

## **Raport stiintific**

*privind implementarea proiectului in perioada octombrie – decembrie 2011*

**Prin activitatea de documentare si cercetare desfasurata in cadrul proiectului**

*Probleme puternic neliniare in Mecanica Contactului*

*CNCS-UEFISCDI PN-II-RU-TE-2011-3-0223*

*Director proiect: Matei Andaluzia Cristina*

*Contractor: Universitatea din Craiova, strada A.I. Cuza 13, 200585, Craiova, Dolj*

***s-au urmarit obiectivele formulate in propunerea de proiect,***

- ***(obiectiv 1) abordari varitionale alternative in studiul matematic al problemelor de contact;***
- ***(obiectiv 2) proprietati calitative in studiul unor noi modele de contact implicand materiale non-standard,***

***obtinandu-se o serie de rezultate partiale.***

***Mentionam in continuare principalele rezultate obtinute de echipa proiectului***

*Matei Andaluzia Cristina (director proiect)*

*Roventa Ionel (post-doc)*

*Boueanu Maria Magdalena (post-doc)*

***in aceasta prima etapa a proiectului.***

- ***Rezultate partiale in cadrul primului obiectiv***
  - A. S-a studiat o problema la limita care modeleaza contactul (cu frecare dependenta de alunecare) dintre un corp cilindric deformabil si o fundatie rigida, in ipoteza micilor transformari, pentru procese stationare. Un astfel de model s-a studiat anterior prin intermediul inegalitatilor quasi-variationale. Studiul actual propune alternativa urmatoare: studiul variational prin intermediul multiplicatorilor Lagrange duali. Un astfel de studiu implica dificultati majore din punct de vedere matematic deoarece multimea multiplicatorilor Lagrange depinde de solutie.***

***S-a demonstrat existenta si marginirea solutiei slabe in noua abordare variationala pentru modelul propus. In plus, in speranta ca tehnica folosita va servi si altor modele cu semnificatie fizica, pornind de la formularea slaba a modelului mecanic cu multiplicatori Lagrange s-a formulat o problema variationala abstracta mixta care consta dintr-un sistem format dintr-o ecuatie variationala si o inegalitate variationala dupa cum urmeaza :***

$$a(u,v)+b(v,\lambda)=(f,v) \text{ in } X$$

$$b(u,\mu-\lambda)\leq 0 \text{ in } \Lambda(u)$$

unde  $f$  este un element dat in spatiul  $X$  iar  $\Lambda(u)$  este o submultime convexa inchisa a unui spatiu  $Y$ ,  $\Lambda(u)$  continand zeroul spatiului  $Y$ . Necunoscuta problemei este perechea  $(u, \lambda)$ . Utilizand elemente de analiza convexa si o teorema de punct fix pentru aplicatii slab secvential continue, s-a demonstrat existenta si marginirea solutiei problemei abstracte ( in ipoteze adecvate).

*Rezultatele obtinute pot fi cumulate sub titlul A mixed variational problem with solution-dependent convex set and applications in contact mechanics ( autor **Andaluzia Matei**).*

- B.** S-a studiat o problema unilaterala de contact, pentru materiale neliniar elastice, cu operatori elastici posibil multivoci. Legea constitutiva s-a scris prin intermediul subdiferentialei unei functionale proprii, convexe si inferior semicontinue. O astfel de lege constitutiva a permis construirea unui bipotential, utilizand conjugata Fenchel a functionalei constitutive si, de aici, posibilitatea de a da o formulare slaba de tip sistem variational ( format din doua inegalitati variationale ).

S-a demonstrat existenta si unicitatea solutiei slabe sub forma unei perechi formate din vectorul deplasare si tensorul tensiune. De asemenea s-a studiat in ce masura noua abordare variationala prin intermediul bipotentialilor este legata de abordarile variationale anterioare , formularea variationala primara ( abordare variationala in deplasari) si formularea variationala duala (abordare variationala in tensiuni). Mai precis, s-a stabilit ca pentru o clasa de materiale neliniar elastice, daca  $(u, \sigma)$  este solutie slaba in actuala abordare variationala, atunci  $u$  este solutie pentru formularea variationala primara iar  $\sigma$  este solutie pentru formularea variationala duala.

*Aceste rezultate pot fi cumulate sub titlul Weak solutions via bipotentials for unilateral contact problems (autor **Andaluzia Matei**).*

- C.** Studiul mentionat la punctul B a condus la ideea de a scrie o problema variationala abstracta care sa generalizeze formularea variationala corespunzatoare modelului unilateral de contact cat si formulari variationale scrise pentru alte modele mecanice (de exemplu, modelul in deplasari-tractiuni studiat in lucrarea A. Matei and C. Niculescu, Weak solutions via bipotentials in mechanics of deformable solids, J. Math. Anal. Appl., DOI:2011.10.1016/j.jmaa.2010.12.016, 379(1), 15-25, 2011.)

*Problema abstracta propusa este de tipul urmator:*

$$b(v, \sigma)-b(u, \sigma) \geq f(v-u) \text{ in } K$$

$$b(u, \mu)-b(u, \sigma) \geq 0 \quad \text{in } \Lambda$$

unde  $K$  este o submultime convexa si inchisa in spatiul  $X$ , continand zeroul spatiului  $X$ ,  $\Lambda$  este o submultime convexa si inchisa intr-un spatiu  $Y$  continand zeroul spatiului  $Y$  iar  $f$  este un element dat in  $X'$ . Necunoscuta problemei este perechea  $(u, \sigma)$ .

**S-a studiat existenta si unicitatea solutiei.**

**S-a studiat aproximarea solutiei problemei variationale abstracte printr-o strategie inspirata din metode multigrid. In fapt s-au propus algoritmi multigrid si s-a demonstrat convergenta lor.**

**Aceste rezultate pot fi cumulate sub titlul** *Multigrid algorithms for an abstract variational problem arising from mechanics of deformable bodies* (autori **Andaluzia Matei** si **Ionel Roventa**)

**D. In contextul abordarii problemelor de contact prin intermediul inegalitatilor variationale/hemivariationale, abordare care implica in unele situatii teoreme de tip Knaster Kuratowski-Mazurkiewicz, prezinta interes corelarea functiilor Schur-concave cu inegalitati de tip Ky-Fan si Sion, inegalitati strans legate de teorema Knaster Kuratowski-Mazurkiewicz. Utilizarea inegalitatilor de tip Ky-Fan si Sion pentru demonstrarea unor rezultate de existenta si chiar gasirea unor algoritmi iterativi pentru solutiile unor clase de inegalitati variationale a fost evidentiata recent in articolele** *S. Laszlo, Some existence results of solutions for general variational inequalities, Journal of Optimization Theory and Applications, 150 (2011), 425-443* si *X. Qin, L. J. Lin and S. M. Kang, On generalized Ky-Fan inequality and asymptotically strict pseudocontractions in the intermediary sense, Journal of Optimization Theory and Applications, 150 (2011), 553-579.*

**Preocuparile in aceasta directie au condus la o serie de rezultate partiale care pot fi cumulate sub urmatorul titlu:** *A new isoperimetric inequality given by a class of Schur-concave functions; strongly majorization properties and applications related to Schur-convexity* (autor **Ionel Roventa**).

- **Rezultate partiale in cadrul celui de al doilea obiectiv**

**E. S-a studiat o problema la limita care poate modela atat contactul cu frecare dintre un corp deformabil si o fundatie rigida, in context antiplan (corpul deformabil fiind nelinier elastic, comportamentul sau descriindu-se printr-o lege de tip Henky cu exponent variabil) cat si curgerea cu frecare a unui fluid non-newtonian (fluid de tip Carreau sau fluid de tip Ostwald de Waele) intr-un cilindru. Legile constitutive din modelele mecanice supuse studiului au impus ca studiul variational sa se desfasoare in spatii Sobolev cu exponent variabil aplicand rezultate recente in teoria spatiilor Sobolev cu exponent variabil cum ar fi o teorema de densitate si o teorema de urma. S-a demonstrat o inegalitate de tip Poincare in spatii Sobolev cu exponent variabil care a permis inzeestrarea cu o structura convenabila a unui subspatiu inchis a unui spatiu Hilbert. Utilizand acest rezultat preliminar s-a demonstrat existenta si unicitatea solutiei slabe pentru problema la limita propusa prin intermediul unui argument de punct critic.**

**Rezultatele obtinute in acest cadru pot fi cumulate sub titlul** *Nonlinear problems with  $p(\cdot)$ -growth conditions and applications to contact models* (autori **M.M. Boureau**, **A. Matei**, **M. Sofonea**).

**F. Interesul pentru obtinerea de proprietati calitative in studiul unor modele de mecanica contactului pentru materiale non-standard razbate si din studiul realizat in lucrarea**

*I. Andrei, N. Costea, A. Matei, Antiplane shear deformation of piezoelectric bodies in contact with a conductive support, Journal of Global Optimization, DOI: 10.1007/s10898-011-9815-x, FI:1.073, Scor relativ de influenta (revista) 1,19835 (lucrare acceptata spre publicare).*

**In aceasta lucrare s-a studiat un model matematic care descrie contactul cu frecare dintre un corp piezoelectric si un support electric conductiv. Comportamentul materialului este descris**

*printr-o lege constitutive electro-elastica; contactul cu frecare este descris prin intermediul unei legi care a utilizat gradientul generalizat Clarke; conditia electrica pe zona de contact s-a formulat prin intermediul subdiferentialei unei functionale proprii, convexe si inferior semicontinue. S-a scris o formulare variationala pentru modelul propus si s-a demonstrat existenta solutiei slabe utilizand o teorema de punct fix a lui Tarafdar, pentru aplicatii multivoce. De asemenea s-a demonstrat unicitatea solutiei slabe utilizandu-se argumente in teoria inegalitatilor variational-hemivariationale.*

*In rezumat, principalele rezultate care poarta pana in prezent mentiunea proiectului sunt :*

- **Articol acceptat spre publicare**

*Ionica Andrei, Nicusor Costea, **Andaluzia Matei**, Antiplane shear deformation of piezoelectric bodies in contact with a conductive support, Journal of Global Optimization, DOI: 10.1007/s10898-011-9815-x, FI:1.073, Scor relativ de influenta (revista) 1,19835.*

- **Articole in lucru**

***A. Matei, I. Roventa**, Multigrid algorithms for an abstract variational problem arising from mechanics of deformable bodies.*

***A. Matei**, A mixed variational problem with solution-dependent convex set and applications in contact mechanics.*

***M.M. Boureanu, A. Matei, M. Sofonea**, Nonlinear problems with  $p(\cdot)$ -growth conditions and applications to contact models.*

***A. Matei**, Weak solutions via bipotentials for unilateral contact problems.*

***I. Roventa**, A new isoperimetric inequality given by a class of Schur-concave functions.*

***I. Roventa**, Strongly majorization properties and applications related to Schur-convexity.*

Director proiect,

Matei Andaluzia-Cristina