

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Modelare matematica prin ecuatii diferentiale

**Modelare matematica prin ecuatii
diferentiale
Indrumar si material auxiliar pentru curs**

Andaluzia Matei

Cuprins

Curs 1	1
Curs 2	4
Curs 3	13
Curs 4	17
Curs 5	27
Curs 6	34
Curs 7	38
Curs 8	55
Curs 9	61
Curs 10	78
Curs 11	82
Curs 12	88
Curs 13	93
Curs 14	100
Bibliografie	104

Curs 1

Tematica: Comenzi si operatii uzuale in MATLAB.

MATLAB-ul (Matrix laboratory: The MathWorks, Inc., SUA) este un limbaj de programare performant, usor de utilizat in modelare matematica, simulare, analiza i vizualizarea datelor, avand ca element de baz matricea(tabloul). Acest limbaj este utilizat atat in mediul universitar cat si in industrie.

Vectori. Matrice

Scriind

$x=[1\ 2\ 3]$ sau $x=[1,2,3]$

Matlabul va afisa un vector linie cu trei componente.

Scriind

$x=[1;2;3]$

Matlabul va afisa un vector coloana cu 3 componente.

Scriind

$A=[1\ 4\ 6; 2\ 6\ 8; 3\ 6\ 9]$

Matlabul va afisa o matrice cu trei linii si trei coloane

Mentionam aici urmatoarele matrice particulare:

$\text{eye}(n)$: matricea identitate cu n linii si n coloane

$\text{zeros}(m,n)$: matricea cu m linii si n coloane cu toate componentele zero

$\text{ones}(m,n)$: matricea cu m linii si n coloane cu toate componentele egale cu 1

Operatori pentru operatii uzuale cu matrice:

- $+$
- $-$
- $*$
- $.*$
- $\backslash$ ($X = A \backslash B$ este soluaia ecuaiei matriceale $AX = B$)
- $/$ ($X = B/A$ este soluaia ecuaiei matriceale $XA = B$.)
- $.^{\wedge}$

Daca A este o matrice patratica si nesingulara atunci determinantul si inversa se calculeaza in Matlab cu ajutorul comenzilor

- `det`
- `inv`.

Generare curbe

`Plot` genereaz grafice 2D cu scalare liniar a axelor. Dac se specific doi vectori ca argumente, `plot(x,y)` produce graficul lui y versus x .

Exemplu:

```
x=0:1:3;  
y=x.^2+5;  
plot(x,y,'ro')  
vskip 3mm
```

Programul de mai sus deseneaza graficul functiei $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 5$ in culoare rosie (`r=red`) cu ceruculete ("`o`").

Putem desene doua grafice in acelasi sistem de axe cu ajutorul comenzii **hold on**

Exemplu:

```
x=0:1:3;  
y=x.^2+5;  
plot(x,y,'r')  
hold on  
z=x+5;  
plot(x,z,'g')
```

Desenam astfel doua grafice (unul rosu si unul verde (`g=green`)) in acelasi sistem de axe.

La trasarea curbelor putem preciza un specificator de culoare:

`c`, `m`, `y`, `k`, `r`, `g`, `b`, `w`
si/sau un tip de marker
`x`, `*`, `o`, etc.

In Matlab se poate realiza o afiare a mai multor grafice n aceeai fereastr prin intermediul functiei `subplot`. Funcia `subplot(m,n,i)` desparte fereastr de tip figur ntr-o matrice $m \times n$ de mici subploturi (subferestre) i selecteaz subplotul i ca grafic curent.

Exemplu:

```
x=0:1:3;
```

```
y=x.^2+5;
subplot(1,2,1)
plot(x,y,'r')
z=x+5;
subplot(1,2,2)
plot(x,z,'g')
```

Generare de suprafete

Pentru a genera suprafete in Matlab putem utiliza comenzile **mesh** si **surf**. Graficele realizate cu aceste comenzi genereaz suprafee 3D din datele provenite de la matrici.

```
x=0:.2:7;
y=0:.2:5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z = X.^2 + Y.^2;
mesh(X,Y,Z);
%surf(X,Y,Z).
```

Notam ca funcia **meshgrid** transform domeniul specificat prin vectorii x i y, n matricile X i Y. Liniile matricei X sunt copii ale vectorului x si coloanele matricei Y sunt copii ale vectorului y.

Curs 2

Tematica: Modele in mecanica punctului material (modelarea mișcării punctului material pe orizontală/verticală)

Modelarea mișcării punctului material pe orizontală

O bilă se deplasează în plan orizontal în linie dreaptă. Cunoșcând poziția inițială și viteza de pornire, vrem să localizăm bila la un anumit moment.

Ne raportăm la axa Ox și facem următoarele notații: t -timpul, x_0 poziția inițială a bilei, v_0 -viteza inițială a bilei, $x(t)$ -poziția bilei la momentul t , $v(t)$ -viteza bilei la momentul de timp t , F -rezultanta forțelor ce acționează asupra bilei, m -masa bilei ($m > 0$).

Legea lui Newton: $F = m a$, unde $a = \frac{dv}{dt}$ și $v = \frac{dx}{dt}$.

Studiem cazul în care forța de frecare nu este neglijabilă: $F = -k v$, $k > 0$.

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -k v, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (1)$$

Determinarea soluției exacte a problemei (1)

Din $m \frac{dv}{dt} = -k v$, rezultă $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$.

Integrând,

$$\ln |v| = -\frac{k}{m} t + C$$

, unde C este o constantă.

$$v(t) = C_1 e^{(-\frac{k}{m}t)},$$

unde $C_1 = e^C$ este constantă.

Constanta C_1 se va determina din condiția

$$v(0) = v_0.$$

Rezultă $C_1 = v_0$.

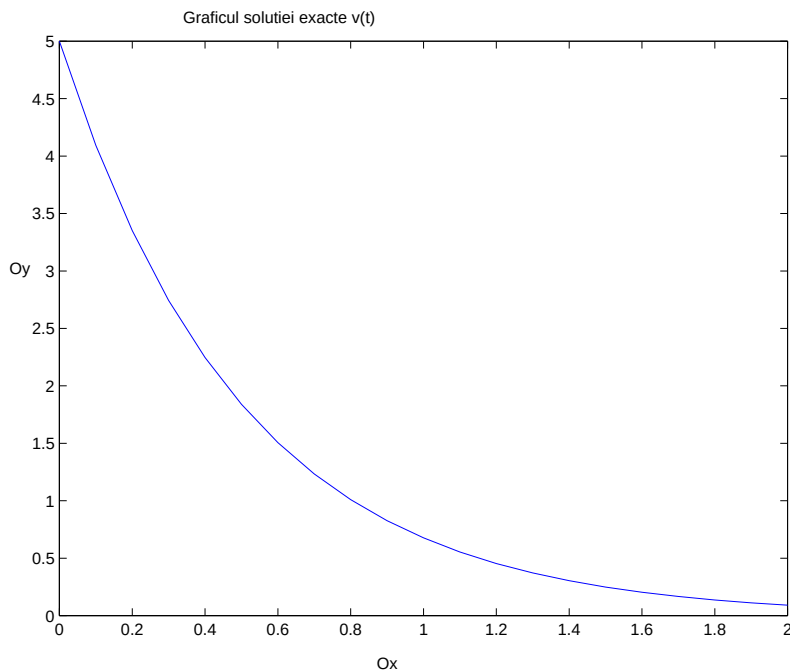


FIGURA 1. Graficul soluției exacte

Deci, soluția exactă a problemei (1) este

$$v(t) = v_0 e^{(-\frac{k}{m}t)}$$

.

Trasarea graficului funcției $v = v(t)$ pentru $m = 3 \text{ kg}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$ și $k = 6 \text{ N/m}$

```
T = 2;
v0 = 5;
h = 0.1;
m = 3;
k = 6;
q = 0 : h : T;
title('Graficul solutiei exacte v(t)')
yy = v0 * exp(-(k/m). * q);
plot(q, yy, 'b')
```

Trasarea graficului soluției aproximative pentru problema (1), folosind metodele Euler și Runge-Kutta pentru $m = 3 \text{ kg}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$ și $k = 6 \text{ N/m}$

```

T = 2;
v0 = 5; h = 0.1;
m = 3; k = 6;
[t1,y1] = eul('funct1',[0,T],v0,h);
title('Graficul soluției aproximative cu metoda EULER')
subplot(1,3,1)
plot(t1,y1,'m')
[t2,y2] = rk2('funct1',[0,T],v0,h);
title('Graficul soluției aproximative cu metoda Runge – Kutta2')
subplot(1,3,2)
plot(t2,y2,'g')
[t3,y3] = rk2('funct1',[0,T],v0,h);
title('Graficul soluției aproximative cu metoda Runge – Kutta4')
subplot(1,3,3)
plot(t3,y3,'r')

```

Subrutinele MATLAB "eul.m", "rk2.m" și "rk4.m" apelează "funct1.m":

```

function rez = funct1(t,y)
k = 6;
m = 3;
rez = -k * y;

```

Un studiu al erorii

```

T = 2;
h = 0.1; m = 3;
k = 6; v0 = 5;
[t2,y2] = rk2('funct1',[0,T],v0,h);
yexact = v0.*exp(-(k/m)*t2);
A = abs(yexact - y2);
plot(t2,A,'r')
maxerror = max(abs(yexact - y2))

```

Subrutina "rk2" apelează "funct1.m", descrisă mai sus.

Utilizand comanda "hold on" putem reprezenta solutia exacta si solutiile aproximative (calculate cu eul.m, rk2.m si rk4.m) in acelasi sistem de axe. Folosind culori diferite in trasarea celor 4 grafice putem vizualiza usor eroarea de aproximare pentru fiecare din cele 3 metode de aproximare adoptate.

In vederea determinarii pozitiei bilei la un moment dat t , trebuie sa rezolvam urmatoarea problema Cauchy scalara:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right), & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2)$$

Cum $\frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$, integrând pe intervalul $[0, t]$, rezultă

$$x(t) - x(0) = v_0 \left(-\frac{m}{k}\right) \exp\left(-\frac{k}{m}s\right) \Big|_0^t.$$

Astfel, $x(t) = x_0 + v_0 \left(-\frac{m}{k}\right) [\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - 1]$.

Un studiu al dinamicii pozitiei bilei printr-o simulare MATLAB

```
T = 2;
x0 = 0;
v0 = 5;
h = 0.1;
m = 3;
k = 6;
[t, y] = rk2('funct', [0, T], x0, h);
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta2')
subplot(1,2,1)    plot(t, y, 'r')
qq = 0 : 0.1 : 2;
title('Graficul solutiei exacte x(t)')
yy = x0+v0*m/k-v0*m/k*exp(-k/m.*qq);    subplot(1,2,2)    plot(qq, yy, 'm')
```

Subrutina "rk2" apelează "funct.m":

```
function r = funct(t, y)
k = 6;
m = 3;
v0 = 5;
r = v0 * exp(-k/m * t);
```

Studiul anterior a fost realizat pe baza a doua probleme Cauchy scalare: prima problema are drept necunoscuta functia viteza v iar a doua are drept necunoscuta functia x .

Putem calcula pozitia si viteza bilei considerand sistemul diferential

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -k v \end{cases}$$

Adaugand data initiala, putem scrie urmatoarea problema Cauchy vectoriala:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

unde

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\frac{k}{m}v(t) \end{pmatrix},$$

iar

$$Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Putem realiza simulari MATLAB utilizand formularea matematica bazata pe problema Cauchy vectoriala.

```
mainprogram.m
x0=2; v0=7; [t,y]=eul('funct',[0 6], [x0 v0],.2) subplot(1,2,1) plot(t,y(:,1),'r') subplot(1,2,2) plot(t,y(:,2),'g')
funct.m
function w=funct(t,y)
k=2; m=5;
w(1)=y(2); w(2)=-k/m*y(2);
```

Modelarea miscarii punctului material pe verticala

O bilă se deplasează în plan vertical în linie dreaptă. Cunoscând pozitia initiala a bilei si viteza de pornire, vrem să localizăm bila la un moment dat.

Ne raportăm la axa OY orientată în jos (în sens negativ) și facem următoarele notații: t -timpul, v_0 -viteza inițială a bilei, $x(t)$ -poziția bilei la momentul de timp t , $v(t)$ -viteza bilei la momentul de timp t , F -rezultanta forțelor ce acționează asupra bilei, m -masa bilei ($m > 0$).

Amintim legea lui Newton: $F = m a$, unde $a = \frac{dv}{dt}$ și $v = \frac{dx}{dt}$.

- Vom studia pentru început cazul în care $F = m g - k v$, $k > 0$.

Fie problema Cauchy scalară:

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (3)$$

Soluția exactă a acestei probleme este:

$$v(t) = \left(v_0 - g \frac{m}{k} \right) \exp\left(-\frac{k}{m} t\right) + g \frac{m}{k}$$

Trasarea graficului funcției $v(t)$ pentru $m = 3 \text{ kg}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ și $k = 6 \text{ N/m}$

$v_0 = 5$; $g = 10$;

$k = 6$; $m = 3$;

$q = 0 : 0.1 : 2$;

$yy = (v_0 - g * m/k) * \exp(-(k/m) * q) + g * m/k$;

$\text{title('Graficul soluției exacte } v(t)')$

$\text{plot}(q, yy, 'g*')$

Trasarea graficului soluției aproximative pentru problema (3), folosind metodele Euler și Runge-Kutta pentru $m = 3 \text{ kg}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ și $k = 6 \text{ N/m}$

$T = 2$;

$v_0 = 5$;

$g = 10$;

$k = 6$;

$m = 3$;

$h = 0.1$;

$[t1, y1] = \text{eul}('funct2', [0, T], v_0, h)$;

$\text{title('graficul soluției aproximative cu metoda Euler')}$

$\text{subplot}(1, 2, 1)$

$\text{plot}(t1, y1, 'b')$

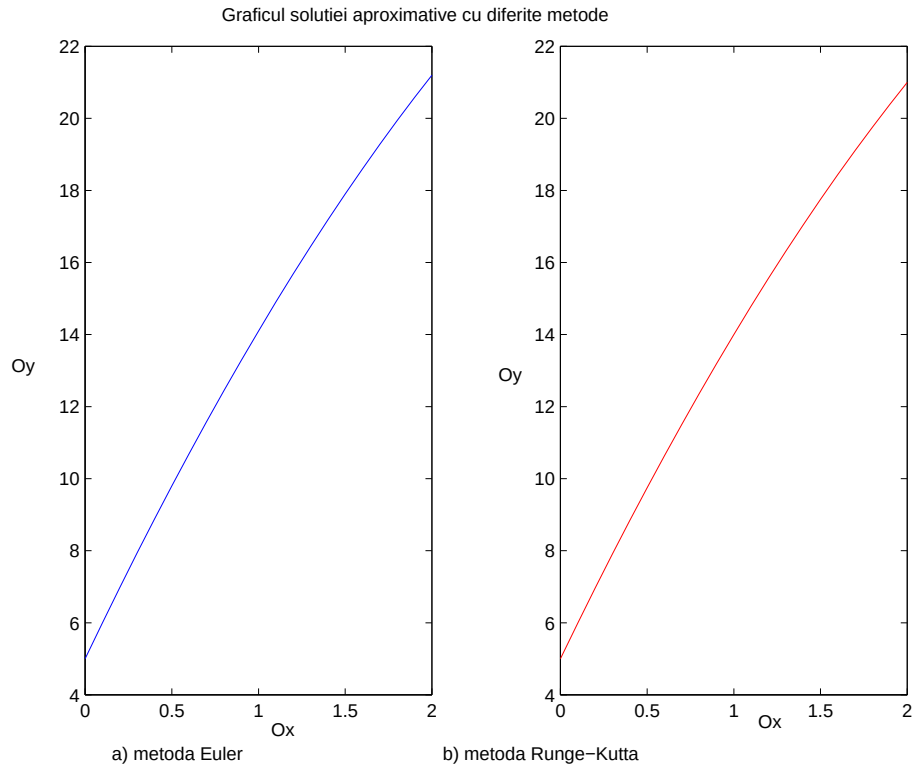


FIGURA 2. Graficul solutiei aproximative

```
[t2, y2] = rk2('funct2', [0, T], v0, h);
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta2')
subplot(1,2,2)
plot(t2, y2, 'r')
```

Subrutinele "eul" și "rk2" apelează "funct2.m":

```
function r = funct2(t, y)
g = 10; k = 6; m = 3;
r = g - k/m * y;
```

Pentru localizarea bilei vom rezolva o noua problema Cauchy scalara

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(v_0 - g \frac{m}{k}\right) \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + g \frac{m}{k}, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4)$$

- Consideram acum cazul $F = mg - kv^2(t)$, $k > 0$

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (5)$$

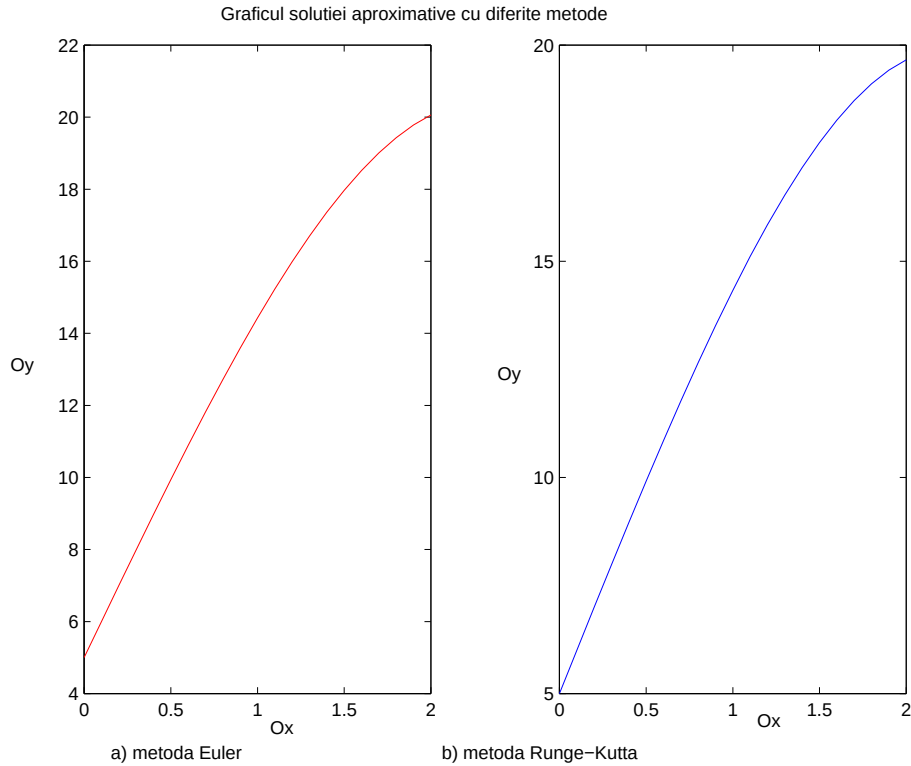


FIGURA 3. Graficul solutiei aproximative pentru problema (5)

Trasarea graficului soluției aproximative pentru problema (5), folosind metodele Euler și Runge-Kutta pentru $m = 3 \text{ kg}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ și $k = 6 \text{ N/m}$

```

T = 2;
h = 0.1; v0 = 5;
g = 10; k = 6; m = 3;
[t1, y1] = eul('funct3', [0, T], v0, h);
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Euler')
subplot(1,2,1)
plot(t1, y1, 'r')
[t2, y2] = rk2('funct3', [0, T], v0, h);
title('graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta')
subplot(1,2,2)
plot(t2, y2, 'b')

```

Subrutinele "eul" și "rk2" apelează "funct2.m":

```

function re = funct3(t, y)
g = 10; k = 6; m = 3;
re = g - k/m * y^2;

```

Un studiu mai complet, care include si pozitionarea bilei se poate realiza prin intermediul urmatorului sistem diferential:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = m g - k v^2 \end{cases}$$

Adaugand data initiala, putem scrie urmatoarea problema Cauchy vectoriala:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

unde

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} v(t) \\ m g - k v(t)^2 \end{pmatrix},$$

iar

$$Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

```

main program.m
[t,y]=eul('funct',[0 6],[0 0],.2) subplot(1,2,1) plot(t,y(:,1),'r') subplot(1,2,2)
plot(t,y(:,2),'g')
funct.m
function w=funct(t,y)
k=2; m=5;
w(1) = y(2); w(2) = g - k/m * y(2)^2;

```


Curs 3

Tematica: modelarea miscarii sistemelor masa-resort/masa-resort-piston (oscilatii libere/ oscilatii amortizate).

Sisteme masa-resort (oscilații libere)

Să considerăm un oscilator mecanic format dintr-un resort elastic și o bilă de masă m , legată la capătul liber al resortului. Dacă se pune bila în mișcare prin intermediul unei forțe și dacă se neglijeaza forța de frecare, sistemul va efectua o mișcare periodică în jurul poziției de echilibru.

Ne raportăm la o axa Ox și facem notațiile: t -timpul, x_0 - poziția inițială a bilei, y_0 - viteza inițială a bilei, $x(t)$ - poziția bilei la momentul de timp t , $y(t) = \frac{dx}{dt}$ -viteza bilei la momentul de timp t , F -forța elastică ce acționează asupra bilei, m -masa bilei ($m > 0$), k constantă, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Utilizând legea lui Newton $F = m a$ putem scrie:

$$\begin{cases} m x'' = -k x, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Soluția exactă a problemei (1) este:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

În acest caz, viteza instantanee a bilei într-o mișcare oscilatorie unidimensională este:

$$v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t).$$

În acest moment putem trasa graficele funcțiilor x și v .

Putem de asemenea să realizăm un studiu bazat pe scrierea echivalentă a ecuației diferențiale de ordinul doi :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x \end{cases}$$

Adaugand data initiala, putem scrie urmatoarea problema Cauchy vectoriala:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

unde

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\frac{k}{m}x(t) \end{pmatrix},$$

iar

$$Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

mainprogram.m

```
[t,y]=eul('funct',[0 4], [5 0],.2) subplot(1,2,1) plot(t,y(:,1),'r') subplot(1,2,2) plot(t,y(:,2),'g')
```

funct.m

```
function w=funct(t,y)
```

```
k=36; m=3;
```

```
w(1)=y(2); w(2)=-k/m*y(1);
```

Sisteme masa-resort-piston(oscilații amortizate)

Să considerăm un oscilator mecanic format dintr-un resort elastic, o bilă de masă m si un piston. Se pune bila în mișcare. In afară de forța elastică, apare si o forță de rezistență proporțională cu viteza și orientată în sens opus mișcării, $F_r = -r \frac{dx}{dt}$.

Utilizand legea lui Newton,

$$\begin{cases} m x'' = -k x - r x', \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

Realizam un studiu bazat pe scrierea echivalenta a ecuatiei diferentiale de ordinul doi ca sistem diferential de doua ecuatii diferentiale de ordinul unu dupa cum urmeaza:

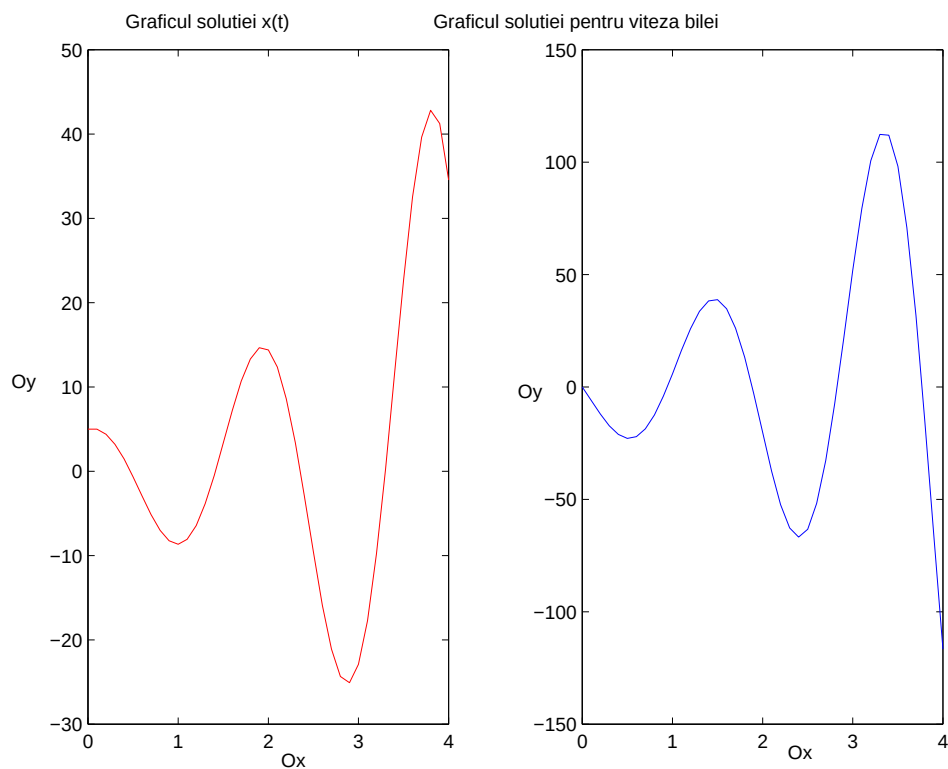


FIGURA 4. Oscilatii libere

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} x - \frac{r}{m} v. \end{cases}$$

Adaugand data initiala, putem scrie urmatoarea problema Cauchy vectoriala:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

unde

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\frac{k}{m}x(t) - \frac{r}{m}v(t) \end{pmatrix},$$

iar

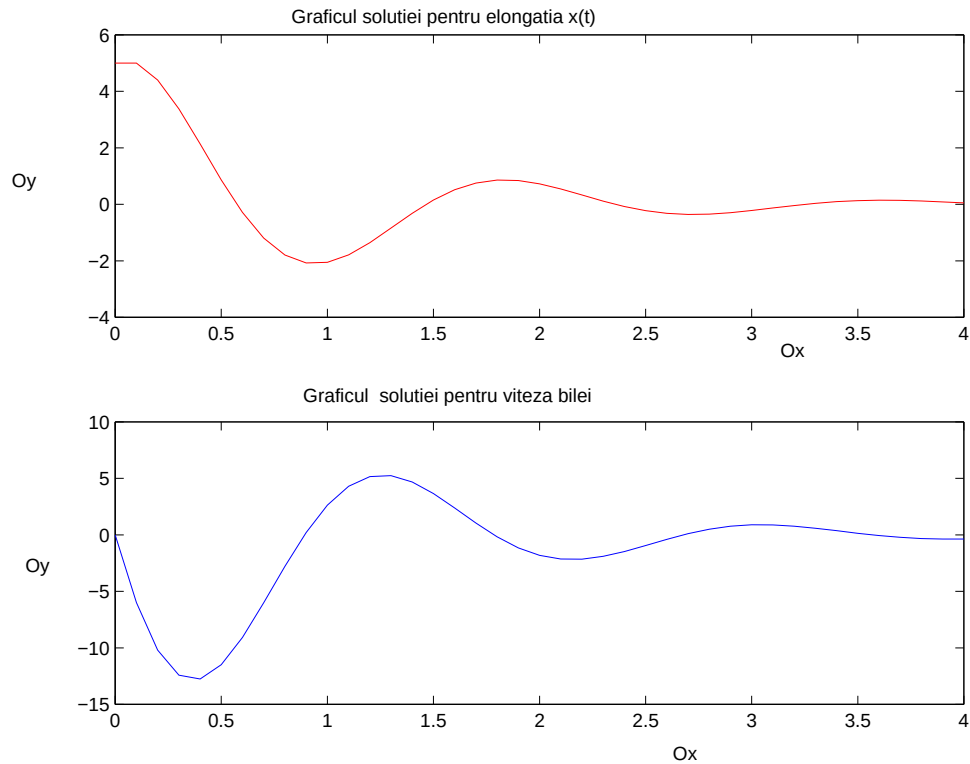


FIGURA 5. Oscilații amortizate

$$Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Trasarea graficelor pentru poziția bilei și viteza bilei, pentru $m = 3 \text{ kg}$, $k = 36 \text{ N/m}$, $x_0 = 5 \text{ m}$, $y_0 = 0 \text{ m/s}$, $r = 9 \text{ Ns/m}$

```
T = 4;
h = 0.1; y0 = [50];
[ts1, ys1] = eul('functamort', [0, T], y0, h);
subplot(2, 1, 1)
plot(ts1, ys1(:, 1), 'r')
subplot(2, 1, 2)
plot(ts1, ys1(:, 2), 'g')
```

Subrutina "eul.m" apelează "functamort.m":

```
function Yprim = functamort(t, Y)
Yprim(1) = Y(2);
Yprim(2) = -12 * Y(1) - 3 * Y(2);
```

Curs 4

Tematica: Modelare în dinamica populațiilor

Modelul exponențial

Rata de schimb a populației este proporțională cu populația existentă.

Notății: t -timpul, P - dimensiunea populației, P_0 - dimensiunea inițială a populației, k constantă de proportionalitate.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = k P, & t > 0, \\ P(0) = P_0 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Determinarea soluției exacte a problemei (1)

Din $\frac{dP}{dt} = k P$, rezultă $\frac{dP}{P} = k dt$. Integrând în raport cu t , avem

$$\ln |P| = k t + C$$

, unde C este o constantă.

Adică $P(t) = C_1 \exp(k t)$, unde $C_1 = e^C$. Constanta C_1 se va determina din condiția $P(0) = P_0$.

Rezultă $C_1 = P_0$.

Deci, soluția exactă a problemei (1) este

$$P(t) = P_0 e^{k t}$$

.

Trasarea graficelor soluției exacte și a soluțiilor aproximative cu metodele Euler și Runge-Kutta, pentru $P_0 = 20$, $k = 1$

$$T = 2;$$

$$h = 0.1; P_0 = 20; k = 1;$$

$$[t1, y1] = \text{eul}('funct4', [0, T], P_0, h);$$

$$[t2, y2] = \text{rk4}('funct4', [0, T], P_0, h);$$

```
[t3, y3] = rk2('funct4', [0, T], P0, h);
q = 0 : h : T;
yexact = P0 * exp(k.*q);
subplot(2,2,1)
title('Graficul solutiei exacte')
plot(q, yexact, 'r')
subplot(2,2,2)
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Euler')
plot(t1, y1, 'b')
subplot(2,2,3)
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta4')
plot(t2, y2, 'g')
subplot(2,2,4)
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta2')
plot(t3, y3, 'y')
```

Subrutinele "eul", "rk4" și "rk2" apelează "funct4.m":

```
function r = funct4(t, y)
k = 1;
r = k * y;
```

Dacă $k > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \infty$, iar dacă $k < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$.

O îmbunătățire a acestui model o constituie modelul logistic.

Modelul logistic

Rata de schimb a populației este proporțională cu populația existentă. Creșterea populației este limitată.

Notății: t -timpul, P - dimensiunea populației, P_0 - dimensiunea initiala a populației, k constantă, M - dimensiunea limită(superioara) a populației.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = k P \left(1 - \frac{P}{M}\right), \\ P(0) = P_0 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Determinarea soluției exacte a problemei Cauchy (2)

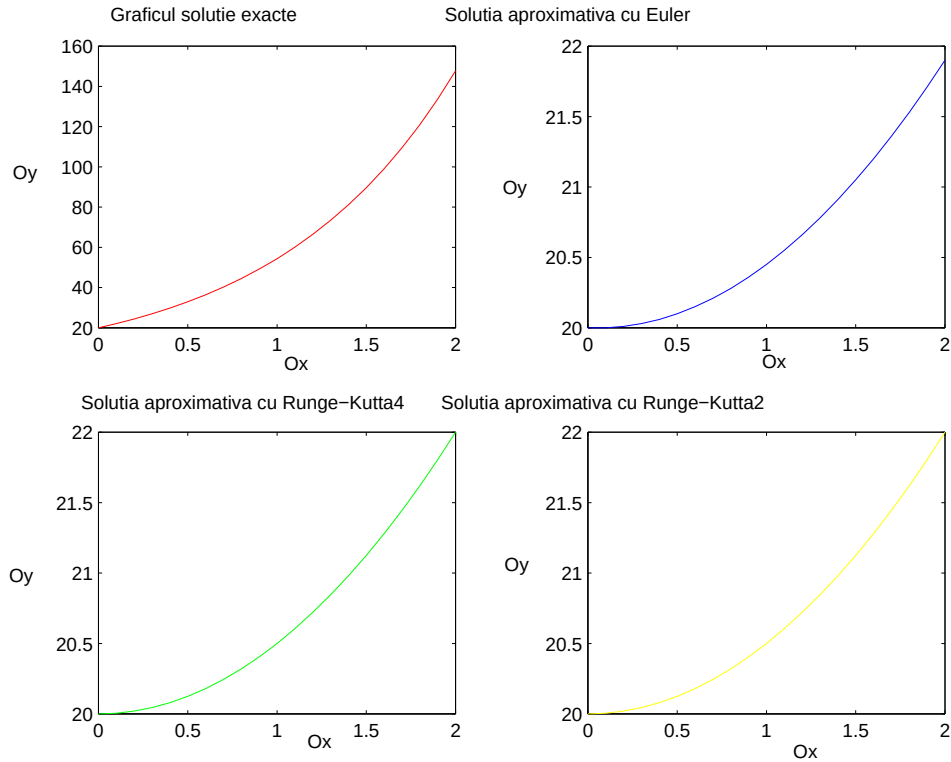


FIGURA 6. Modelul exponential

Din $\frac{dP}{dt} = k P \left(1 - \frac{P}{M}\right)$, rezultă

$$\frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{M}\right)} = k dt$$

Integrând în raport cu t , avem

$$\ln |P(t)| - \ln \left|1 - \frac{P(t)}{M}\right| = k t + C$$

, unde C este o constantă, de unde rezultă $\ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{M}} \right| = k t + C$, cu C constantă. Adică

$$\frac{P}{1 - \frac{P}{M}} = C_1 \exp(k t)$$

, unde $C_1 = e^C = \frac{M P_0}{M - P_0}$.

Prin urmare,

$$P \left(1 + \frac{P_0}{M - P_0} \exp(k t)\right) = \frac{M P_0}{M - P_0} \exp(k t).$$

Rezultă ca

$$P(t) = \frac{M P_0 \exp(k t)}{M - P_0 + P_0 \exp(k t)}.$$

Deci, soluția exactă a problemei (2) este

$$P(t) = \frac{M P_0}{P_0 + (M - P_0) \exp(-k t)}.$$

Trasarea graficelor soluției exacte și a soluțiilor aproximative cu metodele Euler și metoda Runge-Kutta, pentru $P_0 = 20$, $k = 1$, $M = 100$

```

T = 2;
h = 0.1;
P0 = 20;
k = 1;
M = 100;
[t1,y1] = eul('funct5',[0,T],P0,h);
[t2,y2] = rk4('funct5',[0,T],P0,h);
[t3,y3] = rk2('funct5',[0,T],P0,h);
q1 = 0 : h : T;
yexact1 = M * P0 * exp(k.*q1)/(M - P0 + P0 * exp(k.*q1));
subplot(2,3,1)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul soluției exacte pe [0,2]')
plot(q1,yexact1,'r')
q2 = 0 : h : 4;
yexact2 = M * P0 * exp(k.*q2)/(M - P0 + P0 * exp(k.*q2));
subplot(2,3,2)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul soluției exacte pe [0,4]')
plot(q2,yexact2,'r')
q3 = 0 : h : 6;
yexact3 = M * P0 * exp(k.*q3)/(M - P0 + P0 * exp(k.*q3));
subplot(2,3,3)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul soluției exacte pe [0,6]')

```



```

plot(q3, yexact3, 'r')
subplot(2, 3, 4)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Euler')
plot(t1, y1, 'b')
subplot(2, 3, 5)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta4')
plot(t2, y2, 'g')
subplot(2, 3, 6)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta2')
plot(t3, y3, 'y')

```

Subrutinele "eul", "rk4" și "rk2" apelează "funct5.m":

```

function r = funct5(t, y)
    k = 1;
    M = 100;
    r = k * y * (1 - y/M);

```

Dacă $k > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = M$, iar dacă $k < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$.

O îmbunătățire a acestui model o constituie modelul logistic modificat.

Modelul logistic modificat

Urmărind o populație de veverițe în munții Rocky, specialiștii au notat:

1) dacă dimensiunea populației este foarte mare, atunci rata de înmulțire a veverițelor descrește, putând fi chiar negativă.

2) dacă dimensiunea populației este foarte mică, atunci rata de înmulțire este negativă.

Notații: t -timpul, P - dimensiunea populației de veverițe, P_0 - dimensiunea populației inițial, k constantă, M - dimensiunea limită la care poate crește populația de veverițe și N -populația limită la care poate descrește populația de veverițe.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = k P \left(1 - \frac{P}{M}\right) \left(\frac{P}{N} - 1\right), \\ P(0) = P_0 > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Modelare in MATLAB pentru $k = 1$, $P_0 = 20$, $M = 100$, $N = 5$

```
T = 10;
h = 0.1;
P0 = 20;
k = 1;
M = 100;
N = 5;
[t1,y1] = eul('funct6',[0,T],P0,h);
[t2,y2] = rk4('funct6',[0,T],P0,h);
[t3,y3] = rk2('funct6',[0,T],P0,h);
subplot(1,3,1)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Euler')
plot(t1,y1,'b')
subplot(1,3,2)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta4')
plot(t2,y2,'g')
subplot(1,3,3)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu metoda Runge - Kutta2')
plot(t3,y3,'r')
```

Subrutinele "eul", "rk4" și "rk2" apelează "funct6.m":

```
function r = funct6(t,y)
    k = 1;
    M = 100;
    N = 5;
    r = k * y * (1 - y/M) * (y/N - 1);
```

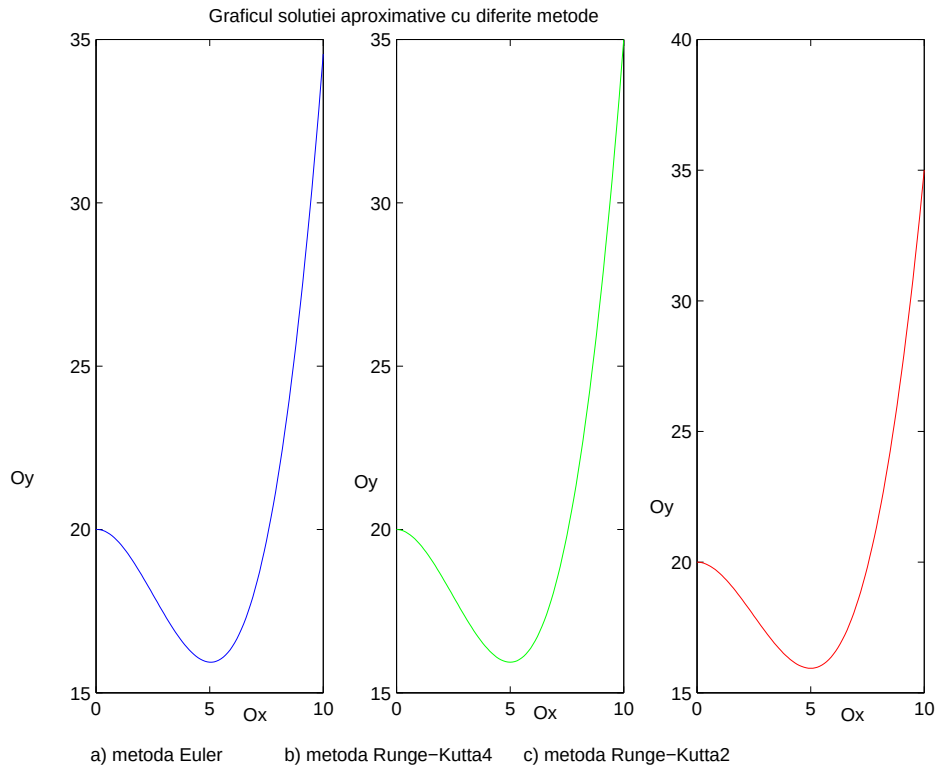


FIGURA 7. Modelul logistic modificat

Exercitiu: Modelarea dinamicii populației unui oraș. Dinamica populației unui oraș este descrisă de ecuația:

$$\frac{dN}{dt} = k_1 N(t) - k_2 N^2(t), \quad (4)$$

unde N - populația orașului, $k_2 = 3.36 \cdot 10^{-7}$ și $k_1 = \log(7/5)/10$.

Consideram drept data initiala $N_0 = 50000$ si propunem urmatoarea modelare Matlab.

```
T = 100;
h = 0.1;
N0 = 50000;
k1 = log(7/5)/10;
k2 = 3.36 * 10^-7;
[t1,y1] = eul('funct9',[0,T],N0,h);
[t2,y2] = rk4('funct9',[0,T],N0,h);
[t3,y3] = rk2('funct9',[0,T],N0,h);
subplot(1,3,1)
xlabel('X')
```

```

ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu Euler')
plot(t1, y1, 'b')
subplot(1, 3, 2)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu Runge - Kutta4')
plot(t2, y2, 'g')
subplot(1, 3, 3)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu Runge - Kutta2')
plot(t3, y3, 'r')

```

Subrutinele "eul", "rk4" și "rk2" apelează "funct8.m":

```

function r = funct9(t, y)
k1 = log(7/5)/10;
k2 = 3.36 * 10^-7;
r = k1 * y - k2 * y^2;

```

Exercitiu: Modelarea dinamicii unei populații de bacterii. De dimineață am cumpărat un sandwich cu o populație de bacterii ce crește exponențial, populația inițială era de 1.000 bacterii, iar 10 minute mai târziu populația era de 1.500 bacterii. Determinați dimensiunea populației de bacterii după 4 ore.

Notatii: t -timpul, $P(t)$ - dimensiunea populației de bacterii la momentul de timp t , $k > 0$ constantă de proportionalitate, P_0 - dimensiunea initiala a populației de bacterii.

$$P_0 = 1000, P(10) = 1500$$

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = k P, & t > 0, \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (5)$$

Din $\frac{dP}{dt} = k P(t)$, rezultă $\frac{dP}{P} = k dt$. Integrând în raport cu t , avem: $\ln|P| = k t + C$, unde C constantă. Astfel, $P(t) = C_1 \exp(k t)$, unde $C_1 = e^C$. Această constantă C_1 se determină din condiția inițială $P(0) = P_0$. Deci $C_1 = P_0 = 1000$. Constanta de proportionalitate k o vom determina din condiția $P(10) = 1500$, astfel

$$k = \log(3/2)/10.$$

Soluția problemei (5) este: $P(t) = 1000 \exp(1/10 \log(3/2) t)$.

Acum putem calcula $P(460) = 1000 \exp(1/10 \log(3/2) 460)$.

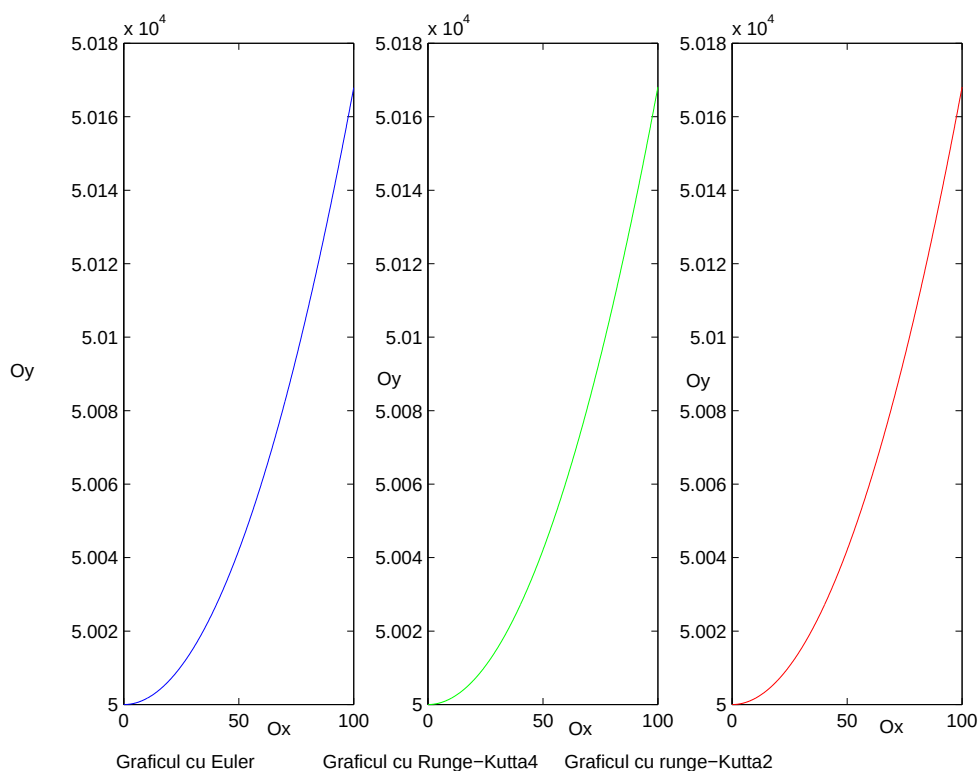


FIGURA 8. Modelarea dinamicii populației

```

T = 300;
h = 0.1;
P0 = 1000;
k = log(3/2)/10;
[t1,y1] = eul('funct10',[0,T],P0,h);
[t2,y2] = rk4('funct10',[0,T],P0,h);
[t3,y3] = rk2('funct10',[0,T],P0,h);
q = 0 : h : T;
yexact = P0 * exp(k.*q);
subplot(2,2,1)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei exacte')
plot(q,yexact,'r')
subplot(2,2,2)
xlabel('X')
ylabel('Y')

```

```

title('Graficul solutiei aproximative cu Euler')
plot(t1, y1, 'b')
subplot(2, 2, 3)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu Runge – Kutta4')
plot(t2, y2, 'g')
subplot(2, 2, 4)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu Runge – Kutta2')
plot(t3, y3, 'y')
P_240 = P0 * exp(k * 240)

```

Subrutinele "eul", "rk4" și "rk2" apelează "funct10.m":

```

function r = funct10(t, y)
k = log(3/2)/10;
r = k * y;

```

Studiul dinamica populatiilor poate fi continuat cu modelarea matematica a interactiunii dintre specii:

- 1) Modele prada-pradator
- 2) Modele prada-pradator-competitor

Curs 5

Tematica: Modelare in epidemiologie

Modelul SIR

Modelul SIR este descris matematic prin intermediul urmatorului sistem diferential:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -aSI \\ \frac{dI}{dt} = aSI - bI \\ \frac{dR}{dt} = bI \end{cases}$$

unde

- S reprezinta numărul persoanelor suspecte.
- I reprezinta numărul persoanelor infectate
- R reprezinta numărul persoanelor recuperate
- N reprezinta dimensiunea totala a populației

$$S + I + R = N$$

- a este rata de infectare
- b este rata de recuperare

Adaugand data initiala, modelul SIR se exprimă cu ajutorul problemei Cauchy vectoriale

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

unde

$$Y(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} -aS(t)I(t) \\ aS(t)I(t) - bI(t) \\ bI(t) \end{pmatrix}$$

iar

$$Y_0 = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

functSIR.m

```
function w=functSIR(t,y)
a=.01;
b=.025;
w(1)=-b*y(1)*y(2);
w(2)=b*y(1)*y(2)-a*y(1);
w(3)=a*y(2);
```

SIR.m

```
[teul, yeul]=eul('functSIR',[0 5],[100 50 10],.2);
plot(teul,yeul(:,1),'r')
hold on
plot(teul,yeul(:,2),'g')
hold on
plot(teul,yeul(:,3))
```

Pentru detalii, a se consulta de exemplu [1, 2, 20].

Modelul SIR cu vaccinare

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -aSI - c \\ \frac{dI}{dt} = aSI - bI \\ \frac{dR}{dt} = bI + c \end{cases}$$

Problema Cauchy vectorială atașată sistemului diferential anterior este:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

unde,

$$Y_0 = \begin{pmatrix} S_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} -aS(t)I(t) - c \\ aS(t)I(t) - bI(t) \\ bI(t) + c \end{pmatrix}$$

Pentru detalii se pot consulta :[43, 41, 42, 44].

functSIRV.m

```
function w=functSIRV(t,y) a=.2;
b=.03;
c=1;
w(1)=-b*y(1)*y(2)-c;
w(2)=b*y(1)*y(2)-a*y(1);
w(3)=a*y(2)+c;
```

SIRV.m

```
[teul, yeul]=eul('functSIRV',[0 5],[100 50 10],.2);
plot(teul,yeul(:,1),'r')
hold on
```

```
plot(teul,yeul(:,2),'g')
hold on
plot(teul,yeul(:,3))
```

Modelul SEIR

În modelul SEIR indivizii sunt clasificați astfel:

- S: numărul persoanelor suspecte
- E: numărul persoanelor expuse
- I: numărul persoanelor infectate (care pot transmite boala)
- R: numărul persoanelor scoase din lanțul de transmitere (vindecate sau decedate)

Dimensiunea totală a populației se notează cu N , funcție de timp:

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

Cu ajutorul modelului SEIR se poate modela răspândirea bolii Ebola. Ebola este o boală infecțioasă severă cu rata de mortalitate 90%.

Modelul matematic se exprimă prin intermediul unui sistem de ecuații diferențiale ordinare, de ordinul 1, cărora i se atașează condiții inițiale.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E \\ \frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

unde,

- (1) $\beta = pc$, unde p este probabilitatea ca o persoană să fie infectată la contactul cu o altă persoană infectată și c reprezintă numărul de persoane de contact.
- (2) δ reprezintă rata de contagiozitate. De aici rezultă că $\frac{1}{\delta}$ reprezintă perioada medie a unei persoane expuse să devină infectată.
- (3) γ reprezintă rata de mortalitate.

În cazul bolii Ebola, rata de mortalitate fiind foarte mare putem presupune că toate persoanele infectate vor deceda. Acestea fiind spuse, numărul foarte

mic de persoane care vor fi recuperate nu va fi trecut din nou la clasa de suspecti.

$\frac{1}{\gamma}$ va reprezenta perioada medie a unei persoane de a deceda.

$$S(0) = S_0;$$

$$E(0) = E_0;$$

$$I(0) = I_0;$$

$$R(0) = R_0;$$

Luand in considerare data initiala, modelul SEIR este descris matematic prin intermediul urmatoarei probleme Cauchy vectoriale.

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

unde

$$Y(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ E(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$f(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{\beta SI}{N} - \delta E \\ \delta E - \gamma I \\ \gamma I \end{pmatrix}$$

$$Y_0 = \begin{pmatrix} S_0 \\ E_0 \\ I_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

Detalii despre modelul SEIR se pot gasi in [23, 17].

Modelul SEIS

Modelul matematic SEIS este reprezentat de următorul sistem de ecuatii difeentiale de ordinul I:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI + \gamma I \\ \frac{dE}{dt} = \lambda SI - \epsilon E \\ \frac{dI}{dt} = \epsilon E - \gamma I, \end{cases}$$

unde

$S = S(t)$ reprezintă numărul persoanelor suspecte $E = E(t)$ reprezintă numărul persoanelor latente $I = I(t)$ reprezintă numărul persoanelor infectate

iar λ reprezintă produsul dintre rata de contact și probabilitatea de transmitere

γ este perioada de contagiozitate $^{-1}$

ϵ este perioada de latență $^{-1}$

Problema Cauchy vectorială atașată sistemului SEIS este:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = f(t, Y) \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$$

Vectorul Y

$$Y = \begin{pmatrix} S(t) \\ E(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$$

reprezintă necunoscuta problemei Cauchy vectoriale

Vectorul Y_0

$$Y_0 = \begin{pmatrix} S_0 \\ E_0 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

reprezintă data inițială a problemei Cauchy atașată sistemului SEIS.

$$f(t, Y) = \begin{pmatrix} -\lambda SI + \gamma I \\ \lambda SI - \epsilon E \\ \epsilon E - \gamma I \end{pmatrix}$$

În plus,

$$N = S(t) + E(t) + I(t)$$

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}$$

$$e(t) = \frac{E(t)}{N}$$

$$i(t) = \frac{I(t)}{N}$$

Detalii despre modelul SEIS se pot gasi de exemplu in [7].

Curs 6

Tematica: modelare în chimie; modelarea unor procese financiare

Modelarea descompunerii radioactive

Să considerăm un izotop radioactiv Uraniu-238, care se descompune într-un alt element prin emisia de particule alfa. Presupunem că eșantionul considerat este suficient de mare pentru a descrie procesul utilizând un model continuu. Presupunem că rata de descreștere a masei este proporțională cu masa curentă a eșantionului, exprimați masa izotopului radioactiv în funcție de timp, presupunând cunoscută masa la momentul inițial.

Notății: t -timpul, $m(t)$ - masa la momentul de timp t , $k > 0$ constantă, m_0 - masa inițială a izotopului.

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -k m, \\ m(0) = m_0 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Determinarea soluției exacte a problemei (1)

Din $\frac{dm}{dt} = -k m$, rezultă $\frac{dm}{m} = -k dt$. Integrând în raport cu t , avem $\ln |m| = -k t + C$, unde C este o constantă. Adică $m(t) = C_1 \exp(-k t)$, unde $C_1 = e^C$.

Constanta C_1 o vom determina din condiția $m(0) = m_0$. Rezultă $C_1 = m_0$.

Deci, soluția exactă a problemei (1) este

$$m(t) = m_0 e^{(-k t)}$$

Modelare în MATLAB pentru $m_0 = 20$, $k = 1$

```
T = 10;  
h = 0.1;  
m0 = 20;  
k = 1;
```

```

[t1,y1] = eul('funct8',[0,T],m0,h);
[t2,y2] = rk4('funct8',[0,T],m0,h);
[t3,y3] = rk2('funct8',[0,T],m0,h);
q = 0 : h : T;
yexact = m0 * exp(-k.*q);
subplot(2,2,1)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei exacte')
plot(q,yexact,'r')
subplot(2,2,2)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu Euler')
plot(t1,y1,'b')
subplot(2,2,3)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu Runge - Kutta4')
plot(t2,y2,'g')
subplot(2,2,4)
xlabel('X')
ylabel('Y')
title('Graficul solutiei aproximative cu Runge - Kutta2')
plot(t3,y3,'y')

```

Subrutinele "eul", "rk4" și "rk2" apelează "funct8.m":

```

function r = funct8(t,y)
k = 1;
r = -k * y;

```

Modelarea unor procese financiare

Un fond de investiții garantează că rata de înmulțire a banilor este proporțională cu suma investită, asigurând o constantă de proporționalitate $k = 0.02/an$. Admitând că suma investită este de 1000 euro, la ce sumă se va ajunge în 10 ani?

Un alt fond de investiții garantează o evoluție cu coeficient de proportionalitate depinzând de timp $\bar{k}(t) = k_0 \exp(-k_2 t)$ unde $k_0 = 0.06/an$ și $k_2 = 0.1/an$. Presupunând că suma investită este 1000 euro, calculați la ce sumă se va ajunge în 10 ani apelând la al doilea fond de investiții.

($S_0 = 1000$, $k = 0.02$, $k_0 = 0.06$, $k_2 = 0.1$)

Notății: t -timpul, $S_1(t)$ - suma corespunzătoare primului fond la momentul de timp t , $S_2(t)$ - suma corespunzătoare celui de al doilea fond la momentul de timp t , k , k_0 , k_2 constante pozitive, S_0 - suma depusă inițial,

Pentru primul fond de investiții scriem următoarea Problema Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = 0.02 S_1, & t > 0, \\ S_1(0) = S_0. \end{cases} \quad (1)$$

Pentru al doilea fond de investiții scriem următoarea Problema Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dS_2}{dt} = 0.06 e^{(-0.1 t)} S_2, \\ S_2(0) = S_0. \end{cases} \quad (2)$$

Din $\frac{dS_1}{dt} = 0.02 S_1$, rezultă $\frac{dS_1}{S_1} = 0.02 dt$. Integrând în raport cu t , avem: $\ln|S_1| = 0.02 t + C$, unde C constantă. Astfel, $S_1(t) = C_1 \exp(0.02 t)$, unde $C_1 = e^C$. Această constantă C_1 se determină din condiția inițială $S_1(0) = S_0$. Deci $C_1 = S_0 = 1000$.

Soluția problemei (1) este:

$$S_1(t) = 1000 \exp(0.02 t)$$

.

Din $\frac{dS_2}{dt} = 0.06 \exp(-0.1 t) S_2(t)$, rezultă $\frac{dS_2}{S_2} = 0.06 \exp(-0.1 t) dt$. Integrând în raport cu t , avem: $\ln|S_2| = -0.6 \exp(-0.1 t) + C_2$, unde C_2 constantă. Astfel, $S_2(t) = C_3 \exp(-0.6 \exp(-0.1 t))$, unde $C_3 = e^{C_2}$ constantă. Această constantă C_3 se determină din condiția inițială $S_2(0) = S_0$. Deci $C_3 = 1000/\exp(-0.6)$.

Soluția problemei (2) este:

$$S_2(t) = 1000 \exp(-0.6[\exp(-0.1 t) - 1])$$

.

Avem

$$S_1(10) = 1000 \exp(0.2), \quad S_2(10) = 1000 \exp(-0.6 (1/e - 1))$$

.

Modelare in Matlab $T = 50$;

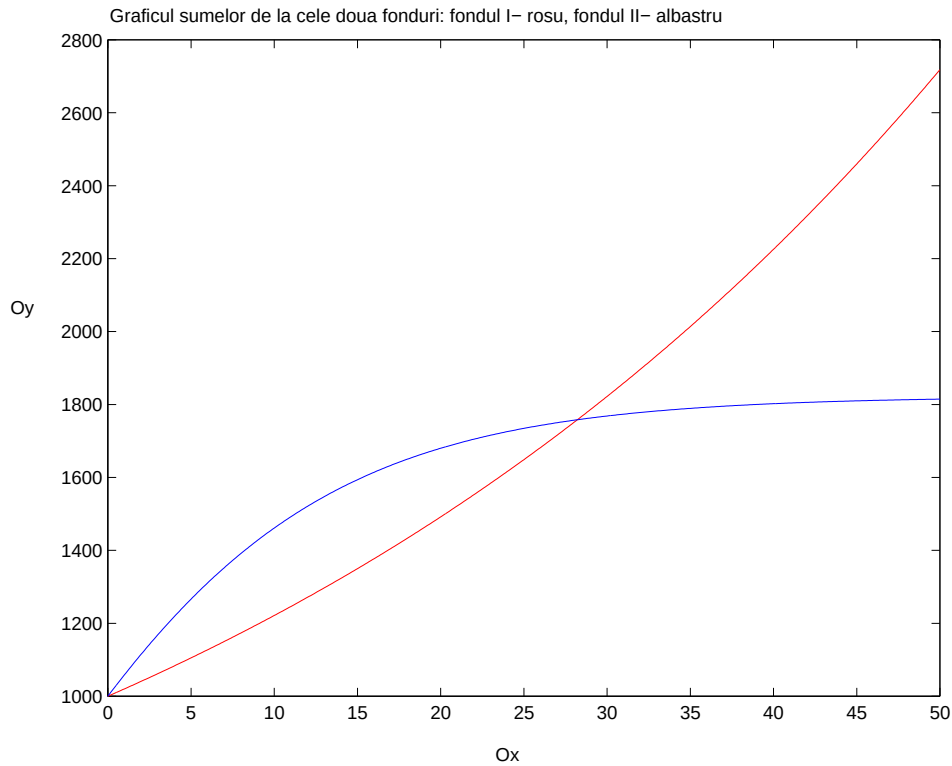


FIGURA 9. Modelarea unor procese financiare

```

h = 0.1; S0 = 1000;
k = 0.02; k0 = 0.06; k2 = 0.1;
q1 = 0 : h : T;
y1 = S0 * exp(k. * q1);
q2 = 0 : h : T;
y2 = S0/exp(-k0/k2) * exp(-k0/k2 * exp(-k2. * q2));
plot(q1, y1, 'r')
hold on
plot(q2, y2, 'b')
hold off
S1_10 = y1(10)
S2_10 = y2(10)

```

După cum se observă în desenul de mai sus, este profitabil pe termen lung să se investească la primul fond de investiții, iar pe termen scurt este mai profitabil la al doilea fond.

Curs 7

Tematica: preliminarii pentru modelare matematica in elasticitate

Tensori cartezieni de ordinul II Există mai multe definiții ale tensorului cartezian în general și ale tensorului cartezian de ordin II în particular. În aplicații, unde trebuie mai degrabă să recunoaștem mărimile tensoriale, numim *tensor cartezian de ordin II* într-un spațiu euclidian E_n , o mărime geometrică sau fizică (cu dimensiune) caracterizată în fiecare reper prin n^2 numere T_{ij} numite și componente, componente care la o schimbare a reperului definită de formulele

$$\mathbf{e}'_i = Q_{ik} \mathbf{e}_k \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (1)$$

se schimbă după relațiile:

$$\mathbf{T}'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} \mathbf{T}_{kl}. \quad (2)$$

Această definiție este adoptată de exemplu în [3]. În scrierea relațiilor (1) și (2) s-a utilizat convenția de sumare a lui Einstein (convenția de sumare după indicii care se repetă); vom utiliza această convenție pe parcursul întregii lucrări.

O definiție mai naturală este definiția tensorului ca *element al unui produs de spații vectoriale*, prin analogie cu definiția vectorului ca element al unui spațiu vectorial. Cu această definiție, tensorul cartezian de ordinul doi este o mărime de forma

$$\mathbf{T} = T_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k, \quad (3)$$

unde

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \text{ este o bază în } L \otimes L,$$

L fiind un spațiu vectorial. O prezentare a calculului tensorial pornind de la această definiție se găsește în [16].

Tensorul de ordin doi poate fi definit ca o aplicație liniară T a unui spațiu vectorial L în el însuși. Astfel, oricare $\mathbf{v} \in L$,

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{u} \in L. \quad (4)$$

Dacă spațiul L este raportat la o bază ortonormată

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\},$$

atunci orice vector $\mathbf{T}\mathbf{e}_j$ se scrie:

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_j = T_{ij}\mathbf{e}_i. \quad (5)$$

Numerele T_{ij} se vor numi *componentele tensorului* în baza dată. Evident ele sunt în număr de n^2 iar $(T_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ este o matrice patratică de $n \times n$ elemente. Ea caracterizează tensorul în baza dată. Utilizând (4) și (5), putem scrie,

$$u_i\mathbf{e}_i = T(v_j\mathbf{e}_j) = T_{ij}v_j\mathbf{e}_i$$

și de aici, deducem,

$$u_i = T_{ij}v_j. \quad (6)$$

Tensorul $\mathbf{O}$ este aplicația care face să corespundă oricărui vector, vectorul nul,

$$\mathbf{O}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

iar $\mathbf{I}$ este aplicația ce lasă neschimbat orice vector,

$$\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Prin compunerea a doi tensori $\mathbf{T}$ și $\mathbf{S}$ obținem un tensor $\mathbf{TS}$ de componente $(T_{ik}S_{kj})$ ce corespund produsului matricial; în general, $\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}$.

Puterile unui tensor $\mathbf{T}$ sunt: $\mathbf{T}^0 = \mathbf{I}, \mathbf{T}^1 = \mathbf{T}, \mathbf{T}^2 = \mathbf{TT}$, ș.a.m.d.

Un tensor $\mathbf{T}$ este inversabil dacă există un tensor $\mathbf{T}^{-1}$ numit *tensorul invers* astfel încât

$$\mathbf{TT}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}.$$

Suma a doi tensori $\mathbf{T}$ și $\mathbf{S}$ este un tensor $\mathbf{G}$ de componente

$$G_{ij} = T_{ij} + S_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Produsul dintre un tensor $\mathbf{T}$ și un scalar λ este un tensor $\mathbf{G}$ de componente

$$G_{ij} = \lambda T_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Produsul tensorial sau diadic a doi vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ se notează $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ și se definește prin egalitatea:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{u} \in L. \quad (7)$$

Așadar, utilizând (6) și (7) obținem

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j.$$

În particular,

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{ij} = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j; \\ 0 & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

Un alt simbol care se va dovedi util este *simbolul lui Ricci*

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } (i, j, k) = (1, 2, 3) \\ -1 & \text{dacă } (i, j, k) \neq (1, 2, 3) \\ 0 & \text{dacă cel puțin doi indici sunt egali.} \end{cases} \quad (8)$$

prin $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ înțelegând că permutarea (i, j, k) are aceeași paritate cu permutarea $(1, 2, 3)$ iar prin $(i, j, k) \neq (1, 2, 3)$ înțelegând că permutarea (i, j, k) nu are aceeași paritate cu permutarea $(1, 2, 3)$. De exemplu, $\epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{213} = -1$, $\epsilon_{112} = 0$.

Tensorul transpus se notează cu $\mathbf{T}^T$ și este definit de relația:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{T}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L.$$

Au loc următoarele proprietăți

$$(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)^T = \mathbf{T}_1^T + \mathbf{T}_2^T,$$

$$(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2)^T = \mathbf{T}_2^T \mathbf{T}_1^T,$$

$$(\mathbf{T}^n)^T = (\mathbf{T}^T)^n; (\mathbf{T}^{-1})^T = (\mathbf{T}^T)^{-1}; (\mathbf{T}^T)^T = \mathbf{T}.$$

Un tensor $\mathbf{S}$ se numește simetric dacă $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$.

Un tensor $\mathbf{\Omega}$ se numește antisimetric dacă $\mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega}^T$.

Orice tensor $\mathbf{T}$ se descompune în mod unic în suma a doi tensori, unul simetric $\mathbf{S}$ și altul antisimetric $\mathbf{\Omega}$. Într-adevăr,

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{\Omega}$$

unde

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T); \quad \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T).$$

Un tensor $\mathbf{R}$ se numește ortogonal dacă aplicația care îl definește lasă invariant produsul scalar

$$\mathbf{R}\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L.$$

Se poate demonstra că $\mathbf{R}$ este ortogonal dacă și numai dacă

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

sau, echivalent, dacă și numai dacă

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T.$$

Urma tensorului $\mathbf{T}$ se notează $tr\mathbf{T}$ și se definește prin următoarele două proprietăți:

- i) este o funcție scalară liniară definită pe mulțimea tensorilor de ordin 2
- ii) $tr(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Notăm că

$$tr\mathbf{T} = T_{ik}tr(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) = T_{ii} = tr\mathbf{T}^T$$

și, se poate verifica prin inducție,

$$tr(\mathbf{T}^T)^n = tr\mathbf{T}^n.$$

Produsul scalar a doi tensori de ordin doi $\mathbf{T}$ și $\mathbf{S}$ se notează $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$ și se definește prin formula:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = tr(\mathbf{T}\mathbf{S}^T) = tr(\mathbf{S}\mathbf{T}^T) = T_{ij}S_{ij}.$$

Norma tensorului $\mathbf{T}$ se definește prin:

$$|\mathbf{T}| = \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}}. \quad (9)$$

Un tensor simetric $\mathbf{S}$ se numește *pozitiv definit* dacă

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

Un tensor simetric $\mathbf{S}$ se numește *pozitiv semidefinit* dacă

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{u} \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in L.$$

Dacă $\mathbf{T}$ este tensor simetric pozitiv definit, atunci există $\mathbf{U}$ tensor simetric pozitiv definit astfel încât $\mathbf{S} = \mathbf{U}^2$.

Fie $\mathbf{T}$ un tensor de ordinul doi și fie ecuația:

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Un vector $\mathbf{u}$ (nenul) ce satisface această ecuație se numește vector propriu iar scalarul λ pentru care este posibilă ecuația se numește valoare proprie. Într-o bază dată,

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})u_j = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Ca acest sistem să admită soluții nebanale este necesar și suficient să avem:

$$P_n(\lambda) = \det(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0,$$

unde $P_n(\lambda)$ se numește polinom caracteristic iar

$$P_n(\lambda) = 0 \quad (10)$$

se numește ecuație caracteristică. Valorile proprii sunt reale dacă și numai dacă tensorul $\mathbf{T}$ este simetric; valorile proprii sunt pozitive dacă și numai dacă tensorul $\mathbf{T}$ este pozitiv definit.

Dacă $\mathbf{T}$ este simetric și dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt distincte, există n vectori proprii ortogonali doi câte doi (ce formează o bază); dacă rădăcinile sunt multiple se pot determina de asemenea n vectori proprii ortogonali doi câte doi. Baza determinată de vectorii proprii se numește bază proprie. În această bază, tensorul se scrie:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= T_{ij}\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j = (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{u}_j)\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j = (\mathbf{u}_i \cdot \lambda_j \mathbf{u}_j)\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \\ &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n.\end{aligned}$$

Aceasta este descompunerea spectrală. Ea este caracteristică tensorului simetric.

Numim invariant al tensorului de ordin doi orice aplicație definită pe mulțimea acestor tensori cu valori scalare. Fie

$$\begin{aligned}I_1 &= \text{tr}\mathbf{T} = T_{ii} \\ I_2 &= \text{tr}\mathbf{T}^2 = T_{ij}T_{ji} \\ I_n &= \text{tr}\mathbf{T}^n = \dots\end{aligned}$$

Acești invarianti se numesc *invarianti principali* ai tensorului $\mathbf{T}$. Cu ajutorul lor putem scrie

$$P_n(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} - \dots \pm I_n.$$

Teorema de descompunere polară: Orice tensor de ordinul II nesingular $\mathbf{T}$ (i.e. $\det(T_{ij}) \neq 0$), poate fi scris sub forma $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{S}_d = \mathbf{S}\mathbf{R}$ unde $\mathbf{R}$ este un tensor ortogonal iar $\mathbf{S}_d$, $\mathbf{S}$ sunt tensori simetrici pozitiv definiți. În plus $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}_d$ și $\mathbf{S}$ sunt unic determinați, iar $\mathbf{S}_d$ și $\mathbf{S}$ au aceleași valori proprii.

Un tensor de forma $\alpha\mathbf{I}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, se numește *tensor sferic*.

Un tensor simetric având urma zero se numește *tensor deviator*.

Orice tensor simetric de ordinul doi $\mathbf{S}$ se reprezintă în mod unic ca suma dintre un tensor sferic și un tensor deviator. Într-adevăr,

$$\mathbf{S} = \frac{\text{tr}\mathbf{S}}{n}\mathbf{I} + \left(\mathbf{S} - \frac{\text{tr}\mathbf{S}}{n}\mathbf{I}\right).$$

Dat fiind un tensor de ordin doi $\mathbf{T}$, numim *deviatorul lui $\mathbf{T}$* tensorul

$$\mathbf{T}^D := \mathbf{T} - \frac{\text{tr}\mathbf{T}}{n}\mathbf{I}. \quad (11)$$

Geometria deformației

Prin *mediu continuu* înțelegem un sistem material $\mathcal{M}$ care la fiecare moment umple complet o regiune a spațiului (mulțime deschisă, mărginită, conexă din $\mathbb{R}^3$).

Fie un mediu continuu în mișcare, ce ocupă la momentul $t = 0$ domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ iar la momentul $t > 0$ domeniul $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. Domeniul Ω se numește *configurație de referință* sau *configurație nedeformată* a mediului. Pentru fiecare $t > 0$, Ω_t se numește *configurație curentă* sau *deformată* a mediului.

Fie P o particulă a sistemului material $\mathcal{M}$ și fie $\mathbf{X} = (X_i)$ vectorul său de poziție la $t = 0$, iar $\mathbf{x} = (x_i)$ vectorul său de poziție la un moment arbitrar $t > 0$, raportându-ne la o bază ortonormată $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ din $\mathbb{R}^3$. Componentele (X_i) se numesc *coordonate Lagrange* sau *coordonate materiale*; componentele (x_i) se numesc *coordonate Euler* sau *coordonate spațiale*.

Numim *mișcare* a unui mediu continuu o familie de aplicații $(\chi(\cdot, t))_t$,

$$\begin{aligned}\chi(\cdot, t) : \Omega &\rightarrow \chi(\Omega, t) = \Omega_t \\ \mathbf{x} &= \chi(\mathbf{X}, t), \quad t > 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Presupunem că pentru oricare moment $t > 0$, aplicația $\chi(\cdot, t)$ este o aplicație continuă și bijectivă. Inversa sa se va nota cu χ^{-1} :

$$\begin{aligned}\chi^{-1}(\cdot, t) : \Omega_t &\rightarrow \Omega \\ \mathbf{X} &= \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad t > 0.\end{aligned}$$

Fie ϕ o funcție scalară sau vectorială definită pe $\Omega \times \mathbb{R}_+$, $\phi = \phi(\mathbf{X}, t)$. Numim *derivată materială*, derivata în raport cu t , pentru $\mathbf{X}$ constant. Vom nota această derivată prin $\frac{d}{dt}\phi$ sau $\dot{\phi}$;

$$\dot{\phi}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0.$$

În particular, viteza și accelerația punctului material P la momentul $t > 0$ se definesc cu ajutorul derivatelor materiale astfel:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\chi(\mathbf{X}, t),\tag{13}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2}{dt^2}\chi(\mathbf{X}, t).\tag{14}$$

Pe componente, formulele (13) și (14) se scriu astfel:

$$\begin{aligned}v_i &= \dot{x}_i = \frac{d}{dt}\chi_i(\mathbf{X}, t), \\ a_i &= \dot{v}_i = \ddot{x}_i = \frac{d^2}{dt^2}\chi_i(\mathbf{X}, t).\end{aligned}$$

Fie acum φ o funcție scalară definită pe configurația deformată,

$$\varphi : \Omega_t \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Pentru a calcula derivata materială a funcției φ , trebuie să luăm în considerare dependența lui $\mathbf{x}$ de $\mathbf{X}$ și t . Astfel, utilizând (12) putem scrie,

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\mathbf{x}, t) v_i. \quad (15)$$

Introducând notația $\nabla_x \varphi$ pentru gradientul lui φ în raport cu coordonatele spațiale, (15) devine

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla_x \varphi \cdot \mathbf{v}. \quad (16)$$

Notăm aici că formula (16) este valabilă și pentru funcții vectoriale. În particular, din (14) și (16) deducem pentru accelerație următoarea formulă vectorială

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla_x \mathbf{v}) \mathbf{v},$$

formulă care pe componente se scrie astfel:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j.$$

Numim *traietorie* pentru un punct material de coordonate Lagrange (X_1, X_2, X_3) , între momentele 0 și t_1 , mulțimea punctelor $\mathbf{x} = \chi(X, t)$, pentru $t \in [0, t_1]$,

$$Traj_{t \in [0, t_1]}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \chi(X, t), \quad \forall t \in [0, t_1]\}.$$

Numim *deformație* aplicația $\chi(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \Omega_t$, definită prin (12) pentru $t > 0$ fixat. Gradientul său în raport cu coordonatele materiale X_i definește un câmp tensorial notat $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{F} = (F_{ij}), \quad F_{ij} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Tensorul $\mathbf{F}$ se numește *gradient al deformației*. Pentru $t = 0$ avem $\mathbf{F} = \mathbf{I}_3$ deci $J = \det \mathbf{F} = 1$ și cum J nu se anulează nicăieri (consecință a injectivității aplicației $\chi(\cdot, t)$ pentru orice $t > 0$) se obține

$$J = \det \mathbf{F} > 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0. \quad (17)$$

În cele ce urmează vom nota prin ∇_X și ∇_x operatorii *gradient* în descriere materială, respectiv spațială, i.e.,

$$(\nabla_X \varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial X_i}, \quad (\nabla_x \varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

pentru fiecare funcție scalară φ și

$$(\nabla_X \boldsymbol{\psi})_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial X_i}, \quad (\nabla_x \boldsymbol{\psi})_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}$$

pentru fiecare funcție vectorială $\boldsymbol{\psi}$. Așadar,

$$\mathbf{F} = \nabla_X \chi.$$

În plus, pentru orice funcție scalară $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\chi(\mathbf{X}, t), t)$, putem scrie

$$\nabla_X \varphi = (\nabla_x \varphi) \mathbf{F}.$$

Notăm că această formulă este de asemenea valabilă pentru funcțiile vectoriale (verificare pe componente).

Considerăm în această secțiune tensorii $\mathbf{C}$ și $\mathbf{G}$ definiți prin relațiile:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (C_{ij} = F_{ki} F_{kj}),$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}_3) \quad (G_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij})).$$

Tensorul $\mathbf{C}$ se numește *tensor dilatare* iar tensorul $\mathbf{G}$ se numește *tensor deformație*.

Tensorul dilatare $\mathbf{C}$ este un tensor simetric. Prin urmare, el posedă trei valori proprii reale C_I, C_{II}, C_{III} pe care le numim *dilatații principale*.

Propoziția 1. *Valorile proprii C_I, C_{II}, C_{III} ale tensorului dilatare $\mathbf{C}$ sunt strict pozitive.*

DEMONSTRAȚIE. Dacă λ este o valoare proprie a tensorului dilatare $\mathbf{C}$ și $\mathbf{y}$ este vector propriu asociat, avem

$$C_{ij} y_j = \lambda y_i, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

De aici rezultă că

$$\begin{aligned} \lambda y_i y_i &= C_{ij} y_j y_i \\ &= F_{ki} F_{kj} y_j y_i \\ &= F_{ki} y_i F_{kj} y_j \\ &= (F_{ki} y_i)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Cum $\mathbf{y}$ este un vector nenul, deducem $\lambda \geq 0$.

Să presupunem că $\lambda = 0$. În acest caz

$$F_{ij} y_j = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Prin urmare $\det \mathbf{F} = 0$. Contradicție cu (17). □

Tensorul deformație $\mathbf{G}$ este simetric. Vectorii săi proprii se numesc *direcții principale de deformație* iar valorile proprii se numesc *deformații normale principale*.

Să notăm cu X_J , $J \in \{I, II, III\}$ deformațiile normale principale. Ele depind de valorile proprii ale tensorului dilatare $\mathbf{C}$ după cum urmează

$$X_J = \frac{1}{2}(C_J - 1) > -\frac{1}{2}, \quad J \in \{I, II, III\}.$$

Cunoașterea tensorului dilatare $\mathbf{C}$ permite calcularea lungimii vectorului $d\mathbf{x}$ (vector infinitesimal în configurația deformată, corespunzător vectorului infinitesimal $d\mathbf{X}$ din configurația inițială). Într-adevăr,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (dx_i = F_{ij} dX_j),$$

iar de aici

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = F_{ki} F_{kj} dX_i dX_j.$$

Prin urmare,

$$|d\mathbf{x}|^2 = C_{ij} dX_i dX_j.$$

Cunoașterea tensorului deformație $\mathbf{G}$ permite calcularea variației pătratului distanțelor infinitesimale. Într-adevăr,

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = 2G_{ij} dX_i dX_j. \quad (18)$$

Dacă mediul continuu se comportă ca un *corp rigid* (adică în timpul deformației distanțele relative dintre puncte sunt constante), din (18) deducem că $\mathbf{G} = \mathbf{O}_3$; mai mult, $\mathbf{C} = \mathbf{I}_3$. Reciproc, dacă $\mathbf{C} = \mathbf{I}_3$, sau echivalent $\mathbf{G} = \mathbf{O}_3$, atunci mediul continuu se comportă ca un rigid.

Numim *vector deplasare* câmpul vectorial

$$\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definit prin relația:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0. \quad (19)$$

Așadar, $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ este deplasarea la momentul t a particulei reperată prin $\mathbf{X}$ în configurația de referință. În plus,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}.$$

Numim *gradient al deplasării* tensorul $\mathbf{H}$ definit prin relația

$$\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} \quad \left(H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right).$$

Avem astfel,

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_3 + \mathbf{H} \quad (F_{ij} = \delta_{ij} + H_{ij}).$$

În plus,

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}), \quad \left(G_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \right).$$

Considerăm un element material în punctul $M \in \Omega$, notat $\overrightarrow{dM}_0$,

$$\overrightarrow{dM}_0 = (dX_1, dX_2, dX_3),$$

de lungime dl_0 și de versor $\mathbf{n}_0$ la momentul $t = 0$, care devine $\overrightarrow{dM}$ la momentul $t > 0$, de lungime dl . Variația relativă a pătratului lungimii acestui element material se exprimă prin formula

$$\frac{(dl)^2 - (dl_0)^2}{(dl_0)^2} = 2G_{ij}n_{0i}n_{0j}.$$

În plus,

$$\left(\frac{dl}{dl_0} \right)^2 = C_{ij}n_{0i}n_{0j}.$$

Dacă $\mathbf{n}_0$ este direcția principală de deformare asociată valorii proprii λ a tensorului $\mathbf{C}$, atunci

$$C_{ij}n_{0j} = \lambda n_{0i},$$

de unde rezultă

$$\left(\frac{dl}{dl_0} \right)^2 = \lambda.$$

Valoarea proprie

$$\mu = \frac{1}{2}(\lambda - 1)$$

corespunzătoare tensorului $\mathbf{G}$ este legată de variația relativă a patratului lungimilor

$$\frac{(dl)^2 - (dl_0)^2}{(dl_0)^2} = 2\mu.$$

Deoarece

$$\left(\frac{dl}{dl_0} \right)^2 = 2\mu + 1,$$

deducem că

$$\frac{dl - dl_0}{dl_0} = \sqrt{1 + 2\mu} - 1.$$

Astfel, pentru $\mu \ll 1$, variația relativă a lungimilor este aproximativ egală cu μ .

Considerăm la momentul $t = 0$ două elemente materiale în punctul $M \in \Omega$, notate $\overrightarrow{dM}_0$ și $\overrightarrow{\delta M}_0$, de versori $\mathbf{n}_0$ și $\mathbf{\nu}_0$, făcând între ele unghiul θ_0 .

$$\overrightarrow{dM}_0 = dl_0 \mathbf{n}_0 = (dX_1, dX_2, dX_3),$$

$$\overrightarrow{\delta M}_0 = \delta l_0 \mathbf{\nu}_0 = (\delta X_1, \delta X_2, \delta X_3).$$

La momentul $t > 0$ aceste două elemente devin $\overrightarrow{dM}$ și δM , de versori $\mathbf{n}$ respectiv $\boldsymbol{\nu}$ și fac între ele unghiul θ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM} &= dl \mathbf{n} = (dx_1, dx_2, dx_3), \\ \overrightarrow{\delta M} &= \delta l \boldsymbol{\nu} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3).\end{aligned}$$

Pe de o parte,

$$\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \overrightarrow{\delta M_0} = \cos \theta \, dl \, \delta l - \cos \theta_0 \, dl_0 \, \delta l_0.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \overrightarrow{\delta M_0} &= d\mathbf{x} \cdot \delta \mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot \delta \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}_3) d\mathbf{X} \cdot \delta \mathbf{X} \\ &= 2G_{\alpha\beta} dl_0 \, \delta l_0 \, n_{0\alpha} \nu_{0\beta}.\end{aligned}$$

Obținem prin urmare,

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + 2G_{\alpha\beta} n_{0\alpha} \nu_{0\beta}}{\sqrt{1 + 2G_{\alpha\beta} n_{0\alpha} n_{0\beta}} \sqrt{1 + 2G_{\alpha\beta} \nu_{0\alpha} \nu_{0\beta}}}.$$

Presupunem că $\mathbf{n}_0$ este direcție principală a deformației asociată deformației normale principale μ , adică:

$$G_{\alpha\beta} n_{0\beta} = \mu n_{0\alpha},$$

ceea ce implică

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1 + 2\mu} \cos \theta_0}{\sqrt{1 + 2G_{\alpha\beta} \nu_{0\alpha} \nu_{0\beta}}}.$$

Notăm că dacă $\mathbf{n}_0$ și $\boldsymbol{\nu}_0$ sunt vectori perpendiculari, atunci $\mathbf{n}$ și $\boldsymbol{\nu}$ sunt de asemenea vectori perpendiculari.

În condiții uzuale de utilizare, solidele nu suferă decât mici deformații. Mai exact, vectorul deplasare $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ variază lent în raport cu $\mathbf{X}$, derivatele parțiale $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ fiind, în consecință mici.

Introducem următoarea ipoteză:

$$\begin{aligned}\text{Există } \delta > 0 \text{ astfel încât: } |\mathbf{H}| &\leq \delta, \quad \delta \ll 1, \\ \text{și cantitățile de ordin } \delta^2, O(\delta^2), &\text{ sunt neglijabile,}\end{aligned}\tag{20}$$

unde $|\mathbf{H}|$, a se vedea (9), notează norma tensorului $\mathbf{H}$. Pentru a simplifica scrierea, vom omite cantitățile de ordin

În această ipoteză, ținând cont că

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = O(\delta^2)$$

deducem

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T).$$

Aceasta justifică introducerea tensorului

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i})). \quad (21)$$

Tensorul $\boldsymbol{\varepsilon}$ se numește *tensorul deformațiilor infinitezimale*.

Pentru a marca dependența lui $\boldsymbol{\varepsilon}$ de vectorul deplasare, uneori se va utiliza scrierea $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$.

Este important de semnalat că în ipoteza micilor deformații (20), dacă gradientul $\nabla_x \phi$ al unei funcții scalare sau vectoriale ϕ este de ordin δ atunci și $\nabla_X \phi$ este de ordin δ (și reciproc). În plus, în acest caz

$$\nabla_X \phi = \nabla_x \phi. \quad (22)$$

Într-adevăr,

$$\nabla_X \phi = (\nabla_x \phi) \mathbf{F} = (\nabla_x \phi)(\mathbf{I}_3 + \mathbf{H}) = \nabla_x \phi + (\nabla_x \phi) \mathbf{H}.$$

Deci, presupunând că $\nabla_x \phi = O(\delta)$, atunci $(\nabla_x \phi) \mathbf{H} = O(\delta^2)$, de unde rezultă

$$\nabla_X \phi = \nabla_x \phi.$$

Reciproc, să presupunem că $\nabla_X \phi = O(\delta)$. Cum

$$\nabla_x \phi = (\nabla_X \phi)(\mathbf{I}_3 + \mathbf{H})^{-1},$$

admițând (20), avem

$$(\mathbf{I}_3 + \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{H}$$

și de aici rezultă că

$$\nabla_x \phi = \nabla_X \phi.$$

În concluzie, admițând (20), nu mai trebuie să facem distincție între coordonatele materiale și coordonatele spațiale în calculul derivatelor parțiale ale lui ϕ . În particular, putem scrie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^T \mathbf{u}) \quad (\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i})). \quad (23)$$

Discutăm în cele ce urmează semnificația fizică a componentelor tensorului $\boldsymbol{\varepsilon}$. Definim alungirea relativă $\Lambda(\mathbf{n}_0)$ prin formula

$$\Lambda(\mathbf{n}_0) = \frac{dl - dl_0}{dl_0}.$$

Deducem că

$$\Lambda(\mathbf{n}_0)(\Lambda(\mathbf{n}_0) + 2) = 2G_{\alpha\beta}n_{0\alpha}n_{0\beta}$$

iar de aici rezultă

$$\Lambda(\mathbf{n}_0) = -1 + \sqrt{1 + 2G_{\alpha\beta}n_{0\alpha}n_{0\beta}}.$$

În fața radicalului am luat semnul plus căci dacă punem semnul minus deducem că $\Lambda(n_0) = -2$ atunci când $\mathbf{G} = \mathbf{0}_3$. Dar dacă $\mathbf{G} = \mathbf{0}_3$, atunci $dl = dl_0$ și prin urmare $\Lambda(n_0) = 0$, deci contradicție.

Dacă presupunem acum că $\mathbf{n}_0 = (1, 0, 0)$, deducem

$$\Lambda(\mathbf{e}_1) = -1 + \sqrt{1 + 2G_{11}}.$$

Analog,

$$\Lambda(\mathbf{e}_2) = -1 + \sqrt{1 + 2G_{22}}$$

și

$$\Lambda(\mathbf{e}_3) = -1 + \sqrt{1 + 2G_{33}}.$$

Admițând (20),

$$\Lambda(\mathbf{e}_1) = \varepsilon_{11}, \quad \Lambda(\mathbf{e}_2) = \varepsilon_{22}, \quad \Lambda(\mathbf{e}_3) = \varepsilon_{33}.$$

Așadar ε_{11} reprezintă alungirea relativă în direcția axei OX_1 , ε_{22} reprezintă alungirea relativă în direcția axei OX_2 , iar ε_{33} reprezintă alungirea relativă în direcția axei OX_3 , admițând ipoteza micilor deformații.

Fie acum $\mathbf{n}_0 = (1, 0, 0)$ și $\boldsymbol{\nu}_0 = (0, 1, 0)$. Notăm în acest caz θ cu θ_{12} ;

$$\cos \theta_{12} = \frac{2G_{12}}{\sqrt{1 + 2G_{11}}\sqrt{1 + 2G_{22}}}.$$

Folosind (20), rezultă

$$\cos \theta_{12} = 2\varepsilon_{12}.$$

Analog,

$$\begin{aligned} \cos \theta_{13} &= 2\varepsilon_{13}, \\ \cos \theta_{23} &= 2\varepsilon_{23}. \end{aligned}$$

Mișcări izocore. Medii incompresibile. În cele ce urmează analizăm problema modificării volumelor. Fie V și V_t volumele ocupate de corp în configurația nedeformată, respectiv în configurația deformată. Avem

$$V = \int_{\Omega} dV, \quad V_t = \int_{\Omega_t} dv = \int_{\Omega} J(\mathbf{X}, t) dV.$$

Dacă

$$J(\mathbf{X}, t) = 1 \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{24}$$

obținem

$$V_t = V \quad \forall t > 0,$$

adică volumul corpului se conservă în timpul deformației.

Reciproc, să presupunem că în timpul deformației, la fiecare moment $t > 0$, volumul fiecărei părți $\mathcal{P}$ a corpului se conservă. Vom demonstra că (24) se verifică. Într-adevăr:

$$v_t = v \quad \forall t > 0$$

(unde v_t și v reprezintă volumele ocupate de $\mathcal{P}$ la momentele $t > 0$ respectiv $t = 0$). Fie ω_t și ω domeniile din $\mathbb{R}^3$ ocupate de $\mathcal{P}$ la momentele $t > 0$ și $t = 0$. Avem:

$$v_t = \int_{\omega_t} dv; \quad v = \int_{\omega} dV$$

și deoarece $\omega_t = \chi(\omega, t)$, utilizând aceeași schimbare de variabilă, egalitatea $v_t = v$ devine

$$\int_{\omega} J(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\omega} dV \quad \forall t > 0. \quad (25)$$

Cum $\mathcal{P}$ este o parte arbitrară a corpului (deci ω este o parte arbitrară a lui Ω), (25) implică (24).

Mișcările χ pentru care se verifică (24) se numesc *mișcări izocore*.

Un mediu continuu care nu poate realiza decât mișcări izocore se numește *mediu incompresibil*.

Știm că

$$J = \det \mathbf{F} = \det(\mathbf{I}_3 + \mathbf{H}) = \begin{vmatrix} 1 + H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & 1 + H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & 1 + H_{33} \end{vmatrix}.$$

Utilizând (20) se obține

$$J = 1 + H_{kk}.$$

Deducem astfel că

$$J = 1 + \text{Div } \mathbf{u}. \quad (26)$$

În consecință, o mișcare χ este *izocoră* dacă și numai dacă

$$\text{Div } \mathbf{u} = 0;$$

(am notat aici prin $\text{Div } \mathbf{u}$ divergența câmpului vectorial $\mathbf{u}$ în raport cu coordonatele Lagrange).

Să studiem variația relativă a volumului. Pentru aceasta vom utiliza formula

$$dv = JdV.$$

Prin urmare,

$$\frac{dv - dV}{dV} = J - 1.$$

Admițând (20),

$$J = 1 + \text{Div } \mathbf{u},$$

și astfel,

$$\frac{dv - dV}{dV} = \text{Div } \mathbf{u}.$$

Așadar, în ipoteza (20), $\text{Div } \mathbf{u}$ masoară variația relativă a elementului de volum.

Determinarea câmpului deplasare. Formula (21) ne arată că, definit fiind vectorul deplasare $\mathbf{u}$ pe $\Omega \times \mathbb{R}_+$, componentele tensorului $\boldsymbol{\varepsilon}$ se obțin prin simple derivări. În aplicații apare și problema inversă și anume să se determine vectorul deplasare $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ când se cunoaște expresia tensorului $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, t)$, pe $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Problema revine la integrarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi (21), ε_{ij} fiind funcții cunoscute pe Ω la momentul considerat t .

Să introducem tensorul $\mathbf{W}$ de componente

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (27)$$

Presupunem că într-un punct $P_0(\mathbf{X}^0)$ se cunosc mărimile

$$u_i(\mathbf{X}^0, t) \equiv u_i^0$$

și

$$W_{ij}(\mathbf{X}^0, t) \equiv W_{ij}^0.$$

Admițând că $\boldsymbol{\varepsilon}$ este dat pe Ω la momentul dat t , ne propunem să determinăm $\mathbf{u}$ într-un punct oarecare $P_1(\mathbf{X}^1)$.

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}^1, t) &= u_i(\mathbf{X}^0, t) + \int_{P_0 P_1} du_i = \\ &= u_i^0 + \int_{P_0 P_1} (\varepsilon_{ij} + W_{ij}) dX_j. \end{aligned}$$

Deoarece W_{ij} este necunoscut pe Ω , urmează să-l eliminăm

$$\begin{aligned} \int_{P_0 P_1} W_{ij} dX_j &= \int_{P_0 P_1} W_{ij} d(X_j - X_j^1) = \\ &= \int_{P_0 P_1} d(W_{ij}(X_j - X_j^1)) - (X_j - X_j^1) W_{ij,k} dX_k \\ &= -W_{ij}^0 (X_j^0 - X_j^1) - \int_{P_0 P_1} (X_j - X_j^1) W_{ij,k} dX_k. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} 2W_{ij,k} &= u_{i,jk} - u_{j,ik} \\ &= u_{i,jk} + u_{k,ij} - u_{k,ij} - u_{j,ik} \\ &= 2(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}). \end{aligned}$$

Așadar, cumulând rezultatele obținute, putem scrie

$$u_i(X^1, t) = u_i^0 + W_{ij}^0(X_j^1 - X_j^0) + \int_{P_0 P_1} \mathcal{U}_{ik} dX_k \quad (i \in \{1, 2, 3\})$$

unde

$$\mathcal{U}_{ik} = \varepsilon_{ik} + (X_j^1 - X_j^0)(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}).$$

Vectorial, vom scrie

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}^1, t) = \mathbf{u}^0 + \mathbf{w}^0 \times (\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}^0) + \int_{P_0 P_1} \mathcal{U} d\mathbf{X}$$

unde

$$\mathbf{w}^0(W_{32}, W_{13}, W_{21}) = \frac{1}{2} \text{Rot } \mathbf{u}.$$

Pe această formă vectorială se vede ușor că partea integrată reprezintă o rototranslație (mișcare de corp rigid); numai integrala propriu-zisă reprezintă o deformare. De altfel, dacă se calculează ε_{ij} cu

$$\mathbf{u}(X, t) = \mathbf{u}^0 + \mathbf{w}^0 \times (\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}^0)$$

se obține zero.

Deducem așadar că soluția sistemului

$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad (i, j \in \{1, 2, 3\})$$

este

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}^1, t) = \mathbf{u}^0 + \mathbf{w}^0 \times (\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}^0).$$

Notăm de asemenea că două stări de deplasare cărora le corespund aceiași tensori $\boldsymbol{\varepsilon}$ diferă între ele printr-o rototranslație.

Condiții de compatibilitate. Cum în punctul $P_1(\mathbf{X}^1)$ trebuie să obținem deplasări unice (nu putem avea două deplasări) oricare ar fi drumul de integrare între P_0 și P_1 , pentru ca integralele curbilinii

$$\int_{P_0 P_1} \mathcal{U}_{ik} dX_k, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

să nu depindă de drumul de integrare, este necesar și suficient ca

$$\mathcal{U}_{ik} dX_k \quad (i \in \{1, 2, 3\})$$

să fie diferențiale total exacte, adică să existe $\mathcal{U}_i$ astfel încât

$$\mathcal{U}_{ik}dX_k = d\mathcal{U}_i \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (28)$$

Admitem că Ω este simplu conex. Așadar, (28) are loc dacă și numai dacă

$$\mathcal{U}_{ik,l} = \mathcal{U}_{il,k} \quad (i \in \{1, 2, 3\}), \quad (29)$$

$k, l \in \{1, 2, 3\}$.

Utilizând (29), relațiile (29) devin

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik,l} - \delta_{lj}(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}) + (X_j^1 - X_j)(\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il}) \\ = \varepsilon_{il,k} - \delta_{kj}(\varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i}) + (X_j^1 - X_j)(\varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jl,ik}), \end{aligned}$$

iar de aici deducem

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0 \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (30)$$

Avem $3^4 = 81$ relații. Dată fiind însă simetria lui ε și posibilitatea schimbării ordinii de derivare (admitem că $u_i \in C^2$) nu toate aceste relații sunt independente.

Relațiile (30) se pot rescrie cu ajutorul simbolului lui Ricci (a se vedea (8)) astfel,

$$\epsilon_{klm}(\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{kj,il}) = 0 \quad m \in \{1, 2, 3\}$$

sau, echivalent

$$\epsilon_{ijn}\epsilon_{klm}\varepsilon_{ik,jl} = 0 \quad m, n \in \{1, 2, 3\}. \quad (31)$$

Observăm că este vorba doar de 6 relații distincte, deoarece în (31) avem o mărime care depinde doar de doi indici m și n , și care în plus este simetrică.

Relațiile (30) se numesc *condițiile de compatibilitate ale lui Saint Venant (1860)*. Demonstrația dată aici prin construcția soluției sistemului (21) se găsește în lucrările lui Cesaro (1906) și Volterra (1907).

Relațiile distincte sunt:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{12,12} &= \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} \\ \varepsilon_{11,23} &= (\varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2})_{,1} \end{aligned} \quad (32)$$

și cele care se obțin din acestea prin permutări circulare.

Existența condițiilor de compatibilitate demonstrează faptul că nu ne putem da arbitrar un tensor simetric ε pe Ω și să pretindem că el reprezintă un tensor de deformație. Din punctul de vedere al integrării sistemului (21) era natural să ajungem la condiții de compatibilitate deoarece în (21) avem un sistem de 6 ecuații cu numai 3 necunoscute.

Descrierea spațială.

Curs 8

Tematica: principii generale in mecanica mediilor deformabile

Principiul conservării masei

Fie $\mathcal{P}$ o parte a unui corp $\mathcal{M}$, care la momentul $t = 0$ ocupă în $\mathbb{R}^3$ domeniul ω iar la momentul $t > 0$ ocupă domeniul $\omega_t \subset \mathbb{R}^3$. În mecanica mediilor continue se presupune că masa este funcție absolut continuă de volumul suport. Pentru a exprima masa părții $\mathcal{P}$ vom utiliza Teorema Radon-Nikodym din teoria măsurii și a integralei. Astfel, la momentul $t = 0$ masa părții $\mathcal{P}$ este

$$m = \int_{\omega} \rho_0(X) dX, \quad (1)$$

iar la momentul $t > 0$ masa părții $\mathcal{P}$ este

$$m_t = \int_{\omega_t} \rho(x, t) dx. \quad (2)$$

Aplicația

$$\rho_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

se numește *densitate de masă în configurația nedeformată*.

Aplicația

$$\rho(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (4)$$

se numește *densitate de masă în configurația deformată*.

Presupunând că masa părții $\mathcal{P}$ se conservă în timp, adică

$$m = m_t \quad \forall t > 0, \quad (5)$$

avem

$$\int_{\omega} \rho_0(\mathbf{X}) dX = \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) dx \quad \forall t > 0. \quad (6)$$

Deoarece $\omega_t = \chi(\omega, t)$,

$$\int_{\omega_t} \rho dx = \int_{\omega} \rho J dX. \quad (7)$$

Din (6) si (7) rezultă

$$\int_{\omega} \rho J dX = \int_{\omega} \rho_0(\mathbf{X}) dX.$$

Cum ω este un domeniu arbitrar în Ω ($\mathcal{P}$ fiind o parte oarecare a corpului), deducem

$$\rho_0 = \rho J \quad (8)$$

sau, explicit,

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\chi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega, t > 0.$$

Numim (8) *principiul conservării masei în coordonate materiale*.

Derivând în raport cu t în (8), obținem

$$0 = \dot{\rho} J + \rho \dot{J}.$$

Să demonstrăm că

$$\frac{\dot{}}{dv} = \operatorname{div} \mathbf{v} dv. \quad (9)$$

Pentru aceasta, utilizăm formula

$$dv = J dV$$

care, prin derivare în raport cu timpul se scrie

$$\frac{\dot{}}{dv} = \dot{J} dV. \quad (10)$$

Următoarea teoremă se va dovedi utilă în cele ce urmează.

Teorema 1. (*Euler*)

$$\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (11)$$

DEMONSTRAȚIE.

$$J = \det \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Prin derivare obținem

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \frac{d}{dt} J = \begin{vmatrix} \dot{x}_{1,1} & \dot{x}_{1,2} & \dot{x}_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ \dot{x}_{2,1} & \dot{x}_{2,2} & \dot{x}_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ \dot{x}_{3,1} & \dot{x}_{3,2} & \dot{x}_{3,3} \end{vmatrix} \\ &= J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

unde, am notat cu J_i determinantul obținut din J prin înlocuirea liniei i cu derivata ei în raport cu timpul. Observăm că

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J.$$

Analog, deducem

$$J_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} J,$$

$$J_3 = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} J.$$

Așadar,

$$\dot{J} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} J + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} J = J \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

□

Din (10) și (11) rezultă (9).

Deducem

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (12)$$

sau explicit,

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, t > 0.$$

Numim (12) *principiul conservării masei în coordonate spațiale*.

Principiul lui Cauchy

În mecanică acțiunile se traduc prin forțe. Suntem interesați aici de forțele care acționează asupra unui subsistem material $\mathcal{P}$.

Într-o configurație deformată, la un moment oarecare $t > 0$, avem

- *acțiuni de contact* (sau forțe de suprafață) care sunt acțiunile ce se exercită pe $\partial\omega_t$ din partea sistemului $\mathcal{M} \setminus \mathcal{P}$ ($\mathcal{M}$ fiind corpul în întregime);
- *acțiuni la distanță*.

Ca să scriem ecuația de mișcare a lui $\mathcal{P}$ va trebui ca acțiunile lui $\mathcal{M} \setminus \mathcal{P}$ asupra lui $\mathcal{P}$, acțiuni de contact pe suprafața $\partial\omega_t$, să le traducem prin forțe de contact pe $\partial\omega_t$. Făcând această operație, în ecuațiile de mișcare ale lui $\mathcal{P}$ vom introduce aceste forțe și vom face abstracție de prezența lui $\mathcal{M} \setminus \mathcal{P}$.

Principiul lui Cauchy: Există o distribuție de forțe $\boldsymbol{\tau}$ pe suprafața $\partial\omega_t$ a căror acțiune asupra lui $\mathcal{P}$ este echivalentă cu acțiunea lui $\mathcal{M}\setminus\mathcal{P}$. În plus, vectorul $\boldsymbol{\tau}$ este același pentru toate suprafețele de aceeași orientare și de același plan tangent în $\mathbf{x}$.

Pe suprafața $\partial\omega_t$, pentru un moment dat $t > 0$, $\boldsymbol{\tau}$ va depinde de punctul curent. Într-un punct dat $\mathbf{x}$ și pentru un moment dat t , $\boldsymbol{\tau}$ va depinde de suprafața ce trece prin acel punct. Dependența de suprafață se traduce prin dependența de versorul normal $\boldsymbol{\nu}$.

În concluzie, putem scrie

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t).$$

Vectorul $\boldsymbol{\tau}$ se numește *vectorul tensiune Cauchy*.

Acțiunea lui $\mathcal{M}\setminus\mathcal{P}$ asupra lui $\mathcal{P}$ este un câmp absolut continuu de suprafață. Astfel, această acțiune (totală) se va scrie

$$\int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{\tau} da.$$

Acțiunile la distanță sunt funcțiile absolut continue de masă, în timp ce forțele electromagnetice vor fi funcții absolut continue de volum. Acțiunea totală care se exercită asupra lui $\mathcal{P}$ în configurația ω_t va fi

$$\int_{\omega_t} \rho \mathbf{b} dv.$$

unde $\rho \mathbf{b}$ reprezintă forța pe unitatea de volum.

Notăm că în general $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$. Dacă $\mathbf{b}$ nu depinde explicit de t , câmpul se va numi *staționar*, iar dacă $\mathbf{b}$ nu depinde de $\mathbf{x}$, se va numi *omogen*. Un exemplu de câmp omogen este $\mathbf{b} = \mathbf{g}$ (câmpul gravitațional). Pentru a simplifica scrierea vom nota $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$.

Rezumând, un corp $\mathcal{M}$, care la momentul dat $t > 0$ se găsește în configurația deformată Ω_t , este supus la următoarele tipuri de forțe:

- *forțe volumice:* de densitate $\mathbf{f}(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^3$;
- *forțe externe de suprafață:* de densitate $\mathbf{h}(\cdot, t) : \partial\Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^3$;
- *forțe de suprafață:* de densitate $\boldsymbol{\tau}(\cdot, \cdot, t) : \bar{\Omega}_t \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

unde

$$\mathbb{S} = \{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{\nu}| = 1\}. \quad (13)$$

Dacă $\mathbf{x} \in \partial\Omega_t$ iar $\boldsymbol{\nu}$ coincide cu vectorul normalei exterioare la Ω_t în $\mathbf{x}$, atunci $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$.

Principiul variației impulsului

Impulsul subsistemului material $\mathcal{P}$ se definește prin formula

$$H(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{v} dm = \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} dv. \quad (14)$$

Principiul variației impulsului: pentru orice subsistem $\mathcal{P}$, în orice configurație a sa ω_t , derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forțelor care acționează asupra subsistemului, adică

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\omega_t} \mathbf{f} dv + \int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{\tau} da. \quad (15)$$

Notăm că (15) implică

$$\int_{\omega_t} \rho \mathbf{a} dv = \int_{\omega_t} \mathbf{f} dv + \int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{\tau} da. \quad (16)$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} dv &= \frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \mathbf{v} J dV \\ &= \int_{\omega} (\dot{\rho} \mathbf{v} J + \rho \mathbf{a} J + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} J) dV \\ &= \int_{\omega} [(\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{v} J + \rho \mathbf{a} J] dV. \end{aligned}$$

Utilizând principiul conservării masei în coordonate spațiale deducem că

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\omega} \rho \mathbf{a} J dV = \int_{\omega_t} \rho \mathbf{a} dv.$$

Principiul variației momentului cinetic

Momentul cinetic al subsistemului $\mathcal{P}$ în raport cu un pol O se definește prin formula

$$K_O(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \mathbf{v} dm = \int_{\omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{v} \rho dv.$$

Principiul variației momentului cinetic: pentru orice subsistem $\mathcal{P}$, în orice configurație a sa ω_t , derivata momentului cinetic, calculat în raport cu un pol O , este egală cu momentul resultant al forțelor care acționează asupra subsistemului, calculat în raport cu același pol O , adică

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\partial\omega_t} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} da + \int_{\omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{f} dv. \quad (17)$$

Relația (17) implică

$$\int_{\omega_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} dv = \int_{\partial\omega_t} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} da + \int_{\omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{f} dv. \quad (18)$$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \, dv \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \, J dV \\
&= \int_{\omega} (\dot{\mathbf{x}} \times \rho \mathbf{v} J + \mathbf{x} \times \dot{\rho} \mathbf{v} J + \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} J + \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} J) dV \\
&= \int_{\omega} [\mathbf{v} \times \rho \mathbf{v} J + \mathbf{x} \times (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{v} J + \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} J] dV \\
&= \int_{\omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} J dV \\
&= \int_{\omega} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} \, dv.
\end{aligned}$$

Pe componente, (18) se scrie cu ajutorul simbolului lui Ricci astfel,

$$\int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j \rho a_k \, dv = \int_{\partial\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j \tau_k \, da + \int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j f_k \, dv, \quad (19)$$

pentru fiecare $i \in \{1, 2, 3\}$.

Curs 9

Tematica: Ecuațiile Cauchy, condiții la limită, legi de comportament

Un prim obiectiv este scrierea ecuațiilor care modelează mișcarea unui solid deformabil. Prezintă în cele ce urmează o teoremă fundamentală.

Teorema 1. (*Teorema lui Cauchy*) Pentru fiecare $t > 0$, admitem că $\rho(\cdot, t) : \bar{\Omega}_t \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\mathbf{a}(\cdot, t) : \bar{\Omega}_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $\mathbf{f}(\cdot, t) : \bar{\Omega}_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ sunt funcții continue iar $\boldsymbol{\tau}(\cdot, \cdot, t) : \bar{\Omega}_t \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t)$ este funcție de clasă C^1 în raport cu $\mathbf{x}$ pentru oricare $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}$ și continuă în raport cu $\boldsymbol{\nu}$ pentru oricare $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_t$.

Atunci există $\mathbf{T}(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{M}_3$ de clasă C^1 ($\mathbb{M}_3$ fiind mulțimea matricilor pătratice de ordin 3, cu componente reale) astfel încât

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\nu} \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}, t > 0 \quad (1)$$

$$\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, t > 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, t > 0, \quad (3)$$

unde $\mathbb{S}$ este mulțimea definită în (13).

DEMONSTRAȚIE. Fie $t > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega_t$ și $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}$ (de componente $\nu_i > 0$). Considerăm tetraedrul T_t din Figura 3.1, $\overrightarrow{SS_i}$ fiind vectori de versori $\mathbf{e}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Introducem următoarele notații:

$$(SS_2S_3) = F_1; \quad \text{aria } F_1 = a_1,$$

$$(SS_3S_1) = F_2; \quad \text{aria } F_2 = a_2,$$

$$(SS_1S_2) = F_3; \quad \text{aria } F_3 = a_3,$$

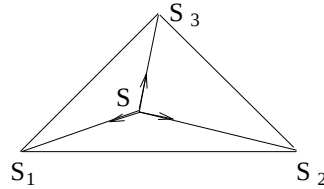


FIGURA 10. Tetraedrul T_t

$$(S_1 S_2 S_3) = F; \quad \text{aria } F = a.$$

Notăm că

$$a_i = \nu_i a \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Într-adevăr, cu argumente elementare de geometrie obținem rapid, de exemplu că

$$a_3 = \nu_3 a.$$

Pentru aceasta scriem

$$\begin{aligned} a_3 &= \text{aria}(SS_1S_2) = \frac{|SS'| \cdot |S_1S_2|}{2}, \\ a &= \text{aria}(S_3S_1S_2) = \frac{|S_3S'| \cdot |S_1S_2|}{2}, \end{aligned}$$

unde S' este proiecția lui S pe S_1S_2 , și de aici, $a_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\nu} a = \nu_3 a$, $\mathbf{e}_3$ fiind versorul vectorului $\overrightarrow{SS_3}$ și în același timp versorul axei OX_3 . Analog pentru $i \in \{1, 2\}$.

Utilizând (16) pentru $\omega_t = T_t$ cu

$$\partial T_t = \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2 \cup \bar{F}_3 \cup \bar{F},$$

vom avea, pe componente

$$\int_{T_t} (\rho a_i(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)) dv = \int_{\partial T_t} \tau_i(\mathbf{x}, \theta, t) da \quad (4)$$

unde $\theta = -\mathbf{e}_j$ pentru F_j , $j \in \{1, 2, 3\}$ și $\theta = \boldsymbol{\nu}$ pentru F .

Există $\mathbf{y}_i \in F$ astfel încât

$$\frac{1}{a} \int_F \tau_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) da = \tau_i(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\nu}, t)$$

și există $\mathbf{y}_{ij} \in F_j$ astfel încât

$$\frac{1}{a_j} \int_{F_j} \tau_i(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j, t) da = \tau_i(\mathbf{y}_{ij}, -\mathbf{e}_j, t).$$

Prin urmare,

$$\int_{\partial T_t} \tau_i(\mathbf{x}, \theta, t) da = (\text{aria } F) \tau_i(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\nu}, t) + \sum_{j=1}^3 (\text{aria } F_j) \tau_i(\mathbf{y}_{ij}, -\mathbf{e}_j, t).$$

Utilizând (4) rezultă

$$\int_{T_t} (\rho a_i(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)) dv = (\tau_i(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\nu}, t) + \sum_{j=1}^3 \nu_j \tau_i(\mathbf{y}_{ij}, -\mathbf{e}_j, t)) (\text{aria } F)$$

și de aici deducem

$$\begin{aligned} &|\tau_i(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\nu}, t) + \sum_{j=1}^3 \nu_j \tau_i(\mathbf{y}_{ij}, -\mathbf{e}_j, t)| (\text{aria } F) \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{z} \in T_t} |\rho(\mathbf{z}, t) a_i(\mathbf{z}, t) - f_i(\mathbf{z}, t)| \text{vol}(T_t). \end{aligned} \quad (5)$$

Reamintim aici că $\boldsymbol{\nu}$ este arbitrar fixat (cu $\nu_i > 0$). Facem să tindă vârfulurile S_k la S (caz în care $\mathbf{y}_i$ și $\mathbf{y}_{ij}$ tind la $\mathbf{x}$),

$$\frac{\text{vol}(T_t)}{\text{aria } F} = \frac{\frac{d(S, (S_1 S_2 S_3)) \cdot \text{aria } F}{3}}{\text{aria } F} = \frac{d(S, (S_1 S_2 S_3))}{3} \rightarrow 0, \text{ când } S_k \rightarrow S, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Trecând la limită $S_k \rightarrow S, k \in \{1, 2, 3\}$, din (5) rezultă

$$\tau_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) + \sum_{j=1}^3 \tau_i(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j, t) \nu_j = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

sau, vectorial

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) + \sum_{j=1}^3 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j, t) \nu_j = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Din (6) rezultă imediat

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) = -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_1, t) \nu_1 - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_2, t) \nu_2 - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_3, t) \nu_3. \quad (7)$$

În (7) trecem la limită $\boldsymbol{\nu} \rightarrow \mathbf{e}_1$ și obținem

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, t) = -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_1, t).$$

Analog, obținem

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2, t) = -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_2, t)$$

și

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3, t) = -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_3, t).$$

Așadar,

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j, t) = -\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j, t) \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}. \quad (8)$$

Din (6) și (8) rezultă

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j, t) \nu_j \quad (9)$$

sau pe componente

$$\tau_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) = \tau_i(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j, t) \nu_j. \quad (10)$$

Definim $T_{ij}(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$T_{ij}(\mathbf{x}, t) = \tau_i(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, t > 0, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (11)$$

Utilizând (10) și (11) rezultă

$$\tau_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) = T_{ij}(\mathbf{x}, t) \nu_j \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \quad (12)$$

Din (12) rezultă (1).

Pentru a demonstra (2) vom utiliza (1) și (16). Într-adevăr, din (16) deducem imediat

$$\int_{\omega_t} (\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}) dv = \int_{\partial\omega_t} \boldsymbol{\tau} da.$$

Utilizând acum (1) și formula Gauss-Ostrogradski obținem

$$\int_{\omega_t} (\rho \mathbf{a} - \mathbf{f}) dv = \int_{\partial\omega_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\nu} da = \int_{\omega_t} \operatorname{div} \mathbf{T} dv.$$

Cum ω_t subdomeniu arbitrar în Ω_t deducem (2) care reprezintă *ecuațiile de mișcare în configurația deformată*.

Pentru a demonstra simetria tensorului $\mathbf{T}$ vom utiliza (19). Într-adevăr, din (19) deducem imediat

$$\int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j (\rho a_k - f_k) dv = \int_{\partial\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j \tau_k da.$$

În plus, utilizând (2), obținem

$$\int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j T_{km,m} dv = \int_{\partial\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j T_{kn} \nu_n da.$$

Utilizand formula Gauss-Ostrogradski putem scrie

$$\int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j T_{km,m} dv = \int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} (x_{j,n} T_{kn} + x_j T_{kn,n}) dv$$

iar de aici

$$\int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j T_{km,m} dv = \int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} \delta_{jn} T_{kn} dv + \int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} x_j T_{kn,n} dv.$$

Deducem așadar că

$$\int_{\omega_t} \epsilon_{ijk} T_{kj} dv = 0.$$

Cum ω_t subdomeniu arbitrar în Ω_t , deducem imediat

$$\epsilon_{ijk} T_{kj} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \quad (13)$$

Pentru $i = 1$,

$$\epsilon_{123} T_{32} + \epsilon_{132} T_{23} = 0 \Rightarrow T_{32} = T_{23}.$$

Pentru $i = 2$,

$$\epsilon_{231} T_{13} + \epsilon_{213} T_{31} = 0 \Rightarrow T_{13} = T_{31}.$$

Pentru $i = 3$,

$$\epsilon_{312} T_{21} + \epsilon_{321} T_{12} = 0 \Rightarrow T_{21} = T_{12}.$$

Așadar, $\mathbf{T}$ este tensor simetric. □

Teorema lui Cauchy stabilește în primul rând faptul că vectorul tensiune al lui Cauchy depinde liniar de $\boldsymbol{\nu}$. Apoi, pune în evidență pentru orice $\mathbf{x} \in \Omega_t$ și orice $t > 0$ tensorul simetric $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ care se numește *tensorul tensiune al lui Cauchy*.

Teorema lui Cauchy furnizează de asemenea ecuațiile de mișcare în configurație deformată. Aceste ecuații nu sunt însă utilizabile pentru a calcula mișcarea χ căci ele se scriu în variabile Euler $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ care reprezintă de fapt necunoscuta problemei ($\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$). Pentru aceasta, se impune scrierea ecuațiilor de mișcare în configurația de referință. Acest lucru se va realiza în continuare, prin introducerea a doi tensori Piola - Kirchhoff.

Tensorii Piola-Kirchhoff

Pornind de la tensorul tensiune al lui Cauchy $\mathbf{T}$ și utilizând gradientul deformației $\mathbf{F}$, construim următorul tensor numit *primul tensor Piola - Kirchhoff*

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} \\ \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) &= J(\mathbf{X}, t)\mathbf{T}(\chi(\mathbf{X}, t), t)\mathbf{F}^{-T}(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \quad (14)$$

unde $J = \det \mathbf{F}$.

Deoarece $\mathbf{F}^{-T}$ notează $(\mathbf{F}^{-1})^T$, putem scrie (14) pe componente după cum urmează,

$$S_{ij} = JT_{ik}(F^{-1})_{jk} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (15)$$

Notăm aici faptul că

$$\text{Div } \mathbf{S} = J \text{div } \mathbf{T}, \quad (16)$$

sau, pe componente,

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_j} = J \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \quad (17)$$

Introducem notația următoare

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= J\mathbf{f}. \\ \mathbf{f}_0(\mathbf{X}, t) &= J(\mathbf{X}, t)\mathbf{f}(\chi(\mathbf{X}, t), t). \end{aligned}$$

Înmulțind cu J ecuațiile de mișcare Cauchy în configurația deformată și utilizând (16), precum și principiul conservării masei în configurație nedeformată, (8), deducem

$$\text{Div } \mathbf{S} + \mathbf{f}_0 = \rho_0 \mathbf{a} \quad \text{în } \Omega \times (0, \infty) \quad (18)$$

unde $\mathbf{f}_0 = J\mathbf{f}$.

Primul tensor Piola - Kirchhoff nu este simetric. Se impune introducerea unui nou tensor, *al doilea tensor Piola - Kirchhoff*, care se va dovedi a fi simetric.

Pornind de la primul tensor Piola - Kirchhoff $\mathbf{S}$ și utilizând tensorul gradient al deformației $\mathbf{F}$, construim acum tensorul numit *al doilea tensor Piola - Kirchhoff*:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{S}; \\ \mathbf{\Pi}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, t)\mathbf{S}(\mathbf{X}, t).\end{aligned}\tag{19}$$

Pe componente, (19) se scrie astfel:

$$\Pi_{ij} = (\mathbf{F}^{-1})_{ik}S_{jk}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.\tag{20}$$

Al doilea tensor Piola- Kirchhoff este simetric. Într-adevăr,

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$$

și

$$\mathbf{\Pi}^T = (\mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T})^T = \mathbf{J}(\mathbf{F}^{-T})^T\mathbf{T}^T(\mathbf{F}^{-1})^T.$$

Cum $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ iar $(\mathbf{F}^{-T})^T = \mathbf{F}^{-1}$, deducem

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T.$$

Din (19) rezultă imediat

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{\Pi}.\tag{21}$$

Combinând (18) și (21) rezultă

$$\text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{\Pi}) + \mathbf{f}_0 = \rho_0 \mathbf{a} \quad \text{în} \quad \Omega \times (0, \infty),\tag{22}$$

care reprezintă *ecuațiile de mișcare în configurația nedeformată*.

Suntem interesați acum să scriem ecuațiile de mișcare în ipoteza micilor deformații (20), caz în care

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{H} = O(\delta), \quad \mathbf{F} = \mathbf{I}_3 + O(\delta), \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{H} = \mathbf{I}_3 + O(\delta), \\ \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{I}_3 + O(\delta), \quad J = 1 + O(\delta). \end{array} \right.\tag{23}$$

Admitem în plus în cele ce urmează că

$$\mathbf{T} = O(\delta).\tag{24}$$

Utilizând acum (23) și (14), obținem

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} = (1 + O(\delta))\mathbf{T}(\mathbf{I}_3 + O(\delta)).$$

Așadar,

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}(\mathbf{I}_3 + O(\delta) + O(\delta^2)).\tag{25}$$

Din (24) și (25) deducem

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}.\tag{26}$$

De asemenea (19) și (23) implică

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{S} = (\mathbf{I}_3 + O(\delta))\mathbf{S}.\tag{27}$$

Cum din (26) și (24) deducem

$$\mathbf{S} = O(\delta),$$

și utilizând (27), rezultă imediat că

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{S}. \quad (28)$$

În concluzie, în teoria liniarizată nu se mai face distincție între tensorii $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{\Pi}$ ($\mathbf{T} = \mathbf{S} = \mathbf{\Pi}$).

Introducem următoarea notație:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{S} = \mathbf{\Pi} = \mathbf{T}; \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{\Pi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{T}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Notăm că $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$. Tensorul $\boldsymbol{\sigma}$ se va numi *tensorul tensiune Cauchy în teoria liniarizată*.

Ecuatiile Cauchy

Fie $T > 0$. Suntem interesați să descriem evoluția unui solid deformabil în intervalul $[0, T]$. Pentru aceasta, considerăm ecuația vectorială

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{în } \Omega \times (0, T), \quad (30)$$

în care

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{și} \quad \boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}_3$$

reprezintă necunoscutele problemei, iar

$$\rho_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{și} \quad \mathbf{f}_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

reprezintă datele problemei.

Ecuatia (30) a fost scrisă pe domeniul Ω care este fix și cunoscut. Dacă dorim să cunoaștem geometria structurii deformate vom utiliza relația de definiție a vectorului deplasare

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad \forall t > 0.$$

Pentru a ușura scrierea vom nota în continuare prin $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ coordonatele unei particule în configurația de referință și vom omite indicele 0 la ρ_0 și $\mathbf{f}_0$.

Astfel, în cele ce urmează (30) se va scrie astfel

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{în } \Omega \times (0, T). \quad (31)$$

Procese de evoluție modelate prin (31) se numesc *processe dinamice*.

Dacă $\mathbf{v} = 0$, procesele modelate prin

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (32)$$

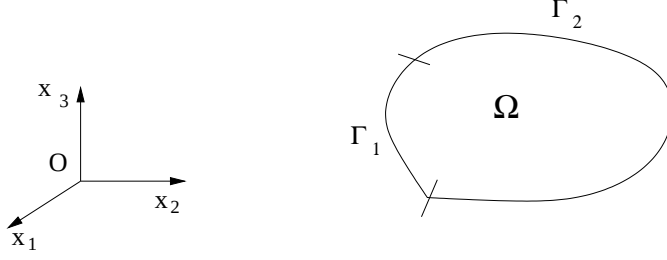


FIGURA 11. Domeniul Ω și o partiție a frontierei sale

se numesc *procese statice*.

Dacă $\mathbf{u}$ variază lent în timp, astfel încât termenul $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ poate fi neglijat, procesele modelate prin (32) se numesc *procese cvasistatice*.

Ecuția (31) se numește *ecuația de mișcare Cauchy* iar (32) se numește *ecuație de echilibru Cauchy*.

Condiții la limită

Fie Γ frontiera lui Ω și $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ versorul normalei exterioare la Γ în punctul $\mathbf{x}$. Fie de asemenea o partiție a lui Γ , $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, ca în Figura 3.2.

Considerăm următoarele condiții:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T); \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{h} \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (34)$$

Condiția (33) se numește *condiție la limită în deplasări*: câmpul deplasare $\mathbf{u}$ are valoare impusă pe porțiunea Γ_1 a frontierei Γ , funcția $\mathbf{g} : \Gamma_1 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ fiind dată a problemei.

Condiția (34) se numește *condiție la limită în tracțiuni*: vectorul tensiune Cauchy $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}$ este prescris pe porțiunea Γ_2 a frontierei Γ , funcția $\mathbf{h} : \Gamma_2 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ fiind dată a problemei.

Dacă $\Gamma_1 = \emptyset$ problema la limită se va numi *problemă în tracțiuni (pură)* iar dacă $\Gamma_2 = \emptyset$ problema la limită se va numi *problemă în deplasări (pură)*. Dacă $\Gamma_1 \neq \emptyset$ și $\Gamma_2 \neq \emptyset$, atunci problema considerată este o problemă mixtă.

Pe frontieră pot fi considerate și alte tipuri de condiții la limită: condiții de contact unilateral sau bilateral cu o fundație rigidă sau deformabilă, contactul putându-se modela cu sau fără frecare. Lucrarea de față se limitează la condițiile pe frontieră clasice, dar pentru cititorul interesat și de alte tipuri de condiții la limită facem trimitere la monografiile [31, 32, 34, 35].

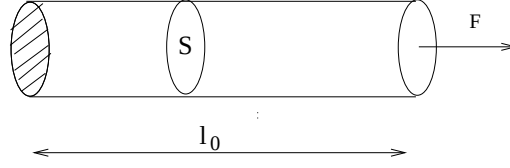


FIGURA 12. Bară supusă la încercări experimentale

Legi de comportament Ecuația (31) este insuficientă pentru a descrie evoluția unui solid deformabil. Pe de o parte, din punct de vedere matematic, este clar că din 3 ecuații scalare nu putem determina 9 necunoscute: $u_1, u_2, u_3, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$. Pe de altă parte, din punct de vedere fizic, remarcăm faptul că ecuația (31) este consecință a unor principii general valabile pentru mediile continue și, prin urmare, dacă ecuația (31) ar fi suficientă pentru a descrie mișcarea unui anumit mediu continuu, ar însemna ca toate corpurile au același comportament indiferent de tipul de material din care sunt confecționate. Trebuie așadar, ca ecuației (31) să i se alăture o ecuație care să descrie ceea ce este propriu fiecărui tip de material din care este confecționat corpul: *legea de comportament*.

O lege de comportament (sau lege constitutivă) este în general o relație între tensorul tensiune σ , tensorul deformațiilor infinitezimale ε și derivatele lor temporale $\dot{\sigma}$ și $\dot{\varepsilon}$.

Legile de comportament se scriu în general pe baza unor observații experimentale. O serie întreagă de încercări se realizează pentru a se scrie o lege de comportament: încercări de încărcare-monotonă, încercări de relaxare, fluaj, încercări de încărcare-descărcare, încercări pe care le vom prezenta pe scurt, în ceea ce urmează.

Să considerăm o bară de secțiune cu aria S , lungime l_0 , căreia i se aplică o forță $F = F(t)$ la una din extremități, în timp ce cealaltă extremitate rămâne fixă; a se vedea Figura 3.3.

Se măsoară alungirea bazei $l = l(t)$ și se definesc:

$$\varepsilon(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0} \quad \text{și} \quad \sigma(t) = \frac{F(t)}{S}. \quad (35)$$

- *Încărcarea monotonă* Se crește progresiv forța și se măsoară l . Se calculează σ și ε și se desenează curba $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Pot apare situațiile din Figura 3.4.
- *Fluajul* Se începe cu o încercare de încărcare monotonă astfel încât la un moment t (pe care în continuare îl vom considera moment inițial) avem

$$\sigma(0) = \sigma_0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad F(0) = F_0.$$

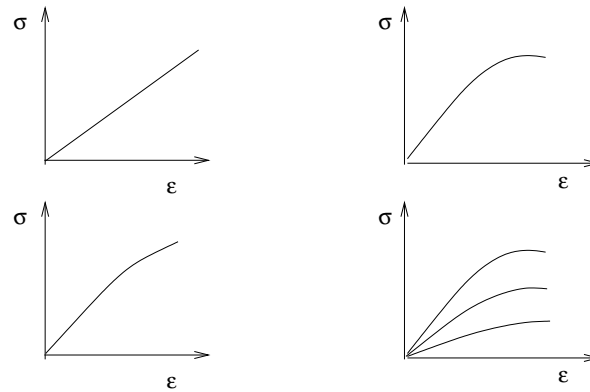


FIGURA 13. Încarcare monotona

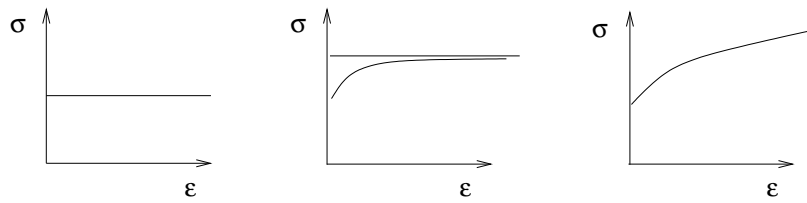


FIGURA 14. Fluaj

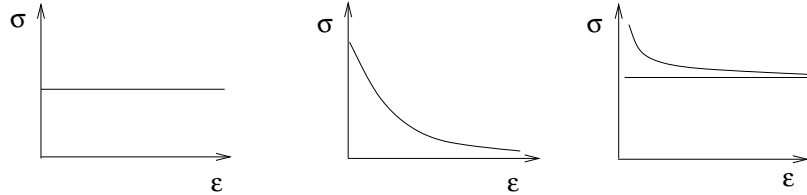


FIGURA 15. Relaxare

De acum F se menține constantă ($F = F_0$). Observăm că σ va rămâne constant pentru $t > 0$. În general, ε crește în timp: este fluajul. Pot apare situațiile din Figura 3.5.

- *Relaxarea* Ca și la fluaj se începe cu o încercare de încărcare monotonă astfel încât la un moment t (pe care îl vom presupune în continuare moment inițial) avem:

$$\sigma(0) = \sigma_0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0.$$

Mentinem de această dată deformația constantă în timp. În general se constată că tensiunile scad în timp: este relaxarea; a se vedea Figura 3.6.

- *Încărcare-descărcare* Se acționează cu o forță F crescătoare până la un moment dat, apoi forța F descrește la zero. Această încercare permite punerea în

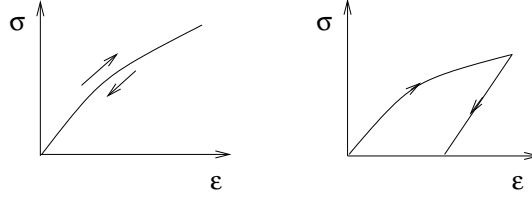


FIGURA 16. Încărcare-descărcare

evidență a comportamentului elastic sau plastic. Dacă curbele de încărcare-descărcare $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coincid, mediul se numește elastic; în caz contrar el este plastic și după descărcare completă se evidențiază o deformare reziduală. Prin urmare, materialele plastice sunt caracterizate printr-o descompunere a deformăției ε într-o parte *elastică* (*reversibilă*) ε^e și o parte *plastică* (*irreversibilă*) ε^p . Altfel spus, putem scrie

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p.$$

Este posibil ca anelasticitatea materialului să se manifeste de la un anumit prag numit *limită de proporționalitate*; dacă acest prag este fix, mediul se numește *perfect plastic*; dacă acest prag variază, se produce *ecruisaj*; a se vedea Figura 3.7

Legile de comportament se scriu astfel încât, în dimensiunea 1 să fie descrise fenomenele puse în evidență prin încercări experimentale cum ar fi cele patru încercări prezentate anterior.

În prezenta lucrare sunt puse în discuție numai legile de comportament care corespund materialelor liniar elastice, caz în care tensorul tensiune este o funcție liniară de tensorul deformațiilor infinitezimale ε ,

$$\sigma = F(\varepsilon). \quad (36)$$

În cazul unu-dimensional, legea (36) poate modela anumite proprietăți puse în evidență prin încercări experimentale de încărcare-descărcare cum ar fi de exemplu, liniaritatea curbei $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

Relaxarea și fluajul însă nu pot fi descrise de legea (36). Într-adevăr, să ne plasăm în cazul unu-dimensional; dacă de exemplu la momentul $t = 0$ avem $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ și menținem deformăția constantă

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \quad \forall t > 0$$

rezultă că

$$\sigma(t) = F(\varepsilon_0) \quad \forall t > 0.$$

Prin urmare, modelul (36) nu poate descrie fenomenul de relaxare pus în evidență prin încercări experimentale. Un comentariu similar se poate face pentru fenomenul de fluaj.

De asemenea, pentru ecuația (36), în cazul unu-dimensional, curbele încărcare-descărcare $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coincid. Deci, acest model nu poate descrie deformările reziduale.

Cititorul interesat de alte legi de comportament decât cele elastice (36), poate consulta de exemplu [10, 31, 32].

În general, funcția F din (36) depinde de punctul $\mathbf{x} \in \Omega$ (Ω fiind domeniul din $\mathbb{R}^d$ ocupat de corp),

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0.$$

Dacă F nu depinde explicit de $\mathbf{x}$, mediul se numește *omogen*. În caz contrar, el se numește *neomogen*.

În *elasticitatea liniară* $\boldsymbol{\sigma}$ este o funcție liniară de $\boldsymbol{\varepsilon}$, adică

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh}\varepsilon_{kh}) \quad (37)$$

unde $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkh})$ este un tensor de ordin patru, adică o aplicație liniară de la spațiul vectorial al tensorilor cartezieni de ordinul doi în el însuși. Componentele sale $\mathcal{E}_{ijkh}$, se numesc *coeficienți elastici* și sunt independente de tensorul deformație. În cazul neomogen, $\mathcal{E}_{ijkh}$ depind de $\mathbf{x} \in \Omega$ și în cazul omogen, $\mathcal{E}_{ijkh}$ sunt constante.

Legea lui Hooke. În teoria clasică a elasticității nu sunt vizate materialele liniar elastice în toată generalitatea lor, considerându-se cazul omogen și izotrop. Un mediu continuu se numește *izotrop* dacă are aceleași proprietăți în orice direcție în jurul unui punct arbitrar fixat. Matematic, proprietatea de izotropie se traduce astfel: dacă deformației $\boldsymbol{\varepsilon}$ îi corespunde tensiunea $\boldsymbol{\sigma}$,

$$\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh}\varepsilon_{kh},$$

atunci deformației

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T,$$

unde Q este o matrice de schimbare de repere ortogonale

$$QQ^T = Q^TQ = \mathbf{I}_3,$$

îi va corespunde tensiunea

$$\boldsymbol{\sigma}' = Q\boldsymbol{\sigma}Q^T.$$

Legat de proprietatea de izotropie a unui material vom demonstra următoarea teoremă.

Teorema 2. *Dacă un material este liniar elastic și izotrop atunci funcția scalară $w(\boldsymbol{\varepsilon})$ definită prin*

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh}\varepsilon_{kh}\varepsilon_{ij}$$

satisface

$$w(Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T) = w(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \forall Q \text{ matrice ortogonală.}$$

DEMONSTRAȚIE. Cum materialul este izotrop, putem scrie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}; \quad \boldsymbol{\sigma}' = Q\boldsymbol{\sigma}Q^T; \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T; \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}'.$$

Rezultă așadar

$$\begin{aligned} w(Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T) &= w(\boldsymbol{\varepsilon}') = tr(\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\varepsilon}') = tr(Q\boldsymbol{\sigma}Q^TQ\boldsymbol{\varepsilon}Q^T) \\ &= tr(Q\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon}Q^T) = Q_{ik}\sigma_{im}\varepsilon_{mj}Q_{kj} = Q_{ik}Q_{kj}\sigma_{im}\varepsilon_{mj} = \delta_{ij}\sigma_{im}\varepsilon_{mj} \\ &= \sigma_{im}\varepsilon_{mi} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = tr(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= w(\boldsymbol{\varepsilon}). \end{aligned}$$

□

Funcția scalară $w = w(\boldsymbol{\varepsilon})$ definită în (38) se numește *funcție izotropă*.

Teorema 3. *Dacă $w(\boldsymbol{\varepsilon})$ este funcție izotropă și formă pătratică în raport cu $\boldsymbol{\varepsilon}$, atunci ea se scrie astfel*

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = A(tr(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 + Btr(\boldsymbol{\varepsilon}^2), \quad (38)$$

A și B fiind scalari independenți de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

DEMONSTRAȚIE.

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = w(Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T) \quad \forall Q \text{ matrice ortogonală}$$

Cum $\boldsymbol{\varepsilon}$ este un tensor simetric, el posedă trei valori proprii reale $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ și trei direcții principale $\boldsymbol{\nu}_I, \boldsymbol{\nu}_{II}, \boldsymbol{\nu}_{III}$, care se pot alege ortogonale două câte două. În acest reper principal, $\boldsymbol{\varepsilon}$ se scrie

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}.$$

Fie Q matricea de trecere de la baza $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la baza $\{\boldsymbol{\nu}_I, \boldsymbol{\nu}_{II}, \boldsymbol{\nu}_{III}\}$;

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = w(Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T) = w(\boldsymbol{\varepsilon}_p).$$

Rezultă că $w(\boldsymbol{\varepsilon})$ depinde doar de $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ și această dependență este simetrică în raport cu cele 3 argumente. Ținând cont și de faptul că $w(\boldsymbol{\varepsilon})$ este formă pătratică în raport cu $\boldsymbol{\varepsilon}$, rezultă că w arată astfel

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = A'(\varepsilon_I^2 + \varepsilon_{II}^2 + \varepsilon_{III}^2) + 2B'(\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III})$$

unde A' și B' sunt constante. Avem de asemenea

$$\begin{cases} \varepsilon_I^2 + \varepsilon_{II}^2 + \varepsilon_{III}^2 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2); \\ 2(\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III}) = (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2), \end{cases}$$

de unde rezultă imediat (38) schimbând notațiile constantelor. $\square$

Presupunem că

$$\mathcal{E}_{ijkh} = \mathcal{E}_{khi j} = \mathcal{E}_{jik h}.$$

Există în elasticitatea liniarizată o energie internă (de deformație)

$$e := \frac{1}{2\rho_0} \mathcal{E}_{ijkh} \varepsilon_{kh} \varepsilon_{ij}$$

astfel că

$$\sigma_{ij} = \rho_0 \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Cum $w(\boldsymbol{\varepsilon}) = e$ este funcție izotropă și formă pătratică în raport cu $\boldsymbol{\varepsilon}$, utilizând teorema anterioară, deducem

$$\frac{1}{2\rho_0} \mathcal{E}_{ijkh} \varepsilon_{kh} \varepsilon_{ij} = A(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + B\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

sau echivalent

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2\rho_0 [A(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij} \varepsilon_{ij} + B\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}].$$

Rezultă de aici următoarea expresie pentru componenta ij a tensorului tensiune $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\sigma_{ij} = \rho_0 [2A(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij} + 2B\varepsilon_{ij}],$$

sau schimbând notațiile

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}_3 + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\sigma_{ij} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}). \quad (39)$$

Legea (39) este cunoscută sub numele de *legea lui Hooke*. Coeficienții λ și μ se numesc *coeficienții lui Lamé*. Dacă materialul este presupus omogen, acești coeficienți sunt independenți de $\mathbf{x}$.

Se constată că în cazul izotrop avem numai doi coeficienți elastici independenți, în loc de 21 de coeficienți $\mathcal{E}_{ijkh}$ în cazul anizotrop oarecare.

Acești coeficienți $\mathcal{E}_{ijkh}$ se exprimă în funcție de λ și μ prin relația următoare

$$\mathcal{E}_{ijkh} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \quad i, j, k, h \in \{1, 2, 3\}.$$

$$\begin{array}{llll}
a_{1111} = \lambda + 2\mu & a_{2211} = \lambda & a_{3311} = \lambda & a_{1212} = \mu \\
a_{1112} = 0 & a_{2212} = 0 & a_{3312} = 0 & a_{1213} = 0 \\
a_{1113} = 0 & a_{2213} = 0 & a_{3313} = 0 & a_{1223} = 0 \\
a_{1122} = 0 & a_{2222} = \lambda + 2\mu & a_{3322} = 0 & a_{1323} = 0 \\
a_{1123} = 0 & a_{2223} = 0 & a_{3323} = 0 & a_{2323} = 0 \\
a_{1133} = 0 & a_{2233} = \lambda & a_{3333} = \lambda + 2\mu & a_{1313} = \mu.
\end{array}$$

Legea lui Hooke inversată. Formula (39) indică dependența tensorului tensiune de tensorul deformațiilor infinitezimale $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ne propunem acum sa exprimăm tensorul deformațiilor infinitezimale în funcție de tensorul tensiune $\boldsymbol{\sigma}$.

Utilizând urma unui tensor, deducem din (39)

$$tr \boldsymbol{\sigma} = 3\lambda tr \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu tr \boldsymbol{\varepsilon}.$$

De aici rezultă imediat

$$tr \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3\mu + 2\lambda} tr \boldsymbol{\sigma}. \quad (40)$$

Utilizând (39) și (40) deducem acum formula următoare

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij},$$

sau tensorial,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{I}_3. \quad (41)$$

Relația deformație-tensiune (41) poartă numele de *Legea lui Hooke inversată*.

Ecuațiile Navier-Lamé. După cum văzut, pentru materiale liniar elastice, omogene și izotrope, tensorul tensiune al lui Cauchy se scrie pe componente

$$\sigma_{ij} = \lambda(tr \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Utilizând relațiile geometrice,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\},$$

deducem

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Calculul divergenței tensorului tensiune $\boldsymbol{\sigma}$ conduce la forma următoare a componentei i a vectorului $\text{Div } \boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) \\
&= \lambda u_{k,ki} + \mu u_{k,ik} + \mu u_{i,jj} \\
&= (\lambda + \mu)(u_{k,k})_{,i} + \mu \Delta u_i.
\end{aligned}$$

Așadar, ecuațiile de echilibru se scriu

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta u_i + f_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Ecuațiile scalare anterioare, se scriu restrâns sub forma vectorială astfel

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (42)$$

Ecuațiile de mișcare ale lui Cauchy se scriu în acest caz

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta u_i + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

iar vectorial,

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (43)$$

Ecuația vectorială (42) se numește *ecuația Navier* iar ecuația vectorială (43) se numește *ecuația Lamé*.

Ecuația lui Navier este utilă atunci când se știe că vectorul deplasare căutat este cu rotațional nul, adică

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (44)$$

Reamintim aici formula

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}. \quad (45)$$

Din (42) și (45) deducem următoarea formă pentru ecuația lui Navier,

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (46)$$

Dacă vectorul deplasare $\mathbf{u}$ căutat este cu rotațional nul, (46) se reduce la

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (47)$$

care implică

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

și, prin urmare, $\mathbf{f}$ derivă dintr-un potențial, adică

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} \phi.$$

Ecuația (47) devine în acest caz

$$\operatorname{grad}((\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}) - \operatorname{grad} \phi = \mathbf{0},$$

ecuație ce admite următoarea integrală primă

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u} - \phi = \text{const.},$$

ceea ce în general simplifică căutarea lui $\mathbf{u}$.

Ecuatiile Beltrami-Michell. Contrar acțiunii anterioare, de eliminare a tensiunilor în vederea determinării deplasărilor, ne propunem acum să cautăm direct tensorul tensiune. Tensorul tensiune trebuie să satisfacă ecuațiile de mișcare (sau de echilibru) și condițiile la limită în tensiuni. Unui astfel de tensor tensiune, (σ_{ij}) , îi putem asocia un tensor $\mathbf{e}$ de componente

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\delta_{ij}. \quad (48)$$

Acest tensor de ordinul 2, $\mathbf{e} = (e_{ij})$, este un tensor al deformațiilor liniarizate numai dacă îi putem asocia un vector deplasare $\mathbf{u} = (u_i)$ astfel încât

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}). \quad (49)$$

Potrivit condițiilor de compatibilitate Saint-Venant, acest lucru este posibil dacă și numai dacă

$$\epsilon_{ipq}\epsilon_{jrs}e_{pr,qs} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (50)$$

Ne propunem acum să exprimăm aceste condiții de compatibilitate în funcție de tensorul tensiune. Este suficient să înlocuim în (50) e_{ij} prin expresia (48) obținând,

$$\epsilon_{ipq}\epsilon_{jrs}e_{pr,qs} = \frac{1+\nu}{E}\epsilon_{ipq}\epsilon_{jrs}\sigma_{pr,qs} - \frac{\nu}{E}\epsilon_{ipq}\epsilon_{jrs}\sigma_{mn,qs}\delta_{pr}. \quad (51)$$

Deducem astfel *ecuațiile Beltrami-Michell* (*ecuații de compatibilitate în tensiuni*),

$$(1+\nu)\epsilon_{ipq}\epsilon_{jrs}\sigma_{pr,qs} - \nu\epsilon_{ipq}\epsilon_{jrs}\sigma_{mn,qs}\delta_{pr} = 0.$$

Observăm că

$$\begin{aligned} (1+\nu)(\sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{il,jk} - \sigma_{jk,il}) = \\ \nu[\sigma_{mm,kl}\delta_{ij} + \sigma_{mm,ij}\delta_{kl} - \sigma_{mm,jk}\delta_{il} - \sigma_{mm,il}\delta_{jk}]. \end{aligned}$$

Dacă $k = l$, atunci,

$$\begin{aligned} (1+\nu)(\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik}) = \\ \nu[\sigma_{mm,kk}\delta_{ij} + \sigma_{mm,ij}\delta_{kk} - \sigma_{mm,jk}\delta_{ik} - \sigma_{mm,ik}\delta_{jk}] \end{aligned}$$

iar de aici, deducem

$$(1+\nu)[\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik}] = \nu[\sigma_{mm,kk}\delta_{ij} + \sigma_{mm,ij}].$$

Utilizând ecuațiile de echilibru, obținem

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + f_{i,j} + f_{j,i} = \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{mm,kk}\delta_{ij}$$

sau, echivalent

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\Delta\sigma_{mm}\delta_{ij} = -(f_{i,j} + f_{j,i}).$$

Curs 10

Modele simplificate

Modelul deformațiilor plane. Dacă într-un corp elastic, omogen și izotrop, de formă cilindrică, a se vedea Figura 3.8, cu generatoarele paralele cu axa Ox_3 , vectorul deplasare are componentele de următoarea formă,

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0,$$

atunci, tensorul deformațiilor infinitezimale are următoarele componente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = 0, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Tensorul $\boldsymbol{\varepsilon}$ de componente (1) se numește *tensorul deformațiilor plane*. Pentru materiale elastice, omogene și izotrope, tensorul tensiune Cauchy are următoarea formă,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

unde $\sigma_{\alpha\beta} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$. Cum

$$0 = \varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\delta_{33},$$

deducem

$$(1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0,$$

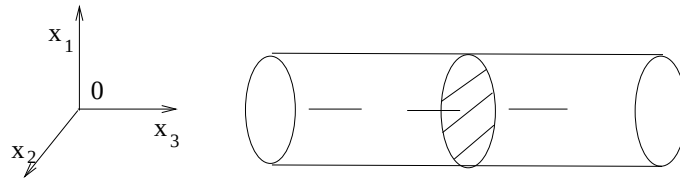


FIGURA 17. Modelul plan

iar de aici

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (2)$$

Fie Ω o secțiune dreaptă oarecare a lui $\mathcal{B}$. Problema în acest caz revine la a rezolva o problemă de elasticitate bidimensională

$$(P_d) : \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0 & \text{în } \Omega \subset \mathbb{R}^2 & \alpha, \beta \in \{1, 2\} \\ \sigma_{\alpha\beta} = \lambda \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} & \text{în } \Omega & \alpha, \beta \in \{1, 2\} \\ \text{condiții la limită} & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Necunoscutele acestei probleme sunt:

$$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, u_1, u_2. \quad (3)$$

După rezolvarea problemei P_d , σ_{33} se determină, folosind (2).

Modelul tensiunilor plane. Prin definiție, un tensor cartezian de ordin doi se numește *câmp de tensiuni plane* dacă are forma următoare

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Admițând că lucrăm cu un corp liniar elastic și izotrop, utilizând legea lui Hooke,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (4)$$

$$0 = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13}, \quad (5)$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}. \quad (6)$$

Din (6) rezultă

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (7)$$

Utilizând (7) putem rescrie (4) astfel

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda^* \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (8)$$

unde

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

În acest caz problema la limită se scrie astfel.

$$(P_t) : \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0 & \text{în } \Omega \\ \sigma_{\alpha\beta} = \lambda^* \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} & \text{în } \Omega \\ \text{condiții la limită} & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

iar ε_{33} se determină cu (7).

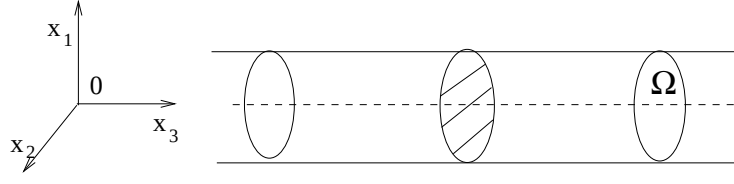


FIGURA 18. Modelul antiplan

Remarca 1. Din punct de vedere matematic, problemele de tensiuni plane și cele de deformății plane sunt de aceeași natură. De aceea, în Capitolul 4, vom înțelege prin *problemă plană* următoarea problemă la limită

$$(P) : \begin{cases} \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{în } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{în } \Omega \\ \text{condiții la limită} & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

fără a mai face distincție între cazul deformațiilor plane și cel al tensiunilor plane. Odată determinată soluția problemei (P), $(u_1, u_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22})$, în cazul deformațiilor plane σ_{33} se determină cu (2) iar în cazul tensiunilor plane ε_{33} se determină cu (7.)

Modelul antiplan. Fie un corp care ocupă un domeniu cilindric $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$, raportat la un sistem cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$; a se vedea Figura 3.9. Cosiderăm că generatoarele sunt paralele cu axa Ox_3 și vom nota prin Ω domeniul mărginit al lui $\mathbb{R}^2$ care reprezintă secțiunea transversală a cilindrului. Presupunem că cilindrul este suficient de lung pentru a putea neglija efectul forțelor aplicate la capete; astfel putem considera $\mathcal{B} = \Omega \times (-\infty, \infty)$. Fie $\Gamma = \partial\Omega$. Presupunem că frontiera Γ este netedă și considerăm o partiție în trei zone măsurabile Γ_1, Γ_2 și Γ_3 , astfel încât $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$. Notăm cu $\boldsymbol{\nu}$ versorul normalei exterioare la Γ . Studiem starea de deformăție a corpului material datorată forțelor volumice de densitate $\mathbf{f}_0$ și forțelor de tracțiune de densitate $\mathbf{f}_2$, știind că pe $\Gamma_1 \times (-\infty, \infty)$ cilindrul este încastrat într-o structură fixă. Admitem ipoteza micilor deformății și presupunem că densitatea forțelor volumice și densitatea tracțiunilor au următoarea formă particulară.

$$\mathbf{f}_0 = (0, 0, f_0) \quad \text{cu } f_0 = f_0(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_2 = (0, 0, f_2) \quad \text{cu } f_2 = f_2(x_1, x_2) : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (10)$$

Admițând această încărcare particulară, vectorul deplasare este de forma

$$\mathbf{u} = (0, 0, u) \quad \text{cu } u = u(x_1, x_2, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (11)$$

astfel că, tensorul deformațiilor infinitezimale are următoarea expresie

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_{,2} \\ \frac{1}{2}u_{,1} & \frac{1}{2}u_{,2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Folosind legea constitutivă a lui Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon},$$

ecuațiile de mișcare ale lui Cauchy se reduc la următoarea ecuație scalară,

$$\operatorname{div}(\mu(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) + f_0(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x})\ddot{u}(\mathbf{x}) \quad \text{în } \Omega. \quad (13)$$

Dacă materialul este omogen, atunci μ este o constantă strict pozitivă și ecuația (13) se rescrie în cazul staționar astfel,

$$\mu\Delta u(\mathbf{x}) + f_0(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x})\ddot{u}(\mathbf{x}) \quad \text{în } \Omega.$$

Deoarece cilindrul este încastrat pe $\Gamma_1 \times (-\infty, +\infty)$, vectorul deplasare se anulează aici. De asemenea, (11) implică

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1. \quad (14)$$

Cât privește versorul normalei exterioare, în contextul antiplan el este de următoarea formă,

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, 0) \quad \text{cu } \nu_i = \nu_i(x_1, x_2) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Deducem că pentru materiale liniar elastice și izotrope,

$$\sigma_\nu = 0$$

și

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = (0, 0, \mu \frac{\partial u}{\partial \nu}),$$

unde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$. Prin urmare, condiția la limită în tensiuni se reduce la

$$\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{pe } \Gamma_2.$$

Curs 11

Tematica: probleme clasice in elasticitate (I)

Comprimarea uniformă

Cadrul fizic (Solid elastic supus la presiune hidrostatică) Fie un corp liniar elastic, omogen și izotrop, care ocupă o regiune Ω , raportat la un sistem cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$, a se vedea Figura 4.1. Corpul este introdus într-un gaz având presiunea constantă p . Admitem că forțele volumice sunt neglijabile. Suntem interesați să determinăm vectorul deplasare, tensorul tensiune și variația relativă a volumului.

Modelare matematică prin E.D.P. Deoarece presiunea gazului este constantă, perturbațiile exterioare care acționează asupra solidului sunt independente de timp. Astfel, deplasările, deformațiile și tensiunile sunt funcții independente de timp:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}).$$

În acest caz (elastostatic), componentele vectorului deplasare u_i , componentele tensorului deformațiilor infinitezimale ε_{ij} și componentele tensorului tensiune σ_{ij} ,

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_m) = u_i(\mathbf{x}) & \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{ij}(x_m) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) & \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

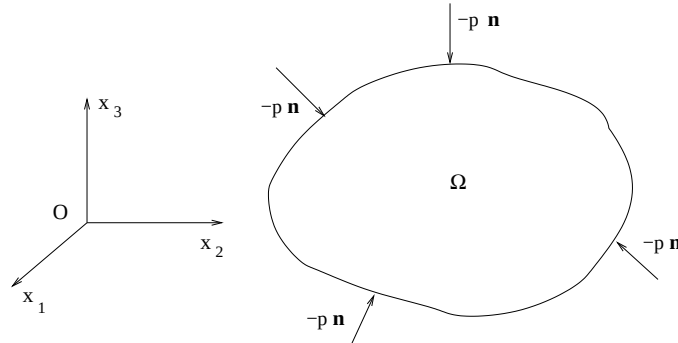


FIGURA 19. Comprimarea uniformă

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}(x_m) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

satisfac ecuațiile următoare:

- ecuațiile de echilibru ale lui Cauchy

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \text{în } \Omega,$$

- ecuațiile geometrice

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad \text{în } \Omega,$$

unde $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$;

- legea de comportament pentru materiale liniar elastice, omogene și izotrope (legea lui Hooke)

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad \text{în } \Omega,$$

unde $\lambda > 0$ și $\mu > 0$ sunt două constante de material;

- condiții la limită în tracțiuni

$$\sigma_{ij} \nu_j = -p \nu_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \text{pe } \partial\Omega.$$

Rezumând, avem următoarea problemă mecanică:

PROBLEMA 1. *Să se determine $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ astfel încât:*

$$\begin{aligned} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0}, & \text{în } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) & \text{în } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_3 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, & \text{în } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= -p \mathbf{n}, & \text{pe } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Fie $\boldsymbol{\sigma}$ tensorul de componente

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad \text{în } \Omega. \tag{2}$$

Evident, pentru $\boldsymbol{\sigma}$ dat în (2), condițiile la limită descrise de relația a patra a lui (1) sunt verificate. De asemenea, prima relație din (1) se verifică.

Din a treia relație a lui (1), deducem

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij},$$

deoarece $\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = -3p$. Așadar, tensorul $\boldsymbol{\varepsilon}$ este un tensor sferic și constant,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \mathbf{I}_3,$$

unde $\mathbf{I}_3$ este tensorul unitate. Evident, relațiile de compatibilitate Saint-Venant sunt satisfăcute în această situație.

Componentele vectorului deplasare sunt:

$$u_i = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}x_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad (3)$$

neglijând deplasarea rigidă infinitezimală. Într-adevăr:

$$\begin{cases} u_{1,1} = -\frac{p}{3\lambda+2\mu} \Rightarrow u_1 = -\frac{p}{3\lambda+2\mu}x_1 + f_1(x_2, x_3); \\ u_{2,2} = -\frac{p}{3\lambda+2\mu} \Rightarrow u_2 = -\frac{p}{3\lambda+2\mu}x_2 + f_2(x_1, x_3); \\ u_{3,3} = -\frac{p}{3\lambda+2\mu} \Rightarrow u_3 = -\frac{p}{3\lambda+2\mu}x_3 + f_3(x_1, x_2), \end{cases}$$

și de aici,

$$\begin{cases} u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_1} = 0; \\ u_{1,3} + u_{3,1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0; \\ u_{2,3} + u_{3,2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Mai mult,

$$\frac{\partial^2 f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2^2} = 0 \Rightarrow f_1(x_2, x_3) = a_1(x_3)x_2 + b_1(x_3);$$

$$\frac{\partial^2 f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 0 \Rightarrow f_3(x_1, x_2) = a_2(x_2)x_1 + b_2(x_2);$$

$$\frac{\partial^2 f_2(x_1, x_3)}{\partial x_3^2} = 0 \Rightarrow f_2(x_1, x_3) = a_3(x_1)x_3 + b_3(x_1);$$

$$\frac{\partial^2 f_1(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = 0 \Rightarrow f_1(x_2, x_3) = c_1(x_2)x_3 + d_1(x_2);$$

$$\frac{\partial^2 f_2(x_1, x_3)}{\partial x_1^2} = 0 \Rightarrow f_2(x_1, x_3) = c_2(x_3)x_1 + d_2(x_3);$$

$$\frac{\partial^2 f_3(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0 \Rightarrow f_3(x_1, x_2) = c_3(x_1)x_2 + d_3(x_1);$$

$$\frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} = a'_1(x_3)x_2 + b'_1(x_3);$$

$$0 = \frac{\partial^2 f_1(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = a''_1(x_3)x_2 + b''_1(x_3).$$

Așadar, pentru oricare x_2 ,

$$a''_1(x_3)x_2 + b''_1(x_3) = 0. \quad (5)$$

Din (5) deducem

$$a_1''(x_3) = 0; \quad b_1''(x_3) = 0$$

astfel că

$$a_1(x_3) = \alpha_1 x_3 + \beta_1, \quad b_1(x_3) = \gamma_1 x_3 + \delta_1.$$

Deducem așadar,

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} x_1 + \alpha_1 x_2 x_3 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1. \quad (6)$$

Prin permutări circulare ale indicilor găsim:

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} x_2 + \alpha_2 x_3 x_1 + \beta_2 x_3 + \gamma_2 x_1 + \delta_2, \quad (7)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} x_3 + \alpha_3 x_1 x_2 + \beta_3 x_1 + \gamma_3 x_2 + \delta_3. \quad (8)$$

În aceste relații, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ sunt constante arbitrare.

Funcțiile (6)-(8) trebuie să satisfacă (4). Rezultă așadar

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_3 + \beta_1 + \alpha_2 x_3 + \gamma_2 &= 0 & \forall x_3, \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 + \alpha_3 x_1 + \gamma_3 &= 0 & \forall x_1, \\ \alpha_3 x_2 + \beta_3 + \alpha_1 x_2 + \gamma_1 &= 0 & \forall x_2, \end{aligned}$$

și de aici,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \beta_1 + \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \beta_2 + \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 + \alpha_1 = 0 \\ \beta_3 + \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Prin urmare, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Introducem notațiile

$$\gamma_1 = \omega_2, \quad \gamma_2 = \omega_3, \quad \gamma_3 = \omega_1.$$

Cu aceste notații,

$$u_1 = \frac{-p}{3\lambda + 2\mu} x_1 + b_1 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2$$

$$u_2 = \frac{-p}{3\lambda + 2\mu} x_2 + b_2 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3$$

$$u_3 = \frac{-p}{3\lambda + 2\mu} x_3 + b_3 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1,$$

sau, echivalent

$$\mathbf{u} = \frac{-p}{3\lambda + 2\mu} \mathbf{x} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

Neglijând deplasarea rigidă infinitezimală (care nu modifică nici tensorul deformațiilor infinitezimale $\boldsymbol{\varepsilon}$, nici tensorul tensiune $\boldsymbol{\sigma}$) obținem formula anunțată pe componente în (3).

Să introducem notația

$$3K = 3\lambda + 2\mu \quad (9)$$

unde constanta K se numește *modulul de rigiditate la comprimare*. Semnificația fizică pentru modulul de rigiditate la comprimare K apare imediat dacă calculăm variația relativă a volumului,

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \operatorname{div} \mathbf{u} = u_{k,k} = \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{p}{K}. \quad (10)$$

Relația (10) arată că pentru o presiune p dată, variația relativă a volumului este invers proporțională cu modulul de rigiditate la comprimare K . În plus, remarcăm că modulul K are dimensiunea unei presiuni. Experimental se poate observa că o presiune externă ($p > 0$) asupra unui solid deformabil antrenează o micșorare a volumului corpului, ceea ce matematic implică

$$3\lambda + 2\mu > 0.$$

Compresibilitatea materialului se măsoară prin $\frac{1}{K}$: materialul este cu atât mai compresibil cu cât K este mai mic. Invers, un material este mai puțin compresibil cu cât K este mai mare. Un material incompresibil este un material limită, corespunzător cazului $K \rightarrow \infty$.

Observațiile experimentale au condus la următoarele inegalități ce indică pozitivitatea constantelor lui Lamé

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0. \quad (11)$$

De aici rezultă o consecință importantă pentru energia de deformație: inegalitățile (11) implică faptul că energia de deformație e este o formă pătratică pozitiv definită (în raport cu componentele tensorului deformațiilor infinitezimale $\boldsymbol{\varepsilon}$). Într-adevăr, cum energia de deformație este

$$e = \frac{1}{2\rho_0} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

utilizând legea lui Hooke,

$$\sigma_{ij} = \lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

deducem

$$e = \frac{1}{2\rho_0} [\lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + 2\mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)].$$

De aici rezultă imediat

$$e \geq \frac{\mu}{\rho_0} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij},$$

unde $\mu, \rho_0 > 0$, deci e este formă pătratică pozitiv definită.

Pornind de la acest rezultat bazat pe observații experimentale vom formula o ipoteză pentru materiale liniar elastice, dar nu neapărat omogene sau izotrope.

Considerând un material liniar elastic, al cărui comportament este modelat prin legea constitutivă

$$\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh} \varepsilon_{kh}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

energia de deformare are expresia următoare

$$\rho_0 e = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ijkh} \varepsilon_{kh} \varepsilon_{ij}.$$

În teoria clasică a elasticității se admite ipoteza că energia de deformare e este formă pătratică pozitiv definită, i.e.,

$$\exists \alpha_0 > 0 \quad \text{a.î.} \quad \mathcal{E}_{ijkh} \varepsilon_{kh} \varepsilon_{ij} \geq \alpha_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^3.$$

Curs 12

Tematica: probleme clasice in elastostatica (II)

Tracțiunea simplă

Cadrul fizic. Fie o grindă cilindrică de lungime L limitată de secțiunile drepte Γ_0 și Γ_1 ca în Figura 4.2. Raportăm grinda la un sistem cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$ astfel încât Γ_0 este în planul $x_1 = 0$ iar Γ_1 este în planul $x_1 = L$. Grinda este supusă unor forțe de tracțiune uniform repartizate, $(F, 0, 0)$ pe Γ_1 și $(-F, 0, 0)$ pe Γ_0 , paralele cu axa cilindrului.

Forțele volumice sunt neglijabile iar suprafața laterală Γ_l a cilindrului nu este supusă nici unei forțe. Suntem interesați să determinăm vectorul deplasare și tensorul tensiune.

Modelare matematică prin E.D.P. Perturbațiile exterioare fiind independente de timp, problema mecanică se traduce matematic prin următoarea problemă elastostatică, admitând că grinda este liniar elastică, omogenă și izotropă.

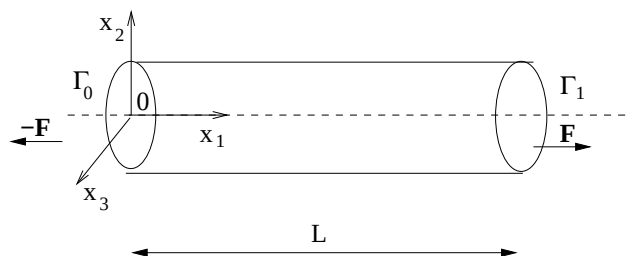


FIGURA 20. Tracțiunea simplă

PROBLEMA 2. Să se determine $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ și $\boldsymbol{\sigma} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$ astfel încât

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_3 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \quad \text{pe } \Gamma_l \quad (4)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_1 = F, (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_2 = 0, (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_3 = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \quad (5)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_1 = -F, (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_2 = 0, (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu})_3 = 0 \quad \text{pe } \Gamma_0. \quad (6)$$

Deoarece $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = (1, 0, 0)$ pe Γ_1 , din (5) deducem

$$\sigma_{11} = F, \quad \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1. \quad (7)$$

De asemenea, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = (-1, 0, 0)$ pe Γ_0 , și prin urmare, (6) implică

$$\sigma_{11} = F, \quad \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 \quad \text{pe } \Gamma_0. \quad (8)$$

În plus, pe Γ_l ,

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = (0, \nu_2(x_1, x_2), \nu_3(x_2, x_3)).$$

Prin urmare, din (4), deducem

$$\sigma_{i2}\nu_2 + \sigma_{i3}\nu_3 = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \quad (9)$$

Ecuatia (1) reprezintă ecuația de echilibru în ipoteza că forțele volumice sunt neglijabile; relația (2) este legea de comportament pentru materiale liniar elastice, omogene și izotrope; ecuația vectorială (3) este ecuația geometrică iar relațiile (4)-(6) sunt condițiile la limită.

Fie tensorul $\boldsymbol{\sigma}$ având următoarele componente,

$$\sigma_{11} = F \quad \sigma_{21} = \sigma_{31} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0. \quad (10)$$

Evident acest tensor verifică (1) și (4)-(6). Utilizând (10), (2) se scrie astfel:

$$F = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{11}, \quad (11)$$

$$0 = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{22}, \quad (12)$$

$$0 = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \varepsilon_{33}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0. \quad (14)$$

Din (11)-(13) deducem

$$F = 3\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon},$$

adică

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{F}{3\lambda + 2\mu}. \quad (15)$$

Din (15) și (11) obținem

$$\varepsilon_{11} = \frac{F}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) = \frac{F(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad (16)$$

Utilizând (12) și (13) avem

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda F}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad (17)$$

Așadar, tensorul deformațiilor infinitezimale este de forma următoare

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}F & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}F & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}F \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Notăm pe de o parte faptul că $\boldsymbol{\varepsilon}$ este în acest caz un tensor diagonal și prin urmare direcțiile principale vor fi cele ale axelor de coordonate. Pe de altă parte, $\boldsymbol{\varepsilon}$ este în acest caz un tensor constant, și astfel condițiile de compatibilitate Saint-Venant Volterra vor fi evident satisfacute.

Pentru a deduce componentele vectorului deplasare vom integra sistemul următor de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{cases} u_{1,1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}F \\ u_{2,2} = u_{3,3} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}F \\ u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \\ u_{1,3} + u_{3,1} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Neglijând deplasările rigide infinitezimale obținem

$$u_1 = \varepsilon_{11}x_1, \quad u_2 = \varepsilon_{22}x_2, \quad u_3 = \varepsilon_{33}x_3. \quad (20)$$

Observăm că planul $x_1 = 0$ rămâne invariant ca și punctele axei Ox_1 .

În consecință am reușit să verificăm Problema 2 cu ajutorul

- câmpului deplasare dat în (20);
- tensorului deformațiilor infinitezimale dat în (18);
- tensorului tensiune Cauchy dat în (10).

Analiza soluției obținute. Modulul lui Young. Coeficientul lui Poisson. Alungirea ΔL a barei sub efectul forțelor de tracțiune este dată prin deplasarea punctului $(L, 0, 0)$.

$$\Delta L = \varepsilon_{11}L = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}FL, \quad (21)$$

$$(x_1 - X_1 = u_1(X, t) = \Delta L = \varepsilon_{11}X_1 = \varepsilon_{11}L),$$

astfel că alungirea relativă este

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F = \varepsilon_{11}. \quad (22)$$

Introducem notația

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (23)$$

unde E este modulul de rigiditate la alungire, numit *modulul lui Young*. Pentru F dat, alungirea relativă

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_{11} = \frac{F}{E} \quad (24)$$

este cu atât mai mică cu cât E este mai mare. Modulul lui Young este un coeficient de material care se măsoară în laborator pe mașina de tracțiune și care are dimensiunea unei forțe pe unitatea de suprafață (i.e., a unei tensiuni sau a unei presiuni), N/m^2 . Experimental s-a observat că

- $E > 0$,
- dacă bara se alungește ($F > 0$), dimensiunile sale transversale scad

$$x_2 - X_2 = u_2(\mathbf{X}, t) = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F x_2, \quad (25)$$

$$x_3 - X_3 = u_3(\mathbf{X}, t) = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F x_3. \quad (26)$$

Fie ν astfel încât

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}. \quad (27)$$

Deducem că

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (28)$$

Constanta ν este un coeficient de material cunoscut sub numele de *coeficientul lui Poisson*.

Dacă l este diametrul secțiunii transversale a grinzii înainte de deformație iar $l + \Delta l$ este diametrul secțiunii transversale a grinzii după deformație, putem scrie

$$\frac{\Delta l}{l} = -\nu \frac{\Delta L}{L}, \quad (29)$$

de unde putem specifica semnificația fizică a coeficientului lui Poisson: *este un coeficient fără dimensiune iar experimental s-a dovedit că*

$$\nu > 0. \quad (30)$$

Au loc așadar următoarele inegalități:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} > 0, \quad \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} > 0.$$

Știam însă că $3K = 3\lambda + 2\mu > 0$. Prin urmare,

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0$$

și, deducem astfel

$$0 < \nu < \frac{1}{2} \quad (1 - 2\nu = \frac{\mu}{\lambda + \mu} > 0). \quad (31)$$

Putem exprima în acest moment *modulul de rigiditate la compresiune* precum și *constantele lui Lamé*, λ și μ , în funcție de constantele de material determinate experimental: modulul lui Young E și coeficientul lui Poisson ν , astfel,

$$\begin{aligned} 3K = 3\lambda + 2\mu &= \frac{E}{1 - 2\nu}, \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned}$$

Legea lui Hooke inversată, poate fi scrisă cu ajutorul lui E și ν astfel,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_3,$$

sau pe componente

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Curs 13

Torsiunea unui arbore cilindric

Cadrul fizic Considerăm un arbore cilindric care ocupă un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Cilindrul este de lungime L și vom nota prin ω o secțiune transversală arbitrară a cilindrului ($\omega \subset \mathbb{R}^2$ domeniu simplu conex); a se vedea Figura 4.3. Presupunem că baza Γ_0 este fixă și impunem bazei Γ_1 o torsiune αL , unde $\alpha > 0$. Presupunem că densitatea forțelor masice este neglijabilă, suprafața laterală Γ_{lat} este liberă de constrângeri, iar pe bazele Γ_0 și Γ_1 impunem eforturi normale nule.

Modelare matematică prin E.D.P. Admițând că cilindrul este liniar elastic, omogen și izotrop, problema torsiunii se formulează astfel:

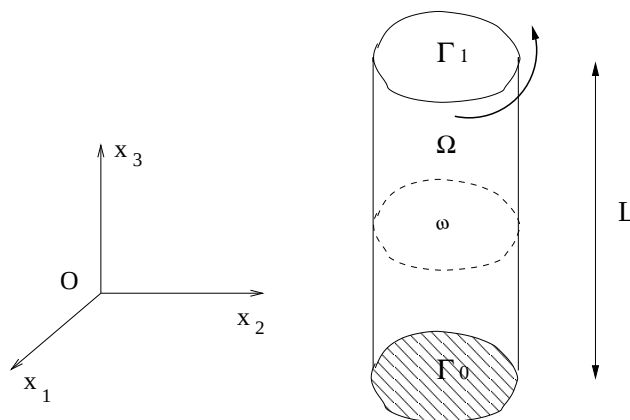


FIGURA 21. Cadrul fizic

PROBLEMA 3. Să se determine $u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ și $\sigma_{ij} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, astfel încât,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \mathbf{0}, & \text{în } \Omega \\ \sigma_{ij} &= \lambda(\varepsilon_{kk})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, & \text{în } \Omega \\ \sigma_{ij}\nu_j &= 0, & \text{pe } \Gamma_{lat} \\ \sigma_{3j}\nu_j &= 0, & \text{pe } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \\ u_1 &= u_2 = 0, & \text{pe } \Gamma_0 \\ u_1 &= -\alpha Lx_2, & \text{pe } \Gamma_1 \\ u_2 &= \alpha Lx_1, & \text{pe } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Consider vectorul $\mathbf{u}$ de componente

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha x_3 x_2 \\ u_2 = \alpha x_3 x_1 \\ u_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2). \end{cases} \quad (1)$$

În acest caz,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}) \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}) \\ \frac{\alpha}{2}(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}) & \frac{\alpha}{2}(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Cilindrul fiind un solid omogen, elastic și izotrop putem găsi cu ușurință pentru tensorul $\boldsymbol{\sigma}$ următoarea expresie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\mu(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}) \\ 0 & 0 & \alpha\mu(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}) \\ \alpha\mu(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}) & \alpha\mu(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ecuatiile de echilibru conduc în acest caz la următoarea ecuație scalară

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{în } \omega.$$

Pe Γ_{lat} avem $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1(x_1, x_2), \nu_2(x_1, x_2), 0)$. Pentru $i = 1$,

$$\sigma_{11}\nu_1 + \sigma_{12}\nu_2 + \sigma_{13}\nu_3 = 0,$$

pentru $i = 2$,

$$\sigma_{21}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2 + \sigma_{23}\nu_3 = 0,$$

pentru $i = 3$,

$$\sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3 = 0.$$

Deci,

$$\mu\alpha(-x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1})\nu_1 + \mu\alpha(x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2})\nu_2 = 0, \quad \text{pe } \partial\omega$$

și,

$$\mu\alpha(x_1\nu_2 - x_2\nu_1) + \mu\alpha(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\nu_2) = 0 \quad \text{pe } \partial\omega.$$

Notăm că

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\nu_2 = \nabla\varphi \cdot (\nu_1, \nu_2) = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}.$$

Astfel,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = x_2\nu_1 - x_1\nu_2, \quad \text{pe } \partial\omega.$$

Deoarece pe Γ_0 avem $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, -1)$, atunci

$$\sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3 = 0$$

echivalent cu $0 = 0$.

De asemenea, pe Γ_1 avem $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)$. Atunci,

$$\sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3 = 0$$

echivalent cu $0 = 0$.

Prin urmare, funcția φ este soluție a problemei următoare.

PROBLEMA 4. Să se determine $\varphi : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$(N) \begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{în } \omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = x_2\nu_1 - x_1\nu_2 & \text{pe } \partial\omega. \end{cases}$$

Această problemă are soluție unică până la o constantă aditivă.

Așadar, soluția Problemei 3 este dată prin (1) și (2), unde φ este soluția unică până la o constantă aditivă a Problemei 4.

În cele ce urmează suntem interesați să determinăm zona primelor puncte ale cilindrului în care materialul încetează să mai fie elastic. Acest studiu necesită câteva preliminarii.

Tensiuni normale principale. Direcții principale. Fie $\boldsymbol{\sigma}$ tensorul tensiune al lui Cauchy. Cum $\boldsymbol{\sigma}$ este tensor de ordinul doi simetric, el are trei valori proprii reale,

$$\sigma_I \leq \sigma_{II} \leq \sigma_{III}.$$

Valorile σ_j , $j \in \{I, II, III\}$, se numesc *tensiuni normale principale*.

Fie $\boldsymbol{\nu}_j$, $j \in \{I, II, III\}$, vectorii proprii corespunzători, ortogonali doi câte doi. Aceștia se numesc *direcții principale de tensiune*.

Într-un reper local cu axe de direcții $\boldsymbol{\nu}_j$, $\boldsymbol{\sigma}$ are următoarea reprezentare

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}.$$

Cercurile lui Mohr. Forțe de forfecare. Fie $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ astfel încât $|\mathbf{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = 1$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ fiind baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

Să considerăm vectorul $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, unde

$$F_1 = \sigma_I n_1, \quad F_2 = \sigma_{II} n_2, \quad F_3 = \sigma_{III} n_3.$$

Acest vector se descompune astfel : $\mathbf{F} = F_N \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}_T$, unde $F_N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Avem $|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = (F_N \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}_T) \cdot (F_N \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}_T) = |F_N|^2 + |\mathbf{F}_T|^2$. Prin urmare,

$$|\mathbf{F}_T|^2 = |\mathbf{F}|^2 - |F_N|^2.$$

În cele ce urmează studiem cum variază $|\mathbf{F}_T|$ în funcție de F_N , atunci când $\mathbf{n}$ variază. Pentru început putem scrie

$$\begin{cases} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1; \\ \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 = F_N; \\ \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 = |\mathbf{F}_T|^2 + F_N^2. \end{cases}$$

Fie polinomul $P(x) = x^2 + ax + b$. Avem

$$\begin{aligned} & \sigma_I^2 n_1^2 + a \sigma_I n_1^2 + b n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + a \sigma_{II} n_2^2 + b n_2^2 \\ & + \sigma_{III}^2 n_3^2 + a \sigma_{III} n_3^2 + b n_3^2 \\ & = |\mathbf{F}_T|^2 + F_N^2 + a F_N + b, \end{aligned}$$

și de aici

$$n_1^2 P(\sigma_I) + n_2^2 P(\sigma_{II}) + n_3^2 P(\sigma_{III}) = |\mathbf{F}_T|^2 + F_N^2 + a F_N + b.$$

Fie $P(x) = (x - \sigma_I)(x - \sigma_{II})$. Atunci,

$$P(\sigma_I) = 0 \text{ și } P(\sigma_{II}) = 0$$

și

$$n_3^2 (\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II}) = |\mathbf{F}_T|^2 + F_N^2 - (\sigma_I + \sigma_{II}) F_N + \sigma_I \sigma_{II}.$$

Fie $P(x) = (x - \sigma_{II})(x - \sigma_{III})$. În acest caz,

$$P(\sigma_{II}) = 0 \text{ și } P(\sigma_{III}) = 0$$

și

$$n_1^2 (\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) = |\mathbf{F}_T|^2 + F_N^2 - (\sigma_{II} + \sigma_{III}) F_N + \sigma_{II} \sigma_{III}.$$

Fie $P(x) = (x - \sigma_I)(x - \sigma_{III})$. Avem acum

$$P(\sigma_I) = 0 \text{ și } P(\sigma_{III}) = 0$$

și

$$n_2^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II}) = |\mathbf{F}_T|^2 + F_N^2 - (\sigma_I + \sigma_{III})F_N + \sigma_I\sigma_{III}.$$

Așadar,

$$n_3^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II}) = |\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_I)(F_N - \sigma_{II});$$

$$n_1^2(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_I - \sigma_{III}) = |\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_{II})(F_N - \sigma_{III});$$

$$n_2^2(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III}) = |\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_I)(F_N - \sigma_{III}).$$

Cazul 1. Dacă $\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}$, atunci

$$n_3^2 = \frac{|\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_I)(F_N - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_I)},$$

$$n_1^2 = \frac{|\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_{II})(F_N - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})},$$

$$n_2^2 = \frac{|\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_I)(F_N - \sigma_{III})}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})},$$

și de aici,

$$|\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_I)(F_N - \sigma_{II}) \geq 0,$$

$$|\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_{II})(F_N - \sigma_{III}) \geq 0,$$

$$|\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_I)(F_N - \sigma_{III}) \geq 0.$$

Dacă notăm $|\mathbf{F}_T| = Y$ și $F_N = X$ atunci

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 + Y^2 &\geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_I}{2}\right)^2; \\ \left(X - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + Y^2 &\geq \left(\frac{\sigma_{III} - \sigma_{II}}{2}\right)^2; \\ \left(X - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + Y^2 &\geq \left(\frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Y are valoare maximă pentru $X = \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}$.

$$|\mathbf{F}_T|_{max} := \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}$$

se numește *forfecare maximală*. Forfecarea maximală este valoarea la care se produc rupturi în material.

Cazul 2. Dacă $\sigma_I = \sigma_{II} \leq \sigma_{III}$, atunci

$$n_3^2 = \frac{|\mathbf{F}_T|^2 + (F_N - \sigma_I)^2}{(\sigma_{III} - \sigma_I)^2}.$$

Prin urmare, în acest caz $Y^2 + (X - \sigma_I)^2 \geq 0$, adică (X, Y) aparține părții pozitive a discului centrat în $(\frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}, 0)$. Deducem imediat că Y are valoare maximă pentru $X = \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}$.

Cazul 3. $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ În acest caz avem $\sigma_I^2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = F_N^2 + |\mathbf{F}_T|^2$ și $\sigma_I(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = F_N$, astfel că $\sigma_I^2 = F_N^2 + |\mathbf{F}_T|^2$ și $\sigma_I = F_N$. Din ultimele două relații rezultă că $|\mathbf{F}_T| = 0$. Deci, $X = \sigma_I$ și $Y = 0$. Valoarea maximă a lui Y este $0 = \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}$.

Calculul forfecării maxime. Revenim acum asupra Problemei 3. Cum $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = 0$,

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{în } \omega.$$

Deci,

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \quad \text{în } \omega.$$

Rezultă că există $\theta = \theta(x_1, x_2)$ astfel încât

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \theta}{\partial x_2},$$

și

$$\sigma_{23} = -\frac{\partial \theta}{\partial x_1}.$$

Așadar,

$$\mu\alpha(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}) = \frac{\partial \theta}{\partial x_2}$$

și

$$\mu\alpha(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}) = -\frac{\partial \theta}{\partial x_1}.$$

Deducem că,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} = -\mu\alpha + \mu\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \mu\alpha - \mu\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Deci, pentru φ funcție suficient de regulată,

$$\Delta \theta = -2\mu\alpha, \quad \text{în } \omega.$$

Pe de altă parte,

$$\sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 = 0, \quad \text{pe } \partial\omega$$

sau, echivalent,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\nu_1 - \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\nu_2 = 0, \quad \text{pe } \partial\omega.$$

Fie $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ astfel încât

$$\tau_1 = -\nu_2 \quad \text{și} \quad \tau_2 = \nu_1.$$

Atunci, pe $\partial\omega$ avem

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\tau_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\tau_2 = 0,$$

sau echivalent,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = 0 \quad \text{pe } \partial\omega.$$

Deducem că $\nabla\theta = \mathbf{0}$ pe $\partial\omega$ și prin urmare θ este constant pe $\partial\omega$. Alegem

$$\theta = 0 \quad \text{pe } \partial\omega$$

și considerăm următoarea problemă.

PROBLEMA 5. *Să se determine $\theta : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$(D) \begin{cases} \Delta\theta = -2\mu\alpha & \text{în } \omega \\ \theta = 0 & \text{pe } \partial\omega. \end{cases}$$

Problema 5 are soluție unică. Vom vedea că forța de forfecare maximală

$$|\mathbf{F}_T|_{max} = \frac{\nu_{III} - \nu_I}{2}$$

poate fi exprimată prin intermediul soluției Problemei 5.

Să evaluăm tensiunile normale principale ν_I și ν_{III} .

$$\nu_I = -\sqrt{\nu_{13}^2 + \nu_{23}^2}; \quad \nu_{III} = \sqrt{\nu_{13}^2 + \nu_{23}^2}$$

Prin urmare, forța de forfecare maximală are expresia

$$|\mathbf{F}_T|_{max} = \sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)^2} = |\text{grad } \theta|,$$

unde θ este unica soluție a Problemei 5.

Se știe că $|\text{grad } \theta|$ este funcție subarmonică, a se vedea de exemplu [?]. Conform principiului de maxim pentru funcții subarmonice, deducem că această funcție își atinge maximul pe $\partial\omega$. De aceea, primele puncte în care materialul va înceta să fie elastic sunt situate pe Γ_{lat} .

Curs 14

Tematica: elemente de modelare matematica in mecanica de contact

Conditii de contact; legi de frecare

Prezentam aici cele mai cunoscute conditii de contact.

- *Contact bilateral* [a se vedea de exemplu [10]]

$$u_\nu = 0 \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \quad (1)$$

$$(u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}).$$

- *Contact cu tensiune normala impusa* [a se vedea de exemplu [6, 22]]

$$-\sigma_\nu = F \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \quad (2)$$

unde $\sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}$ iar F este o functie pozitiva data.

- *Contact cu complianta normala* [a se vedea de exemplu [12, 13, 14, 35]]

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g) \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \quad (3)$$

unde p_ν este o functie data cu valori pozitive ce se anuleaza pentru argument negativ.

- *Contact unilateral* [a se vedea de exemplu [27]]

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_3. \quad (4)$$

unde g ("gap") este distanta intre corpul deformabil si fundatia rigida masurata de-a lungul normalei la frontiera corpului deformabil.

In cazul particular $g = 0$, avem

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_3. \quad (5)$$

- *Lege de frecare neglijabila* [a se vedea de exemplu [10]]

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_3. \quad (6)$$

- *Legea lui Coulomb [a se vedea de exemplu [35]]*

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq F_b, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = -F_b \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{if} \quad \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_3, \quad (7)$$

unde $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}$ este deplasarea tangentiala si F_b este "prag de frecare".

- *Legea lui Tresca [a se vedea de exemplu [34, 35]]*

Daca

$$F_b = F_b(\mathbf{x}) \quad (8)$$

in (7) suntem condusi la *legea lui Tresca*.

Modele antiplane in mecanica contactului

- Probleme statice

O problema de contact cu frecare Tresca

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (9)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (10)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (11)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g, \quad \mu \partial_\nu u = -g \frac{u}{|u|} \quad \text{if } u \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (12)$$

O problema de contact cu lege de frecare regularizanta

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u_\rho) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (13)$$

$$u_\rho = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (14)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (15)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho = -g \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + \rho^2}} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (16)$$

O problema de contact cu lege de frecare tip putere

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u_\rho) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (17)$$

$$u_\rho = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (18)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (19)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho = \begin{cases} -g |u_\rho|^{\rho-1} u_\rho & \text{daca } u_\rho \neq 0 \\ 0 & \text{daca } u_\rho = 0 \end{cases} \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (20)$$

O problema de contact cu frecare dependenta de alunecare

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (21)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1, \quad (22)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2, \quad (23)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g(|u|), \quad \mu \partial_\nu u = -g(|u|) \frac{u}{|u|} \quad \text{if } u \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3. \quad (24)$$

- Probleme quasistatice

O problema de contact cu lege de frecare Tresca (dinamic)

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (25)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (26)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (27)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g, \quad \mu \partial_\nu u = -g \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ daca } \dot{u} \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (28)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (29)$$

O problema de contact regularizanta

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u_\rho) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (30)$$

$$u_\rho = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (31)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (32)$$

$$\mu \partial_\nu u_\rho = -g \frac{\dot{u}_\rho}{\sqrt{\dot{u}_\rho^2 + \rho^2}} \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (33)$$

$$u_\rho(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (34)$$

O problema de contact dependenta de alunecare

$$\operatorname{div}(\mu \nabla u) + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (35)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (36)$$

$$\mu \partial_\nu u = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (37)$$

$$|\mu \partial_\nu u| \leq g(|u|), \quad \mu \partial_\nu u = -g(|u|) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \quad \text{daca } \dot{u} \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (38)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (39)$$

Pentru detalii in modelare matematica in mecanica contactului facem trimitere la [34, 35] precum si la bibliografia acestor monografii.

Bibliografie

1. Linda J.S. Allen, An introduction to mathematical biology, Pearson, Prentice Hall, 2007.
2. F. Brauer, C. Castillo-Chavez, Mathematical models in population biology and epidemiology, Springer 2001.
3. J. Beju, E.Sooş, P.P. Teodorescu, Tehnici de calcul vectorial cu aplicații. Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicații, Ed tehnică, Bucuresti, 1977.
4. P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Volume I: Three Dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 20, North-Holland, Amsterdam, 1988.
5. I. Doghri, *Mechanics of Deformable Solids*, Springer, Berlin, 2000.
6. G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
7. M. Fan, M.Y. Li, K. Wang, Global stability of an SEIS epidemic model with recruitment and a varying total population size, *Mathematical Biosciences* 170(2001) 199–208, Elsevier.
8. P. Germain and P. Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1980.
9. M.E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.
10. W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.
11. K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
12. N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.
13. A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engng. Sci.* **26** (1988), 811–832.
14. A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, On friction problems with normal compliance, *Nonlinear Analysis* **13** (1989), 935–955.
15. T.A. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.
16. D. Lazăr, Calcul tensorial în Matematici Clasice și Moderne, Ed tehnică, 1979, Bucuresti, Vol II.
17. J. Legrand, R.F. Grais, P.Y. Bolle, Understanding the dynamics of Ebola epidemics(2007)
18. L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*, Princeton-Hall, Inc, New Jersey, 1969.
19. A. Matei. Modelare matematica in elasticitate. Auxiliar pentru studenti (e-notes)
20. J.D. Murray, Mathematical biology: An introduction. Springer, 2002
21. J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.
22. P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.
23. A. T. Porter, A path-specific approach to SEIR modeling (2012)
24. A. Prodeanu, Modele matematice în epidemiologie. Simulări numerice în MATLAB, Lucrare de Disertatie, UCV 2019, (coordonator Prof.univ.dr. A. Matei).
25. Alfio Quarteroni, Fausto Saleri, Paola Gervasio, Scientific Computing with Matlab and Octave, Springer 2014.
26. A. Quarteroni, F. Saleri, P. Gervasio, Calcul Scientifique, Cours, exercices corrige et illustrations en Matlab et Octave, Springer, 2010.

27. A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.
28. D. Smith, L. Moore, The SIR Model for Spread of Disease- The Differentions (2004)
29. M. Sofonea, Problèmes non-lineaires dans la théorie de l'élasticité, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées a l'Université de Sétif, Algérie, 1993.
30. M. Sofonea, Problèmes Mathématiques en Elasticité et Viscoplasticité, non-lineaires dans la théorie de l'élasticité, Cours de DEA de Mathématiques Appliquées a l'Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand II), Laboratoire de Mathématiques Appliquées et URA-CNRS 1501, 1993.
31. M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics **655**, Springer, Berlin, 2004.
32. M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics **276**, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.
33. M. Sofonea, Problèmes mathématiques en elasticité et en viscoplasticité, CNRS 1501, Laboratoire de Mathématiques appliquées, Université Blaise Pascal Clermont Ferrand, 1993.
34. M. Sofonea, A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Springer, 2009.
35. M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 2012.
36. R. Temam and A. Miranville, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
37. P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, Wiley, Chichester, 2002.
38. "21-124 Modeling with differential equations - CMU Math"
www.math.cmu.edu/~handron/21_124/
39. "Differential Equations in Economics"
u.math.biu.ac.il/~shnider/Course_Notes/ODE-economics-chap1.pdf
40. Modeling with ODE - TAMU Math
www.math.tamu.edu/~phoward/m442/modode.pdf
41. https://en.wikipedia.org/wiki/Epidemic_model
42. https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_model_in_epidemiology
43. [demonstrations.wolfram.com/SIREpidemiologic.Dynamic](http://demonstrations.wolfram.com/SIREpidemiologicDynamic)
44. mysite.science.uottawa.ca/rsmith43/mat4996/Epidemic.pdf