

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}.$$

$W^{1,p}(\Omega)$ este spațiu Banach, $\forall p, 1 \leq p \leq \infty$ inzestrat cu următoarea norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

$W^{1,p}(\Omega)$ este spațiu reflexiv pentru $1 < p < \infty$ și este separabil pentru $1 \leq p < \infty$; a se vedea [4].

Anumite proprietăți ale spațiilor Sobolev cer o anumită regularitate a frontierei lui Ω .

Definiția 2. [a se vedea, de exemplu, [17, 9]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submulțime deschisă și marginită. Spunem că frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ este *Lipschitz* dacă pentru oricare $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ există $r > 0$ și o funcție Lipschitz $g : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât, renotând axele de coordonate dacă este necesar,

$$\Omega \cap B(\mathbf{x}_0, r) = \{ \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) : x_N > g(x_1, \dots, x_{N-1}) \}.$$

Mai general, dacă notăm cu X un spațiu de funcții cu valori reale pe $\mathbb{R}^{N-1}$, spunem că frontiera este de clasă X dacă pentru oricare $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ există $r > 0$ și o funcție $g : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă X astfel încât, renotând coordonatele de axe dacă este necesar,

$$\Omega \cap B(\mathbf{x}_0, r) = \{ \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) : x_N > g(x_1, \dots, x_{N-1}) \}.$$

Putem vorbi astfel de domenii Ω cu frontiera de o anumită clasă: C^1 , Lipschitz, C^m , etc.

Admitem în cele ce urmează că $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este mulțime deschisă și marginită cu frontiera C^1 .

$$|||u||| = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N} + \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

este echivalentă cu norma $W^{1,p}(\Omega)$ în următoarele cazuri:

- $1 \leq q \leq p^*$ dacă $1 \leq p < N$ ($p^* = \frac{Np}{N-p}$)
- $1 \leq q < \infty$ dacă $p = N$;
- $1 \leq q \leq \infty$ dacă $p > N$.

Notăm că norma $W^{1,p}(\Omega)$ este echivalentă cu norma

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N} + \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

dacă $p \geq N \geq 1$.

Facem observația că $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ desemnează gradientul în sens slab.

Notăm de asemenea că dacă $1 \leq p < \infty$, norma $W^{1,p}(\Omega)$ este echivalentă cu norma

$$\left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 3. [4] Fie $1 \leq p \leq \infty$.

- dacă $1 \leq p < N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, unde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
- dacă $p = N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty)$,
- dacă $p > N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

și toate aceste injecții sunt continue.

Teorema 4. [Rellich- Kondrachov, [4]] Presupunem că Ω este multime deschisă marginată cu frontieră C^1 .

- dacă $p < N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$ unde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
- dacă $p = N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty)$,
- dacă $p > N$, atunci $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$,

cu injecții compacte.

Notăm că dacă Ω este multime deschisă marginată cu frontieră netedă atunci

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad \forall p \in [1, \infty].$$

Observăm că dacă $1 \leq p < N$, putem lua $q = p$ căci $p \in [1, p^*)$ unde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

Observăm că

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

implică

$$\frac{1}{p^*} < \frac{1}{p}$$

echivalent cu

$$p < p^*.$$

Definiția 5. Dacă $1 \leq p < N$, numim p^* conjugatul Sobolev al lui p ,

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Notam ca $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ si $p^* > p$. Subliniem ca $p^* \neq p'$ unde p' este definit astfel $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ si se numeste exponentul conjugat al lui p .

Conjugatul Sobolev este implicat in urmatoarea estimare a functiilor din $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 6. [7] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o submultime deschisa si marginita cu frontiera C^1 . Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Daca $1 \leq p < N$ atunci $u \in L^{p^*}(\Omega)$ si

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad C = C(p, N, \Omega) > 0.$$

Teorema 7. [Teorema de urma, [15]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$. Fie $1 \leq p < \infty$.

Atunci exista un unic operator liniar si continuu $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ astfel incat:

- (1) $\gamma u = u|_{\Gamma}$ daca $u \in C^1(\bar{\Omega})$.
- (2) $\|\gamma u\|_{\mathbb{L}^p(\Gamma)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ unde $c = c(p, \Omega) > 0$.
- (3) daca $1 < p < \infty$, atunci $\gamma(W^{1,p}(\Omega)) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.
- (4) daca $1 < p < N$ atunci $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ este compact pentru orice r astfel incat $1 \leq r < \frac{Np-p}{N-p}$.
- (5) daca $p \geq N$ atunci $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$.

Definiția 8. γu se numeste urma lui u pe Γ iar $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ se numeste operator urmă.

Amintim ca un operator continuu $A : X \rightarrow Y$ (X, Y spatii Banach), este compact daca pentru orice sir marginit $(u_n)_n \subset X$, $(Au_n)_n \subset Y$ contine un subsir tare convergent; a se vedea de exemplu [15].

Fie $1 \leq p < \infty$. Introducem in cele ce urmeaza spatiul $W_0^{1,p}(\Omega)$ ca fiind inchiderea spatiului $C_c^1(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$, adica

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

Spatiu $W_0^{1,p}(\Omega)$ inzestrat cu norma indusa de $W^{1,p}(\Omega)$ este un spatiu Banach separabil; daca $1 < p < \infty$, spatiul $W_0^{1,p}(\Omega)$ este spatiu Banach reflexiv; a se vedea [4].

Urmatoarea teorema ne da o caracterizare foarte utila a spatiului $W_0^{1,p}(\Omega)$ prin intermediul operatorului de urma γ .

Teorema 9. [a se vedea de exemplu [7, 15]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera neteda (de exemplu Lipschitz sau C^1). Fie $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Atunci

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff \gamma u = 0 \text{ in } L^p(\Gamma).$$

Pe spatiul $W_0^{1,p}(\Omega)$ avem urmatorul rezultat foarte util in estimarile ce vor fi efectuate in cadrul rezolvarii unor probleme la limita.

Teorema 10. [Inegalitatea Poincaré, [7]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ submultime deschisa si mărginita. Atunci există $C_P = C_P(\Omega) > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

pentru oricare $q \in [1, p^*]$ (p^* fiind conjugatul Sobolev al lui p , vezi definitia 5)

Cum $p^* > p$, teorema anterioara este valabila pentru $q = p \geq 1$. Punctam acest rezultat in cele ce urmeaza caci se aplica foarte des.

Corolar 11. [Inegalitatea Poincaré, [4]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ submultime deschisa si mărginita. Atunci există $C_P = C_P(\Omega) > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Norma $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}$ este o norma pe $W_0^{1,p}(\Omega)$ echivalenta cu norma pe $W^{1,p}(\Omega)$.

In baza inegalitatii lui Poincaré se arata ca

$$(W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})$$

este un spatiu Banach.

Dualul lui $W_0^{1,p}(\Omega)$, ($1 \leq p < \infty$), se notează cu $W^{-1,p'}(\Omega)$ unde p' este exponentul conjugat al lui p .

Daca $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este marginit si $\frac{2N}{N+2} \leq p < \infty$ atunci

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega),$$

a se vedea de exemplu [4].

Fie m un numar natural astfel incat $m \geq 2$ si p un numar real astfel incat $1 \leq p \leq \infty$. Se defineste prin recurenta

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}.$$

Spatiul $W^{m,p}(\Omega)$ este un spatiu Banach inzestrat cu norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

unde:

- α este un multi-indice, adică un sir finit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ cu $\alpha_i \geq 0$
- $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$
- $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} u$

Exemplu Fie $N = 2$ si $\alpha = (1, 1)$. Atunci

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \varphi$$

Fie $N = 3$ si $\alpha = (2, 1, 1)$. Atunci

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} \varphi.$$

TEMA Fie $u \in W^{1,3}(\Omega)$, Ω submultime deschisa si mărginita in $\mathbb{R}^5$. Justificati ca

$$\|\nabla u\| \nabla u \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega).$$

Seminar 5

Exercițiul 12. Fie $u \in W^{1,7}(\Omega)$, Ω deschis, mărginit în $\mathbb{R}^3$. Justificați că $\|\nabla u\|^5 \nabla u \in L^{\frac{7}{6}}(\Omega)$.

Rezolvare

$$\|\|\nabla u\|^5 \nabla u\| \|^{\frac{7}{6}} = (\|\nabla u\|^6)^{\frac{7}{6}} = \|\nabla u\|^7.$$

Cum $u \in W^{1,7}(\Omega)$ rezulta că $\nabla u \in L^7(\Omega)$ deci

$$\int_{\Omega} \|\|\nabla u\|^5 \nabla u\| \|^{\frac{7}{6}} dx = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^7 dx < \infty.$$

Notatia $\|\cdot\|$ este norma euclidiană în $\mathbb{R}^3$.

Exercițiul 13. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N \geq 2$), un deschis mărginit și $1 \leq p < q \leq \infty$. Justificați că

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Rezolvare

Amintim că dacă $1 \leq p < \infty$, ($p \in \mathbb{R}$),

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{măsurabilă și } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\},$$

și

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{măsurabilă și } \exists c > 0 \text{ astfel încât } |u(x)| \leq c \text{ a.p.t. } x \in \Omega\}.$$

Amintim de asemenea *Inegalitatea lui Hölder*: Fie $1 \leq p \leq \infty$ și notăm cu p' exponentul conjugat al lui p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Fie $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$. Atunci

$$f \cdot g \in L^1(\Omega),$$

și

$$\int_{\Omega} |f g| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Fie $f \in L^q(\Omega)$. Demonstrăm în continuare că

$$I = \int_{\Omega} 1 \cdot |f(x)|^p dx < \infty.$$

Cum $p < q$, observăm că

$$\frac{q}{p} > 1$$

.

Deoarece

$$|f|^p = |f|^{q \cdot \frac{p}{q}},$$

rezultă că

$$|f|^p \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega)$$

.

Calculăm în continuare exponentul conjugat al lui $\frac{q}{p}$.

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Prin urmare, exponentul conjugat al lui $\frac{q}{p}$ este

$$r = \frac{q}{q-p}.$$

Fie $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = 1$.

$$\int_{\Omega} h dx = |\Omega| < \infty$$

(Ω mărginit). Deci,

$$h \in L^{\frac{q}{q-p}}(\Omega)$$

.

Fie $g = |f|^p$. Cum $g \in L^{\frac{q}{q-p}}(\Omega)$, utilizând Inegalitatea lui Hölder,

$$I \leq \|h\|_{L^{\frac{q}{q-p}}(\Omega)} \|g\|_{L^{\frac{q}{p}}(\Omega)} = |\Omega| \cdot c < \infty.$$

Deci,

$$f \in L^p(\Omega).$$

Exercițiul 14. (Inegalitatea de interpolare) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschis. Fie $1 < p < r < \infty$. Dacă $u \in L^p(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ atunci $u \in L^q(\Omega)$ pentru $p < q < r$ și are loc inegalitatea:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)}^{1-\alpha} \\ \frac{1}{q} &= \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{r}, \alpha \in (0, 1). \end{aligned}$$

Rezolvare

$$u \in L^p(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty.$$

$$|u|^{\alpha q} \in L^{\frac{p}{\alpha q}}(\Omega).$$

$$|u|^{(1-\alpha)q} \in L^{\frac{r}{(1-\alpha)q}}(\Omega).$$

$$\frac{\alpha q}{p} + \frac{(1-\alpha)q}{r} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{p}{\alpha q}} + \frac{1}{\frac{r}{(1-\alpha)q}} = 1.$$

$$|u|^{\alpha q} \cdot |u|^{(1-\alpha)q} \in L^1(\Omega)$$

$$|u|^q \in L^1(\Omega)$$

$$u \in L^q(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} |u|^q dx = \int_{\Omega} |u|^{\alpha q} \cdot |u|^{(1-\alpha)q} dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{\Omega} [|u(x)|^{\alpha q}]^{\frac{p}{\alpha q}} dx \right)^{\frac{\alpha q}{p}} \left(\int_{\Omega} [|u(x)|^{(1-\alpha)q}]^{\frac{r}{(1-\alpha)q}} dx \right)^{\frac{(1-\alpha)q}{r}}.$$

Rezultă

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha q} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)}^{(1-\alpha)q}.$$

Exercițiul 15. Demonstrați ca există $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\zeta \in L^\infty(\Omega), \quad \zeta^{-1} \in L^2(\Omega), \quad \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \zeta^2(\mathbf{x}) = 0, \quad \zeta(\mathbf{x}) > 0 \text{ a.e. in } \Omega.$$

Rezolvare

Putem considera următoarea funcție.

$$\zeta : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{for } x_1 > \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{1}{2} - x_1\right)^{1/4} & \text{for } x_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

TEMA Fie $f \in C(\overline{\Omega})$ și $g \in L^2(\Omega)$. Justificați ca $f g \in L^1(\Omega)$.

Săptămâna a 6-a

Curs 6

Prezentul curs este dedicat spațiilor $H^1(\Omega)$ și $H_0^1(\Omega)$.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o submultime deschisă. Am discutat cursul trecut despre spațiile $W^{1,p}(\Omega)$ și $W_0^{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Atragem în acest curs atenția asupra cazului particular $p = 2$.

Fie $f \in L^2(\Omega)$. Amintim că f este derivabilă parțial, în sens slab, în raport cu x_i dacă există $g_i \in L^2(\Omega)$ astfel încât

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Funcțiile g_i se numesc derivate parțiale în sens slab ale lui f și pentru a simplifica scrierea se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Spațiile $W^{1,p}(\Omega)$ și $W_0^{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) au în literatura de specialitate o notatie particulară pentru cazul $p = 2$.

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}.$$

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}}.$$

Teorema 1. *Admitem că Ω este un domeniu marginit cu frontiera Lipschitz. Dacă $k \in \mathbb{N}^*$ și $1 \leq p < \infty$ atunci: pentru oricare $v \in W^{k,p}(\Omega)$ există un sir $(v_n)_n \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ astfel încât*

$$\|v_n - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ ca } n \rightarrow \infty;$$

a se vedea de exemplu [9], pagina 32. Rezultatul anterior este un rezultat de aproximare a funcțiilor Sobolev prin funcții netede. Acest rezultat poate fi privit și ca un rezultat de densitate și putem scrie:

$$W^{k,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})} \quad k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq p < \infty.$$

De asemenea, avem următorul rezultat.

Teorema 2. Pentru oricare $v \in W_0^{k,p}(\Omega)$ exista $(v_n)_n \subset C_c^\infty(\Omega)$ astfel incat

$$\|v_n - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

a se vedea de exemplu [9] pagina 32. Acest rezultat de densitate poate fi rescris astfel:

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)} \quad k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq p < \infty. \quad (1)$$

Daca $p = 2$,

$$H^1(\Omega) = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}, \quad (2)$$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}. \quad (3)$$

În cazul $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ este spațiu Hilbert inzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Putem rescrie definitia produsului scalar anterior astfel:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N}.$$

Norma indusa de acest produs scalar este:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2}.$$

Anuntasem cursul trecut teorema de urma a lui Sobolev.

Teorema 3. [Teorema de urma, [15]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$. Fie $1 \leq p < \infty$.

Atunci exista un unic operator liniar si continuu $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ astfel incat:

- (1) $\gamma u = u|_\Gamma$ daca $u \in C^1(\bar{\Omega})$.
- (2) $\|\gamma u\|_{\mathbb{L}^p(\Gamma)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ unde $c = c(p, \Omega) > 0$.
- (3) daca $1 < p < \infty$, atunci $\gamma(W^{1,p}(\Omega)) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.
- (4) daca $1 < p < N$ atunci $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ este compact pentru orice r astfel incat $1 \leq r < \frac{Np-p}{N-p}$.
- (5) daca $p \geq N$ atunci $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$.

Amintim ca $\gamma u \in \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ se numeste urma lui u pe Γ iar $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ se numeste operator urmă.

Sa atragem acum atentia asupra cazului $p = 2$:

Teorema 4. [Teorema de urma, [15]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$.

Atunci exista un unic operator liniar si continuu $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ astfel incat:

- (1) $\gamma u = u|_{\Gamma}$ daca $u \in C^1(\bar{\Omega})$.
- (2) $\|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_{tr}\|u\|_{H^1(\Omega)}$ unde $c_{tr} = c_{tr}(\Omega) > 0$.
- (3) $\gamma(H^1(\Omega)) = W^{1/2,2}(\Gamma)$.
- (4) daca $N > 2$ atunci $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ este compact pentru orice r astfel incat $1 \leq r < \frac{2N-2}{N-2}$.
- (5) daca $N \leq 2$ atunci $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$.

$\gamma u \in L^2(\Gamma)$ se numeste urma lui u pe Γ iar $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ se numeste operator urmă.

Operatorul urma nu este nici injectiv, nici surjectiv.

Notam ca $W^{1/2,2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)$ si ca există $Z : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, operator numit inversul la dreapta al lui γ .

$$(Z\gamma)(u) = u \quad \forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

.

Amintim prima formula a lui Green pentru functii netede. Pentru oricare $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Demonstram in cele ce urmeaza o formula de tip Green pentru functii $v \in H^1(\Omega)$.

Teorema 5. Fie Ω deschis marginit cu frontiera Lipschitz si u o functie suficient de neteda. Atunci

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $v \in H^1(\Omega)$. In acord cu (2), există $(v_n)_n \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ astfel încât $v_n \rightarrow v$ când $n \rightarrow \infty$ în $H^1(\Omega)$. Aplicam acum formula lui Green pentru functii netede.

$$\int_{\Omega} \Delta u v_n dx = \int_{\partial\Omega} v_n \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v_n dx, \quad \forall n \geq 1.$$

Putem scrie prin urmare:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u (v_n - v) dx + \int_{\Omega} \Delta u v dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} (v_n - \gamma v) d\Gamma \\ &+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma v d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v_n - \nabla v) dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Facem o estimare a primului termen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\Omega} \Delta u (v_n - v) dx \right| = \left| (\Delta u, v_n - v)_{L^2(\Omega)} \right| \\ &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

și rezultă,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Delta u (v_n - v) dx = 0.$$

În continuare, facem o estimare a termenului $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} (\gamma v_n - \gamma v) d\Gamma$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} (\gamma v_n - \gamma v) d\Gamma \right| = \left| \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \gamma (v_n - v) \right)_{L^2(\partial\Omega)} \right| \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \cdot \|\gamma (v_n - v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} c_{tr} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

și rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} (\gamma v_n - \gamma v) d\Gamma = 0.$$

Asemanator, putem arata ca:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v_n - \nabla v) dx = 0.$$

Trecem la $\lim_{n \rightarrow \infty}$ în (4) și obținem formula lui Green pe spații Sobolev. $\square$

Remarca 6. [a se vedea de exemplu [10]] Dispunand de urma unei funcții din $H^1(\Omega)$ pe Γ putem scrie *formula de integrare prin parti* pentru funcții din $H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\Gamma} \gamma u \gamma v \nu_i d\Gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

unde ν_i ($i \in \{1, 2, \dots, N\}$) sunt componentele lui $\boldsymbol{\nu}$, versorul normalei exterioare la frontiera Γ .

Remarca 7. Pentru a simplifica scrierea, uneori vom omite scrierea operatorului urma atunci când scriem termeni integrali pe frontiera, de exemplu, putem scrie

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\Gamma} u v \nu_i d\Gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Anuntasem cursul trecut Inegalitatea lui Poincaré pe $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 8. [Inegalitatea Poincaré, [7]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ submultime deschisa si mărginita. Atunci există $C_P = C_P(\Omega) > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

pentru oricare $q \in [1, p^*]$ (p^* fiind conjugatul Sobolev al lui p , vezi definitia 5)

precum si corolarul

Corolar 9. [Inegalitatea Poincaré, [4]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ submultime deschisa si mărginita. Atunci există $C_P = C_P(\Omega) > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Norma $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}$ este o norma pe $W_0^{1,p}(\Omega)$ echivalenta cu norma pe $W^{1,p}(\Omega)$.

Punand $p = 2$, pe spatiul $H_0^1(\Omega)$ avem urmatorul rezultat.

Teorema 10. [Inegalitatea Poincaré] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ submultime deschisa si mărginita. Atunci există $C_P = C_P(\Omega) > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Remarca 11. Există $\widetilde{C}_p > 0$ astfel încât

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \widetilde{C}_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Pe spatiul $H_0^1(\Omega)$ putem considera urmatorul produs scalar.

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N}$$

si norma asociata,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Cu ajutorul Inegalitatii lui Poincaré se poate demonstra ca $H_0^1(\Omega)$ este spatiu Hilbert in raport cu structura particulara precizata anterior.

$$(H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}, \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}).$$

Dualul lui $H_0^1(\Omega)$ se notează cu $H^{-1}(\Omega)$. Avem

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

cu injectii continue si dense, a se vedea de exemplu [4].

Dualul lui $H^{1/2}(\Gamma)$ se noteaza cu $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Dacă Ω este un domeniu (deschis, conex) marginit cu frontiera Lipschitz și $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$ atunci

$$H^1(\Omega) \subset H^\delta(\Omega) \subset H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

cu injectii (scufundari) compacte și dense, a se vedea de exemplu [15], paginile 33-34.

Remarca 12. $\gamma(H^1(\Omega))$ este densă în $L^2(\Gamma)$, a se vedea de exemplu [10].

Prin "injectie" intelegem aplicatia identica. O injectie $X \subset Y$ (X, Y spatii normate) este compacta daca orice submultime marginita a lui X este relativ compacta in Y (sau, cu siruri, din orice sir marginit in X putem extrage un subsir convergent in Y).

Spatiul $H_0^1(\Omega)$ inzestrat cu norma indusa de $H^1(\Omega)$ este un spatiu Banach separabil; spatiul $H_0^1(\Omega)$ este spatiu Banach reflexiv; a se vedea [4].

Punctam in continuare caracterizarea spatiului $H_0^1(\Omega)$ prin intermediul operatorului de urma γ .

Teorema 13. [a se vedea de exemplu [7, 15]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera neteda (de exemplu Lipschitz sau C^1). Fie $u \in H^1(\Omega)$. Atunci

$$u \in H_0^1(\Omega) \iff \gamma u = 0 \text{ in } L^2(\Gamma).$$

Remarca 14. $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma = \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma u = 0\}$.

Definiția 15. [a se vedea [10]] Constanta

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \text{daca } N \geq 3; \\ \infty & \text{daca } N \in \{1, 2\} \end{cases}$$

se numeste *exponent Sobolev critic*.

Pe spatiul $H^1(\Omega)$ avem urmatoarea versiune de Teorema Rellich-Kondrachov.

Teorema 16. [a se vedea [10]] Daca Ω domeniu marginit si $q \in [1, 2^*)$ atunci

- $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ cu injectie compacta;
- $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ cu injectie compacta daca, in plus, frontiera Γ este de clasa C^1 .

Remarca 17. $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 dx}$ unde $\|\nabla u(\cdot)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(\cdot)\right)^2}$.

TEMA Fie $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $v_n \in C^\infty(\overline{\Omega}) \ \forall n \in \mathbb{N}$, si $v \in H^1(\Omega)$, $v_n \rightarrow v$ in $H^1(\Omega)$.
Justificati ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v_n - \nabla v) \, dx = 0.$$

Seminar 6

Exercițiul 18. Fie $N=2$. Dati exemplu de o funcție $u \in H^1(\Omega) \setminus C(\overline{\Omega})$.

Rezolvare

Fie

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{2}\}$$

și $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(\mathbf{x}) = |\ln \|\mathbf{x}\||^{1/3}.$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Utilizând coordonate polare,

$$x_1 = r \cos t$$

$$x_2 = r \sin t,$$

$r \in (0, 1/2)$, $t \in [0, 2\pi)$, prin calcul direct obținem:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = 2\pi \int_0^{1/2} |\ln r|^{2/3} r dr + \frac{2\pi}{9} \int_0^{1/2} \frac{1}{r} |\ln r|^{-4/3} dr < \infty.$$

Pentru un exemplu mai general, a se vedea [10].

- Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domeniu marginit, $\mathcal{M}$ mulțimea funcțiilor măsurabile definite pe Ω cu valori reale și fie $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

Definiția 19. Operatorul $N_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $N_f(u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ se numește *operator Nemîțkii* atasat funcției f .

Teorema 20. [a se vedea de exemplu [10]] Fie $r_1, r_2 \in [1, \infty)$. Dacă funcția continuă $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface condiția de creștere

$$|f(\mathbf{x}, s)| \leq C|s|^{r_1/r_2} + b(\mathbf{x}) \quad \text{a.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

unde $C \geq 0$ și $b \in L^{r_2}(\Omega)$ atunci operatorul $N_f : L^{r_1}(\Omega) \rightarrow L^{r_2}(\Omega)$ este corect definit, marginit și continuu.

Exercițiul 21. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domeniu marginit, fie $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcție continuă astfel încât

$$|f(\mathbf{x}, s)| \leq C|s| \quad \text{a.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

$u, v \in L^2(\Omega)$. Justificați că funcția

$$f(\cdot, u(\cdot))v(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ este o funcție în } L^1(\Omega).$$

• **Rezolvare**

Utilizam Teorema 20 cu $r_1 = r_2 = 2$, $b \equiv 0$ si deducem ca $N_f(u) \in L^2(\Omega)$. Notam ca $f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))v(\mathbf{x}) = (N_f(u)v)(\mathbf{x})$. Pe de alta parte, datorita Inegalitatii lui Hölder, $N_f(u)v \in L^1(\Omega)$.

Asadar, $f(\cdot, u(\cdot))v(\cdot) \in L^1(\Omega)$.

Exercițiul 22. [a se vedea de exemplu [2]] Fie

$$\zeta : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{for } x_1 > \frac{1}{2}, \\ (\frac{1}{2} - x_1)^{1/4} & \text{for } x_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(\zeta \in L^\infty(\Omega), \quad \zeta^{-1} \in L^2(\Omega), \quad \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \zeta^2(\mathbf{x}) = 0, \quad \zeta(\mathbf{x}) > 0 \text{ a.e. in } \Omega.)$$

Consideram un spatiu Sobolev cu pondere dupa cum urmeaza

$$H_\zeta^1(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v \in L^2(\Omega), \quad \zeta \nabla v \in L^2(\Omega)^2\}.$$

Acesta este un spatiu Hilbert, a se vedea de exemplu [13], inzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H_\zeta^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\zeta \nabla u, \zeta \nabla v)_{L^2(\Omega)^2}$$

si norma indusa

$$\|v\|_{H_\zeta^1(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\zeta \nabla v\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

Justificati ca daca $v \in H_\zeta^1(\Omega)$, atunci $v \in W^{1,1}(\Omega)$. In plus, exista $c_E = c_E(\Omega, \zeta) > 0$ astfel incat

$$\|v\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq c_E \|v\|_{H_\zeta^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_\zeta^1(\Omega). \quad (6)$$

• **Rezolvare**

Fie $v \in H_\zeta^1(\Omega)$. Atunci $v \in L^1(\Omega)$ si, in plus, cum $\zeta \nabla v \in L^2(\Omega)^2$ si $\zeta^{-1} \in L^2(\Omega)$ deducem ca $\nabla v \in L^1(\Omega)^2$. Prin urmare, $v \in W^{1,1}(\Omega)$. In plus, pentru oricare $v \in H_\zeta^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{1,1}(\Omega)} &= \|v\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 \|v, i\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{\text{meas}(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2} \|\zeta^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\zeta \nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \end{aligned}$$

unde $\text{meas}(\Omega)$ este masura Lebesgue a domeniului Ω .

Pentru a obtine (6), putem lua $c_E = \sqrt{2} \max\{\sqrt{\text{meas}(\Omega)}, \sqrt{2} \|\zeta^{-1}\|_{L^2(\Omega)}\}$.

- **TEMA** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domeniu marginit, fie $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcție continuă astfel încât

$$|f(\mathbf{x}, s)| \leq C|s|^2 \quad \text{a.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

$u \in L^4(\Omega), v \in L^2(\Omega)$. Justificați că funcția

$$f(\cdot, u(\cdot))v(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ este o funcție în } L^1(\Omega).$$

Săptămâna a 7-a

Curs 7

Prezentul curs este inca dedicat unor spatii de functii Sobolev, functii reale, de mai multe variabile.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o submultime deschisa.

Am discutat in Cursul 5 despre spatiile $W^{1,p}(\Omega)$. Consideram acum un subspatiu inchis al lui $W^{1,p}(\Omega)$, dupa cum urmeaza:

•

$$V = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\},$$

unde γ este operatorul urma Sobolev si $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$ este o parte a frontierei de masura strict pozitiva. Acest subspatiu este un spatiu Banach inzestrat cu norma $W^{1,p}(\Omega)$.

Amintim ca $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$ este operator linear si continuu. Mai mult, este compact. Fiind compact si linear, operatorul urma este complet continuu. Astfel, daca

$$(u_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega) \text{ astfel incat } u_n \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(\Omega),$$

atunci

$$\gamma u_n \rightarrow \gamma v \text{ in } L^p(\Gamma) \text{ cand } n \rightarrow \infty.$$

Notam ca daca $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, si $p \geq 2$, atunci

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^s(\Gamma) \text{ este compact } \forall s \geq 1,$$

in acord cu Teorema de urma din cursul 5. Mai mult, pentru oricare $s \geq 1$, exista $c_0 > 0$ astfel incat

$$\|\gamma v\|_{L^s(\Gamma)} \leq c_0 \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \quad (1)$$

Dualul lui V se va nota V' .

In afara de norma uzuala pe $W^{1,p}(\Omega)$, pe V putem considera urmatoarea norma particulara:

$$\|u\|_V = \left(\int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^p dx \right)^{1/p}.$$

Are loc urmatorul rezultat de tip Poincaré.

Propoziția 1. *[a se vedea de exemplu [14]] Fie $p \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, domeniu marginit cu frontiera netedă. Atunci există $c > 0$ astfel încât*

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \|v\|_V \quad \text{for all } v \in V. \quad (2)$$

DEMONSTRAȚIE. Demonstratia se bazează pe tehnici ce pot fi găsite în [16]. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există un sir $(w_m)_m \subset V$ astfel încât

$$\frac{1}{m} \|w_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} > \|w_m\|_V \quad \forall m \geq 1.$$

Considerăm sirul $(v_m)_m \subset V$ definit astfel

$$v_m = \frac{w_m}{\|w_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}} \quad \forall m \geq 1.$$

Observăm că

$$\|v_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 1 \quad \forall m \geq 1, \quad (3)$$

$$\|v_m\|_V < \frac{1}{m} \quad \forall m \geq 1. \quad (4)$$

Utilizând (3) și teorema Rellich-Kondrachov putem scrie

$$v_m \rightarrow v \quad \text{în } L^p(\Omega),$$

trecând eventual la un subsir dar păstrând notația pentru a nu complica scrierea.

Utilizând acum (4), obținem

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \rightarrow 0 \quad \text{în } L^p(\Omega) \quad \text{când } m \rightarrow \infty, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Deducem că $(v_m)_m$ este sir Cauchy în $W^{1,p}(\Omega)$.

În plus, $v_m \rightarrow v$ în V , cu $\nabla v(\mathbf{x}) = 0$ a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$.

Deoarece $\gamma v = 0$ a.p.t. pe Γ_1 deducem că $v = 0_V = 0_{W^{1,p}(\Omega)}$. În același timp, trecând la limită în (3),

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

S-a ajuns la o contradicție. Deci (2) se verifică. □

În continuare vom studia proprietățile unei funcționale definite prin intermediul normei pe V .

Lema 2. [a se vedea de exemplu [14]] Fie $2 \leq p < \infty$ și fie $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcționala $\Phi(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|^p dx$.

i) Funcționala Φ este strict convexă și coercivă ($\lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty$).

ii) Funcționala Φ este diferentiabilă Gâteaux. Gradientul Gâteaux notat cu $\nabla\Phi(u)$, verifică următoarea relație.

$$(\nabla\Phi(u), v)_{V', V} = \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \forall u, v \in V; \quad (5)$$

în plus,

$$\Phi(v) - \Phi(u) \geq (\nabla\Phi(u), v - u)_{V', V} \quad \forall u, v \in V. \quad (6)$$

iii) Funcționala Φ este slab inferior semicontinua pe V .

DEMONSTRAȚIE. i) Deoarece Φ este compunere între o funcție strict crescătoare și strict convexă cu o funcție convexă deducem că Φ este funcțională strict convexă. Pe de altă parte, observăm că

$$\Phi(u) = \|u\|_V^p \quad \forall u \in V$$

și de aici deducem imediat coercivitatea funcționalei Φ .

ii) Aratăm acum că Φ este diferentiabilă Gâteaux în u . Pentru oricare $u, v \in V$ și $t \neq 0$ avem

$$\frac{\Phi(u + tv) - \Phi(u)}{t} = \int_{\Omega} \frac{\|\nabla(u(\mathbf{x}) + tv(\mathbf{x}))\|^p - \|\nabla u(\mathbf{x})\|^p}{pt} dx.$$

Notăm de asemenea că dacă $t \rightarrow 0$, are loc următoarea convergență a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\frac{\|\nabla(u(\mathbf{x}) + tv(\mathbf{x}))\|^p - \|\nabla u(\mathbf{x})\|^p}{pt} \rightarrow \|\nabla u(\mathbf{x})\|^{p-2} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}).$$

De asemenea, pentru oricare $u, v \in V$ și $t \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\|\nabla(u(\mathbf{x}) + tv(\mathbf{x}))\|^p - \|\nabla u(\mathbf{x})\|^p}{pt} \right| &= \|\nabla u(\mathbf{x}) + \tilde{t} \nabla v(\mathbf{x})\|^{p-2} |(\nabla u(\mathbf{x}) + \tilde{t} \nabla v(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x})| \\ &\leq (\|\nabla u(\mathbf{x})\| + \tilde{t} \|\nabla v(\mathbf{x})\|)^{p-1} \|\nabla v(\mathbf{x})\| \leq (\|\nabla u(\mathbf{x})\| + \|\nabla v(\mathbf{x})\|)^{p-1} \|\nabla v(\mathbf{x})\|, \end{aligned}$$

unde $\tilde{t} \in (0, t)$. Deoarece $(\|\nabla u\| + \|\nabla v\|)^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ și $\|\nabla v\| \in L^p(\Omega)$, atunci $(\|\nabla u\| + \|\nabla v\|)^{p-1} \|\nabla v\| \in L^1(\Omega)$.

Utilizand teorema convergentei dominate a lui Lebesgue deducem ca Φ este o functionala diferentiabila Gâteaux, gradientul Gâteaux $\nabla\Phi(u) \in V'$ verificand(5).

Utilizand acum teorema de caracterizare a convexitatii pentru functionalele diferentiabile Gâteaux putem scrie (6).

iii) Functionala Φ este slab inferior semicontinua pe V . Intr-adevar, daca $u_n \rightharpoonup u$ in V cand $n \rightarrow \infty$, alegand $v = u_n$ in (6) obtinem

$$\Phi(u_n) - \Phi(u) \geq (\nabla\Phi(u), u_n - u)_{V',V}$$

si de aici,

$$\Phi(u) + (\nabla\Phi(u), u_n - u)_{V',V} \leq \Phi(u_n).$$

Trecand la limita inferioara cand $n \rightarrow \infty$ in inegalitatea anterioara obtinem

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n),$$

si de aici rezulta iii). □

Fie in cele ce urmeaza $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) un domeniu marginit cu frontiera neteda si $p = 2$. Consideram urmatorul subspatiu inchis al lui $H^1(\Omega)$.

•

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

Fie Z inversul la dreapta al lui γ . Notam ca

$$\gamma(Z(\gamma u)) = \gamma u \quad \forall u \in V.$$

Fiind un subspatiu inchis al lui $H^1(\Omega)$, spatiul V este un spatiu Hilbert in raport cu structura mostenita de pe $H^1(\Omega)$. Dar V poate fi inzestrat cu urmatorul produs scalar.

$$(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

si norma indusa

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Pe V functioneaza urmatoarea Inegalitate de tip Poincaré:

Teorema 3. *[Inegalitatea Poincaré] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ submultime deschisa si mărginita. Atunci există $C_P = C_P(\Omega) > 0$ astfel încât*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}, \quad \forall u \in V.$$

Pentru demonstratie facem trimitere de exemplu la [16].

Utilizand acest rezultat deducem ca $(V, (\cdot, \cdot)_V, \|\cdot\|_V)$ este spațiu Hilbert. Consideram acum urmatorul spatiu de functii

•

$$V_0 = \{v \in [H_0^1(\Omega)]^N \mid \operatorname{div} v = 0\}.$$

V_0 este un subspatiu inchis al spatiului Hilbert $[H_0^1(\Omega)]^N$, a se vedea de exemplu [10], pag. 57. Prin urmare este spatiu Hilbert in raport cu structura mostenita de la spatiul $[H_0^1(\Omega)]^N$,

$$(u, v)_{[H_0^1(\Omega)]^N} = \sum_{i=1}^N (\nabla u_i, \nabla v_i)_{L^2(\Omega)^N}$$

$$\|u\|_{[H_0^1(\Omega)]^N} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)^N}^2}.$$

TEMA. Justificati ca V este un subspațiu închis al lui $H^1(\Omega)$.

Seminar 7

Exercițiul 4. Fie $N \geq 2$ și $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu marginit cu frontiera Lipschitz Γ . Indicați un exemplu de funcție $\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ce verifică proprietățile

$$\begin{aligned} \zeta \in L^4(\Omega), \quad \zeta^{-1} \in L^4(\Omega), \quad \zeta(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ a.e. on } \Omega, \\ \inf_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \zeta^2(\mathbf{x}) = 0, \quad \sup_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \zeta^2(\mathbf{x}) = \infty. \end{aligned}$$

Rezolvare

Fie $\zeta : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\zeta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{for } x_1 \leq 0, \\ \left(\frac{1-x_1}{x_2}\right)^{1/4} & \text{for } x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \\ (1-x_1)^{1/4} & \text{for } x_1 > 0, \quad x_2 \leq 0. \end{cases}$$

A se vedea de exemplu [3].

- Fie ζ o funcție cu proprietățile

$$\zeta \in L^4(\Omega), \quad \zeta^{-1} \in L^4(\Omega), \quad \zeta(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ a.e. on } \Omega, \quad (7)$$

$$\inf_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \zeta^2(\mathbf{x}) = 0, \quad \sup_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \zeta^2(\mathbf{x}) = \infty. \quad (8)$$

Considerăm următorul spațiu de funcții

$$H_\zeta^1(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v \in L^2(\Omega), \quad \zeta \nabla v \in L^2(\Omega)^2\},$$

înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v)_{H_\zeta^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\zeta \nabla u, \zeta \nabla v)_{L^2(\Omega)^2}$$

și norma indusă

$$\|v\|_{H_\zeta^1(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\zeta \nabla v\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Acest spațiu este un spațiu Hilbert.

Considerăm acum un subspațiu al lui $H_\zeta^1(\Omega)$ după cum urmează:

$$V_\zeta = \{v \in H_\zeta^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.e. on } \Gamma_1\}, \quad (10)$$

unde $\Gamma_1 \subset \Gamma$ with $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$. Acest spațiu este un spațiu Hilbert fiind subspațiu închis al spațiului Hilbert $\left(H_\zeta^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H_\zeta^1(\Omega)}, \|\cdot\|_{H_\zeta^1(\Omega)}\right)$. În plus,

$$(u, v)_{V_\zeta} = \int_{\Omega} \zeta^2(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dx \quad (11)$$

defineste un produs scalar pe V_ζ . Fie $\|\cdot\|_{V_\zeta}$ norma indusa de produsul scalar (11),

$$\|v\|_{V_\zeta} = \|\zeta \nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \quad \forall v \in V_\zeta. \quad (12)$$

Subliniem ca $(V_\zeta, (\cdot, \cdot)_{V_\zeta}, \|\cdot\|_{V_\zeta})$ este de asemenea un spatiu Hilbert, a se vedea de exemplu [2, Lemma 3.2].

Spatiile $H_\zeta^1(\Omega)$ si V_ζ se numesc spatii cu pondere (sau spatii ponderate).

- Caracterizarea convexitatii pentru functionala diferentiabile Gâteaux:

Teorema 5. (a se vedea de exemplu [12, Theorem 6.2.1.]) Fie X un spatiu Banach reflexiv, si fie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o functionala diferentiabila Gâteaux. Atunci urmatoarele conditii sunt echivalente:

- (i) f este functionala convexa .
- (ii) $f(u) - f(v) \geq (f'(v), u - v)_{X^* \times X} \quad \forall u, v \in X$, unde X' este dualul spatiului X .

Săptămâna a 8-a

Curs 8

- **Problema Dirichlet omogenă** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschis, mărginit cu frontieră netedă. Considerăm următoarea problemă:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

$f \in L^2(\Omega)$.

Numim *soluție clasică* pentru problema (1) o funcție $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ce verifică (1).

Introducem în cele ce urmează noțiunea de soluție slabă.

Spațiul funcțiilor test este $H_0^1(\Omega)$.

Fie $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Aplicând formula lui Green,

$$-\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

și rezultă

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Definiția 1. Numim soluție slabă pentru (1) o funcție $u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ dat } f \in L^2(\Omega).$$

Teorema 2. Problema (1) are o unică soluție slabă.

DEMONSTRAȚIE. Definim $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx,$$

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

a) a simetrică (se verifica ușor).

b) a biliniară. Arătăm că a este liniară în primul argument:

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta w, v) &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta w) \nabla v dx + \int_{\Omega} (\alpha u + \beta w) v dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \beta \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} uv dx + \beta \int_{\Omega} wv dx \\ &= \alpha a(u, v) + \beta a(w, v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Liniaritatea în al doilea argument se probează asemenător sau se utilizează simetria.

c) a este continuă: într-adevar,

$$\exists M > 0 \text{ a. î. } |a(u, v)| \leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Fie $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| + \left| \int_{\Omega} uv dx \right| \\ &= |(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N}| + |(u, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C_p^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Am folosit pe rând: inegalitatea triunghiului, inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea lui Poincaré.

Pot lua $M = 1 + C_p^2$.

d) a coercivă: într-adevar,

$$\exists m > 0 \text{ a. î. } a(u, u) \geq m \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Fie $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx + \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

e) φ aplicație liniară, evident.

f) φ continuă. Arătăm că

$$\exists k > 0 \text{ a. î. } |\varphi(v)| \leq k \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Fie $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| = |(f, v)_{L^2(\Omega)}| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot C_p \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Am folosit pe rând inegalitatea Cauchy-Schwarz și inegalitatea lui Poincaré.

Putem lua $k = 1 + \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot C_p$.

Concluzia se obține acum aplicând lema Lax-Milgram. $\square$

Observație. Unica soluție slabă minimizează funcționala $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \varphi(v),$$

unde $a(v, v) = \int_{\Omega} (\|\nabla v\|^2 + v^2) dx$ și $\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx$.

• Problema Neumann omogenă

Fie următoarea problemă la limita:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Numim *soluție clasică* pentru problema (2) o funcție $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ce verifică (2).

Introducem notiunea de soluție slabă.

Spațiul funcțiilor test este $H^1(\Omega)$.

Fie $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Aplicând formula lui Green,

$$- \int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

și rezultă

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Definiția 3. Numim soluție slabă pentru (2) o funcție $u \in H^1(\Omega)$ astfel încât:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \text{ dat } f \in L^2(\Omega).$$

Teorema 4. Problema (2) are o unică soluție slabă.

DEMONSTRAȚIE. Definim $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx,$$

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

a) a simetrică;

b) a biliniară;

c) a continuă:

Fie $u, v \in H^1(\Omega)$,

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Am folosit și faptul că:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \right)^{1/2},$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

și

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

d) a coercivă;

Fie $u \in H^1(\Omega)$,

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx + \int_{\Omega} u^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

e) φ aplicație liniară, evident.

f) φ continuă;

Fie $v \in H^1(\Omega)$,

$$|\varphi(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Aplicăm lema Lax-Milgram. □

Temă. De studiat următoarea problemă:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Seminar 8

Exercițiul 5. $(u_n)_n \subset V$ astfel încât $u_n \rightarrow u$ când $n \rightarrow \infty$ în V . Arătați că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_n - u) dx = 0, \quad f \in L^2(\Omega)$$

.

Rezolvare

$$0 \leq \left| \int_{\Omega} f(u_n - u) dx \right| = |(f, u_n - u)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_n - u\|_V,$$

și trecând la limită rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_n - u) dx = 0.$$

Exercițiul 6. $(u_n)_n \subset V$ astfel încât $u_n \rightarrow u$ când $n \rightarrow \infty$ în V . Arătați că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} h(\gamma u_n - \gamma u) d\Gamma = 0, \quad h \in L^2(\Gamma_2)$$

.

Rezolvare

$$0 \leq \left| \int_{\Gamma} h(\gamma u_n - \gamma u) d\Gamma \right| = |(h, \gamma u_n - \gamma u)_{L^2(\Gamma)}| \leq \|h\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma u_n - \gamma u\|_{L^2(\Gamma)}$$

$$= \|h\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma(u_n - u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|h\|_{L^2(\Gamma)} \cdot C \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \widetilde{C}_p \|h\|_{L^2(\Gamma)} \|u_n - u\|_V,$$

și trecând la limită rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} h(\gamma u_n - \gamma u) d\Gamma = 0.$$

Exercițiul 7. Fie $u_n \rightarrow u$ când $n \rightarrow \infty$ în V . Arătați că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_n - u) dx = 0, \quad f \in L^2(\Omega).$$

Rezolvare

Definim $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi(v) = \int_{\Omega} f v dx$ și arătăm că Ψ este liniară și continuă. Ψ liniară este evident.

Ψ continuă, într-adevar

$$|\Psi(v)| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| = |(f, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \widetilde{C}_p \|v\|_V.$$

Cu teorema de reprezentare a lui Riesz rezultă acum

$$\Psi(v) = (\bar{f}, v)_V, \quad \|\Psi\|_{V'} = \|\bar{f}\|_V, \quad \forall v \in V,$$

și avem

$$0 \leq \left| \int_{\Omega} f(u_n - u) dx \right| = |(f, u_n - u)_{L^2(\Omega)}| = |(\bar{f}, u_n - u)_V| = |(\bar{f}, u_n)_V - (\bar{f}, u)_V|.$$

Ținând cont de faptul că

$$u_n \rightharpoonup u \text{ în } V \Rightarrow \Psi(u_n) \rightarrow \Psi(u) \Rightarrow (\bar{f}, u_n)_V \rightarrow (\bar{f}, u)_V \text{ când } n \rightarrow \infty,$$

și trecând la limită în relația precedentă se obține

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_n - u) dx = 0.$$

Remarca 8. γ operator complet continuu

Exercițiul 9. Fie $u_n \rightharpoonup u$ când $n \rightarrow \infty$ în V . Arătați că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} h(\gamma u_n - \gamma u) d\Gamma = 0 \quad h \in L^2(\Gamma_2).$$

Rezolvare

Deoarece $u_n \rightharpoonup u$ rezulta ca $\gamma u_n \rightarrow \gamma u$.

Prin urmare $(h, \gamma u_n - \gamma u)_{L^2(\Gamma)} \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} h(\gamma u_n - \gamma u) d\Gamma = 0.$$

Exercițiul 10. Arătați că $(f_n, v_n)_X \rightarrow (f, v)_X$ știind că $f_n \rightarrow f$ în X și $v_n \rightharpoonup v$ în X .

Rezolvare

$$\begin{aligned} 0 &\leq |(f_n, v_n)_X - (f, v)_X| = |(f_n, v_n)_X - (f, v_n)_X + (f, v_n)_X - (f, v)_X| \\ &\leq |(f_n - f, v_n)_X| + |(f, v_n - v)_X| \leq \|f_n - f\|_X \|v_n\|_X + |(f, v_n - v)_X|. \end{aligned}$$

Cum $v_n \rightharpoonup v$ în X rezulta ca sirul $(\|v_n\|_X)_n$ este marginit (vexi de exemplu Propoziția III.5 în [4]). Prin urmare, știind ca $f_n \rightarrow f$ în X , deducem ca $\|f_n - f\|_X \|v_n\|_X$

converge la zero cand $n \rightarrow \infty$. Pe de alta parte, utilizand definitia limitei in sens slab (vezi [4]), rezulta imediat ca si $|(f, v_n - v)_X|$ tinde la zero cand $n \rightarrow \infty$.

Utilizam acum criteriul clestelui.

TEMA Fie $(u_n)_n \subset H^1(\Omega)$ astfel incat $u_n \rightarrow u$ când $n \rightarrow \infty$ în $H^1(\Omega)$. Arătați că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_n - u) dx = 0, \quad f \in L^2(\Omega)$$

.

Săptămâna a 9-a

Curs 9

Probleme eliptice

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschis, mărginit cu frontiera netedă.

- Fie următoarea problemă:

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Admitem următoarele ipoteze:

$$\begin{cases} f \in L^2(\Omega); \\ a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \forall i, j \in \overline{1, N}; \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2, \quad \alpha > 0, \xi \in \mathbb{R}^N \text{ (condiție de elipticitate)}. \end{cases} \quad (2)$$

Soluție clasică: $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ce verifică (1).

Introducem noțiunea de *soluție slabă*.

$H_0^1(\Omega)$ reprezintă spațiul funcțiilor test.

Integrăm,

$$- \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

dar

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx = \int_{\partial\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \gamma v d\Gamma - \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

Rezultă

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx = \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \gamma v d\Gamma - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx,$$

dar

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \gamma v d\Gamma = 0,$$

și prin urmare avem

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Definiția 1. Numim soluție slabă pentru problema (1) o funcție $u \in H_0^1(\Omega)$ ce verifica

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ dat } f \in L^2(\Omega).$$

Teorema 2. Problema (1) (în ipotezele anunțate anterior) are o unică soluție slabă.

DEMONSTRAȚIE. Fie $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ date de:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx,$$

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

a) φ aplicație liniară și continuă, evident.

b) a formă biliniară. Arătăm că a este liniară în primul argument;

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta w, v) &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha u + \beta w) \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &= \alpha \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \beta \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &= \alpha a(u, v) + \beta a(w, v). \end{aligned}$$

Analog, se arată că a liniară în al doilea argument.

c) a continuă;

Fie $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|a(u, v)| = \left| \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^N \left| \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^N \left\| a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^2(\Omega).$$

$$\left\| a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx \leq k_{ij}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (k_{ij} \geq 0).$$

Luând $k = \max_{1 \leq i, j \leq N} k_{ij}$ rezultă

$$|a(u, v)| \leq k \sum_{i,j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq kC \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Am folosit în ultima inegalitate faptul că

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} = \sqrt{\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \dots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^2(\Omega)}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} = \sqrt{\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \dots + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_N} \right\|_{L^2(\Omega)}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

și

$$\sum_{i,j=1}^N a_i b_j \leq c \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2} \sqrt{\sum_{j=1}^N b_j^2},$$

unde

$$a_i = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}, b_j = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \in \mathbb{R}, a_i, b_j \geq 0, \forall i, j \in \overline{1, N}.$$

Temă. Demonstrați ultima inegalitate pentru $N = 2$.

d) a coercivă;

$$a(u, u) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \geq \alpha \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_N} \right)^2 \right] dx$$

$$= \alpha \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx = \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Aplicăm lema Lax-Milgram. □

• Fie următoarea problemă:

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u = f \text{ în } \Omega \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Admitem următoarele ipoteze:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \in C(\overline{\Omega}), a_0(x) > 0 \forall x \in \overline{\Omega}, a_0(x) \geq c_0 > 0; \\ f \in L^2(\Omega); \\ a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \forall i, j \in \overline{1, N}; \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2, \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \quad (4)$$

$H^1(\Omega)$ reprezintă spațiul funcțiilor test.

Definiția 3. Numim soluție slabă pentru problema (3) o funcție $u \in H^1(\Omega)$ ce verifică

$$\int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \text{ dat } f \in L^2(\Omega).$$

Observație. Avem

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx = \int_{\partial\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j \gamma v d\Gamma - \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

Teorema 4. Problema (3) are o unică soluție slabă, admitând ipotezele anunțate.

DEMONSTRAȚIE. Fie $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ date de:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx, \\ \varphi(v) &= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

a) φ aplicație liniară și continuă, evident.

b) a formă biliniară, evident.

c) a continuă;

$$|a(u, v)| \leq c_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + k \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{k} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

d) a coercivă;

$$a(u, u) \geq c_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \int_{\Omega} a_0 u^2 dx \geq c_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \min\{c_2, c_0\} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Aplicăm lema Lax-Milgram. $\square$

Seminar 9

Considerăm următoarea problemă la limita:

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Admitem următoarele ipoteze:

$$\begin{cases} a_0 \in C(\overline{\Omega}), \quad a_0(x) \geq c_0 > 0; \\ a_i \in C(\overline{\Omega}), \quad a_i(x) \geq b_0 > 0; \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \\ f \in L^2(\Omega); \\ a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \forall i, j \in \overline{1, N}; \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2, \quad \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (6)$$

Spatiul funcțiilor test este $H_0^1(\Omega)$.

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} a_0 u v dx,$$

și

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

a) a biliniară, evident;

b) a continuă;

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \right| &\leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx \right| \leq \sum_{i=1}^N \left\| a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq k \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

$$a_1 + \dots + a_N \leq c \sqrt{a_1^2 + \dots + a_N^2} \Leftrightarrow (a_1 + \dots + a_N)^2 \leq k (a_1^2 + \dots + a_N^2).$$

c) a coercivă;

$$a(u, u) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx + \int_{\Omega} a_0 u^2 dx.$$

Știm deja

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

și

$$\int_{\Omega} a_0 u^2 dx \geq c_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Acum,

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx &\leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx \right| \leq \sum_{i=1}^N k \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} = k \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq k \left(\frac{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{2} + \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

unde $\varepsilon > 0$ va fi convenabil ales. Rezultă

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx \geq -\frac{k\varepsilon}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{k}{2\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{k\varepsilon}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{k}{2\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \left(\alpha - \frac{k\varepsilon}{2} \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left(c_0 - \frac{k}{2\varepsilon} \right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \left(\alpha - \frac{k\varepsilon}{2} \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

Dacă $\alpha > \frac{k\varepsilon}{2}$, $c_0 \geq \frac{k}{2\varepsilon}$, $k = \max_{1 \leq i \leq N} k_i$, $|a_i(x)| \leq k_i$, $\forall x \in \Omega$ atunci avem și coercivitatea și prin urmare putem aplica Lema Lax-Milgram.

TEMA Să se studieze următoarea problemă:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j = 0 \text{ pe } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (7)$$

Săptămâna a 10-a

Curs 10

• Problemă mixtă

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ deschis, mărginit cu frontiera netedă, Γ_1 și Γ_2 partiție pentru $\Gamma = \partial\Omega$, $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, ν versorul normalei exterioare la $\partial\Omega$, $\|\nu(x)\| = 1$.

Fie următoarea problemă

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ pe } \Gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

$f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_2)$.

$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$.

Spațiul funcțiilor test este

$$V = \{v \in H^1(\Omega) | \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}, \quad |\Gamma_1| > 0.$$

Fie $v \in V$,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Aplicând formula lui Green,

$$-\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

dar

$$\int_{\partial\Omega} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 0 + \int_{\Gamma_2} h \cdot \gamma v d\Gamma,$$

și rezultă

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} h \gamma v d\Gamma.$$

Definiția 1. Numim soluție slabă pentru (1) o funcție $u \in V$ ce verifica

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} h \gamma v d\Gamma, \quad \forall v \in V, \text{ dat } f \in L^2(\Omega), h \in L^2(\Gamma_2).$$

Teorema 2. Problema (1) are o unică soluție slabă.

DEMONSTRAȚIE. Definim $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} h \gamma v d\Gamma.$$

a) a simetrică evident;

b) a biliniară, evident;

c) a continuă;

Fie $u, v \in V$,

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} = \|u\|_V \|v\|_V.$$

d) a coercivă;

Fie $u \in H^1(\Omega)$,

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \|u\|_V^2.$$

Amintim ca $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ este operatorul urmă Sobolev (operator liniar și continuu).

e) φ aplicație liniară.

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \int_{\Omega} f(\alpha u + \beta v) dx + \int_{\Gamma_2} h \gamma(\alpha u + \beta v) d\Gamma$$

$$= \alpha \int_{\Omega} f u dx + \beta \int_{\Omega} f v dx + \alpha \int_{\Gamma_2} h \gamma u d\Gamma + \beta \int_{\Gamma_2} h \gamma v d\Gamma = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

f) φ continuă;

Fie $v \in V$,

$$|\varphi(v)| \leq |(f, v)_{L^2(\Omega)}| + |(h, \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \|\gamma v\|_{L^2(\Gamma_2)}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \widetilde{C}_p \|v\|_V + \|h\|_{L^2(\Gamma_2)} C \widetilde{C}_p \|v\|_V = \left(\widetilde{C}_p \|f\|_{L^2(\Omega)} + C \widetilde{C}_p \|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \right) \|v\|_V.$$

Am folosit

$$\|\gamma v\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq \|\gamma v\|_{L^2(\Gamma)}, \quad \Gamma_2 \subseteq \Gamma = \partial\Omega,$$

și

$$\|\gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \cdot \widetilde{C}_p \|v\|_V,$$

deci rezultă

$$\|\gamma v\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C \widetilde{C}_p \|v\|_V.$$

Aplicăm lema Lax-Milgram. □

TEMA De studiat următoarea problemă:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ pe } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (2)$$

Seminar 10

Exercițiul 3. Fie $N > 1$, $p \geq 2$. Pentru oricare $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, avem

$$\|\xi\|^p + \|\eta\|^p \geq \frac{\|\xi + \eta\|^p + \|\xi - \eta\|^p}{2^{p-1}} \quad (3)$$

$$\|\xi\|^{p-2} \xi \cdot (\xi - \eta) - \|\eta\|^{p-2} \eta \cdot (\xi - \eta) \geq \frac{\|\xi - \eta\|^p}{2^{p-2}p}. \quad (4)$$

Rezolvare

Funcția $(x^2 + 1)^{p/2} - x^p - 1$ este crescătoare pe $[0, \infty)$.

Deducem ca

$$\omega^p + \theta^p \leq (\omega^2 + \theta^2)^{p/2} \quad \forall \omega, \theta \in [0, \infty).$$

Fie $\omega = \frac{\|\xi + \eta\|}{2}$ și $\theta = \frac{\|\xi - \eta\|}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\|\xi + \eta\|^p}{2^p} + \frac{\|\xi - \eta\|^p}{2^p} &\leq \left(\frac{\|\xi + \eta\|^2}{2^2} + \frac{\|\xi - \eta\|^2}{2^2} \right)^{p/2} \\ &= \left(\frac{\|\xi\|^2}{2} + \frac{\|\eta\|^2}{2} \right)^{p/2} \end{aligned}$$

Utilizând convexitatea funcției $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|^{p/2}$ pentru $p \geq 2$, obținem

$$\left(\frac{\|\xi\|^2}{2} + \frac{\|\eta\|^2}{2} \right)^{p/2} \leq \frac{1}{2} (\|\xi\|^p + \|\eta\|^p)$$

și de aici (3) este o consecință imediată.

Fie $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ funcționala convexă $\Lambda(\xi) = \|\xi\|^p$.

Λ este diferentiabilă Gâteaux, gradientul Gâteaux verifică

$$\langle \nabla \Lambda(\xi), \eta \rangle = p \|\xi\|^{p-2} \xi \cdot \eta \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Utilizând caracterizarea convexității pentru funcționalele diferentiabile Gâteaux, pentru oricare $\psi, \eta \in \mathbb{R}^N$,

$$\|\psi\|^p - \|\eta\|^p \geq p \|\eta\|^{p-2} \eta \cdot (\psi - \eta).$$

Fie $\psi = \frac{\xi + \eta}{2}$.

Atunci

$$\frac{\|\xi + \eta\|^p}{2^p} - \|\eta\|^p \geq p \|\eta\|^{p-2} \eta \cdot \frac{\xi - \eta}{2}. \quad (5)$$

Înmulțind cu 2 (5) și sumând cu (3) obținem

$$\|\xi\|^p \geq \|\eta\|^p + \frac{\|\xi - \eta\|^p}{2^{p-1}} + p \|\eta\|^{p-2} \eta \cdot (\xi - \eta). \quad (6)$$

Asemanator,

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^p \geq \|\boldsymbol{\xi}\|^p + \frac{\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}\|^p}{2^{p-1}} + p\|\boldsymbol{\xi}\|^{p-2}\boldsymbol{\xi} \cdot (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}). \quad (7)$$

Sumand (6) si (7) obtinem (4).

Pentru completarea prezentului studiu si aplicatii facem trimitere de exemplu la [14].

TEMA [Probleme Robin] Studiati urmatoarea problema la limita:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \text{ } (|\Gamma_1| > 0) \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0 \text{ pe } \Gamma_2, \text{ } (\alpha, \beta \in \mathbb{R}); \end{cases}$$

(discutie dupa cei doi parametri α si β .)

Săptămâna a 11-a

Curs 11

În acest curs vom discuta rezolvarea în sens slab a problemelor la limita guvernate de operatorul p -Laplace. Amintim pentru început un rezultat de minimizare ce va fi util în cele ce urmează.

Teorema 1. *Fie E un spațiu Banach reflexiv și fie $K \subseteq E$ o submulțime nevidă închisă convexă a lui E . Fie $\varphi : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ o funcțională proprie ($\varphi \not\equiv \infty$) convexă inferior semicontinua. Atunci φ este marginită inferior pe K dacă una din următoarele condiții este satisfăcută:*

i) K este marginit;

ii) φ este coercivă, i.e. $\varphi(u) \rightarrow \infty$ când $\|u\|_E \rightarrow \infty$.

Mai mult, dacă φ este strict convexă atunci φ își atinge minimul într-un singur punct în K .

Demonstratia se poate găsi de exemplu în [4, 18].

Considerăm următoarea problemă la limita: să se determine $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$-\Delta_p u = f \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$u = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ este un domeniu marginit cu frontieră netedă $\Gamma = \partial\Omega$, $p \geq 2$, $f \in L^{p'}(\Omega)$.

Operatorul

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u)$$

se numește operator p -Laplace.

Dacă $p = 2$, $\Delta_2 u = \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$.

Ne propunem să introducem noțiunea de soluție slabă pentru problema (1)-(2) și să studiem apoi existența și unicitatea acesteia.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică (1)-(2).

Considerăm $W_0^{1,p}(\Omega)$ drept spațiu al funcțiilor test.

Notam ca pentru oricare $v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) v \, dx = \int_{\Gamma} \|\nabla u\|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Prin urmare, pentru oricare $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) v \, dx = - \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (3)$$

Fie $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Din (1) obținem

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Utilizand acum (3) obținem

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definiția 2. Numim soluție slabă pentru problema (1)-(2) o funcție $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ce verifică

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4)$$

Teorema 3. Fie $p \geq 2$ și $f \in L^{p'}(\Omega)$. Atunci problema (1)-(2) are o unică soluție.

DEMONSTRAȚIE. Fie funcționala $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla v(\mathbf{x})\|^p \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Utilizand o tehnică similară cu cea utilizată în Cursul 7 putem justifica:

i) Funcționala J este strict convexă și coercivă ($\lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty} J(u) = \infty$).

ii) Funcționala J este diferentiabilă Gâteaux. Gradientul Gâteaux notat cu $\nabla J(u)$, verifică următoarea relație.

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^{p-2} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega); \quad (5)$$

în plus,

$$J(v) - J(u) \geq (\nabla J(u), v - u)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (6)$$

iii) Funcționala J este slab inferior semicontinua pe $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Observăm că $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ verifică (4) dacă și numai dacă $(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$ for all $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Din (6) rezulta ca daca

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

atunci

$$J(v) \geq J(u) \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dar si invers, daca $J(v) \geq J(u)$ for all $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ atunci $(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$ for all $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Intr-adevar, deoarece

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = (\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)},$$

cum

$$J(u + tv) - J(u) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R},$$

rezulta ca

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \geq 0 \text{ daca } t > 0$$

si

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 0 \text{ daca } t < 0.$$

Prin urmare,

$$(\nabla J(u), v)_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = 0 \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Am aratat ca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este solutie slaba pentru problema (1)-(2) daca si numai daca u minimizeaza functionala J pe $W_0^{1,p}(\Omega)$.

In acord cu rezultatul de minimizare amintit la inceputul cursului, cum J este functionala proprie strict convexa coerciva si inferior semicontinua deducem ca J are un unic punct de minim in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

Studiul prezentat poate fi completat lecturand de exemplu [14].

TEMA Studiati rezolvarea in sens variational (in sens slab) a urmatoarei probleme la limita:

$$-div(\|\nabla u(\mathbf{x})\|^{p-2} \nabla u(\mathbf{x})) = f_0(\mathbf{x}) \text{ in } \Omega, \quad (7)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \text{ on } \Gamma_1, \quad (8)$$

$$\|\nabla u(\mathbf{x})\|^{p-2} \partial_\nu u(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \text{ on } \Gamma_2, \quad (9)$$

Seminar 11

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un domeniu marginit cu frontiera Lipschitz.

- Fie $u \in H_0^1(\Omega)$.

Definim $\Phi_u : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi_u(v) = \int_{\Omega} \mu(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

unde $\mu \in L^\infty(\Omega)$ astfel încât $\mu(x) \geq \mu^* > 0$ a.p.t. în Ω .

Această aplicație este liniară și continuă. Cu ajutorul ei, aplicând Teorema de reprezentare a lui Riesz, se justifică buna definire a operatorului $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ce verifică

$$(Au, v)_{H_0^1(\Omega)} = \Phi_u(v) \quad \text{for all } v \in H_0^1(\Omega).$$

Operatorul A este liniar, simetric, tare monoton și Lipschitz.

Notăm că:

- 1) operatorul A este tare monoton dacă există $m > 0$ astfel încât

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \quad (10)$$

- 2) operatorul A este Lipschitz există $M > 0$ astfel încât

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (11)$$

- Fie $u \in H_0^1(\Omega)$ și $\Psi_u : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ funcțională

$$\Psi_u(v) = \int_{\Omega} \left(\nabla u - P_K \left(\frac{1}{2} \nabla u \right) \right) \cdot \nabla v \, dx,$$

unde $K = \overline{B(0_{\mathbb{R}^d, 3})}$ and $P_K : \mathbb{R}^d \rightarrow K$ este operatorul de proiecție.

Această aplicație este de asemenea liniară și continuă. Cu ajutorul ei, aplicând Teorema de reprezentare a lui Riesz, putem defini operatorul $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, astfel: pentru oricare $u \in H_0^1(\Omega)$, Au este unicul element în $H_0^1(\Omega)$ astfel încât

$$(Au, v)_{H_0^1(\Omega)} = \Psi_u(v)$$

pentru oricare $v \in H_0^1(\Omega)$.

Acest operator este tare monoton și Lipschitz dar nu este operator liniar.

- Fie $\bar{u} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ si

$$H_{\bar{u}} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_{\bar{u}}(\bar{v}) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v dx - \nabla u \cdot \nabla \psi + \nabla v \cdot \nabla \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dx$$

pentru oricare $\bar{u}, \bar{v} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $\bar{u} = (u, \varphi)$, $\bar{v} = (v, \psi)$.

Aplicatia $\Phi_{\bar{u}}$ este o functionala liniara si continua.

Fie $A : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ un operator definit dupa cum urmeaza: pentru oricare $\bar{u} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $A\bar{u}$ este unicul element al lui $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ce verifica

$$(A\bar{u}, \bar{v})_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = H_{\bar{u}}(\bar{v})$$

pentru oricare $\bar{v} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Operatorul A este liniar, tare monoton si Lipschitz.

Remarca 4. Putem sa asociem acestui operator o forma biliniara, continua, coerciva, dar care NU este simetrica,

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = (A\bar{u}, \bar{v})_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}.$$

TEMA Fie următoarea problemă:

$$\begin{cases} -\Delta u = f 1_{\omega} \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12)$$

$\omega \subset \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$.

i) Studiați dependenta solutiei slabe de data f (dependenta liniara? continua? convexa? Lipschitz?)

ii) Fie

$$J : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(f) = \alpha \|u - u_d\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + k \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Studiați următoarele proprietati ale functionalei J J este i.s.c.?)

J este continua?

J este coercivă? $(\lim_{\|f\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty} J(f) = \infty)$

J este convexă? este strict convexă?

Săptămâna a 12-a

Curs 12

În acest curs dam exemple de probleme la limita în fizica matematică.

- Un model antiplan: o problemă în deplasări tractiuni în teoria elasticității

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ secțiunea transversală a unui cilindru "foarte lung". Ω este un domeniu marginit cu frontieră netedă. Frontiera este partitionată în două părți măsurabile, Γ_1, Γ_2 , ($|\Gamma_1| > 0$).

$$-\mu \Delta u = f \text{ în } \Omega \quad (1)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ pe } \Gamma_2. \quad (3)$$

Necunoscuta problemei este $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (a treia componentă a vectorului deplasare).

Funcția f este a treia componentă a densității forțelor volumice iar g este a treia componentă a densității tractiunii pe suprafața Γ_2 .

Coeficientul μ este un coeficient de material (o constantă Lamé în teoria elasticității, pentru materiale elastice omogene și izotrope).

Ipotezele de lucru: $f \in L^2(\Omega)$, $\mu > 0$, $g \in L^2(\Gamma_2)$.

Fie u o funcție suficient de netedă ce verifică (1)-(3).

Considerăm drept spațiu al funcțiilor test spațiul V :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

$$(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Prin formulare variațională, problema 1-3 conduce la următoarea problemă: să se determine $u \in V$ astfel încât

$$a(u, v) = (\tilde{f}, v)_V \quad \forall v \in V, \quad (4)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

si

$$(\tilde{f}, v)_V = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g \gamma v \, d\Gamma.$$

Ecuatia 4 are o unica solutie. Justificarea se face cu ajutorul Lemei Lax-Milgram. Detalii despre modelul antiplan se pot gasi in [17].

- Un model in mecanica fluidelor

Fie Ω un domeniu marginit in $\mathbb{R}^N$ ($N \in \{2, 3\}$) cu frontiera de clasa C^1 . Fie de asemenea $f \in L^2(\Omega)^N$ si $\mu > 0$.

Sa se determine $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ si $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat:

$$-\mu \Delta u + \nabla p = f \text{ in } \Omega \quad (5)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \quad (6)$$

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma. \quad (7)$$

Aceasta problema la limita descrie miscarea unui fluid incompresibil. Se presupune ca miscarea este stationara si lenta. Coeficientul μ se numeste coeficient cu vâscozitate μ si f este densitatea fortelor volumice.

Fie (u, p) functii suficient de netede ce verifica (8)-(10).

Consideram drept spatiu al functiilor test spatiul V_0 introduc in Cursul 7:

$$V_0 = \{v \in [H_0^1(\Omega)]^N \mid \operatorname{div} v = 0\}.$$

$$(u, v)_{[H_0^1(\Omega)]^N} = \sum_{i=1}^N (\nabla u_i, \nabla v_i)_{L^2(\Omega)^N}$$

$$\|u\|_{[H_0^1(\Omega)]^N} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)^N}^2}.$$

Pentru fiecare $i \in \{1, \dots, N\}$ avem

$$-\mu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \text{ in } \Omega \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ in } \Omega \quad (9)$$

$$u_i = 0 \text{ pe } \Gamma. \quad (10)$$

Vom utiliza formula lui Green. Notam ca:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i dx = \int_{\Gamma} p \gamma v_i \nu_i d\Gamma - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Prin urmare,

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i dx = 0$$

pentru oricare $v \in V_0$, deoarece $\gamma v = 0$ a.p.t. pe Γ si $\operatorname{div} v = 0$ a.p.t. in Ω .

Prin formulare variationala ajungem la urmatoarea problema: Sa se determine $u \in V_0$ astfel incat

$$\mu(u, v)_{[H_0^1(\Omega)]^N} = (f, v)_{[H_0^1(\Omega)]^N} \quad \forall v \in V_0.$$

Aceasta problema variationala are o unica solutie $u \in V_0$. Pentru a justifica aceasta afirmatie putem aplica Lax-Milgram sau, in aces caz, putem aplica direct Teorema de reprezentare a lui Riesz.

Pentru detalii, a se vedea de exemplu [10] (capitolul 3).

- Un model in teoria electricitatii

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \in \{2, 3\}$). Ω este un domeniu marginit cu frontiera neteda. Frontiera este partitionata in doua parti masurabile, Γ_a, Γ_b , ($|\Gamma_1| > 0$).

$$\operatorname{div} D = q_0 \text{ in } \Omega, \tag{11}$$

$$D = -\beta \nabla \varphi \text{ in } \Omega, \tag{12}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \text{ pe } \Gamma_a, \tag{13}$$

$$D \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2(\mathbf{x}) \text{ pe } \Gamma_b, \tag{14}$$

Necunoscuta problemei este perechea (φ, D) , φ fiind necunoscuta principala.

$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este potentialul electric iar $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ este campul electric. Admitem urmatoarea ipoteza asupra datelor: $q_0 \in L^2(\Omega)$, $q_2 \in L^2(\Gamma_2)$, $\beta > 0$.

Fie φ o functie suficient de neteda ce verifica (11)-(14).

Consideram drept spatiu al functiilor test spatiul V :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

$$(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Prin formulare variationala, problema (11)-(14) conduce la urmatoarea problema: sa se determine $\varphi \in V$ astfel incat

$$a(\varphi, \psi) = (\tilde{q}, \psi)_V \quad \forall \psi \in V, \quad (15)$$

unde

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \beta \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx$$

si

$$(\tilde{q}, \psi)_V = \int_{\Omega} q_0 \psi \, dx - \int_{\Gamma_2} q_2 \gamma \psi \, d\Gamma.$$

Ecuatia 15 are o unica solutie. Justificarea se face cu ajutorul Lemei Lax-Milgram

Pentru un model mai complex cu aplicatii in teoria electricitatii se poate consulta de exemplu [3].

- Un model in piezoelectricitate: o problema electro-elastica

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sectiunea transversala a unui cilindru "foarte lung". Ω este un domeniu marginit cu frontiera neteda. Pe frontiera consideram doua partitii:

- (1) $\Gamma_1, \Gamma_2, (|\Gamma_1| > 0)$;
- (2) $\Gamma_a, \Gamma_b, (|\Gamma_a| > 0)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu \nabla u + e \nabla \varphi) + f_0 &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(e \nabla u - \beta \nabla \varphi) &= q_0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{pe } \Gamma_1, \\ \varphi &= 0 & \text{pe } \Gamma_a, \\ \mu \partial_{\nu} u + e \partial_{\nu} \varphi &= f_2 & \text{pe } \Gamma_2, \\ e \partial_{\nu} u - \beta \partial_{\nu} \varphi &= q_b & \text{pe } \Gamma_b. \end{aligned}$$

Aceasta problema este un model antiplan in electro-elasticitate (un model piezoelectric).

Necunoscuta problemei este perechea (u, φ) .

Admitem urmatoarea ipoteza asupra datelor:

- (1) $f_0 \in L^2(\Omega), \mu > 0, f_2 \in L^2(\Gamma_2)$.
- (2) $q_0 \in L^2(\Omega), q_2 \in L^2(\Gamma_2), \beta > 0, e \in \mathbb{R}$.

Consideram spatiile

—

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

$$(u, v)_V = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

—

$$W = \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \gamma\psi = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_a\}.$$

$$(\varphi, \psi)_W = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L^2(\Omega)},$$

$$\|\psi\|_W = \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Prin formulare variatională, problema la limita piezoelectrică conduce la următoarea problemă: să se determine $\bar{u} = (u, \varphi) \in V \times W = \bar{V}$ astfel încât

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{f}, \bar{v})_{\bar{V}} \quad \forall \bar{v} \in \bar{V}, \quad (16)$$

unde

$$a : \bar{V} \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, \bar{v}) &= \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} e \nabla \varphi \cdot \nabla v \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \beta \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx - \int_{\Omega} e \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx. \end{aligned}$$

și

$$\bar{f} = \left(\int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g \gamma v \, d\Gamma, \int_{\Omega} q_0 \psi \, dx - \int_{\Gamma_2} q_2 \gamma \psi \, d\Gamma \right).$$

Ecuatia 16 are o unică soluție. Justificarea se face cu ajutorul Lemei Lax-Milgram.

Remarca 1. În modele anterioare a era formă simetrică. În acest ultim model forma a nu mai este simetrică.

Pentru modele mai complexe în piezoelectricitate se poate consulta de exemplu [18].

Seminar 12

Listă de probleme recapitulative:

- Fie $I = (0, 1)$ și $f \in L^2(0, 1)$.

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u'(1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \text{ în } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0; \end{cases}$$

- Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domeniu mărginit, cu frontiera netedă, $f \in L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ în } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \partial\Omega; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \quad (|\Gamma_1| > 0) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \quad (|\Gamma_1| > 0) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ pe } \Gamma_2, \quad (g \in \mathbb{R}); \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \text{ } (|\Gamma_1| > 0) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g u \text{ pe } \Gamma_2, \text{ } (g \in \mathbb{R}); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \text{ în } \Omega \\ u = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

unde $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}) \forall i, j \in \overline{1, N}$ $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -div(\mu \nabla u) = f \text{ în } \Omega \quad (\mu \in C^1(\overline{\Omega}), \mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega) \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -div(\mu \nabla u) = f \text{ în } \Omega \quad (\mu \in C^1(\overline{\Omega}), \mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega) \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \text{ } (|\Gamma_1| > 0) \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ pe } \Gamma_2, \text{ } (g \in \mathbb{R}); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -div(\mu \nabla u) = f \text{ în } \Omega \quad (\mu \in C^1(\overline{\Omega}), \mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega) \\ u = 0 \text{ pe } \Gamma_1 \text{ } (|\Gamma_1| > 0) \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} = g u \text{ pe } \Gamma_2, \text{ } (g \in \mathbb{R}); \end{array} \right.$$

Anexa: tematica cursului

- Derivata in sens slab. Definitie. Exemple. Spatiul $W^{1,p}(I)$ (def.; proprietati) Spatiul $H^1(I)$ (def., proprietati, produs scalar, norme)
- Spatiul $H_0^1(I)$ (def., proprietati, produs scalar, norme). Inegalitatea lui Poincare. Alte spatii Sobolev de functii de o singura variabila (def., proprietati). Inegalitati de tip Poincare.
- Probleme la limita de tip Dirichlet 1D: introducerea notiunii de solutie slaba, studiul existentei si unicitatii solutiei slabe, studiul marginirii si stabilitatii solutiei slabe. (se vor studia si probleme Sturm -Liouville Dirichlet omogene)
- Probleme la limita de tip Neumann 1D (introducerea notiunii de solutie slaba, studiul existentei si unicitatii solutiei slabe, studiul marginirii si stabilitatii solutiei slabe)
- Probleme la limita mixte 1D (introducerea notiunii de solutie slaba, studiul existentei si unicitatii solutiei slabe, studiul marginirii si stabilitatii solutiei slabe)
- Derivata partiala in sens slab. Definitie. Exemple. Spatiul $W^{1,p}(\Omega)$ (def.; proprietati) Spatiul $H^1(\Omega)$ (def., proprietati, produs scalar, norme)
- Spatiul $H_0^1(\Omega)$ (def., proprietati, produs scalar, norme). Inegalitatea lui Poincare. Alte spatii Sobolev de functii de mai multe variabile (def., proprietati). Inegalitati de tip Poincare.
- Probleme la limita de tip Dirichlet ND, $N > 1$, (introducerea notiunii de solutie slaba, studiul existentei si unicitatii solutiei slabe, studiul marginirii si stabilitatii solutiei slabe)
- Probleme la limita de tip Neumann ND, $N > 1$, (introducerea notiunii de solutie slaba, studiul existentei si unicitatii solutiei slabe, studiul marginirii si stabilitatii solutiei slabe)
- Probleme la limita mixte ND, $N > 1$, (introducerea notiunii de solutie slaba, studiul existentei si unicitatii solutiei slabe, studiul marginirii si stabilitatii solutiei slabe).

- Aplicatii in teoria elasticitatii si electricitatii.

Bibliografie

1. R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, 1975
2. M. Boureau and A. Matei, Weak solutions for antiplane models involving elastic materials with degeneracies, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, **61**(1), 73-85, 2010.
3. M.M. Boureau, A. Matei, Singular and Degenerate Boundary Value Problems Related to the Electricity Theory, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2015 (2015), Article ID 865261, 6 pages.
4. H. Brezis, *Analiză funcțională. Teorie și aplicații*, Editura Academiei Române, București, 2002, (Traducere de Prof.univ.dr. V. Rădulescu).
5. H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
6. M. Chipot, *Elliptic equations: An introductory course*, Birkhäuser Advanced texts, Birkhäuser Verlag, 2009.
7. L. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Edition, AMS, 2009.
8. P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman Advanced Publishing Program, 1985.
9. W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, *Studies in Advanced Mathematics* **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.
10. P. Jebelean, *Probleme la limita eliptice. Capitoale speciale de EDP*, Editura de Vest, Timisoara 2008.
11. A. Kufner, O. John, and S. Fucik, *Function Spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.
12. A.J. Kurdila and M. Zabrankin, *Convex Functional Analysis*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
13. S. Leonardi, Solvability of degenerated quasilinear elliptic equations, *Nonlinear Anal.*, **26** (1996), 1053–1060.
14. A. Matei, S. Micu, C. Niță, Optimal control for antiplane frictional contact problems involving nonlinearly elastic materials of Hencky type *Mathematics and Mechanics of Solids*, **23**(3) (2018), 308–328.
15. S. Migorski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Springer, 2013.
16. P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*, Masson, Paris, 1988.
17. M. Sofonea, A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Springer, 2009.
18. M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 2012.