

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Matematica mediilor de contact

**Matematica mediilor de contact
(INDRUMAR)
Cursuri/Seminarii**

Andaluzia Matei

Cuprins

Saptamana 1	1
Curs 1	1
Seminar 1	6
Saptamana a 2-a	9
Curs 2	9
Seminar 2	13
Saptamana a 3-a	15
Curs 3	15
Seminar 3	20
Saptamana a 4-a	23
Curs 4	23
Seminar 4	27
Săptămâna a 5-a	29
Curs 5	29
Seminar 5	35
Săptămâna a 6-a	39
Curs 6	39
Seminar 6	43
Săptămâna a 7-a	46
Curs 7	46
Seminar 7	53
Săptămâna a 8-a	56
Curs 8	56
Seminar 8	62
Săptămâna a 9-a	65

Cuprins

Curs 9	65
Seminar 9	69
Săptămâna a 10-a	72
Curs 10	72
Seminar 10	76
Săptămâna a 11-a	79
Curs 11	79
Seminar 11	84
Săptămâna a 12-a	87
Curs 12	87
Seminar 12	92
Anexa: tematica cursului	94
Bibliografie	95

Saptamana 1

Curs 1

Tematica acestui curs: spatii de functii scalare (recapitulare), spatii de functii vectoriale/tensoriale (Lebesgue, Sobolev)

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) un domeniu marginit cu frontiera Lipschitz notata cu Γ .

Regularitatea frontierei joaca un rol important in stabilirea anumitor rezultate.

Amintim aici definitia privind regularitatea frontierei domeniului Ω .

Definiția 1. [a se vedea, de exemplu, [32, 10]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita. Spunem ca frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ este *Lipschitz* daca pentru oricare $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ exista $r > 0$ si o functie Lipschitz $g : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat, renotand coordonatele de axe daca este necesar,

$$\Omega \cap B(\mathbf{x}_0, r) = \{ \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) : x_N > g(x_1, \dots, x_{N-1}) \}.$$

Mai general, daca notam cu X un spatiu de functii cu valori reale pe $\mathbb{R}^{N-1}$, spunem ca frontiera este de clasa X daca pentru oricare $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ exista $r > 0$ si o functie $g : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasa X astfel incat, renotand coordonatele de axe daca este necesar,

$$\Omega \cap B(\mathbf{x}_0, r) = \{ \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) : x_N > g(x_1, \dots, x_{N-1}) \}.$$

Notam cu $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ inchiderea lui Ω . Vom utiliza litere ingrosate (bold) pentru vectori si tensori. Astfel, versorul normalei exterioare la frontiera se va nota $\boldsymbol{\nu}$ iar un punct oarecare in $\mathbb{R}^d$ se va nota $\mathbf{x} = (x_i)$.

Indicii i, j, k, l merg de la 1 la d iar convenia de sumare a lui Einstein (conventia indicelui care se repeta) se va utiliza adesea pentru a simplifica scrierea.

Un indice ce urmeaza dupa o virgula va indica o derivata partiala.

In acest curs notam cu $\mathbb{S}^d$ spatiul tensorilor simetrici de ordinul II pe $\mathbb{R}^d$ sau, echivalent, spatiul matricilor simetrice de ordin d .

Amintim in continuare produsele scalare pe $\mathbb{R}^d$ si $\mathbb{S}^d$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} \quad \forall \mathbf{u} = (u_i), \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}), \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^d$

Sa trecem in revista cateva dintre cele mai cunoscute notatii pentru spatii de functii studiate anterior.

- $C^m(\overline{\Omega})$
- $C^\infty(\overline{\Omega})$
- $C_0^\infty(\Omega)$
- $L^p(\Omega)$
- $L^p(\Gamma)$
- $L_{loc}^1(\Omega)$
- $W^{k,p}(\Omega)$
- $H^m(\Omega) \equiv W^{m,2}(\Omega)$, pentru $m \in \mathbb{N}^*$
- $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$
- $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ – dualul lui $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Daca X este unul dintre spatiile de mai sus, vom utiliza in acest curs notatiile X^d si $X_s^{d \times d}$ pentru spatiile

$$\begin{aligned} X^d &= \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_i \in X, 1 \leq i \leq d \}, \\ X_s^{d \times d} &= \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in X, 1 \leq i, j \leq d \}. \end{aligned}$$

In particular, vom utiliza frecvent spatiile

$$H = L^2(\Omega)^d = \{ \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) : v_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d \}, \quad (1)$$

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega)_s^{d \times d} = \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq d \}. \quad (2)$$

Acestea sunt spatii Hilbert inzestrate cu urmatoarele produse scalare:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \quad (3)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} dx. \quad (4)$$

Normele induse se vor nota astfel: $\|\cdot\|_H$ si $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, respectively.

In afara de spatiile de functii introduse anterior, vom avea nevoie de spatii de functii specifice (pentru campul deplasare si pentru tensorul tensiune).

Deoarece vom avea nevoie de valori ale unor functii din aceste spatii in sensul urmei, amintim acum urmatoarele elemente de analiza functionala.

Teorema 2. [Teorema de urma, [20]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$. Fie $1 \leq p < \infty$.

Atunci exista un unic operator liniar si continuu $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ astfel incat:

- (1) $\gamma u = u|_{\Gamma}$ daca $u \in C^1(\bar{\Omega})$.
- (2) $\|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ unde $c = c(p, \Omega) > 0$.
- (3) daca $1 < p < \infty$, atunci $\gamma(W^{1,p}(\Omega)) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.
- (4) daca $1 < p < N$ atunci $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ este compact pentru orice r astfel incat $1 \leq r < \frac{Np-p}{N-p}$.
- (5) daca $p \geq N$ atunci $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$.

Definiția 3. γu se numeste urma lui u pe Γ iar $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^p(\partial\Omega)$ se numeste operator urmă.

Sa atragem acum atentia asupra cazului $p = 2$:

Teorema 4. [Teorema de urma, [20]] Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) o submultime deschisa si marginita cu frontiera Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$.

Atunci exista un unic operator liniar si continuu $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ astfel incat:

- (1) $\gamma u = u|_{\Gamma}$ daca $u \in C^1(\bar{\Omega})$.
- (2) $\|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_{tr}\|u\|_{H^1(\Omega)}$ unde $c_{tr} = c_{tr}(\Omega) > 0$.
- (3) $\gamma(H^1(\Omega)) = W^{1/2,2}(\Gamma)$.
- (4) daca $N > 2$ atunci $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ este compact pentru orice r astfel incat $1 \leq r < \frac{2N-2}{N-2}$.
- (5) daca $N \leq 2$ atunci $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^r(\partial\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$.

$\gamma u \in L^2(\Gamma)$ se numeste urma lui u pe Γ iar $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega)$ se numeste operator urmă.

Operatorul urma nu este nici injectiv, nici surjectiv.

Notam ca $W^{1/2,2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)$ si ca exista $Z : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, operator numit inversul la dreapta al lui γ .

$$(Z\gamma)(u) = u \quad \forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

.

Amintim ca un operator continuu $A : X \rightarrow Y$ (X, Y spatii Banach), este *compact* daca pentru orice sir marginit $(u_n)_n \subset X$, $(Au_n)_n \subset Y$ contine un subsir tare convergent; a se vedea de exemplu [20].

Notam ca $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ este complet continuu fiind liniar si compact ($\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ este doar liniar si continuu).

Daca Ω este un domeniu (deschis, conex) marginit cu frontiera Lipschitz si $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$ atunci

$$H^1(\Omega) \subset H^\delta(\Omega) \subset H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

cu injectii(scufundari) compacte si dense, a se vedea de exemplu [20], paginile 33-34.

Remarca 5. $\gamma(H^1(\Omega))$ este densa in $L^2(\Gamma)$, a se vedea de exemplu [11].

Prin "injectie" intelegem aplicatia identica. O injectie $X \subset Y$ (X, Y spatii normate) este compacta daca orice submultime marginita a lui X este relativ compacta in Y (sau, cu siruri, din orice sir marginit in X putem extrage un subsir convergent in Y).

Fie $f \in L^2(\Omega)$. Amintim ca f este derivabila partial, in sens slab, in raport cu x_i daca exista $g_i \in L^2(\Omega)$ astfel incat

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Functiile g_i se numesc derivate pariale in sens slab ale lui f si pentru a simplifica scrierea se noteaza cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Teorema 6. *Admitem ca Ω este un domeniu marginit cu frontiera Lipschitz. Daca $k \in \mathbb{N}^*$ si $1 \leq p < \infty$ atunci: pentru oricare $v \in W^{k,p}(\Omega)$ exista un sir $(v_n)_n \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ astfel incat*

$$\|v_n - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

a se vedea de exemplu [10], pagina 32. Rezultatul anterior este un rezultat de aproximare a functiilor Sobolev prin functii netede. Acest rezultat poate fi privit si ca un rezultat de densitate si putem scrie:

$$W^{k,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})} \quad k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq p < \infty.$$

De asemenea, avem urmatorul rezultat.

Teorema 7.

Pentru oricare $v \in W_0^{k,p}(\Omega)$ exista $(v_n)_n \subset C_c^\infty(\Omega)$ astfel incat

$$\|v_n - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty;$$

a se vedea de exemplu [10] pagina 32.

Acest rezultat de densitate poate fi rescris astfel:

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)} \quad k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq p < \infty. \quad (5)$$

Daca $p = 2$,

$$H^1(\Omega) = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}, \quad (6)$$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}. \quad (7)$$

Definiția 8. Operatorul $N_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, $N_f(u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ se numeste *operator Nemîtkii* atasat functiei f .

Teorema 9. [a se vedea de exemplu [11]] Fie $r_1, r_2 \in [1, \infty)$. Daca functia continua $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface conditia de crestere

$$|f(\mathbf{x}, s)| \leq C|s|^{r_1/r_2} + b(\mathbf{x}) \quad \text{a.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

unde $C \geq 0$ si $b \in L^{r_2}(\Omega)$ atunci operatorul $N_f : L^{r_1}(\Omega) \rightarrow L^{r_2}(\Omega)$ este corect definit, marginit si continuu.

Tema Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domeniu marginit, fie $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ functie continua astfel incat

$$|f(\mathbf{x}, s)| \leq C|s| + b(\mathbf{x}) \quad \text{a.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},$$

unde $b \in L^2(\Omega)$.

Fie $u, v \in L^2(\Omega)$.

Justificati ca functia

$$f(\cdot, u(\cdot))v(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ este o functie in } L^1(\Omega).$$

Seminar 1

Amintim in acest seminar cateva elemente de mecanica mediilor continue.

Modelul clasic 3D in elastostatica se scrie astfel:

PROBLEMA 1. *Sa se determine vectorul deplasare $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ si tensorul tensiune $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$ astfel incat*

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2. \quad (11)$$

Frontiera Ω este partitionata in doua parti Γ_1 si Γ_2 , astfel incat $|\Gamma_1| > 0$.

- (8) este ecuatia de echilibru Cauchy
- (9) este legea de material (lege de comportament)
- (10) este conditia la limita in deplasari (omogena)
- (11) este conditia la limita in tractiuni

Amintim ca

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

si

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Pentru mai multe detalii a se revedea [18].

Pentru operatorul elastic $\mathcal{F}$ vom utiliza urmatoarea ipoteza

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Exista } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ astfel incat} \\ \quad \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Exista } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ astfel incat} \\ \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(d) } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ este masurabila pe } \Omega, \\ \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ apartine lui } \mathcal{H}. \end{array} \right\} \quad (12)$$

In prezentul curs vom studia probleme la limita mai complexe, adaugand la conditiile la limita clasice (descrise anterior) conditii de contact (bilateral sau unilateral, cu frecare sau fara frecare, cu complianta normala).

Prezentam in continuare cele mai cunoscute conditii de contact.

- **Contact bilateral**

$$u_\nu = 0 \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \quad (13)$$

($u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$). Aceasta conditie de contact a fost considerata de multi autori in literatura, a se vedea de exemplu [10].

- **Contact cu tensiune normala impusa**

$$-\sigma_\nu = F \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \quad (14)$$

unde F este o functie pozitiva data. Conditia a fost considerata in literatura de exemplu in [8, 27].

- **Contact cu complianta normala**

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \quad (15)$$

unde p_ν este o functie data cu valori pozitive ce se anuleaza pentru argument negativ.

Daca $u_\nu < g$ atunci nu este contact si tensiunea normala este zero.

In punctele de contact, $u_\nu - g > 0$ este o masura a interpenetrarii (fundatia este de aceasta data deformabila). Pentru a da un exemplu, consideram

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (16)$$

unde $c_\nu > 0$ si $r_+ = \max\{r, 0\}$ este partea pozitiva a lui r .

Putem de asemenea considera

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{if } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{if } r > \alpha, \end{cases} \quad (17)$$

unde $\alpha > 0$.

Conditia de contact cu complianta normala a fost prima oara introdusa in lucrarea [26]. Ulterior ea a aparut in multe alte lucrari in literatura, a se vede a de exemplu [12, 13, 14, 33]. Exprimarea "complianta normala" a fost adoptata la inceput in [13, 14].

- **Contact unilateral**

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_3. \quad (18)$$

Aceasta conditie a fost introdusa pentru prima data in [30].

g se numeste "gap" si se defineste ca fiind distanta intre corpul deformabil si fundatia rigida masurata de-a lungul normalei la frontiera corpului deformabil.

Daca $g = 0$, avem

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_3. \quad (19)$$

Remarca 10. In cazul modelului antiplan, contactul poate fi doar bilateral caci $u_\nu = 0$ si $\sigma_\nu = 0$.

Tema Fie functia $p_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (20)$$

unde $c_\nu > 0$ si $r_+ = \max \{r, 0\}$ este partea pozitiva a lui r .

Justificati ca p_ν este functie Lipschitz.

Saptamana a 2-a

Curs 2

Tematica acestui curs: Spatii de functii pentru vectorul deplasare, Inegalitatea lui Korn; spatii de functii pentru tensorul tensiune; formula de tip Green.

- **Spatii de functii pentru vectorul deplasare**

$$H^1(\Omega)^d = \{ \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) : v_i \in H^1(\Omega), 1 \leq i \leq d \}$$

Spatiul $H^1(\Omega)^d$ este un spatiu Hilbert inzestrat cu produsul scalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)^d} = \int_{\Omega} (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j}) \, dx,$$

iar norma indusa este

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d} = \left(\int_{\Omega} (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}) \, dx \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Fie $\varepsilon : H^1(\Omega)^d \rightarrow Q$ operatorul *deformare* definit astfel

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Definim

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_{H^1(\Omega)^d} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \quad (2)$$

si norma corespunzatoare

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d} = ((\mathbf{v}, \mathbf{v}))_{H^1(\Omega)^d}^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d.$$

In acord cu [12, p. 106]), exista $c > 0$ astfel incat

$$\int_{\Omega} (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}) \, dx \leq c \int_{\Omega} (v_i v_i + \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d.$$

Deci, $((\cdot, \cdot))_{H^1(\Omega)^d}$, definit in (2), este un produs scalar pe $H^1(\Omega)^d$, iar norma indusa $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^d}$ este echivalenta cu (1).

Asadar, spatiul $(H^1(\Omega)^d, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)^d})$ este un spatiu Hilbert real.

Utilizand Teorema de urma Sobolev, definim "urma" $\gamma \mathbf{v}$ a unui element $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ pe frontiera Γ :

$$\gamma \mathbf{v} = \mathbf{v}|_{\Gamma} \text{ daca } \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \cap C(\overline{\Omega})^d.$$

Mai mult, operatorul

$$\gamma : H^1(\Omega)^d \rightarrow L^2(\Gamma)^d$$

este liniar si continuu.

Deci, exista $c = c(\Omega) > 0$, astfel incat

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma)^d} \leq c \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (3)$$

Continuitatea operatorului urma implica:

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \text{ in } H^1(\Omega)^d \implies \gamma \mathbf{u}_n \rightarrow \gamma \mathbf{u} \text{ in } L^2(\Gamma)^d.$$

Mai mult, utilizand faptul ca γ este complet continuu (fiind liniar si compact):

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ in } H^1(\Omega)^d \implies \gamma \mathbf{u}_n \rightarrow \gamma \mathbf{u} \text{ in } L^2(\Gamma)^d. \quad (4)$$

Fie $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$.

Definim

$$v_{\nu} = \gamma \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_{\tau} = \gamma \mathbf{v} - v_{\nu} \boldsymbol{\nu}. \quad (5)$$

Pentru a simplifica scrierea uneori vom omite sa il scriem pe γ .

In studiul problemelor din acest curs va interveni foarte des urmatorul spatiu de functii.

$$V = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1 \}. \quad (6)$$

Aici, conditia $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a.p.t. pe Γ_1 este inteleasa "in sensul urmei", i.e., $\gamma \mathbf{v} = \mathbf{0}$ a.p.t. pe Γ_1 .

Pentru ca operatorul urma este continuu deducem ca V este subspatiu inchis $H^1(\Omega)^d$.

Teorema 1. [*Korn's inequality*; [25, p.79]] *Exista $c_K = c_K(\Omega, \Gamma_1) > 0$ astfel incat*

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \geq c \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (7)$$

Fie $(\cdot, \cdot)_V$ aplicatia

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}.$$

Aceasta aplicatie este un produs scalar.

Consideram acum norma indusa de acest produs scalar.

$$\|\mathbf{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}}. \quad (8)$$

Din (2), (7) si (8) rezulta ca $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^d}$ si $\|\cdot\|_V$ sunt norme echivalente pe V .

Prin urmare, $(V, \|\cdot\|_V)$ este spatiu Hilbert real.

Notam ca $\boldsymbol{\varepsilon}|_V : V \rightarrow \mathcal{H}$ este un operator liniar si continuu.

Din (3), (7) si (8) rezulta ca exista $c_0 = c_0(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3)$, astfel incat

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (9)$$

In unele probleme intervine un subspatiu al spatiului V pe care il vom nota cu V_1 .

$$V_1 = \{\mathbf{v} \in V : v_\nu = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_3\}. \quad (10)$$

Pe V_1 , utilizam produsul scalar $(\cdot, \cdot)_V$ si norma $\|\cdot\|_V$.

Deoarece V_1 este un subspatiu inchis al spatiului Hilbert V , deducem ca $(V_1, (\cdot, \cdot)_V, \|\cdot\|_V)$ este spatiu Hilbert.

• Spatii de functii pentru tensorul tensiune

Definiția 2. Fie $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ si $\mathbf{w} = (w_i)$ astfel incat $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $w_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq d$.

Atunci $\mathbf{w}$ se numeste divergenta in sens slab a lui $\boldsymbol{\sigma}$ daca

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varphi_{i,j} dx = - \int_{\Omega} w_i \varphi_i dx \quad \forall \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_i) \in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

Divergenta in sens slab este unic determinata pana la o multime de masura zero.

Din definitia divergentei in sens slab se observa ca daca $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d}$ atunci divergenta clasica a lui $\boldsymbol{\sigma}$ este de asemenea divergenta slaba. De aceea, vom utiliza notatia $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}$ sau $\sigma_{i,j,j}$ pentru divergenta in sens slab a lui $\boldsymbol{\sigma}$ si, adesea, pentru a simplifica exprimarea vom omite adjectivul "slaba."

Definim acum spatiul

$$\mathcal{H}_1 = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H} : \text{Div } \boldsymbol{\tau} \in L^2(\Omega)^d\}, \quad (11)$$

care este un spatiu Hilbert inzestrat cu produsul scalar

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_1} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_{L^2(\Omega)^d}$$

si norma asociata $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$.

Daca $\boldsymbol{\sigma}$ este functie suficient de neteda (e.g., $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\overline{\Omega})_s^{d \times d}$), atunci definim componenta normala a vectorului Cauchy $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$, σ_ν , si componenta tangentiala $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ dupa cum urmeaza:

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (12)$$

Teorema 3. [Formula lui Green; a se vedea de exemplu [33]]

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, dx + \int_{\Omega} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} \, dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{v} \, da \quad \forall \boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d. \quad (13)$$

Demonstratia acestei formule se face cu o tehnica standard. Mai precis, se demonstreaza aceasta formula mai intai pentru functii netede $\boldsymbol{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})^d$, si apoi se utilizeaza densitatea spatiului $C^\infty(\overline{\Omega})^d$ in $H^1(\Omega)^d$.

Tema Operatorul divergenta $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow L^2(\Omega)^d$ este un operator liniar si continuu.

Seminar 2

Continuam in seminar discutia inceputa in seminarul anterior privind elemente de mecanica mediilor continue. Am vazut exemple de conditii de contact (conditii in directia normala) iar astazi prezentam exemple de legi de frecare (conditii in directia tangentiala).

- **Lege de frecare neglijabila**

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_3. \quad (14)$$

Aceasta lege este o suficient de buna aproximare a realitatii in anumite situatii (desi este o idealizare), a se vedea de exemplu [10].

- **Legea lui Coulomb**

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq F_b, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -F_b \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{if} \quad \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_3, \quad (15)$$

unde $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}$ este deplasarea tangentiala si F_b este "pragul de frecare".

- **Legea lui Tresca**

Daca

$$F_b = F_b(\mathbf{x}) \quad (16)$$

in (15) suntem condusi la un caz particular al legii lui Coulomb de o insemnatate aparte: *legea lui Tresca*, caz in care analiza problemelor de contact este substantial simplificata.

Adesea, in literatura inginereasca, pragul de frecare F_b este ales astfel

$$F_b = F_b(\sigma_\nu) = \mu |\sigma_\nu| \quad (17)$$

unde $\mu > 0$ este *coeficientul de frecare*.

Alegerea (17) in (15) conduce la *versiunea clasica a legii lui Coulomb* care a fost intens studiata in literatura, a se vedea de exemplu [29].

Cand uzura suprafetei de contact se ia in considerare o alta versiune a legii lui Coulomb este mai potrivita (a se vedea de exemplu [34, 35, 36]).

$$F_b = \mu |\sigma_\nu| (1 - \delta |\sigma_\nu|)_+ \quad (18)$$

unde δ parametru pozitiv mic iar μ este coeficient de frecare.

Daca $|\sigma_\nu| = F$, atunci (17) conduce la pragul de frecare

$$F_b = \mu F. \quad (19)$$

iar (18) conduce la pragul de frecare

$$F_b = \mu F(1 - \delta F)_+. \quad (20)$$

Din (19) si (20) rezulta ca daca dam μ si δ atunci pragul de frecare F_b este o functie data definita pe zona de contact Γ_3 si, prin urmare, ajungem la legea lui Tresca.

Daca $|\sigma_\nu| = p_\nu(u_\nu - g)$, atunci (17) conduce la pragul de frecare,

$$F_b = \mu p_\nu(u_\nu - g). \quad (21)$$

iar (18) conduce la pragul de frecare,

$$F_b = \mu p_\nu(u_\nu - g)(1 - \delta p_\nu(u_\nu - g))_+. \quad (22)$$

Putem unifica expresia pragului de frecare in (1) si (2) punand

$$F_b = p_\tau(u_\nu - g), \quad (23)$$

unde p_τ este o functie data pozitiva ce se anuleaza cand argumentul este negativ (adica unde nu este contact). Intr-adevar, (1) si (2) se pot obtine din (3) punand

$$p_\tau = \mu p_\nu \quad (24)$$

si, respectiv,

$$p_\tau = \mu p_\nu(1 - \delta p_\nu)_+. \quad (25)$$

Remarca 4. Un model matematic ce descrie contactul dintre un corp deformabil (elastic) si o fundatie (obstacol) consta in a determina functiile necunoscute $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ ce verifica o lege de comportament in Ω , ecuatia de echilibru a lui Cauchy (in cazul proceselor stationare), conditia la limita in deplasari, conditia la limita in tractiuni, o conditie de contact (conditie in directia "normala") si o lege de frecare (conditie in directia "tangentiala").

Un astfel de model matematic este reprezentat prin intermediul unui sistem de ecuatii cu derivate parțiale asociate unor conditii la limita (liniare sau neliniare).

Pentru detalii in modelare matematica in mecanica contactului facem trimitere la [32, 33] precum si la referintele acestor monografii.

Saptamana a 3-a

Curs 3

Tematica acestui curs: probleme de contact ce conduc la ecuatii variationale liniare
Breviar de analiza functionala [a se vedea de exemplu [2, 32]]

Definiția 1. Fie X si Y spatii vectoriale.

O aplicatie $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ se numeste *forma biliniara* daca este liniara in fiecare argument, adica pentru oricare $u_1, u_2, u \in X, v_1, v_2, v \in Y$ si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v),$$

$$a(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2).$$

Daca $X = Y$, spunem ca forma biliniara este *simetrica* daca

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

Definiția 2. Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ si $(Y, \|\cdot\|_Y)$ doua spatii normate. O forma biliniara $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ se numeste *continua* daca exista $M > 0$ astfel incat

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_Y \quad \forall u \in X, \forall v \in Y.$$

Daca $X = Y$, spunem ca o forma biliniara a este *X-eliptica* daca exista $m > 0$ astfel incat

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Lema 3. [Lax-Milgram, [2]] Fie X un spatiu Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o forma biliniara, continua si X -eliptica si $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicatie liniara si continua. Atunci exista un unic element $u \in X$ astfel incat

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in X. \quad (1)$$

Daca in plus a este si simetrica atunci

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in X$$

unde

$$J : X \rightarrow \mathbb{R} \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v).$$

Ecuatia (1) se numeste ecuatie variationala liniara.

Fie $\varphi \in X'$. (X' este dualul lui X). Din Teorema de reprezentare a lui Riesz rezulta ca exista un unic element $f \in X$ astfel incat

$$\varphi(v) = (f, v)_X \quad \forall v \in X.$$

Din (1) rezulta

$$a(u, v) = (f, v)_X \quad \forall v \in X. \quad (2)$$

Fie X un spatiu Hilbert si $A : X \rightarrow X$ un operator adt.

Definiția 4. Operatorul A este tare monoton daca exista $m > 0$ astfel incat

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \quad (3)$$

Definiția 5. Operatorul A este Lipschitz exista $M > 0$ astfel incat

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (4)$$

Daca a este forma biliniara continua si X -eliptica, atunci putem defini un operator $A : X \rightarrow X$ liniar, continuu si tare monoton,

$$(Au, v)_X = a(u, v) \quad \forall v \in X.$$

Buna definire a operatorului A se bazeaza pe proprietatea de liniaritate si continuitate a aplicatiei

$$\psi_u : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \psi_u(v) = a(u, v) \quad \text{unde } u \in X \text{ fixat}.$$

Ecuatia variationala (2) este in aceasta situatie echivalenta cu ecuatia operatoriala $Au = f$.

Daca $A : X \rightarrow X$ este operator liniar, continuu si tare monoton atunci

$$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad a(u, v) = (Au, v)_X$$

este forma biliniara, continua si X -eliptica. Numim forma a forma asociata operatorului A .

O problema de contact bilateral cu frecare neglijabila

PROBLEMA 2. Sa se determine $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel incat

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (8)$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (10)$$

Admitem urmatoarele ipoteze:

$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ aplicatie liniara ;

exista $M > 0$ astfel incat

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M\|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3;$$

exista $m > 0$ astfel incat $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m\|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2;$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3 \quad g > 0.$$

Vom considera drept spatiu al functiilor test spatiul V_1 .

Fie $v \in V_1$.

Inmultim prima linie a problemei cu v si integram.

Admitem pentru inceput ca $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ sunt functii suficient de netede ce verifica problema la limita. Folosim formula lui Green si obtinem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau d\Gamma. \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \end{aligned}$$

Daca $v \in V_1$ atunci $\int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} d\Gamma = 0$. Utilizam acum conditiile la limita si obtinem

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_1.$$

Cu Teorema de reprezentare a lui Riesz definim $\mathbf{f}_1 \in V_1$ astfel:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{v})_{V_1} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \gamma \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V_1. \quad (11)$$

Prin urmare,

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = (\mathbf{f}_1, \mathbf{v})_{V_1}. \quad (12)$$

Am ajuns la urmatoarea formulare variationala:

PROBLEMA 3. *Sa se determine $\mathbf{u}$ astfel incat*

$$\mathbf{u} \in V_1, \quad \int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = (\mathbf{f}_1, \mathbf{v})_{V_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V_1. \quad (13)$$

Remarca 6. Problema 3 este "formal" echivalenta cu problema la limita (3)–(8), a se vedea de exemplu [10, 12, 29].

Teorema 7. *Admitem ipotezele anuntate anterior. Atunci Problema 3 are solutie unica.*

DEMONSTRATIE. Utilizam teorema de reprezentare a lui Riesz pentru a defini operatorul $A_1 : V_1 \rightarrow V_1$ dupa cum urmeaza:

$$(A_1 \mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1. \quad (14)$$

$$(A_1 \mathbf{u} - A_2 \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1. \quad (15)$$

Pe de alta parte,

$$\|A_1 \mathbf{u} - A_2 \mathbf{v}\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1. \quad (16)$$

Asadar, A_1 este un operator tare monoton si Lipschitz V_1 . Cum $\mathcal{F}$ este liniar, rezulta ca A_1 este de asemenea operator liniar.

Fie $a : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ forma biliniara atasata operatorului A_1 . Proprietatile lui A_1 implica faptul ca a este biliniara, continua si V_1 -eliptica. Aplicam Lema Lax-Milgram

□

O pereche de functii $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ ce verifica (3) si (3) se numeste *solutie slaba* a problemei (3)–(8).

Asadar, Problema (3)–(8) are o unica solutie slaba cu regularitatea $\mathbf{u} \in V_1$ si $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$.

Tema Fie X spatiu Hilbert si $u \in X$. Justificati ca

$$\psi_u : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \psi_u(v) = a(u, v)$$

este aplicatie liniara si continua.

Seminar 3

Fie problema la limita.

PROBLEMA 4. Sa se determine $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel incat

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (18)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (20)$$

$$-\sigma_\nu = F \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (22)$$

Admitem urmatoarele ipoteze:

$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ aplicatie liniara ;

exista $M > 0$ astfel incat

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3;$$

exista $m > 0$ astfel incat $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2;$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3 \quad g > 0.$$

$$F \in L^2(\Gamma_3) \quad \text{si} \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (23)$$

Fie $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ o pereche de functii suficient de netede ce verifica problema la limita data mai sus.

Vom considera drept spatiu al functiilor test spatiul V .

Fie $\mathbf{v} \in V$.

Inmultim prima linie a problemei cu $\mathbf{v}$ si integram.

Folosind formula lui Green si tinand cont de conditiile la limita putem scrie

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_3} F v_\nu \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Se poate arata ca

$$\mathbf{v} \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da - \int_{\Gamma_3} F v_\nu \, da$$

este o functionala liniara si continua pe V . Cu Teorema de reprezentare a lui Riesz definim $\mathbf{f} \in V$ astfel:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} \, da - \int_{\Gamma_3} F v_{\nu} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Suntem condusi astfel la urmatoarea formulare variationala.

PROBLEMA 5. *Sa se determine $\mathbf{u}$ astfel incat*

$$\mathbf{u} \in V, \quad \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (24)$$

Remarca 8. Problema 5 este echivalenta (formal) cu problema la limita (18)–(22). Intr-adevar, daca $\mathbf{u}$ este o solutie neteda a Problemei 5 si $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, utilizand argumente similare cu cele din [10, 12, 29] se poate arata ca $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ verifica (18)–(22) intr-un sens generalizat.

Teorema 9. *Admitem ipotezele enuntate anterior. Atunci Problema 5 are solutie unica.*

DEMONSTRATIE. Dat $\mathbf{u} \in V$, aplicatia $\mathbf{v} \rightarrow \int_{\Omega} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx$ este o aplicatie liniara si continua pe V . Prin urmare, utilizand Teorema de reprezentare a lui Riesz putem defini $A : V \rightarrow V$ dupa cum urmeaza:

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (25)$$

Observam ca $\mathbf{u}$ este solutie a Problemei 5 daca si numai daca $\mathbf{u} \in V$ si $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, sau echivalent

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Observam ca operatorul A este liniar.

Aratam acum ca A este operator tare monoton.

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} (\mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \, dx$$

pentru oricare $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (26)$$

In plus, operatorul este Lipschitz. Intr-adevar,

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (27)$$

Fie $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma biliniara asociata operatorului A . Cum operatorul A este liniar, tare monoton si Lipschitz, atunci a este biliniara, continua si coerciva.

Aplicam Lema Lax-Milgram. □

Fie $\mathbf{u}$ solutia problemei 5 (solutie asigurata de teorema anterioara) si fie $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$. Din proprietatile operatorului $\mathcal{F}$ rezulta ca $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$. In plus,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Luand $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^d \subset V$,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varphi}) \, dx = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_V \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

$$(\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega)^d} + (\mathbf{f}_0, \boldsymbol{\varphi})_{L^2(\Omega)^d} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)^d.$$

Utilizand densitatea spatiului $C_0^\infty(\Omega)^d$ in $L^2(\Omega)^d$ rezulta ca

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega. \tag{28}$$

Cum $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^d$, rezulta ca $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d$ si de aici rezulta imediat ca $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$.

O pereche de functii $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ ce verifica (18) si (5) se numeste *solutie slaba* a Problemei (18)–(22).

Asadar, Problema (18)–(22) are o unica solutie slaba cu regularitatea $\mathbf{u} \in V$ si $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$.

Tema Fie $\mathbf{f} \in L^2(\partial\Omega)^3$ si $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$. Justificati ca $\mathbf{f}(\cdot)\gamma\mathbf{v}(\cdot) \in L^1(\partial\Omega)$.

Saptamana a 4-a

Curs 4

Tematica acestui curs: probleme de contact ce conduc la ecuatii variationale neliniare Neliniaritatile pot fi generate de natura operatorului elastic din legea de comportament si/sau de conditiile la limita.

Breviar de analiza neliniara

Fie X un spatiu Hilbert si $A : X \rightarrow X$ un operator dat.

Definiția 1. Operatorul A este monoton daca

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

Definiția 2. Operatorul A este tare monoton daca exista $m > 0$ astfel incat

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \quad (1)$$

Definiția 3. Operatorul A este Lipschitz exista $M > 0$ astfel incat

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2)$$

Teorema 4. [Minty-Browder, a se vedea de exemplu [33] pag. 22] Fie X spatiu Hilbert si fie $A : X \rightarrow X$ operator tare monoton si Lipschitz. Atunci, pentru oricare $f \in X$ exista un unic element $u \in X$ astfel incat $Au = f$.

Propoziția 5. [a se vedea de exemplu [33] pag. 23] Fie X un spatiu Hilbert si $A : X \rightarrow X$ un operator tare monoton si Lipschitz. Atunci $A^{-1} : X \rightarrow X$ este operator tare monoton si Lipschitz.

O problema de contact cu complianta normala si frecare neglijabila

PROBLEMA 6. Sa se determine $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel incat

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (6)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (8)$$

Admitem urmatoarele ipoteze:

$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ aplicatie **liniara**;

exista $M > 0$ astfel incat

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3;$$

exista $m > 0$ astfel incat $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2;$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3 \quad g > 0.$$

$p_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ este aplicatie Lipschitz, monotona, **neliniara**.

In plus, $p_\nu(r) = 0$ pentru oricare $r \leq 0$.

Vom considera drept spatiu al functiilor test spatiul V .

Fie $v \in V$ si admitem ca $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ sunt functii suficient de netede ce verifica problema la limita.

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu)v_\nu d\Gamma. \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Cu Teorema de reprezentare a lui Riesz definim $\mathbf{f} \in V$ astfel:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Prin urmare,

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu)v_\nu d\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V.$$

Am ajuns la urmatoarea formulare variationala:

PROBLEMA 7. Sa se determine $\mathbf{u}$ astfel incat

$$\mathbf{u} \in V, \quad \int_{\Omega} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(u_{\nu})v_{\nu} d\Gamma = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Teorema 6. In ipotezele anuntate, Problema 7 are solutie unica.

DEMONSTRATIE. Definim operatorul $A : V \rightarrow V$ dupa cum urmeaza:

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(u_{\nu})v_{\nu} d\Gamma \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Tinand cont de faptul ca p_{ν} este aplicatie monotona obtinem:

$$(A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_V \geq m_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

Deci A este tare monoton.

In plus, tinand cont de faptul ca p_{ν} este aplicatie Lipschitz, obtinem

$$\|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_V \leq L_A \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

unde $L_A = L_A(\mathcal{F}, p_{\nu}, c_{tr}, c_K) > 0$.

Asadar, A este un operator tare monoton si Lipschitz. Desi $\mathcal{F}$ este operator liniar, cum p_{ν} nu este aplicatie liniara rezulta ca operatorul A nu este liniar. Nu putem aplica Lax-Milgram. Aplicam insa Teorema 4. $\square$

O pereche de functii $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ unde $\mathbf{u}$ este solutia Problemei 7 si $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ se numeste *solutie slaba* a Problemei 6.

Problema analizata este neliniara datorita conditiei de contact.

Remarca 7. Studiul poate fi continuat prin considerarea unei clase de probleme la limita ce modeleaza contac bilateral cu frecare regularizata. A se vedea de exemplu problemele antiplane 9.4 si 9.8 din [32] (paginile 174, 178).

In cazul Problemei 9.4, formularea variationala (9.24) se poate scrie echivalent ca o ecuatie variationala neliniara astfel:

$$a(u_{\rho}, v) + (\nabla j_{\rho}, v)_V = (f, v)_V \quad \forall v \in V, \tag{9}$$

unde

$$j_{\rho}(v) = \int_{\Gamma_3} g(\sqrt{v^2 + \rho^2} - \rho) d\Gamma.$$

In cazul Problemei 9.8, formularea variationala (9.41) se poate scrie echivalent ca o ecuatie variationala neliniara de forma (9) unde

$$j_\rho(v) = \frac{1}{\rho + 1} \int_{\Gamma_3} g|v|^{\rho+1} d\Gamma.$$

Tema Reluati studiul modelului anterior in cazul "puternic neliniar", admitand ca $\mathcal{F}$ este operator neliniar.

Seminar 4

Alte exemple de probleme neliniare care necesita aplicarea Teoremei 4 pot fi scrise utilizand modelele din Curs 3 dar admitand ca operatorul elastic $\mathcal{F}$ este neliniar.

- Mai precis, putem considera modelul

PROBLEMA 8. Sa se determine $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel incat

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (13)$$

$$u_\nu = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (15)$$

admitand ipotezele

$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ aplicatie **neliniara** ;

exista $M > 0$ astfel incat

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3;$$

exista $m > 0$ astfel incat $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2;$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3 \quad g > 0.$$

Ca in cursul trecut se obtine urmatoarea formulare variationala

PROBLEMA 9. Sa se determine $\mathbf{u}$ astfel incat

$$\mathbf{u} \in V_1, \quad \int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = (\mathbf{f}_1, \mathbf{v})_{V_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V_1.$$

Teorema 8. Admitem ipotezele anuntate anterior. Atunci Problema 9 are solutie unica.

DEMONSTRATIE. Definim $A_1 : V_1 \rightarrow V_1$

$$(A_1 \mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1.$$

A_1 este operator tare monoton si Lipschitz. Nefind liniar, nu putem aplica Lax- Milgram. Aplicam Teorema 4. $\square$

- De asemenea, putem considera modelul:

PROBLEMA 10. Sa se determine $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel incat

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (17)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (19)$$

$$-\sigma_\nu = F \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (21)$$

si admitem acum urmatoarele ipoteze

$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ aplicatie **neliniara** ;

exista $M > 0$ astfel incat

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3;$$

exista $m > 0$ astfel incat $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2;$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3 \quad g > 0.$$

$$F \in L^2(\Gamma_3) \quad \text{si } F(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Avem urmatoarea formulare variationala:

PROBLEMA 11. Sa se determine $\mathbf{u}$ astfel incat

$$\mathbf{u} \in V, \quad \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Cu un demers asemanator celui anterior se poate arata ca Problema 11 are solutie unica aplicand Teorema 4 deoarece operatorul asociat in acest caz

$$A : V \rightarrow V \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

este tare monoton si Lipschitz si putem sa aplicam Teorema 4.

Săptămâna a 5-a

Curs 5

Tematica acestei saptamani este: probleme de contact ce conduc la inegalitati variationale de tipul I.

Amintim pentru inceput cateva elemente de analiza neliniara utile.

Background de analiza neliniara

Fie X un spatiu Hilbert, $A : X \rightarrow X$ un operator, $K \subset X$ si $f \in X$.

Definiția 1. Operatorul A este tare monoton daca exista $m > 0$ astfel incat

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \quad (1)$$

Definiția 2. Operatorul A este Lipschitz exista $M > 0$ astfel incat

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2)$$

Consideram problema: sa se determine $u \in K$ astfel incat:

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (3)$$

Inegalitatea variationala (3) se numeste inegalitate variationala de tipul I.

In studiul unei astfel de probleme avem urmatorul rezultat de existenta si unicitate.

Teorema 3. Fie X un spatiu Hilbert real si fie $K \subset X$ o submultime nevida inchisa convexa. Presupunem ca $A : X \rightarrow X$ este operator tare monoton si Lipschitz. Atunci, pentru orice $f \in X$ inegalitatea variationala (3) are o unica solutie.

Notatii si preliminarii

Prin $\mathbb{S}^3$ vom nota spatiul tensorilor simetrici de ordinul doi. Fiecare câmp in $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{S}^3$ se va nota cu litere boldate. Prin $\cdot$ si $:$ vom nota produsele scalare pe $\mathbb{R}^3$ respectiv $\mathbb{S}^3$. Astfel,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\|_{R^3} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\|_{S^3} = (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau})^{1/2}, \quad \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^3.$$

Pentru a simplifica scrierea in continuare vom adopta conventia indicelui mut (conditia indicelui care se repeta). De exemplu, adoptand aceasta conventie putem scrie $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i$ si $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij} \tau_{ij}$.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu marginit. Introducem urmatoarele spatii de functii pe Ω .

$$\begin{aligned} H &= L^2(\Omega)^3 = \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} &= L_s^2(\Omega)^{3 \times 3} = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in \mathcal{H}\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in H\} \end{aligned}$$

unde

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

Indicele ce urmeaza virgulei indica o derivata partiala.

Spatiile H , $\mathcal{H}$, H_1 si $\mathcal{H}_1$ sunt spatii Hilbert reale inzestrate cu produsele scalare

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H &= \int_{\Omega} u_i v_i \, dx, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_1} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_H. \end{aligned}$$

Normele induse de aceste produse scalare pe spatiile H , $\mathcal{H}$, H_1 si $\mathcal{H}_1$ se vor nota astfel: $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_{H_1}$ si respectiv $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$.

Presupunem ca frontiera lui Ω , notata cu Γ , este Lipschitz. Notam cu $\boldsymbol{\nu}$ versorul normalei exterioare la suprafata.

Notam cu $\boldsymbol{\gamma}$ operatorul de urma Sobolev vectorial:

$$\boldsymbol{\gamma} : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^3,$$

si prin H_{Γ} , imaginea lui H_1 prin $\boldsymbol{\gamma}$, i.e., $H_{\Gamma} = \boldsymbol{\gamma}(H_1)$. In acord cu teorema de urma a lui Sobolev, $\boldsymbol{\gamma}$ este operator liniar si continuu. Mai mult, $\boldsymbol{\gamma}$ este operator compact.

Fie Γ_1 o parte masurabila a lui Γ astfel incat $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$.

Consideram urmatorul spatiu vectorial.

$$V = \{\mathbf{v} \in H_1 \mid \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ a.e. on } \Gamma_1\}.$$

Fiind subspatiu inchis al spatiului Hilbert H_1 , $(V, (\cdot, \cdot)_{H_1}, \|\cdot\|_{H_1})$ este un spatiu Hilbert.

Amintim aici următoarea inegalitate a lui Korn: exista $c_K = c_K(\Omega, \Gamma_1) > 0$ astfel incat

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \geq c_K \|\mathbf{v}\|_{H_1}, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Utilizand aceasta inegalitate se poate demonstra ca V este spatiu Hilbert inzestrat cu următoarea structura:

$$(\cdot, \cdot)_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}; \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Fie

$$H^1(\Omega)^3 = \{\mathbf{v} = (v_i) \mid v_i \in H^1(\Omega)\}.$$

Acesta este un spatiu Hilbert inzestrat cu următoarea structura:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega)^3} = \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i)_{H^1(\Omega)}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^3} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2}.$$

Notam ca $H_1 = H^1(\Omega)^3$ (egalitate algebrica) si normele $\|\cdot\|_{H_1}$ si $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^3}$ sunt echivalente; a se vedea [31].

Fie $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$. Notam prin v_n and $\mathbf{v}_\tau$ componentele normala si respectiv tangentiala definite dupa cum urmeaza:

$$v_n = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_\tau = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} - v_n \boldsymbol{\nu} \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Fie Γ_3 o alta parte masurabila a lui Γ astfel incat $\Gamma_3 \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

Admitem ca $\boldsymbol{\sigma}$ este functie suficient de neteda. Definim componentele normala si respectiv tangentiala ale vectorului Cauchy $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}$ astfel:

$$\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_n \boldsymbol{\nu}. \quad (4)$$

Notam ca următoarea identitate are loc.

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} = \sigma_n v_n + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \quad (5)$$

Reamintim de asemenea următoarea formula de tip Green.

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \quad (6)$$

Pentru mai multe detalii privind spatii de functii in mecanica contactului facem trimitere la [10, 31, 33].

Descrierea modelului

Consideram un corp deformabil ce ocupa un domeniu marginit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Frontiera domeniului este partitionata in trei parti masurabile Γ_1 , Γ_2 si Γ_3 astfel incat

$meas(\Gamma_1) > 0$ si $\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \emptyset$. Corpul este incastrat pe Γ_1 , in Ω actioneaza forte volumice de densitate $\mathbf{f}_0$ iar pe Γ_2 actioneaza tractiuni la suprafata de densitate $\mathbf{f}_2$. Pe Γ_3 corpul este in contact unilateral cu o fundatie rigida, cu frecare neglijabila. Vom modela contactul prin intermediul conditiei lui Signorini cu gap nul.

Notam cu $\mathbf{u} = (u_i)$ vectorul deplasare, cu $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ tensorul deformatiilor infinitezimale si cu $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ tensorul tensiune Cauchy.

Vom descrie comportamentul materialului din care este confectionat corpul prin intermediul urmatoarei legi constitutive:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (7)$$

unde $\mathcal{F}$ este un operator (posibil neliniar) ce verifica:

$$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3; \quad (8)$$

exista $M > 0$ a.i.

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3; \quad (9)$$

exista $m > 0$ a.i. $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2; \quad (10)$$

A se vedea de exemplu [10] pentru situatia mai generala:

$$\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3;$$

exista $M > 0$ a.i.

$$\|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3, \text{ a.p.t in } \Omega;$$

exista $m > 0$ a.i. $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$, a.e in Ω

$$(\mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2;$$

$\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^3$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ este masurabila Lebesgue Ω ;

$\mathbf{x} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^3})$ belongs to $L^2(\Omega)^{3 \times 3}$.

In acord cu cadrul fizic mentionat anterior descriem modelul mecanic prin intermediul urmatoarei probleme la limita.

PROBLEMA 12. Sa se determine $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ si $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$ astfel incat

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2. \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = 0, \quad u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \text{ pe } \Gamma_3. \quad (15)$$

Studiul variational al modelului Ne propunem sa formulam variational modelul descris anterior prin intermediul teorie inegalitatilor variationale de primul tip. In plus de (20)-(3) vom admite urmatoarele ipoteze.

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3. \quad (16)$$

Fie $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ functii suficient de netede ce verifica Problema 12.

Aplicand formula lui Green obtinem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu \, da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau \, da. \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Deoarece $\boldsymbol{\sigma}_\tau = 0$ a.p.t. pe Γ_3 , obtinem

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu \, da \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Prin urmare, pentru oricare $\mathbf{v} \in V$,

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) \, da.$$

Definim

$$A : V \rightarrow V; \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (18)$$

si $\mathbf{f} \in V_1$,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\Gamma. \quad (19)$$

]

Definim de asemenea

$$K = \{\mathbf{v} \in V \mid v_\nu \leq 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_3\}.$$

Suntem condusi la urmatoarea formulare variationala a Problemei 12.

PROBLEMA 13. Sa se determine $\mathbf{u} \in K$ astfel incat

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (20)$$

Utilizand ipotezele (20-3), deducem ca operatorul A definit in (2) este Lipschitz si tare monoton. Se verifica faptul ca multimea K este nevida, convexa si inchisa. Aplicam Teorema 1 si deducem ca Problema 18 are o unica solutie.

Notam ca solutia Problemei 18 depinde Lipschitz de data $\mathbf{f}$.

Problema 18 se numeste *formulare variationala primara*.

Numim solutie slaba pentru Problema 12 o pereche $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ unde $\mathbf{u}$ verifica (14) si $\boldsymbol{\sigma}$ verifica (12).

TEMA PROIECT Formulare variationala duala pentru Problema 12 (de studiat paginile 131-137 in [33])

Seminar 5

(1) Am studiat la curs un model guvernat de un operator elastic $\mathcal{F}$ ce verifica:

$$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3;$$

exista $M > 0$ a.i.

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3;$$

exista $m > 0$ a.i. $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2.$$

Vom indica trei exemple de astfel de operatori. Primul, liniar, ceilalti doi neliniari.

- Ca un prim exemplu putem considera urmatoarea lege constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})I_3 + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (21)$$

unde $\lambda > 0$ si $\mu > 0$ sunt constantele lui Lamé, $\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}$, $I_3 = (\delta_{ij})$ este tensorul unitate in $\mathbb{S}^3$.

Aceasta este legea de comportament clasica pentru materiale elastice omogene si izotrope.

Printr-un calcul elementar observam ca aplicatia

$$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3; \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})I_3 + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

verifica (20)-(3).

- Ca un al doilea exemplu putem considera:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})I_3 + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \beta(\boldsymbol{\varepsilon} - P_K\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (22)$$

unde $\lambda > 0$ si $\mu > 0$ sunt parametri de material, $\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}$, $I_3 = (\delta_{ij})$ este tensorul unitate in $\mathbb{S}^3$, K este o submultime inchisa si convexa a lui $\mathbb{S}^3$ ce contine $0_{\mathbb{S}^3}$, $\mathcal{P}_K : \mathbb{S}^3 \rightarrow K$ este operatorul proiectie pe K , si β este o constanta strict pozitiva.

Utilizand proprietatea de non-expansivitate a operatorului proiectie, deducem ca aplicatia

$$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3; \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})I_3 + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \beta(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathcal{P}_K\boldsymbol{\varepsilon})$$

verifica (20)-(3).

- Ca un al treilea exemplu putem considera urmatoarea lege constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = k(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})I_3 + \psi(\|\boldsymbol{\varepsilon}^D\|_{\mathbb{S}^3}^2)\boldsymbol{\varepsilon}^D, \quad (23)$$

unde $k > 0$ este un coeficient de material, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție constitutivă și $\boldsymbol{\varepsilon}^D = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})I_3$, este tensorul deviatoric al lui $\boldsymbol{\varepsilon}$. Admitem ca

$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este diferentiabilă

există c_1, c_2, d_1 și d_2 astfel încât :

$$\psi(\xi^2) \leq d_1, \quad -c_1 \leq \psi'(\xi^2) \leq 0, \quad c_2 \leq \psi(\xi^2) + 2\psi'(\xi^2)\xi \leq d_2,$$

a se vedea [10] p.125.

În această situație aplicația

$$\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3; \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = k(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})I_3 + \psi(\|\boldsymbol{\varepsilon}^D\|_{\mathbb{S}^3}^2)\boldsymbol{\varepsilon}^D,$$

verifică (20)-(3).

- (2) Tehnica abordată la curs se poate aplica și pentru următoarea problemă obstacol pentru membrane.

PROBLEMA 14. *Să se determine $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ a.i.*

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}) + f_0(\mathbf{x}) &= 0 && \text{în } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 && \text{pe } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) &= f_2(\mathbf{x}) && \text{pe } \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad u \leq 0 \quad u(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) &= 0 && \text{pe } \Gamma_3. \end{aligned}$$

- (3) Am studiat la curs problema de contact Signorini cu gap nul. Mai general, gapul (=distanța dintre corpul deformabil și fundația rigidă, distanța măsurată pe direcția normalei la tangenta la frontiera corpului deformabil) poate fi nenul. Desemnăm prin g gapul. În general $g \in L^2(\Gamma_3)$ $g \geq 0$ a.p.t. pe Γ_3 . Totuși, pentru anumite geometrii particulare ale corpurilor se poate presupune ca g este un număr real strict pozitiv.

Problema la limită cu gap nenul are următoarea formulare.

PROBLEMA 15. *Să se determine $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$ astfel încât*

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{în } \Omega, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{în } \Omega, \tag{25}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2. \tag{27}$$

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3. \tag{28}$$

Tehnica abordată la curs se poate aplica și aici dar mulțimea K depinde acum de g .

$$K = K(g) = \{\mathbf{v} \in V \mid v_\nu \leq g \text{ a.p.t. pe } \Gamma_3\}.$$

Suntem conduși de această dată la următoarea formulare variațională a Problemei 12.

PROBLEMA 16. *Să se determine $\mathbf{u} \in K(g)$ astfel încât*

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in K(g). \quad (29)$$

Aplicând Teorema 1 deducem că Problema 16 are o unică soluție ce depinde Lipschitz de datele $\mathbf{f}$.

Numim soluție slabă pentru Problema 15 o pereche $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ unde $\mathbf{u}$ verifică (29) și $\boldsymbol{\sigma}$ verifică (25).

Pentru detalii referitoare la rezolvarea Problemei 15 a se vedea paginile 124-127 în [33].

- **TEMA** Fie $g \geq 0$ si $K(g) = \{\mathbf{v} \in V_1 \mid v_\nu \leq g \text{ a.p.t. pe } \Gamma_3\}$. Justificati ca multimea K_g este nevida, inchisa si convexa.
- **TEMA PROIECT** Studiatii regularitatea solutiei slabe a Problemei 15(pag 127 in [33])

Săptămâna a 6-a

Curs 6

Tematica acestei saptamani este: probleme de contact ce conduc la inegalitati variationale de tipul II.

Background de analiza neliniara

Fie X un spatiu Hilbert, $K \subset X$, $A : X \rightarrow X$ un operator dat, $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ o functionala data si $f \in X$.

Consideram problema: sa se determine u astfel incat:

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1)$$

Inegalitatea variationala (1) se numeste inegalitate variationala de tipul II.

In studiul acestei probleme avem urmatorul rezultat de existenta si unicitate.

Teorema 1. *Fie X un spatiu Hilbert real si fie $K \subset X$ o submultime nevida inchisa convexa. Presupunem ca $A : K \rightarrow X$ este operator tare monoton si Lipschitz si ca $j : K \rightarrow \mathbb{R}$ este o functionala convexa si inferior semicontinua. Atunci, pentru orice $f \in X$ inegalitatea variationala (1) are o unica solutie.*

Background de spatii de functii

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu marginit cu frontiera neteda.

$$H = L^2(\Omega)^3 = \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)_s\},$$

$$\mathcal{H} = L_s^2(\Omega)^{3 \times 3} = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\},$$

$$H_1 = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in L^2(\Omega)_s\},$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^3\}$$

$$V = \{\mathbf{v} \in H_1 \mid \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

$$H^1(\Omega)^3 = \{\mathbf{v} = (v_i) \mid v_i \in H^1(\Omega)\}.$$

$$H_1 = H^1(\Omega)^3$$

Consideram spatiul vectorial

$$V_1 = \left\{ \mathbf{v} \in V \mid v_n = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_3 \right\}.$$

$(V_1, (\cdot, \cdot)_{V_1}, \|\cdot\|_{V_1})$ este un spatiu Hilbert, unde

$$(\cdot, \cdot)_{V_1} : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1.$$

Pentru mai multe detalii privind spatii de functii in mecanica contactului facem trimitere la [10, 31, 33].

Descrierea modelului

Consideram un corp deformabil ce ocupa un domeniu marginit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Frontiera domeniului este presupusa suficient de neteda si este partitionata in trei parti masurabile Γ_1 , Γ_2 si Γ_3 astfel incat $meas(\Gamma_1) > 0$ si $\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \emptyset$. Corpul este incastrat pe Γ_1 , in Ω actioneaza forte volumice de densitate $\mathbf{f}_0$ iar pe Γ_2 actioneaza tractiuni la suprafata de densitate $\mathbf{f}_2$. Pe Γ_3 corpul este in contact bilateral cu o fundatie rigida, cu frecare neneglijabila. Vom modela frecarea prin intermediul legii lui Tresca.

Ca de obicei, vom nota cu $\mathbf{u} = (u_i)$ vectorul deplasare, cu $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ tensorul deformatiilor infinitezimale si cu $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ tensorul tensiune Cauchy.

In acord cu cadrul fizic mentionat anterior descriem modelul mecanic prin intermediul urmatoarei probleme la limita.

PROBLEMA 17. Sa se determine $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ si $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$ astfel incat

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2. \quad (5)$$

$$u_\nu = 0, \quad \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq g \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -g \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (6)$$

- (2) reprezinta ecuatia de echilibru;
- (3) reprezinta legea constitutiva (legea de material);
- (4) reprezinta conditia la limita in deplasari (conditie omogena);
- (5) reprezinta conditia la limita in tractiuni;
- (6) reprezinta conditia de contact bilateral cu frecare Tresca. Mai precis, $u_\nu = 0$ modeleaza contactul bilateral (contactul dintre solidul deformabil si fundatie nu se pierde pe Γ_3 de-a lungul procesului) iar $\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq g$, $\boldsymbol{\sigma}_\tau = -g \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|}$ este legea lui Tresca (caz particular al legii lui Coulomb). In (6), $g > 0$ desemneaza pragul de frecare.

Studiul variational al modelului Ne propunem sa formulam variational modelul descris anterior prin intermediul teorie inegalitatilor variationale de al doilea tip.

Admitem urmatoarele ipoteze.

$\mathcal{F}$ este un operator (posibil neliniar) ce verifica:

$$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3; \quad (7)$$

exista $M > 0$ astfel incat

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3; \quad (8)$$

exista $m > 0$ astfel incat $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2; \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3 \quad g > 0. \quad (10)$$

Fie $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ functii suficient de netede ce verifica Problema 17.

Vom folosi drept spatiu al functiilor test spatiul Hilbert V_1 .

Aplicam formula lui Green si obtinem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu} v_{\nu} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot \mathbf{v}_{\tau} d\Gamma. \quad \forall \mathbf{v} \in H_1. \end{aligned}$$

Deci

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot \mathbf{v}_{\tau} d\Gamma. \quad \forall \mathbf{v} \in V_1.$$

Definim

$$A : V_1 \rightarrow V_1; \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_1} = \int_{\Omega} \mathcal{F} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx, \quad (11)$$

si $\mathbf{f} \in V_1$,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_{V_1} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (12)$$

Definim acum functionala

$$j : V_1 \rightarrow \mathbb{R}; \quad j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} g \|\mathbf{v}_{\tau}(\mathbf{x})\| d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V_1. \quad (13)$$

Utilizand (6), se poate demonstra ca

$$j(\mathbf{v}) \geq - \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot \mathbf{v}_{\tau} d\Gamma \quad \mathbf{v} \in V_1$$

si

$$j(\mathbf{u}) = - \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot \mathbf{u}_{\tau} d\Gamma.$$

Suntem astfel condusi la urmatoarea formulare variationala a Problemei 17.

PROBLEMA 18. *Sa se determine $\mathbf{u} \in V_1$ astfel incat*

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{V_1} + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{V_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V_1. \quad (14)$$

Notam ca operatorul A este Lipschitz si tare monoton si din (32) rezulta ca $j : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ este functionala convexa si continua.

Aplicam Teorema 1 si deducem ca Problema 17 are o unica solutie.

Notam ca solutia Problemei 17 depinde Lipschitz de data $\mathbf{f}$. Pentru mai multe detalii facem trimitere la [33].

O pereche de functii $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ ce verifica (14) si (3) se numeste *solutie slaba* pentru Problema 17.

TEMA PROIECT Solutia slaba are regularitatea $\mathbf{u} \in V_1$ si $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$ (a se vedea pagina 148 in [33]).

TEMA Functionala j definita in (32) este convexa si inferior semicontinua.

Seminar 6

Considerăm o problema la limita ce poate fi studiată cu tehnica învățată la curs.

PROBLEMA 19. *Să se determine $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ și $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel încât*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (15)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (16)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ pe } \Gamma_1, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (18)$$

$$-\sigma_\nu = F \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (19)$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\mu |\sigma_\nu| \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{if } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (20)$$

Amintim că (15) reprezintă legea de material, (16) este ecuația de echilibru, (17) este condiția la limită în deplasări și (18) este condiția la limită în tracțiuni. Spre deosebire de problema studiată la curs, ultima condiție la limită este înlocuită cu (19)-(20), condiție de contact cu tensiune normală impusă și frecare neneglijabilă (μ desemnează coeficientul de frecare).

În studiul variational al modelului vom utiliza următoarele ipoteze.

$\mathcal{F}$ este un operator (posibil neliniar) ce verifică:

$$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3; \quad (21)$$

există $M > 0$ astfel încât

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3; \quad (22)$$

există $m > 0$ astfel încât $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2; \quad (23)$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3. \quad (24)$$

$$F \in L^2(\Gamma_3) \quad \text{și} \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (25)$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3) \quad \text{și} \quad \mu(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \quad (26)$$

Vom utiliza drept spațiu al funcțiilor test spațiul V .

Fie $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ o pereche de functii netede ce verifica Problema 19 si fie $\mathbf{v} \in V$.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(v_{\nu} - u_{\nu}) d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (27)$$

Utilizand (20) deducem ca

$$\boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}) \geq \mu |\sigma_{\nu}| \|\mathbf{u}_{\tau}\| - \mu |\sigma_{\nu}| \|\mathbf{v}_{\tau}\| \quad \text{a.p.t. pe } \Gamma_3. \quad (28)$$

Intr-adevar, daca:

- $\mathbf{x} \in \Gamma_3$ astfel incat $\mathbf{u}_{\tau}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ avem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau})(\mathbf{x}) &= -\mu(\mathbf{x}) |\sigma_{\nu}(\mathbf{x})| \frac{\mathbf{u}_{\tau}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{u}_{\tau}(\mathbf{x})\|} \cdot (\mathbf{v}_{\tau}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{\tau}(\mathbf{x})) \\ &\geq \mu(\mathbf{x}) |\sigma_{\nu}(\mathbf{x})| \|\mathbf{u}_{\tau}(\mathbf{x})\| - \mu(\mathbf{x}) |\sigma_{\nu}(\mathbf{x})| \|\mathbf{v}_{\tau}(\mathbf{x})\|, \end{aligned}$$

deoarece $\mathbf{u}_{\tau} \cdot \mathbf{u}_{\tau} = \|\mathbf{u}_{\tau}\|^2$ si $\mathbf{u}_{\tau} \cdot \mathbf{v}_{\tau} \leq \|\mathbf{u}_{\tau}\| \|\mathbf{v}_{\tau}\|$;

- $\mathbf{x} \in \Gamma_3$ astfel incat $\mathbf{u}_{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ avem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}) &= \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot \mathbf{v}_{\tau} \geq -\|\boldsymbol{\sigma}_{\tau}\| \|\mathbf{v}_{\tau}\| \\ &\geq -\mu |\sigma_{\nu}| \|\mathbf{v}_{\tau}\| = \mu |\sigma_{\nu}| \|\mathbf{u}_{\tau}\| - \mu |\sigma_{\nu}| \|\mathbf{v}_{\tau}\|, \end{aligned}$$

deoarece $\|\boldsymbol{\sigma}_{\tau}\| \leq \mu |\sigma_{\nu}|$ si $\|\mathbf{u}_{\tau}\| = 0$.

Integram (28) pe Γ_3 si obtinem

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot (\mathbf{v}_{\tau} - \mathbf{u}_{\tau}) d\Gamma \geq \int_{\Gamma_3} \mu |\sigma_{\nu}| (\|\mathbf{u}_{\tau}\| - \|\mathbf{v}_{\tau}\|) d\Gamma. \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dx + \int_{\Gamma_3} \mu F(\|\mathbf{v}_{\tau}\| - \|\mathbf{u}_{\tau}\|) d\Gamma \\ & \geq \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_3} F(v_{\nu} - u_{\nu}) d\Gamma. \end{aligned}$$

Deducem ca

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\mathcal{H}} + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V. \quad (30)$$

unde $\mathbf{f} \in V$,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_3} F v_{\nu} d\Gamma; \quad (31)$$

$$j : V \rightarrow \mathbb{R}; \quad j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu F \|\mathbf{v}_\tau(\mathbf{x})\| d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (32)$$

Utilizand legea constitutiva suntem condusi la urmatoarea formulare variationala:

PROBLEMA 20. *Sa se determine $\mathbf{u} \in V$ astfel incat*

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (33)$$

unde

$$A : V \rightarrow V; \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx. \quad (34)$$

Aplicam Teorema 1 si deducem ca Problema 19 are o unica solutie. Pentru mai multe detalii facem trimitere la [33].

TEMA i) Fie $\mu \in L^\infty(\Gamma_3)$, $F \in L^2(\Gamma_3)$ si $\mathbf{v} \in V$. Justificati ca $\mu F \|\mathbf{v}_\tau\| \in L^1(\Gamma_3)$.

ii) j este convexa si inferior semicontinua.

TEMA PROIECT Solutia slaba are regularitatea $\mathbf{u} \in V_1$ si $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$ (a se vedea pagina 147 in [33]).

Săptămâna a 7-a

Curs 7

Tematica acestei saptamani este: probleme de contact ce conduc la inegalitati cvasivariationale.

Background de analiza neliniara

Fie X un spatiu Hilbert, $K \subset X$, $A : K \rightarrow X$ un operator dat, $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ o functionala data si $f \in X$.

Consideram problema: sa se determine u astfel incat:

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(v, u) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \quad (1)$$

Inegalitatea (1) se numeste inegalitate cvasivariationala.

In studiul acestei probleme vom prezenta doua posibile abordari. O prima abordare este bazata pe Teorema lui Banach de punct fix. A doua abordare este bazata pe Teorema de punct fix a lui Schauder.

- Prima abordare

Admitem urmatoarele ipoteze:

$$A : K \rightarrow X \text{ este tare monoton } (m) \text{ si Lipschitz } (M). \quad (2)$$

$$K \subset X \text{ submultime nevida, inchisa, convexa.} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \eta \in K, \quad j(\eta, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ convexa si i.s.c.} \\ \exists \alpha \geq 0 \text{ such that} \\ \quad \left. \begin{array}{l} j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in K. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Teorema 1. *Fie X un spatiu Hilbert. Admitem ipotezele mentionate anterior. In plus, presupunem ca $m > \alpha$. Atunci, pentru oricare $f \in X$ inegalitatea cvasivariationala (1) are solutie unica.*

- A doua abordare

Admitem următoarele ipoteze:

$$A : K \rightarrow X \text{ este tare monoton si Lipschitz} \quad (5)$$

$$K \subset X \text{ submultime nevida, inchisa, convexa.} \quad (6)$$

$$0_X \in K. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \forall \eta \in K, \quad v \mapsto j(\eta, v) : K \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{este aplicatie convexa } j(\eta, v) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad \text{si } j(\eta, 0_X) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Pentru orice sir } \{\eta_n\} \subset K \text{ si orice sir } \{u_n\} \subset K \text{ astfel incat} \\ \eta_n \rightharpoonup \eta \text{ in } X, \quad u_n \rightharpoonup u \text{ in } X \text{ si } \forall v \in K, \\ \text{se verifica} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n)] \leq j(\eta, v) - j(\eta, u). \end{aligned} \quad (9)$$

Teorema 2. *Fie X un spatiu Hilbert. Admitem ipotezele (5)-(9). Atunci, pentru oricare $f \in X$ inegalitatea (1) are cel putin o solutie.*

In prezentul curs vom discuta doua modele: un model general 3D in teoria elasticitatii si un model antiplan.

Descrierea modelului 3D

Consideram un corp deformabil ce ocupa un domeniu marginat $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Frontiera domeniului este presupusa suficient de neteda si este partitionata in trei parti masurabile Γ_1, Γ_2 si Γ_3 astfel incat $meas(\Gamma_1) > 0$ si $\Gamma_1 \cap \Gamma_3 = \emptyset$. Corpul este incastrat pe Γ_1 , in Ω actioneaza forte volumice de densitate $\mathbf{f}_0$ iar pe Γ_2 actioneaza tractiuni la suprafata de densitate $\mathbf{f}_2$. Pe Γ_3 corpul este in contact bilateral cu o fundatie deformabila, cu frecare neneglijabila.

Ca de obicei, vom nota cu $\mathbf{u} = (u_i)$ vectorul deplasare, cu $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ tensorul deformatiilor infinitezimale si cu $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ tensorul tensiune Cauchy.

In acord cu cadrul fizic mentionat anterior descriem modelul mecanic prin intermediul urmatoarei probleme la limita.

PROBLEMA 21. Sa se determine $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel incat

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (10)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (13)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| &\leq p_\tau(u_\nu - g), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau &= -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{if } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (15)$$

Studiul variational al modelului

Admitem urmatoarele ipoteze.

$\mathcal{F}$ este un operator (posibil neliniar) ce verifica:

$$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3; \quad (16)$$

exista $M > 0$ astfel incat

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3; \quad (17)$$

exista $m > 0$ astfel incat $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2; \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3 \quad g > 0. \quad (19)$$

$$p_e : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad e \in \{\nu, \tau\}.$$

Exista $L_e > 0$ astfel incat

$$\begin{aligned} |p_e(\mathbf{x}, r_1) - p_e(\mathbf{x}, r_2)| &\leq L_e |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} &\in \Omega. \end{aligned} \quad (20)$$

Aplicatia $\mathbf{x} \mapsto p_e(\mathbf{x}, r)$ este masurabila pe Γ_3 ,
pentru oricare $r \in \mathbb{R}$.

$$p_e(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \forall r \leq 0, \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Vom considera drept spatiu al functiilor test spatiul V .

Definim operatorul A ,

$$A : V \rightarrow V; \quad (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx.$$

definim $\mathbf{f} \in V$,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_3} Fv_\nu \, d\Gamma; \quad (21)$$

si de asemenea definim $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dupa cum urmeaza

$$\begin{aligned} j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g) |v_\nu| d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) \|v_\tau\| d\Gamma \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (22)$$

Fie $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ functii suficient de netede ce verifica Problema 25. Observam ca

$$\sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) = -p_\nu(u_\nu - g)v_\nu + p_\nu(u_\nu - g)u_\nu \quad \text{a.p.t. pe } \Gamma_3,$$

$$-p_\nu(u_\nu - g)v_\nu \geq -p_\nu(u_\nu - g)|v_\nu|, \quad p_\nu(u_\nu - g)u_\nu = p_\nu(u_\nu - g)|u_\nu|$$

a.p.t. pe Γ_3 .

Deci

$$\sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) \geq -p_\nu(u_\nu - g)|v_\nu| + p_\nu(u_\nu - g)|u_\nu| \quad \text{a.e. on } \Gamma_3.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) d\Gamma \\ &\geq - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g) |v_\nu| d\Gamma + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g) |u_\nu| d\Gamma. \end{aligned} \quad (23)$$

Pe de alta parte,

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau) d\Gamma \\ &\geq - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) \|\mathbf{v}_\tau\| d\Gamma + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu - g) \|\mathbf{u}_\tau\| d\Gamma. \end{aligned} \quad (24)$$

Utilizand formula lui Green, in baza observatiile anterioare, suntem condusi la urmatoarea formulare variationala:

PROBLEMA 22. *Sa se determine $\mathbf{u} \in V$ astfel incat*

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (25)$$

Spre deosebire de inegalitatile studiate in Cursul 6 (numite inegalitati variationale de tip II si guvernate de o functionala $j(\cdot)$), inegalitatile din acest curs sunt guvernate de bifunctionala $j(\cdot, \cdot)$ care depinde de solutie (numim inegalitatile din Cursul 7 inegalitati cvasivariationale)

Teorema 3. *[a se vedea de exemplu [33]] In ipotezele anuntate anterior, exista $L_0 = L_0(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F})$ astfel incat Problema 22 are solutie unica daca $L_\nu + L_\tau < L_0$.*

DEMONSTRAȚIE. Operatorul $A : V \rightarrow V$ este tare monoton (m) și Lipschitz (M).
 Funcționala $j(\boldsymbol{\eta}, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ satisface (7)(a).

Fie $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

$$\begin{aligned}
 & j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\
 &= \int_{\Gamma_3} (p_\nu(\eta_{1\nu} - g) - p_\nu(\eta_{2\nu} - g)) (|v_{2\nu}| - |v_{1\nu}|) d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(\eta_{1\nu} - g) - p_\tau(\eta_{2\nu} - g)) (\|\mathbf{v}_{2\tau}\| - \|\mathbf{v}_{1\tau}\|) d\Gamma \\
 &\leq \int_{\Gamma_3} L_\nu |\eta_{1\nu} - \eta_{2\nu}| (|v_{1\nu}| - |v_{2\nu}|) d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_3} L_\tau |\eta_{1\nu} - \eta_{2\nu}| (\|\mathbf{v}_{1\tau}\| - \|\mathbf{v}_{2\tau}\|) d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}
 |\eta_{1\nu} - \eta_{2\nu}| &\leq \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|, \quad |v_{1\nu}| - |v_{2\nu}| \leq |v_{1\nu} - v_{2\nu}| \leq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|, \\
 \|\mathbf{v}_{1\tau}\| - \|\mathbf{v}_{2\tau}\| &\leq \|\mathbf{v}_{1\tau} - \mathbf{v}_{2\tau}\| \leq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \quad \text{a.e. on } \Gamma_3,
 \end{aligned}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned}
 & j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\
 &\leq \int_{\Gamma_3} (L_\nu + L_\tau) \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\| \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Asadar,

$$\begin{aligned}
 & j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\
 &\leq (L_\nu + L_\tau) \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L^2(\Gamma_3)}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Prin urmare, rezulta ca

$$\begin{aligned}
 & j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_2) - j(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_1) - j(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) \\
 &\leq c_0^2 (L_\nu + L_\tau) \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2\|_V \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Putem considera

$$L_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2}.$$

Din (27) rezulta ca j satisface (7)(b) cu $\alpha = c_0^2 (L_\nu + L_\tau)$. Notam ca $m = m_{\mathcal{F}}$.
 Presupunand ca $L_\nu + L_\tau < L_0$, obținem $c_0^2 (L_\nu + L_\tau) < m_{\mathcal{F}}$, de unde rezulta ca $m > \alpha$.
 Aplicam acum Teorema 1. $\square$

O pereche de functii $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ ce satisfac (36) si (25) se numeste *solutie slaba* a problemei (36)–(41). Privind regularitatea solutiei slabe: $\mathbf{u} \in V$ and $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$.

Abordarea prezentata (cu argument Banach) este una usor accesibila. Subliniem insa ca rezultatul de existenta si unicitate a fost formulat utilizand o ”ipoteza de micime”.

A doua abordare, nu este usor accesibila dar are avantajul ca poate livra existenta solutiei fara nicio ipoteza de micime (a se vedea la seminar).

Facem observatia ca, studiul unicitatii solutiei se poate face dar totusi trebuie impuse ipoteze suplimentare.

Un model antiplan [a se consulta pentru mai multe detalii [32]]

PROBLEMA 23. Sa se determine $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (28)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (29)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (30)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g(|u|), \quad \mu \partial_\nu u = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \quad \text{daca } u \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (31)$$

Admitem urmatoarele ipoteze:

$$f_0 \in L^2(\Omega), \quad f_2 \in L^2(\Gamma_2). \quad (32)$$

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \text{ si exista } \mu^* > 0 \text{ astfel incat} \quad (33)$$

$$\mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega.$$

$$g : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Exista $L_g > 0$ astfel incat

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{x}, r_1) - g(\mathbf{x}, r_2)| &\leq L_g |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{aligned} \quad (34)$$

Aplicatia $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, r)$

este masurabila Lebesgue Γ_3 , $\forall r \in \mathbb{R}$.

Aplicatia $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, 0)$ este in $L^2(\Gamma_3)$.

Definim

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \\ (f, v)_V &= \int_{\Omega} f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2 v \, da \quad \forall v \in V, \\ j : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, \quad j(u, v) = \int_{\Gamma_3} g(|u|) |v| \, da \quad \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

unde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

Se obtine urmatoarea formulare variationala a modelului antiplan considerat.

PROBLEMA 24. *Sa se determine $u \in V$ astfel incat*

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V. \quad (35)$$

Teorema 4. *Admitem ipotezele anterioare. Atunci, exista $L_0 = L_0(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mu)$, astfel incat problema (35) are solutie unica, u . In plus, solutia u depinde Lipschitz de f , daca $L_g < L_0$.*

Solutia Problemei 24 se numeste solutie slaba pentru Problema 26.

Demonstratia se poate lectura din [32].

TEMA

- 1) Justificati ca $p_\nu(u_\nu - g) |v_\nu| \in L^1(\Gamma_3)$.
- 2) Fie $u, v \in H^1(\Omega)$ si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ o functie Lipschitz. Justifiati ca $g(|u|)|v| \in L^1(\partial\Omega)$.

Seminar 7

Am studiat la curs doua modele cu o tehnica de punct fix a lui Banach. Continuum discutia inceputa cu o abordare de tip Schauder.

- Modelul general 3D - Argument Schauder

Amintim modelul 3D

PROBLEMA 25. Sa se determine $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel incat

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega, \quad (36)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (37)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (38)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (39)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| &\leq p_\tau(u_\nu - g), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau &= -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{if } \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (41)$$

si ipotezele de lucru:

$\mathcal{F}$ este un operator (posibil neliniar) ce verifica:

$$\mathcal{F} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3; \quad (42)$$

exista $M > 0$ astfel incat

$$\|\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\|_{\mathbb{S}^3} \leq M \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3; \quad (43)$$

exista $m > 0$ astfel incat $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^3$,

$$(\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)) : (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|_{\mathbb{S}^3}^2; \quad (44)$$

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega)^3, \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2)^3 \quad g > 0. \quad (45)$$

$$p_e : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad e \in \{\nu, \tau\}.$$

Exista $L_e > 0$ astfel incat

$$\begin{aligned} |p_e(\mathbf{x}, r_1) - p_e(\mathbf{x}, r_2)| &\leq L_e |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (46)$$

Aplicatia $\mathbf{x} \mapsto p_e(\mathbf{x}, r)$ este masurabila pe Γ_3 ,
pentru oricare $r \in \mathbb{R}$.

$$p_e(\mathbf{x}, r) = 0 \quad \forall r \leq 0, \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Teorema 5. [a se vedea de exemplu [33]] Admitem ipotezele anuntate anterior.

Atunci Problema 22 are cel putin o solutie.

DEMONSTRAȚIE. Vom utiliza Teorema 2 cu $X = V$. Notam ca pentru oricare $\boldsymbol{\eta} \in V$ functionala $j(\boldsymbol{\eta}, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ este o seminorma pe V . Deci, (8) se verifica. Consideram acum doua siruri $\{\boldsymbol{\eta}_n\} \subset V$, $\{\mathbf{u}_n\} \subset V$ astfel incat

$$\boldsymbol{\eta}_n \rightharpoonup \boldsymbol{\eta} \in V, \quad \mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \in V \quad (47)$$

si fie $\mathbf{v}$ un element arbitrar in V .

$$|j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v})| \leq (L_\nu + L_\tau) \|\boldsymbol{\eta}_n - \boldsymbol{\eta}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} |j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n)| \\ \leq (L_\nu + L_\tau) \|\boldsymbol{\eta}_n - \boldsymbol{\eta}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \|\mathbf{u}_n\|_{L^2(\Gamma_3)^d}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$|j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})| \leq (L_\nu + L_\tau) \|\boldsymbol{\eta}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}. \quad (50)$$

$$\boldsymbol{\eta}_n \rightarrow \boldsymbol{\eta} \in L^2(\Gamma_3)^d, \quad \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u} \in L^2(\Gamma_3)^d \quad (51)$$

si, prin urmare,

$$j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) \rightarrow j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}), \quad (52)$$

$$j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) \rightarrow 0, \quad (53)$$

$$j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) \rightarrow j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}). \quad (54)$$

$$j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) = j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) + j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}_n, \mathbf{u}_n) = j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}) - j(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}),$$

adica j satisface (9).

Aplicam acum Teorema 2. □

- Modelul antiplan-argument Schauder

Amintim modelul antiplan si ipotezele de lucru.

PROBLEMA 26. Sa se determine $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (55)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (56)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (57)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g(|u|), \quad \mu \partial_\nu u = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \quad \text{daca } u \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (58)$$

$$f_0 \in L^2(\Omega), \quad f_2 \in L^2(\Gamma_2). \quad (59)$$

$$\mu \in L^\infty(\Omega) \text{ si exista } \mu^* > 0 \text{ astfel incat} \quad (60)$$

$$\mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega.$$

$$g : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ astfel incat:}$$

$$\text{exista } L_g > 0 \text{ astfel incat}$$

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{x}, r_1) - g(\mathbf{x}, r_2)| &\leq L_g |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \end{aligned} \quad (61)$$

$$\text{aplicatia } \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, r)$$

$$\text{este masurabila Lebesgue } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}.$$

$$\text{aplicatia } \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, 0) \text{ este in } L^2(\Gamma_3).$$

Teorema 6. *Admitem ipotezele anuntate anterior. Atunci Problema 26 are cel putin o solutie slaba.*

Demonstratia se poate lectura din [32].

TEMA PROIECT Studiati demonstratia Teoremei 6 (paginile 182-183, [32]).

Săptămâna a 8-a

Curs 8

Tematica acestei saptamani este: probleme de contact ce conduc la inegalitati hemivariationale.

Background de analiza neliniara (neneteda)[a se vedea de exemplu [16]]

Fie E un spatiu Banach reflexiv.

Definiția 1. O functie $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este Lipschitz pe E , daca exista $k > 0$ astfel incat

$$|\Psi(v) - \Psi(w)| \leq k\|v - w\|_E \quad \forall v, w \in E.$$

Definiția 2. O functie $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este *local Lipschitz in* $u \in E$ (de rang k), daca exista o vecinatate U a lui u si $k = k(U) > 0$ astfel incat

$$|\Psi(v) - \Psi(w)| \leq k\|v - w\|_E \quad \forall v, w \in U.$$

O functie $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este local Lipschitz pe E , daca Ψ este local Lipschitz in fiecare $u \in E$.

Fie $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ o functionala local Lipschitz pe E . Gradientul generalizat Clarke al functiei Ψ in $u \in E$ este definit astfel:

$$\partial\Psi(u) = \{\zeta \in E' : \Psi^0(u; v) \geq (\zeta, v)_{E', E}, \quad \forall v \in E\}$$

unde $\Psi^0(u; v)$ este derivata generalizata Clarke a lui Ψ in $u \in E$ in raport cu directia $v \in E$, adica

$$\Psi^0(u; v) = \limsup_{\substack{w \rightarrow u \\ t \downarrow 0}} \frac{\Psi(w + tv) - \Psi(w)}{t},$$

a se vedea pentru detalii [5, 20, 22, 23, 28].

Propoziția 3. Fie $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ o functionala local Lipschitz in $u \in E$ (de rang k). Atunci

(1) aplicatia $v \rightarrow \Psi^0(u; v)$ este finita, pozitiv omogena, subaditiva pe E si satisface

$$|\Psi^0(u; v)| \leq k\|v\|_X. \quad (1)$$

(2) $(u, v) \rightarrow \Psi^0(u; v)$ este superior semicontinua.

Demonstratia Propozitiei 3 se poate gasi in [5], pagina 25; a se vedea de asemenea [23] pagina 13.

Remarca 4. In general, daca $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este local Lipschitz in $u \in E$ (de rang k), atunci k depinde de u , k depinzand de o vecinatate U a lui u . In particular, daca $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este Lipschitz pe E , atunci, in (1), k este o constanta strict pozitiva independenta de u deoarece putem considera $U = E$ pentru oricare $u \in E$.

Daca $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ este o functionala convexa, vom nota cu $\bar{\partial}\Phi(u)$ subdiferentiala lui Φ in u , adica

$$\bar{\partial}\Phi(u) = \{\zeta \in E' : \Phi(v) - \Phi(u) \geq (\zeta, v - u)_{X', X}, \quad \forall v \in E\}.$$

Amintim ca E' noteaza dualul lui E .

O inegalitate de forma urmatoare

$$\langle Au, v - u \rangle + \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}); v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) d\Gamma \geq \langle \Phi, v - u \rangle \quad \forall v \in E,$$

se numeste inegalitate hemivariationala. Modelul pe care il vom discuta in continuare va conduce prin formulare variationala la o astfel de inegalitate.

Descrierea modelului

Consideram un corp deformabil $\mathcal{B}$ si ne raportam la un sistem cartezian de coordonate $Ox_1x_2x_3$. Presupunem ca $\mathcal{B}$ are generatoarele paralele cu Ox_3 si notam cu Ω o sectiune transversala a cilindrului $\Omega \subset Ox_1x_2$. In plus, presupunem ca generatoarele cilindrului sunt mult mai mari decat diametrul sectiunii transversale. Astfel, putem aplica principiul lui Saint-Venant si astfel, putem scrie $\mathcal{B} = \Omega \times (-\infty, \infty)$. Notam cu Γ frontiera lui Ω si presupunem ca $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sunt parti masurabile, deschise, ce formeaza o partiție a lui Γ (i.e. $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$; $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$) astfel incat $|\Gamma_1| > 0$.

Presupunem ca $\mathcal{B}$ este incastrat pe $\Gamma_1 \times (-\infty, \infty)$ si este in contact cu frecare pe $\Gamma_3 \times (-\infty, \infty)$ cu o fundatie rigida. In plus, corpul cilindric este supus la forte volumice de densitate $\mathbf{f}_0$ in $\Omega \times (-\infty, \infty)$ si la tractiuni la suprafata de densitate $\mathbf{f}_2$ pe $\Gamma_2 \times (-\infty, \infty)$.

Actionand asupra corpului cu forte avand directia axei Ox_3 ,

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0, f_0) \quad \text{cu} \quad f_0 = f_0(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_2 = (0, 0, f_2) \quad \text{cu} \quad f_2 = f_2(x_1, x_2) : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3)$$

atunci vectorul deplasare va avea si el o forma particulara:

$$\mathbf{u} = (0, 0, u) \quad \text{with} \quad u = u(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4)$$

Versorul normalei exterioare la frontiera Γ , are si el o scriere particulara

$$\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, 0), \quad \nu_i = \nu_i(x_1, x_2) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (5)$$

Tensorul deformatiilor infinitezimale are forma urmatoare:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,2} \\ \frac{1}{2}u_{,1} & \frac{1}{2}u_{,2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

unde $u_{,i} = \partial u / \partial x_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Fie $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ tensorul tensiune Cauchy. Amintim ecuatia de echilibru in mecanica solidelor deformabile pentru procese stationare.

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \quad \text{in } \Omega \times (-\infty, \infty) \quad (7)$$

unde $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Presupunem ca $\boldsymbol{\sigma}$ are urmatoarea forma

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \\ 0 & 0 & a_2(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \\ a_1(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) & a_2(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si $a(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (a_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}), a_2(\mathbf{x}, \mathbf{v})) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Utilizand (2), (4), (7), rezulta ca ecuatia de echilibru se reduce la urmatoarea ecuatie scalara.

$$\text{div}(a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x}))) + f_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (9)$$

Pentru a completa modelul trebuie sa precizam conditiile la limita. In acord cu cadrul fizic,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (-\infty, \infty),$$

si

$$\boldsymbol{\sigma} \bar{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (-\infty, \infty).$$

Tinand cont de (3), (4) si (8), conditiile la limita vectoriale scrise anterior se reduc la urmatoarele conditii scalare.

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \quad (10)$$

si

$$a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (11)$$

unde $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$.

Descriem acum contactul cu frecare pe $\Gamma_3 \times (-\infty, \infty)$. Tinand cont de (4) si (5) deducem ca $u_\nu = 0$ deci contactul este bilateral. Mai mult,

$$\mathbf{u}_\tau = (0, 0, u), \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = (0, 0, \sigma_\tau), \quad \text{cu } \sigma_\tau(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Modelam frecarea prin intermediul urmatoarei legi:

$$-\sigma_\tau(\mathbf{x}) \in h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \partial j(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (13)$$

unde h si j sunt functii date ce depind de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ dar nu depind de x_3 si notam cu $\partial j(\mathbf{x}, t)$ gradientul generalizat Clarke al aplicatiei $t \mapsto j(\mathbf{x}, t)$.

Ecuatiile si conditiile (9), (10), (11) si (13) conduc la un model matematic ce descrie *deformarea antiplana* a unui cilindru elastic in contact cu frecare cu o fundatie rigida, dupa cum urmeaza: sa se determine $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat

$$(\mathbf{P}) : \begin{cases} \operatorname{div}(a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x}))) + f_0(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{pe } \Gamma_1 \\ a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) & \text{pe } \Gamma_2 \\ -a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \in h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \partial j(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) & \text{pe } \Gamma_3. \end{cases}$$

De indata ce am determinat u , $\boldsymbol{\sigma}$ se poate obtine din (8).

Studiul variational al modelului [a se consulta [6]] Presupunem ca $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu marginit cu frontiera Lipschitz. In plus, admitem urmatoarele ipoteze:

(H_f) $f_0 \in L^2(\Omega)$ si $f_2 \in L^2(\Gamma_2)$.

(H_h) $h : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este functie Carathéodory (i.e. $h(\cdot, t) : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}$ este masurabila, $\forall t \in \mathbb{R}$, si $h(\mathbf{x}, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continua, a.p.t. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$). In plus, exista $h_0 > 0$ astfel incat $0 \leq h(\mathbf{x}, t) \leq h_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, a.p.t. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$.

(H_j) $j : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o functie masurabila in raport cu prima variabila, si exista $k \in L^2(\Gamma_3)$ astfel incat $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_3$ si $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, avem

$$|j(\mathbf{x}, t_1) - j(\mathbf{x}, t_2)| \leq k(\mathbf{x})|t_1 - t_2|.$$

(H_a) $a : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ este o functie Carathéodory ce satisface

- (1) $|a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|_{\mathbb{R}^2} \leq \alpha(b(\mathbf{x}) + |\boldsymbol{\xi}|_{\mathbb{R}^2}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$, a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$, $\alpha > 0$ si $b \in L^2(\Omega)$;
- (2) Exista $\zeta > 0$ astfel incat $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \zeta |\boldsymbol{\xi}|_{\mathbb{R}^2}^2 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$ si a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$;
- (3) $[a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)] \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geq 0$, $\forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{R}^2$ si a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$.

Vom considera drept spatiu al funcțiilor test spatiul V ,

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma v = 0 \text{ a.p.t. pe } \Gamma_1\}.$$

Definim $A : V \rightarrow V$,

$$\langle Au, v \rangle_V = \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, dx \quad \forall u, v \in V. \quad (14)$$

Remarca 5. Daca admitem (H_a) atunci

- (1) operatorul A este bine definit;
- (2) $\langle Au_n, v \rangle_V \rightarrow \langle Au, v \rangle_V$, pentru fiecare $v \in V$, daca $u_n \rightarrow u$ in V cand $n \rightarrow \infty$;
- (3) $\langle Av, v \rangle_V \geq \zeta \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$;
- (4) $\langle Av - Au, v - u \rangle_V \geq 0 \quad \forall u, v \in V$.

Presupunand ca funcțiile care apar in formularea Problemei **(P)** sunt suficient de netede, in urma unei integrari prin parti putem scrie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, dx &= \int_{\Gamma} a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} f_0(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, dx. \end{aligned}$$

Utilizand conditiile la limita,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_3} a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_2} f_2(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Pe de alta parte, din definitia gradientului generalizat Clarke, in combinatie cu ultima linie a Problemei **(P)**, putem scrie

$$-a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \leq h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}); v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \text{ a.p.t. pe } \Gamma_3$$

si de aici,

$$\int_{\Gamma_3} a(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, d\Gamma \geq - \int_{\Gamma_3} h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}); v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, d\Gamma.$$

Suntem astfel condusi la urmatoarea formulare variationala a Problemei **(P)**.

(P_V) Sa se determine $u \in V$ astfel incat

$$\langle Au, v - u \rangle_V + \int_{\Gamma_3} h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}); v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})) \, d\Gamma \geq \langle \Phi, v - u \rangle_V \quad \forall v \in V, \quad (15)$$

unde Φ este unicul element al lui V asigurat de Teorema de reprezentare a lui Riesz,

$$\langle \Phi, v \rangle_V = \int_{\Omega} f_0 v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2 v \, d\Gamma \quad \forall v \in V.$$

Orice funcție $u \in V$ ce verifică 15 se numește *soluție slabă* a Problemei **(P)**.

Teorema 6. *Admitem ipotezele (H_f) , (H_h) , (H_j) și (H_a) . Atunci Problema $(\mathbf{P}_V)$ are cel puțin o soluție.*

TEMA PROIECT Demonstratia Teoremei 6 (a se consulta [6])

Seminar 8

• Exemple de legi constitutive

(1) Legi constitutive liniare

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbb{I}_{\mathbb{S}^3} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (16)$$

unde λ și μ sunt coeficienții lui Lamé, $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{kk}(\mathbf{u})$ și $\mathbb{I}_{\mathbb{S}^3}$ este tensorul unitate.

În contextul antiplan $\boldsymbol{\sigma}$ are forma următoare:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{,2} \\ \mu u_{,1} & \mu u_{,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Presupunând ca $\mu = \mu(x_1, x_2)$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$ și $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* > 0$ a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$, considerăm $a : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}$.

(2) Lege constitutivă liniară pe porțiuni [a se vedea [10]]

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbb{I}_{\mathbb{S}^3} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + 2\beta(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - P_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \quad (17)$$

unde $\lambda, \mu, \beta > 0$ sunt coeficienți de material, $\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kk}$, $\mathbb{I}_{\mathbb{S}^3}$ este tensorul identitate, $\mathcal{K}$ este mulțimea von Mises, nevidă, închisă, convexă,

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^3 \mid \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \leq k^2, \quad k > 0, \}$$

$P_{\mathcal{K}} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathcal{K}$ este operatorul de proiecție pe $\mathcal{K}$ și $\boldsymbol{\sigma}^D$ este tensorul deviatoric al lui $\boldsymbol{\sigma}$, i.e., $\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I}_{\mathbb{S}^3}$.

În contextul antiplan,

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mu + \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{,1} \\ 0 & 0 & u_{,2} \\ u_{,1} & u_{,2} & 0 \end{pmatrix} - 2\beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & (P_{\tilde{K}} \frac{1}{2} \nabla u)_1 \\ 0 & 0 & (P_{\tilde{K}} \frac{1}{2} \nabla u)_2 \\ (P_{\tilde{K}} \frac{1}{2} \nabla u)_1 & (P_{\tilde{K}} \frac{1}{2} \nabla u)_2 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $\tilde{K} = \overline{B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, k)}$, (k dat prin (18)) și $P_{\tilde{K}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \tilde{K}$ este operatorul de proiecție pe $\tilde{K}$; pentru un studiu mai complex se pot consulta lucrările [1, 6].

Putem defini $a : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := [\mu(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})] \boldsymbol{\xi} - 2\beta(\mathbf{x}) P_{\tilde{K}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}$. Presupunem ca $\mu \in L^\infty(\Omega)$, $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu^* > 0$ a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$, $\beta \in L^\infty(\Omega)$ și luăm $\alpha = \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + 2\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}$, $b \equiv 0$, and $\zeta = \mu^*$.

• Exemple de legi de frecare [a se vedea de exemplu [6]]

(1) Frecare dependentă de alunecare Considerăm

$$h(\mathbf{x}, t) = k_0(1 + \delta e^{-|t|}); \quad j(\mathbf{x}, t) = |t|, \quad (19)$$

cu $\delta, k_0 > 0$. În acest caz legea de frecare

$$-\sigma_\tau(\mathbf{x}) \in h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \partial j(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \quad \text{pe } \Gamma_3,$$

este echivalentă cu

$$|\sigma_\tau(\mathbf{x})| \leq h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})), \quad |\sigma_\tau(\mathbf{x})| = -h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \frac{u(\mathbf{x})}{|u(\mathbf{x})|} \quad \text{if } u(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \text{pe } \Gamma_3, \quad (20)$$

și de aici putem ajunge la legea lui Coulomb de frecare (frecare uscată)

$$\begin{aligned} \|\sigma_\tau(\mathbf{x})\| &\leq h(\mathbf{x}, \|\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x})\|), \\ \sigma_\tau(\mathbf{x}) &= -h(\mathbf{x}, \|\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x})\|) \frac{\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x})}{\|\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x})\|} \quad \text{if } \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \quad \text{on } \Gamma_3. \end{aligned}$$

(2) Lege de frecare regularizantă

$$h(\mathbf{x}, t) = k_0(1 + \delta e^{\rho - \sqrt{t^2 + \rho^2}}); \quad j(\mathbf{x}, t) = \sqrt{t^2 + \rho^2} - \rho,$$

cu $k_0, \delta, \rho > 0$.

$$-\sigma_\tau(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \frac{u(\mathbf{x})}{\sqrt{u(\mathbf{x})^2 + \rho^2}} \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (21)$$

(3) Lege de frecare tip putere

$$h(\mathbf{x}, t) = k_0(1 + \delta e^{-\frac{|t|^{\rho+1}}{\rho+1}}); \quad j(\mathbf{x}, t) = \frac{|t|^{\rho+1}}{\rho+1},$$

cu $k_0, \delta > 0$ și $\rho \geq 1$.

$$-\sigma_\tau(\mathbf{x}) = \begin{cases} h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) |u(\mathbf{x})|^{\rho-1} u(\mathbf{x}) & u(\mathbf{x}) \neq 0; \\ 0 & u(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

(4) Legi de frecare nemonotone

$$h(\mathbf{x}, t) \equiv 1, \quad j(\mathbf{x}, t) = \int_0^t p(s) ds, \quad (22)$$

unde

$$p(t) = \begin{cases} (-\alpha t_0 + k_0) e^{t_0+t} - k_0 & \text{if } t < -t_0; \\ \alpha t & \text{if } -t_0 \leq t \leq t_0; \\ (\alpha t_0 - k_0) e^{t_0-t} + k_0 & \text{if } t > t_0, \end{cases}$$

cu $\alpha, k_0, t_0 > 0$.

$$-\sigma_\tau(\boldsymbol{x}) = p(u(\boldsymbol{x})) \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (23)$$

Pentru detalii a se consulta [6].

Săptămâna a 9-a

Curs 9

Tematica acestei saptamani este: probleme de contact ce conduc la inegalitati variational-hemivariationale.

Exemple de astfel de inegalitati:

$$\begin{aligned} (Au, v - u)_{X', X} + j(v) - j(u) + \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}, u_T(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, u_T(\mathbf{x}); v_T(\mathbf{x}) - u_T(\mathbf{x})) d\Gamma \\ \geq (f, v - u)_{X', X} \quad \text{for all } v \in X; \\ W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{u}) + \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) j^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x}); \mathbf{v}_T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) d\Gamma \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_{X', X} \\ \text{for all } \mathbf{v} \in X \end{aligned}$$

In prezentul curs vom discuta un model mecanic care prin formulare variationala va conduce la a doua inegalitate variational-hemivariatională; a se consulta [7].

Descrierea modelului

Consideram un corp deformabil $\mathcal{B}$ care ocupa un domeniu marginit cu frontiera neteda $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$). Frontiera $\Gamma = \partial\Omega$ este partitionata in trei parti masurabile Γ_1, Γ_2 si Γ_3 astfel incat $m(\Gamma_1) > 0$. Solidul este incastrat pe Γ_1 , si de aceea vectorul deplasare este zero pe aceasta bucata de frontiera. In plus, corpul este supus la forte volumice de densitate $\mathbf{f}_0$ in Ω si la tractiuni la suprafata de densitate $\mathbf{f}_2$ pe Γ_2 . Pe Γ_3 corpul este in contact bilateral cu frecare cu un obstacol rigid. Frecarea este modelata prin intermediul unei legi guvernate de gradientul generalizat Clarke. Cat priveste comportamentul materialului din care este confectionat corpul, acesta este modelat prin intermediul unei legi constitutive guvernate de subdiferentiala unei functionale proprii, convexe si i.s.c.

Consideram asadar urmatoarea problema la limita.

(P) Sa se determine $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ si $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^d$ astfel incat

$$\begin{cases} \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in \bar{\partial} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{pe } \Gamma_1 \\ (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) & \text{pe } \Gamma_2 \\ u_\nu(\mathbf{x}) = 0 & \text{pe } \Gamma_3 \\ -\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{x}) \in h(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) \partial j(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) & \text{pe } \Gamma_3. \end{cases}$$

Notam ca $\bar{\partial} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ reprezinta subdiferentiala lui w in raport cu a doua variabila iar $\partial j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ reprezinta gradientul generalizat Clark al aplicatiei $\mathbb{R}^d \ni \mathbf{y} \mapsto j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, unde $\mathbf{x} \in \Gamma_3$.

Studiul variational al modelului

Consideram drept spatiu al functiilor test

$$V_1 = \{\mathbf{v} \in H_1 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ a.e. on } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ a.e. on } \Gamma_3\}.$$

Admitem urmatoarele ipoteze.

(H1) $\mathbf{f}_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ si $\mathbf{f}_2 \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)$.

(H2) Functia $w : \Omega \times \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{R}$ verifica:

- (1) $\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}_d$ functia $\Omega \ni \mathbf{x} \mapsto w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ este masurabila;
- (2) A.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$ functia $\mathbb{S}_d \ni \boldsymbol{\tau} \mapsto w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ este convexa si i.s.c;
- (3) $w(\cdot, \mathbf{0}_{\mathbb{S}_d}) \in L^1(\Omega)$;
- (4) $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|_V} \int_\Omega w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \rightarrow \infty$ daca $\|\mathbf{v}\|_V \rightarrow \infty$.

(H3) $h : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ verifica

- (1) $\Gamma_3 \ni \mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este functie masurabila $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$;
- (2) $\mathbb{R}^d \ni \mathbf{y} \mapsto h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este functie continua a.p.t. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$;
- (3) $\exists h_0 > 0$ astfel incat $0 \leq h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq h_0$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ a.p.t. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$.

(H4) $j : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ este o functie ce satisface

- (1) $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma_3 \ni \mathbf{x} \mapsto j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este functie masurabila;
- (2) $\exists q \in L^2(\Gamma_3)$ astfel incat, a.p.t. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$ si $\forall \mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in \mathbb{R}^d$ avem

$$|j(\mathbf{x}, \mathbf{y}^1) - j(\mathbf{x}, \mathbf{y}^2)| \leq q(\mathbf{x}) |\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2|.$$

Presupunem ca functiile implicate in scrierea Problemei (P) sunt suficient de netede si aplicand formula lui Green,

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u})_H + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) d\Gamma. \quad (1)$$

Tinand cont de (H2) obtinem

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \leq w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))) - w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) \quad \text{a.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega,$$

ce implica

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}))_{\mathcal{H}} \leq W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{u}), \quad (2)$$

unde $W : V_1 \rightarrow (-\infty, \infty]$ este functională definită prin

$$W(\mathbf{v}) = \begin{cases} \int_{\Omega} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))) \, d\mathbf{x}, & \text{daca } w(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\cdot))) \in L^1(\Omega) \\ \infty, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (3)$$

Utilizăm în continuare condițiile la limită.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(\mathbf{x})(v_{\nu}(\mathbf{x}) - u_{\nu}(\mathbf{x})) \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}_T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Cum $u_{\nu} = 0$ pe Γ_3 și $\mathbf{v} \in V_1$, obținem

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(\mathbf{x})(v_{\nu}(\mathbf{x}) - u_{\nu}(\mathbf{x})) \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4)$$

Combinând definiția gradientului generalizat Clarke cu ultima linie a Problemei (P) avem

$$-\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}_T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) \leq h(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x}))j^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x}); \mathbf{v}_T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_T(\mathbf{x})), \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3.$$

Integram pe Γ_3 și obținem

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}_T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) \, d\Gamma \geq - \int_{\Gamma_3} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x}))j^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x}); \mathbf{v}_T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) \, d\Gamma. \quad (5)$$

Fie $\mathbf{f}$ unicul element al lui V_1 dat de Teorema de reprezentare a lui Riesz,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v})_{V_1} = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v})_H + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\Gamma. \quad (6)$$

Utilizând (1)-(5) obținem următoarea formulare variațională a Problemei (P).

(P_V) Să se determine $\mathbf{u} \in V_1$ astfel încât

$$W(\mathbf{v}) - W(\mathbf{u}) + \int_{\Gamma_3} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x}))j^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x}); \mathbf{v}_T(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) \, d\Gamma \geq (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V, \forall \mathbf{v} \in V_1. \quad (7)$$

Inegalitatea (7) este o inegalitate variațional-hemivariațională.

Orice funcție $\mathbf{u} \in V$ ce rezolvă Problema (P_V) se numește *soluție slabă* pentru (P).

Teorema 1. [Un rezultat de existență (a se vedea [7])] *Admitem ipotezele (H1)-(H4). Atunci, Problema (P) admite cel puțin o soluție slabă.*

În vederea studierii unicității și stabilității soluției slabe se introduc noi ipoteze.

(H5) $\exists m > 0$ astfel încât $(\boldsymbol{\eta}^1 - \boldsymbol{\eta}^2) \cdot (\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2) \geq -m |\mathbf{y}^1 - \mathbf{y}^2|^2$ a.p.t. $\mathbf{x} \in \Gamma_3, \forall \mathbf{y}^i \in \mathbb{R}^d$ și $\forall \boldsymbol{\eta}^i \in h(\mathbf{x}, \mathbf{y}^i) \partial j(\mathbf{x}, \mathbf{y}^i), i \in \{1, 2\}$.

(H6) A.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$ funcția $\mathbb{S}_d \ni \boldsymbol{\tau} \mapsto w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ este diferentiabilă Gâteaux și există $M > 0$ astfel încât

$$(\nabla w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}^1) - \nabla w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}^2)) \cdot (\boldsymbol{\tau}^1 - \boldsymbol{\tau}^2) \geq M |\boldsymbol{\tau}^1 - \boldsymbol{\tau}^2|^2, \quad \text{for all } \boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2 \in \mathbb{S}_d.$$

(H7) $M > m \|T\|^2$.

Notăm că funcționala W , definită prin (11), este diferentiabilă Gâteaux în fiecare punct $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(W)$ și

$$(\nabla W(\mathbf{v}) - \nabla W(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u})_{V_1} \geq M \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{V_1}^2.$$

Teorema 2. *[Un rezultat de unicitate și stabilitate (a se vedea de exemplu [7])] Admitem (H1)-(H7). Atunci, problema (P) are o unică soluție slabă ce depinde Lipschitz de date $\mathbf{f}$ definită în (6).*

Mai mult, există $C_1, C_2 > 0$ astfel încât

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{V_1} + C_2.$$

TEMA PROIECT-facultativ Demonstratia Teoremei 1 (se poate consulta [7])

TEMA PROIECT-facultativ Demonstratia Teoremei 2 (se poate consulta [7])

Seminar 9

- **Legi constitutive neliniare**[a se vedea de exemplu [7]]

Fie $w : \Omega \times \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) := \frac{k_0}{2}(\text{tr} \boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \psi \left(|\boldsymbol{\tau}^D|^2 \right),$$

unde $\text{tr} \boldsymbol{\tau} = \tau_{kk}$, $\mathbf{I}_{\mathbb{S}_d}$ este tensorul identitate,

$(H_\psi) \psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ este o functie constitutiva neliniara, continuu diferentiabila, astfel incat

- (1) Exista $c_1 > 0$ astfel incat $\psi(\xi) \geq c_1 \xi \ \forall \xi \geq 0$;
- (2) ψ' este continuu diferentiabila pe portiuni;
- (3) Exista $c_2 > 0$ astfel incat $\psi'(\xi) \leq c_2$;
- (4) Exista $M > 0$ astfel incat $-2|\psi''(\xi)|\xi + \psi'(\xi) \geq M \ \forall \xi \geq 0$

si k_0 este un coeficient de material ce verifica

$$k_0 > \frac{c_2}{d}.$$

Ca exemplu, putem considera $\psi(\xi) = \xi + \ln(e + \xi)$.

Fie $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}_d$.

Pentru oricare $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau} + t\boldsymbol{\xi}) - w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})}{t} =$$

$$\left(k_0(\text{tr} \boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} + \psi' \left(|\boldsymbol{\tau}^D|^2 \right) \boldsymbol{\tau}^D \right) \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad \text{for all } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}_d.$$

Prin urmare, functionala w este diferentiabila Gâteaux in al doilea argument.

Pentru oricare $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$(\nabla w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \nabla w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq M |\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2|^2, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}_3,$$

unde

$$\nabla w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = k_0 (\text{tr} \boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} + \psi' \left(|\boldsymbol{\tau}^D|^2 \right) \boldsymbol{\tau}^D, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}_d.$$

Intr-adevar, pentru $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}_d$ si $t \in [0, 1]$, utilizam notatia $\boldsymbol{\varepsilon}^D(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_2^D + t(\boldsymbol{\varepsilon}_1^D - \boldsymbol{\varepsilon}_2^D)$ si introducem functia $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita prin

$$g(t) = \psi' \left(|\boldsymbol{\varepsilon}^D(t)|^2 \right) \boldsymbol{\varepsilon}^D(t) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2).$$

Observam ca

- (1) g este continuu diferentiabila pe portiuni;
- (2) $g(1) = \psi' \left(|\boldsymbol{\varepsilon}_1^D|^2 \right) \boldsymbol{\varepsilon}_1^D \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2)$;

$$(3) \quad g(0) = \psi' \left(|\varepsilon_2^D|^2 \right) \varepsilon_2^D \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2);$$

$$(4) \quad \left(\psi' \left(|\varepsilon_1^D|^2 \right) \varepsilon_1^D - \psi' \left(|\varepsilon_2^D|^2 \right) \varepsilon_2^D \right) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt.$$

Astfel,

$$\begin{aligned} & \left(k_0(\operatorname{tr} \varepsilon_1) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} + \psi' \left(|\varepsilon_1^D|^2 \right) \varepsilon_1^D - k_0(\operatorname{tr} \varepsilon_2) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} - \psi' \left(|\varepsilon_2^D|^2 \right) \varepsilon_2^D \right) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ &= \int_0^1 \left[2 \psi'' \left(|\varepsilon^D(t)|^2 \right) |\varepsilon^D(t) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|^2 + \psi' \left(|\varepsilon^D(t)|^2 \right) (\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] dt \\ & \quad + k_0 |\operatorname{tr} \varepsilon_1 - \operatorname{tr} \varepsilon_2|^2 \\ &\geq \left(k_0 - \frac{c_2}{d} \right) |\operatorname{tr} \varepsilon_1 - \operatorname{tr} \varepsilon_2|^2 + \int_0^1 \left[-2 \left| \psi'' \left(|\varepsilon^D(t)|^2 \right) \right| |\varepsilon^D(t)|^2 + \psi' \left(|\varepsilon^D(t)|^2 \right) \right] |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 dt. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} & \left(k_0(\operatorname{tr} \varepsilon_1) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} + \psi' \left(|\varepsilon_1^D|^2 \right) \varepsilon_1^D - k_0(\operatorname{tr} \varepsilon_2) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} - \psi' \left(|\varepsilon_2^D|^2 \right) \varepsilon_2^D \right) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ & \geq M |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Deducem ca $\forall \mathbf{x} \in \Omega$,

$$\bar{\partial} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) = \left\{ k_0(\operatorname{tr} \boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} + \psi' \left(|\boldsymbol{\tau}^D|^2 \right) \boldsymbol{\tau}^D \right\}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}_d.$$

Mai mult, pentru fiecare $\mathbf{x} \in \Omega$, w este i.s.c. in al doilea argument. Deoarece $w(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}_d}) = \frac{1}{2} \psi(0)$ pentru oricare $\mathbf{x} \in \Omega$, aplicatia $\Omega \ni \mathbf{x} \mapsto w(\mathbf{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}_d})$ este integrabila. In plus,

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|_V} \int_{\Omega} w(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{v}(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} \geq \frac{c_1}{2} \|\mathbf{v}\|_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V.$$

Notam de asemenea ca

$$(\nabla w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) - \nabla w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\varepsilon}) \geq M |\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\varepsilon}|^2.$$

Prin urmare, ipotezele **(H2)** si **(H6)** sunt verificate.

In aceasta situatie, legea constitutiva se reduce la

$$\boldsymbol{\sigma} = k_0(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I}_{\mathbb{S}_d} + \psi' \left(|\boldsymbol{\varepsilon}^D(\mathbf{u})|^2 \right) \boldsymbol{\varepsilon}^D(\mathbf{u}). \quad (9)$$

Legea constitutiva (9) descrie comportamentul unor materiale Hencky, a se vedea de exemplu [37].

• **Legi de frecare multivoce**[a se vedea de exemplu [7]]

Consideram acum cazul legilor de frecare multivoce ce nu depind de alunecare.

$$-\boldsymbol{\sigma}_T(\mathbf{x}) \in \partial j(\mathbf{x}, \mathbf{u}_T(\mathbf{x})) \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (10)$$

Detalii despre aplicatiile unor astfel de legi se pot găsi în [28] (Section 2.4) sau [23] (Section 4.6.1).

Ca un simplu exemplu putem considera $j : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\{a|\mathbf{y}|; b|\mathbf{y}| + c\},$$

unde a, b, c pot fi potrivit alese.

În acest caz j este local Lipschitz în raport cu a doua variabilă și prin urmare (H4) se verifică.

Pentru detalii a se consulta [7].

TEMA Fie $W : V_1 \rightarrow (-\infty, \infty]$ funcțională definită prin

$$W(\mathbf{v}) = \begin{cases} \int_{\Omega} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))) \, d\mathbf{x}, & \text{daca } w(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\cdot))) \in L^1(\Omega) \\ \infty, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (11)$$

unde funcția $w : \Omega \times \mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{R}$ verifică:

- (1) $\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}_d$ funcția $\Omega \ni \mathbf{x} \mapsto w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ este măsurabilă;
- (2) A.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$ funcția $\mathbb{S}_d \ni \boldsymbol{\tau} \mapsto w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau})$ este convexă și i.s.c;
- (3) $w(\cdot, \mathbf{0}_{\mathbb{S}_d}) \in L^1(\Omega)$;
- (4) $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|_V} \int_{\Omega} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(\mathbf{x}))) \, d\mathbf{x} \rightarrow \infty$ dacă $\|\mathbf{v}\|_V \rightarrow \infty$.

Justificați că W este o funcțională proprie, convexă și i.s.c. pe V_1 .

Săptămâna a 10-a

Curs 10

Tematica acestei saptamani este: probleme de contact ce conduc la ecuatii variationale de evolutie.

Background de spatii de functii cu valori in $(X, \|\cdot\|_X)$ [a se vedea de exemplu [32, 33]]

Fie X un spatiu Banach real si $T > 0$.

$C([0, T]; X)$ este spatiul functiilor continue definite pe $[0, T]$ cu valori in X . $C([0, T]; X)$ este spatiu Banach inzestrat cu norma

$$\|v\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X.$$

O functie $v : [0, T] \rightarrow X$ se numeste diferentiabila in $t_0 \in [0, T]$ daca exista un element in X , notat $\dot{v}(t_0)$, numit *derivata* lui v in t_0 , astfel incat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (v(t_0 + h) - v(t_0)) - \dot{v}(t_0) \right\|_X = 0,$$

limita fiind scrisa in raport cu h cu $t_0 + h \in [0, T]$. Derivata in $t_0 = 0$ se defineste ca limita la dreapta iar derivata in $t_0 = T$ se defineste ca limita la stanga.

Functia v se numeste diferentiabila pe $[0, T]$ daca este diferentiabila in oricare $t_0 \in [0, T]$. In acest caz functia $\dot{v} : [0, T] \rightarrow X$ se numeste *derivata* lui v . Functia v se numeste *continuu diferentiabila* pe $[0, T]$ daca este diferentiabila si derivata ei este functie continua.

Notam cu $C^1([0, T]; X)$ spatiul functiilor continue diferentiabile pe $[0, T]$ cu valori in X si amintim ca acest spatiu este spatiu Banach real inzestrat cu norma

$$\|v\|_{C^1([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{v}(t)\|_X.$$

Utilizand proprietatile integralei este usor de observat ca daca $f \in C([0, T]; X)$ atunci functia $g : [0, T] \rightarrow X$ data prin

$$g(t) = \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

este în $C^1([0, T]; X)$ și, în plus, $\dot{g} = f$.

Mai mult, dacă $v \in C^1([0, T]; X)$ atunci

$$v(t) = \int_0^t \dot{v}(s) ds + v(0) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1)$$

Fie $K \subset X$. Utilizăm notațiile $C([0, T]; K)$ și $C^1([0, T]; K)$ pentru funcții continue respectiv continuu diferentiabile pe $[0, T]$ cu valori în K .

Pentru a simplifica scrierea adesea notăm

$$C([0, T]) = C([0, T], \mathbb{R}).$$

$$C^1([0, T]) = C^1([0, T], \mathbb{R}).$$

Mai general, pentru $m \geq 0$, întreg, definim

$$C^m([0, T]; X) = \{v \in C([0, T]; X) : v^{(j)} \in C([0, T]; X), j = 1, \dots, m\}.$$

Acesta este un spațiu Banach înzestrat cu norma

$$\|v\|_{C^m([0, T]; X)} = \sum_{j=0}^m \max_{t \in [0, T]} \|v^{(j)}(t)\|_X.$$

$$C^\infty([0, T]; X) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m([0, T]; X)$$

$$\equiv \{v \in C([0, T]; X) : v \in C^m([0, T]; X) \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Fie $p \in [1, \infty)$. Definim $L^p(0, T; X)$ ca fiind spațiul funcțiilor măsurabile $v : [0, T] \rightarrow X$ astfel încât $\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt < \infty$.

$L^p(0, T; X)$ este un spațiu Banach înzestrat cu norma

$$\|v\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Definim $L^\infty(0, T; X)$ ca fiind spațiul funcțiilor măsurabile $v : [0, T] \rightarrow X$ astfel încât $t \mapsto \|v(t)\|_X$ este esențial mărginită în $[0, T]$ ($\|v(\cdot)\|_X\|_{L^\infty(0, T)} < \infty$).

Spațiul $L^\infty(0, T; X)$ este un spațiu Banach înzestrat cu norma

$$\|v\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X.$$

Fie $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ un spațiu Hilbert.

$L^2(0, T; X)$ este un spațiu Hilbert înzestrat cu norma

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Pentru a simplifica scrierea vom scrie adesea:

$$L^p(0, T) = L^p(0, T; \mathbb{R})$$

Teorema 1. Fie $p \in [1, \infty]$. Atunci:

$C([0, T]; X)$ este densa în $L^p(0, T; X)$ și injectia este continua.

Dacă $X \hookrightarrow Y$, atunci $L^p(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; Y)$ pentru $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Teorema 2. Fie $v \in L^1(0, T; X)$. Atunci

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \|v(t) - v(t_0)\|_X dt = 0 \quad \text{a.p.t. } t_0 \in (0, T).$$

Teorema 3. Fie $p \in [1, \infty)$ și $q \in (1, \infty]$ conjugatul său. Dacă X este spațiu Hilbert atunci dualul spațiului $L^p(0, T; X)$ este $L^q(0, T; X)$.

Produsul în dualitate între $L^p(0, T; X)$ și dualul său se exprimă astfel

$$\langle u', u \rangle = \int_0^T (u'(t), u(t))_X dt.$$

O clasă de ecuații de evoluție abstracte

Fie $A : X \rightarrow X$ și $B : X \rightarrow X$ doi operatori (posibil neliniari), fie $f : [0, T] \rightarrow X$ o funcție continuă și fie u_0 o dată inițială.

Considerăm următoarea problemă de evoluție abstractă: să se determine $u : [0, T] \rightarrow X$ astfel încât

$$A\dot{u}(t) + Bu(t) = f(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(0) = u_0. \quad (3)$$

Equivalent,

$$(A\dot{u}(t), v)_X + (Bu(t), v)_X = (f(t), v)_X \quad \forall t \in [0, T], \forall v \in X \quad (4)$$

$$u(0) = u_0. \quad (5)$$

(4)-(5) este o problemă variațională guvernată de o ecuație de evoluție.

Teorema 4. [a se vedea de exemplu [32]] Fie X un spațiu Hilbert real. Fie $A : X \rightarrow X$ un operator Lipschitz și tare monoton. Fie de asemenea $B : X \rightarrow X$ un operator Lipschitz.

Atunci, pentru oricare $f \in C([0, T]; X)$ și $u_0 \in X$, problema (2)–(3) are o unică soluție ce verifică $u \in C^1([0, T]; X)$.

Descrierea modelului

Considerăm un model antiplan în deplasări tractiuni pentru materiale viscoelastice cu memorie scurtă. Descrierea matematică a modelului se poate realiza prin intermediul următoarelor probleme la limita.

PROBLEMA 27. *Să se determine $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\theta \Delta \dot{u} + \mu \Delta u + f_0 = 0 \quad \text{în } \Omega \times (0, T), \quad (6)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (7)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T); \quad (8)$$

$$(9)$$

coeficientul θ din (75) se numește *coeficient de viscozitate*.

Studiul variational al modelului

Admitem următoarele ipoteze:

$$\theta > 0; \quad \mu > 0;$$

$$f_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad f_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2)). \quad (10)$$

Considerăm V drept spațiu al funcțiilor test.

Definim operatorii A și B ,

$$A : V \rightarrow V; \quad (Au, v)_V = \int_{\Omega} \theta \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

$$B : V \rightarrow V; \quad (Bu, v)_V = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

și definim f astfel încât, pentru oricare $t \in [0, T]$

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot \gamma v \, d\Gamma. \quad (11)$$

Aplicăm Teorema 4.

TEMA Admitem ca $f_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ și $f_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2))$. Fie $f : [0, T] \rightarrow V$, $(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot \gamma v \, d\Gamma$. Justificați ca $f \in C([0, T]; V)$.

Seminar 10

- Un rezultat de punct fix

Propoziția 5. [a se vedea de exemplu [32]] Fie $\Lambda : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ un operator astfel încât: exista $k \in [0, 1)$ și $c \geq 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X &\leq k \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X + c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds \\ \forall \eta_1, \eta_2 &\in C([0, T]; X), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (12)$$

Atunci exista un unic element $\eta^* \in C([0, T]; X)$ astfel încât $\Lambda\eta^* = \eta^*$.

DEMONSTRAȚIE. Notam

$$\|\eta\|_\beta = \max_{t \in [0, T]} e^{-\beta t} \|\eta(t)\|_X \quad \forall \eta \in C([0, T]; X), \quad (13)$$

cu $\beta > 0$ ales mai tarziu.

$\|\cdot\|_\beta$ definește o norma pe $C([0, T]; X)$, ce este echivalentă cu norma standard $\|\cdot\|_{C([0, T]; X)}$.

Rezulta că $C([0, T]; X)$ este spațiu Banach în raport și cu norma $\|\cdot\|_\beta$.

Fie $t \in [0, T]$.

Din (12) și (13) rezulta

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} \|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X &\leq k e^{-\beta t} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X + c e^{-\beta t} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X ds \\ &= k e^{-\beta t} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X + c e^{-\beta t} \int_0^t (e^{-\beta s} \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X) e^{\beta s} ds \\ &\leq k \|\eta_1 - \eta_2\|_\beta + c e^{-\beta t} \|\eta_1 - \eta_2\|_\beta \int_0^t e^{\beta s} ds \\ &= k \|\eta_1 - \eta_2\|_\beta + \frac{c}{\beta} \|\eta_1 - \eta_2\|_\beta (1 - e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

pentru oricare $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; X)$ și, prin urmare,

$$\|\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2\|_\beta \leq \left(k + \frac{c}{\beta}\right) \|\eta_1 - \eta_2\|_\beta \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; X).$$

Fie β astfel încât $\beta > \frac{c}{1-k}$ (aceasta alegere este posibilă deoarece $k \in [0, 1)$). Atunci

$$k + \frac{c}{\beta} < 1.$$

Prin urmare, Λ este o contracție pe spațiul $C([0, T]; X)$ înzestrat cu norma $\|\cdot\|_\beta$. Din Teorema lui Banach de punct fix deducem că Λ are un unic punct fix $\eta^* \in C([0, T]; X)$. $\square$

• Lema lui Gronwall

Lema 6. [a se vedea de exemplu [32]] Fie $f, g \in C([0, T])$ și presupunem că există $c > 0$ astfel încât

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (14)$$

Atunci

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (15)$$

Mai mult, dacă g este crescătoare, atunci

$$f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T].$$

DEMONSTRAȚIE. Definim

$$F(s) = \int_0^s f(r) dr \quad \forall s \in [0, T]. \quad (16)$$

Atunci $F'(s) = f(s)$. Din (14) obținem

$$F'(s) \leq g(s) + c F(s) \quad \forall s \in [0, T].$$

Astfel,

$$(e^{-cs} F(s))' \leq g(s) e^{-cs} \quad \forall s \in [0, T].$$

Fie $t \in [0, T]$. Integrând de la 0 la t , deoarece $F(0) = 0$, rezulta că

$$e^{-ct} F(t) \leq \int_0^t g(s) e^{-cs} ds.$$

Deci,

$$F(t) \leq \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds. \quad (17)$$

Din (14) și (16) rezulta $f(t) \leq g(t) + c F(t)$.

Prin urmare, utilizând (17), obținem (15).

Daca g este functie crescatoare, atunci (15) implica

$$f(t) \leq g(t) + g(t) c \int_0^t e^{c(t-s)} ds = g(t) e^{ct}.$$

□

Tema proiect Spatii $W^{k,p}(0, T; X)$ (se poate utiliza [32], paginile 34-38).

Săptămâna a 11-a

Curs 11

Tematica acestei saptamani este: probleme de contact ce conduc la inegalitati variationale de evolutie.

Elemente de analiza neliniara [a se vedea de exemplu [32]]

- Inegalitati variationale de evolutie cu vâscozitate

Fie a si b doua forme biliniare pe X , $j : X \rightarrow (-\infty, \infty]$, $f : [0, T] \rightarrow X$ si fie u_0 data initiala.

Consideram urmatoarea problema de evolutie: sa se determine $u : [0, T] \rightarrow X$ astfel incat

$$\begin{aligned} a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2)$$

Inegalitatea (1) este o inegalitate variationala de evolutie cu vâscozitate.

In studiul problemei Cauchy (1)–(2) admitem urmatoarele ipoteze:

$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este forma biliniara

$$\begin{aligned} \text{exista } M > 0 \text{ astfel incat} \\ |a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{aligned} \quad (3)$$

$b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este forma biliniara

$$\begin{aligned} \text{exista } M' > 0 \text{ astfel incat} \\ |b(u, v)| \leq M' \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{aligned} \quad (4)$$

exista $m' > 0$ astfel incat

$$b(v, v) \geq m' \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

$$j : X \rightarrow (-\infty, \infty] \text{ este functionala proprie convexa si i.s.c.} \quad (5)$$

$$f \in C([0, T]; X). \quad (6)$$

$$u_0 \in X. \quad (7)$$

Teorema 1. *Fie X un spatiu Hilbert si admitem ipotezele anuntate anterior. Atunci, problema (1)–(2) are o unica solutie avand regularitatea $u \in C^1([0, T]; X)$.*

- Inegalitati variationale de evolutie fara vâscozitate

Fie a o forma biliniara pe X , $j : X \rightarrow (-\infty, \infty]$, $f : [0, T] \rightarrow X$ si fie u_0 data initiala.

Consideram urmatoarea problema: sa se determine $u : [0, T] \rightarrow X$ astfel incat

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad (8)$$

$$\forall v \in X, \text{ a.p.t. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0. \quad (9)$$

Studiem Problema Cauchy (8)–(9) admitand urmatoarele ipoteze.

$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este o forma biliniara simetrica

exista $M > 0$ astfel incat

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (10)$$

exista $m > 0$ such that

$$a(v, v) \geq m \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

$j : X \rightarrow \mathbb{R}$ este o functionala convexa diferntiabila Gâteaux

$$(a) \quad j(v) \geq 0 \quad \forall v \in X.$$

$$(b) \quad j(0_X) = 0. \quad (11)$$

exista $c_j > 0$ astfel incat

$$\|\nabla j(v)\|_X \leq c_j (\|v\|_X + 1) \quad \forall v \in X.$$

$$f \in W^{1,2}(0, T; X). \quad (12)$$

$$u_0 \in X. \quad (13)$$

Exista $\delta_0 \geq 0$ astfel incat

$$a(u_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_X - \delta_0 \quad \forall v \in X. \quad (14)$$

Teorema 2. *Fie X un spatiu Hilbert si admitem (10)–(14).*

Atunci, problema (8)–(9) are solutie unica cu regularitatea $u \in W^{1,2}(0, T; X)$. In plus, exista $c > 0$ (independenta de j), astfel incat

$$\|u\|_{W^{1,2}(0, T; X)} \leq c (\sqrt{\delta_0} + \|u_0\|_X + \|f\|_{W^{1,2}(0, T; X)}). \quad (15)$$

Demonstratia se poate lectura din [32] (facultativ).

Un model vâscoelastic

Considerăm un model antiplan de contact cu frecare pentru materiale vâscoelastice, după cum urmează:

PROBLEMA 28. *Să se determine $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\operatorname{div}(\theta \nabla \dot{u} + \mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (16)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (17)$$

$$\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (18)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u| \leq g, \\ \theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ dacă } \dot{u} \neq 0 \end{array} \right\} \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (19)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (20)$$

În studiul Problemei 33 admitem următoarele ipoteze.

$$\mu \in L^\infty(\Omega), \quad (21)$$

$$\theta \in L^\infty(\Omega), \text{ și există } \theta^* > 0 \quad (22)$$

astfel încât $\theta(\mathbf{x}) \geq \theta^*$ a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$.

$$f_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad f_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2)), \quad (23)$$

$$g \in L^2(\Gamma_3) \text{ și } g(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ a.p.t. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \quad (24)$$

$$u_0 \in V. \quad (25)$$

Definim $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ și $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ după cum urmează:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (26)$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \theta \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (27)$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} g |\gamma v| \, d\Gamma \quad \forall v \in V, \quad (28)$$

Utilizând Teorema de reprezentare a lui Riesz definim funcția $f : [0, T] \rightarrow V$ așa încât

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) v \, d\Gamma \quad \forall v \in V, \, t \in [0, T]. \quad (29)$$

Notăm că

$$f \in C([0, T]; V). \quad (30)$$

Utilizând formula lui Green suntem conduși la următoarea formulare variațională.

PROBLEMA 29. *Sa se determine $u : [0, T] \rightarrow V$ astfel incat*

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \quad (31)$$

$$\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0. \quad (32)$$

Teorema 3. *Admitem ipotezele (58)–(62). Atunci, Problema 29 are solutie unica, $u \in C^1([0, T]; V)$.*

DEMONSTRAȚIE. Din (58) rezulta ca

$$|a(u, v)| \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (33)$$

Forma biliniara b este forma simetrica si

$$|b(u, v)| \leq \|\theta\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (34)$$

In plus,

$$b(v, v) \geq \theta^* \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (35)$$

Din (61) rezulta j este seminorma continua pe V si, prin urmare este convexa si inferior semicontinua.

Tinem cont si de (30),(62) si aplicam Teorema 1. □

Un model elastic pentru procese cvasistatice

Consideram un model antiplan de contact cu frecare, pentru procese cvasistatice.

PROBLEMA 30. *Sa se determine $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat*

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (36)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (37)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (38)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g, \quad \mu \partial_\nu u = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ if } \dot{u} \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (39)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (40)$$

In studiul variational al acestui model admitem ca pragul de frecare g verifica (61), coeficientul de material μ verifica (61) si,

$$f_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)), \quad f_2 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (41)$$

Definim $f : [0, T] \rightarrow V$ așa încât

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) v \, d\Gamma \quad \forall v \in V, \, t \in [0, T]. \quad (42)$$

Utilizând (41), deducem că

$$f \in W^{1,2}(0, T; V). \quad (43)$$

Admitem de asemenea

$$u_0 \in V, \quad (44)$$

$$a(u_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V. \quad (45)$$

Prezentul model are următoarea formulare variațională.

PROBLEMA 31. *Să se determine $u : [0, T] \rightarrow V$ astfel încât*

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad (46)$$

$$\forall v \in V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0. \quad (47)$$

În studiul acestor probleme se aplică Teorema 2.

TEMA Fie $g \in L^2(\Gamma_3)$ și $v \in V$. Justificați că $g|\gamma v| \in L^1(\Gamma_3)$.

Seminar 11

Rezultate de convergenta

PROBLEMA 32. *Sa se determine $u_\rho : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat*

$$\operatorname{div}(\theta \nabla \dot{u}_\rho + \mu \nabla u_\rho) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (48)$$

$$u_\rho = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (49)$$

$$\theta \partial_\nu \dot{u}_\rho + \mu \partial_\nu u_\rho = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (50)$$

$$\theta \partial_\nu \dot{u}_\rho + \mu \partial_\nu u_\rho = -g \frac{\dot{u}_\rho}{\sqrt{\dot{u}_\rho^2 + \rho^2}} \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (51)$$

$$u_\rho(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (52)$$

Notam ca aceasta problema poate fi privita ca o regularizare a problemei urmatoare.

PROBLEMA 33. *Sa se determine $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat*

$$\operatorname{div}(\theta \nabla \dot{u} + \mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (53)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (54)$$

$$\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (55)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u| \leq g, \\ \theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ daca } \dot{u} \neq 0 \end{array} \right\} \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (56)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (57)$$

Ipoteze de lucru:

$$\mu \in L^\infty(\Omega), \quad (58)$$

$$\theta \in L^\infty(\Omega), \text{ si exista } \theta^* > 0 \quad (59)$$

astfel incat $\theta(\mathbf{x}) \geq \theta^*$ a.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$.

$$f_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad f_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2)), \quad (60)$$

$$g \in L^2(\Gamma_3) \text{ and } g(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma_3 \quad (61)$$

$$u_0 \in V. \quad (62)$$

Utilizand

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (63)$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \theta \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (64)$$

$$j_\rho(v) = \int_{\Gamma_3} g(\sqrt{|\gamma v|^2 + \rho^2} - \rho) d\Gamma \quad \forall v \in V, \quad (65)$$

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) v d\Gamma \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (66)$$

suntem conduși la următoarea problema variațională:

PROBLEMA 34. *Să se determine $u_\rho : [0, T] \rightarrow V$ astfel încât*

$$\begin{aligned} a(u_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + b(\dot{u}_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \\ \geq (f(t), v - \dot{u}_\rho(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (67)$$

$$u(0) = u_0. \quad (68)$$

Teorema 4. *[a se vedea de exemplu [32]] Pentru orice $\rho > 0$, Problema 34 are soluție unică cu regularitatea $u_\rho \in C^1([0, T]; V)$.*

In plus,

$$\|u_\rho - u\|_{C^1([0, T]; V)} \rightarrow 0 \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (69)$$

Demonstratia se poate lectura din [32].

PROBLEMA 35. *Fie $\rho > 0$. Să se determine $u_\rho : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u_\rho) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (70)$$

$$u_\rho = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (71)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (72)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho = -g \frac{\dot{u}_\rho}{\sqrt{\dot{u}_\rho^2 + \rho^2}} \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (73)$$

$$u_\rho(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (74)$$

Aceasta problema se poate privi ca o regularizare a problemei următoare.

PROBLEMA 36. *Sa se determine $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat*

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (75)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (76)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (77)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g, \quad \mu \partial_\nu u = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ daca } \dot{u} \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (78)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (79)$$

Problema 35 are urmatoarea formulare variationala.

PROBLEMA 37. *Sa se determine $u_\rho : [0, T] \rightarrow V$ astfel incat*

$$a(u_\rho(t), v - \dot{u}_\rho(t)) + j_\rho(v) - j_\rho(\dot{u}_\rho(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}_\rho(t))_V \quad (80)$$

$$\forall v \in V, \quad \text{a.p.t. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0. \quad (81)$$

Teorema 5. *[a se vedea [32]]*

1) Pentru oricare $\rho > 0$, Problema 37 are solutie unica cu regularitatea $u_\rho \in W^{1,2}(0, T; V)$.

2) Problema 31 are solutie unica cu regularitatea $u \in W^{1,2}(0, T; V)$.

3)

$$u_\rho \rightarrow u \quad \text{in } C([0, T], V) \quad \text{as } \rho \rightarrow 0. \quad (82)$$

Demonstratia poate fi gasita in [32] (facultativ)

TEMA Fie $f_0 \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$ si $v \in V$. Justificati ca $f_0(t)v \in L^1(\Omega)$ a.p.t. $t \in (0, T)$.

TEMA $j_\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ este functionala convexa si inferior semicontinua.

Săptămâna a 12-a

Curs 12

Tematica acestei saptamani este: probleme de contact ce conduc la inegalitati cvasivariationale de evolutie.

- Inegalitati cvasivariationale de evolutie cu vâscozitate [a se vedea de exemplu [32]]

Consideram urmatoarele doua probleme variationale:

PROBLEMA 38. *Sa se determine $u : [0, T] \rightarrow X$ astfel incat*

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \quad (1)$$

$$\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0. \quad (2)$$

Consideram de asemenea urmatoarea problema:

PROBLEMA 39. *Sa se determine $u : [0, T] \rightarrow X$ astfel incat*

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \quad (3)$$

$$\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0. \quad (4)$$

Admitem urmatoarele ipoteze:

$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este forma biliniara

exista $M > 0$ astfel incat (5)

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

$b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este forma biliniara

exista $M' > 0$ astfel incat

$$|b(u, v)| \leq M' \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (6)$$

exista $m' > 0$ astfel incat

$$b(v, v) \geq m' \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

$\forall \eta \in K, j(\eta, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R}$ convexa si i.s.c.

$\exists \alpha \geq 0$ astfel incat (7)

$$\begin{aligned} j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \\ \leq \alpha \|\eta_1 - \eta_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall \eta_1, \eta_2, v_1, v_2 \in K. \end{aligned}$$

$$f \in C([0, T]; X). \quad (8)$$

$$u_0 \in X. \quad (9)$$

In studiul acestor doua probleme avem

Teorema 1. *Fie X un spatiu Hilbert. Admitem ipotezele (5)-(9). Atunci:*

- 1) Problema (1)-(2) are solutie unica $u \in C^1([0, T]; X)$.
- 2) Daca $m' > \alpha$, problema (3)-(4) are solutie unica cu regularitatea $u \in C^1([0, T]; X)$.

Demonstratia poate fi lecturata de catre cei interesati din [32].

- Inegalitati cvasivariationale de evolutie fara vâscozitate [a se vedea de exemplu [32]]

Fie X spatiu Hilbert separabil si fie $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, T] \rightarrow X$.

Sa consideram urmatoarea problema la limita: sa se determine $u : [0, T] \rightarrow X$ astfel incat

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \quad (10)$$

$$\geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, \quad \text{a.e. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0. \quad (11)$$

In studiul problemei(10)–(11) presupunem ca a este forma biliniara simetrica continua si X -eliptica.

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; X). \quad (12)$$

$$u_0 \in X. \quad (13)$$

$$a(u_0, v) + j(u_0, v) \geq (f(0), v)_X \quad \forall v \in X. \quad (14)$$

$$\forall \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ este o seminorma pe } X. \quad (15)$$

Pentru orice siruri $\{\eta_n\} \subset X$ si $\{u_n\} \subset X$ astfel incat

$$\begin{aligned} \eta_n \rightharpoonup \eta \in X, \quad u_n \rightharpoonup u \in X \text{ si pentru oricare } v \in X, \text{ se verifica:} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n)] \leq j(\eta, v) - j(\eta, u). \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Exista } \alpha \in (0, m) \text{ astfel incat} \\ j(u, v - u) - j(v, v - u) \leq \alpha \|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \end{aligned} \quad (17)$$

Exista doua functii $a_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ and $a_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$
 care duc multimi marginite din X in multimi marginite in $\mathbb{R}$
 astfel incat $j(\eta, u) \leq a_1(\eta) \|u\|_X^2 + a_2(\eta) \quad \forall \eta, u \in X,$
 si $a_1(0_X) < m - \alpha.$ (18)

Pentru orice sir $\{\eta_n\} \subset X$ cu $\eta_n \rightharpoonup \eta \in X,$
 si orice sir $\{u_n\} \subset X,$ avem
 $\lim_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, u_n) - j(\eta, u_n)] = 0.$ (19)

Pentru oricare $s \in (0, T]$ si $u, v \in W^{1,\infty}(0, T; X)$
 cu $u(0) = v(0), \quad u(s) \neq v(s),$

$$\int_0^s [j(u(t), \dot{v}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t)) + j(v(t), \dot{u}(t)) - j(v(t), \dot{v}(t))] dt$$
 (20)

$$< \frac{m}{2} \|u(s) - v(s)\|_X^2.$$

Exista $\beta \in (0, \frac{m}{2})$ astfel incat, pentru oricare $s \in (0, T]$ si
 $u, v \in W^{1,\infty}(0, T; X)$ cu $u(s) \neq v(s),$

$$\int_0^s [j(u(t), \dot{v}(t)) - j(u(t), \dot{u}(t)) + j(v(t), \dot{u}(t)) - j(v(t), \dot{v}(t))] dt$$
 (21)

$$\leq \beta \|u(s) - v(s)\|_X^2.$$

Teorema 2. *Fie X spatiu Hilbert separabil si admitem (10) si (12)–(14).
 Atunci:*

1) *In ipotezele (15)–(19), problema (10)–(11) are cel putin o solutie $u \in W^{1,\infty}(0, T; X).$*

2) *In ipotezele (15)–(20) problema (10)–(11) are o unica solutie cu regularitatea $u \in W^{1,\infty}(0, T; X).$*

3) *In ipotezele (15)–(19) si (21), problem (10)–(11) are o unica solutie $u = u(f, u_0) \in W^{1,\infty}(0, T; X).$ Aplicatia $(f, u_0) \mapsto u$ este Lipschitz de la $W^{1,\infty}(0, T; X) \times X$ la $C([0, T]; X).$*

Modele cu vâscozitate

PROBLEMA 40. *Sa se determine $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat*

$$\operatorname{div}(\theta \nabla \dot{u} + \mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (22)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (23)$$

$$\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} |\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u| &\leq g(|u|), \\ \theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u &= -g(|u|) \frac{\dot{u}}{|u|} \text{ daca } \dot{u} \neq 0 \end{aligned} \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (25)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (26)$$

Consideram urmatoarea problema la limita.

PROBLEMA 41. *Sa se determine $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat*

$$\operatorname{div}(\theta \nabla \dot{u} + \mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (27)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (28)$$

$$\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} |\theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u| &\leq g(|\dot{u}|), \\ \theta \partial_\nu \dot{u} + \mu \partial_\nu u &= -g(|\dot{u}|) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ daca } \dot{u} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (30)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (31)$$

Problema 40 conduce la urmatoarea formulare variationala.

PROBLEMA 42. *Sa se determine $u : [0, T] \rightarrow V$ astfel incat*

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) \quad (32)$$

$$-j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0, \quad (33)$$

unde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (34)$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \theta \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (35)$$

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} g(|u|) |v| \, da \quad \forall u, v \in V, \quad (36)$$

unde pragul de frecare g satisface ipoteza

$$\begin{aligned} g : \Gamma_3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ astfel incat } : \\ \text{Exista } L_g > 0 &\text{ astfel incat} \\ |g(\mathbf{x}, r_1) - g(\mathbf{x}, r_2)| &\leq L_g |r_1 - r_2| \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.p.t. } \mathbf{x} &\in \Gamma_3. \end{aligned} \quad (37)$$

Aplicatia $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, r)$
este masurabila Lebesgue $\Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}$.

Aplicatia $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}, 0)$ este in $L^2(\Gamma_3)$.

Utilizand Teorema de reprezentare a lui Riesz definim functia $f : [0, T] \rightarrow V$ asa incat

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) v \, da \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (38)$$

Problem 41 are urmatoarea formulare variationala.

PROBLEMA 43. Sa se determine $u : [0, T] \rightarrow V$ astfel incat

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(\dot{u}(t), v) \quad (39)$$

$$-j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0. \quad (40)$$

Teorema 3. [a se vedea [32]]

1) Problema (32)–(33) are solutie unica cu regularitatea $u \in C^1([0, T]; V)$.

2) Exista $L_0 = L_0(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \theta)$, astfel incat problema (39)–(40) are solutie unica cu regularitatea $u \in C^1([0, T]; V)$ daca $L_g < L_0$.

Demonstratia se poate gasi in [32](facultativ).

Seminar 12

Un model fara vâscozitate

PROBLEMA 44. *Sa se determine $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel incat*

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (41)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (42)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (43)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g(|u|), \quad \mu \partial_\nu u = -g(|u|) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \quad \text{if } \dot{u} \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (44)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (45)$$

In studiul acestei probleme presupunem ca μ verifica (60) si g verifica (37); in plus,

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \quad f_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (46)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (47)$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \theta \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V, \quad (48)$$

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} g(|u|) |v| \, da \quad \forall u, v \in V, \quad (49)$$

where the friction bound g is assumed to satisfy (37). Utilizand Teorema de reprezentare a lui Riesz definim functia $f : [0, T] \rightarrow V$ asa incat

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) v \, da \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T]. \quad (50)$$

Notam ca

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; V). \quad (51)$$

In final presupunem ca data initiala u_0 satisface

$$u_0 \in V, \quad (52)$$

si are loc urmatoarea conditie de compatibilitate.

$$a(u_0, v) + j(u_0, v) \geq (f(0), v)_V \quad \forall v \in V, \quad (53)$$

Problema (41)–(45) are urmatoarea formulare variationala.

PROBLEMA 45. *Sa se determine $u : [0, T] \rightarrow V$ astfel incat*

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad (54)$$

$$\forall v \in V, \quad a.p.t. \quad t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0. \quad (55)$$

Teorema 4. *Exista $L_0 = L_0(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mu)$ astfel incat Problem 45 are cel putin o solutie u avand regularitatea $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$, daca $L_g < L_0$.*

Demonstratia se poate gasi in [32].

Anexa: tematica cursului

- (1) Spatii Lebesgue/Sobolev de functii vectoriale / tensoriale
- (2) Inegalitatea lui Korn. Formula de tip Green.
- (3) Probleme de contact ce conduc la ecuatii variationale liniare
- (4) Probleme de contact ce conduc la ecuatii variationale neliniare
- (5) Probleme de contact ce conduc la inegalitati variationale de tipul I
- (6) Probleme de contact ce conduc la inegalitati variationale de tipul II
- (7) Probleme de contact ce conduc la inegalitati cvasivariationale
- (8) Probleme de contact ce conduc la inegalitati hemivariationale
- (9) Probleme de contact ce conduc la inegalitati variational-hemivariationale
- (10) Probleme de contact ce conduc la ecuatii variationale de evolutie
- (11) Probleme de contact ce conduc la inegalitati variationale de evolutie
- (12) Probleme de contact ce conduc la inegalitati cvasivariationale de evolutie

Bibliografie

1. M. Boureanu and A. Matei, Weak solutions for antiplane models involving elastic materials with degeneracies, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, **61**(1), 73–85, 2010.
2. H. Brezis, *Analiză funcțională. Teorie și aplicații*, Editura Academiei Române, București, 2002, (Traducere de Prof.univ.dr. V. Rădulescu).
3. H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
4. M. Chipot, *Elliptic equations: An introductory course*, Birkhäuser Advanced texts, Birkhäuser Verlag, 2009.
5. F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
6. N. Costea and A. Matei, Weak solutions for nonlinear antiplane problems leading to hemivariational inequalities, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **72** (2010), 3669–3680.
7. N. Costea and A. Matei, Contact models leading to variational-hemivariational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, bf 386(2) (2012), 647–660.
8. G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
9. L. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Edition, AMS, 2009.
10. W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.
11. P. Jebelean, *Probleme la limita eliptice. Capitoile speciale de EDP*, Editura de Vest, Timisoara 2008.
12. N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
13. A. Klarbring, A. Mikelić and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engng. Sci.* **26** (1988), 811–832.
14. A. Klarbring, A. Mikelić and M. Shillor, On friction problems with normal compliance, *Nonlinear Analysis* **13** (1989), 935–955.
15. A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function spaces*, Noordhoff International Publishing Leyden and Academia Prague, 1977.
16. A. Matei, A mixed hemivariational problem and applications, *Computers and Mathematics with Applications (CAMWA)*, **77** (11) (2019), 2989–3000.
17. A. Matei, Note de curs Capitoile speciale de EDP.
18. A. Matei, Note de curs Modelare Matematica prin ED.
19. R.E. Megginson, *An introduction to Banach Space Theory (Graduate Texts in Mathematics)*, New York: Springer-Verlag, 183(1998).
20. S. Migorski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Springer, 2013.
21. P. Monk, *Numerical Mathematics and Scientific Computation. Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford University Press, 2003
22. D. Motreanu and V. Rădulescu, *Variational and Non-variational Methods in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems*, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2003.
23. Z. Naniewicz and P.D. Panagiotopoulos, *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1995.
24. J. Necas, *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer, 2012.

25. J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.
26. J.T. Oden and J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **52** (1985), 527–634.
27. P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
28. P. D. Panagiotopoulos, *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993.
29. M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics **655**, Springer, Berlin, 2004.
30. A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.
31. M. Sofonea, Problèmes mathématiques en élasticité et en viscoplasticité, CNRS 1501, Laboratoire de Mathématiques appliquées, Université Blaise Pascal Clermont Ferrand, 1993.
32. M. Sofonea, A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Springer, 2009.
33. M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 2012.
34. N. Strömberg, *Thermomechanical Modelling of Tribological Systems*, Ph.D. Thesis, no. 497, Linköping University, Sweden, 1997.
35. N. Strömberg, L. Johansson and A. Klarbring, Generalized standard model for contact friction and wear, in *Contact Mechanics*, M. Raous, M. Jean and J.J. Moreau, eds., Plenum Press, New York, 1995.
36. N. Strömberg, L. Johansson and A. Klarbring, Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear, *Int. J. Solids Structures* **33** (1996), 1817–1836.
37. E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. IV: Applications to Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New-York, 1988.