

## **Raport stiintific**

*privind implementarea proiectului*

*" Probleme puternic neliniare in Mecanica Contactului "*

*cod PN-II-RU-TE-2011-3-0223*

*in perioada ianuarie –decembrie 2012*

**Echipa** proiectului ( Andaluzia-Cristina Matei, Maria-Magdalena Boureau, Ionel Roventa) a

*desfasurat activitate de documentare si cercetare, precum si activitate de diseminare a rezultatelor obtinute, focalizand obiectivele formulate in propunerea de proiect: (obiectiv 1) abordari variationale alternative in studiul matematic al problemelor de contact; (obiectiv 2) proprietati calitative in studiul unor noi modele de contact implicand materiale non-standard. Prezentam in cele ce urmeaza principalele realizari in cadrul proiectului in perioada ianuarie-decembrie 2012.*

➤ **Publicatii** (lucrari care poarta mentiunea proiectului, acceptate spre publicare sau publicate in perioada ianuarie-decembrie 2012)

- **Articole ISI: 5**

**1. Andaluzia Matei, A variational approach via bipotentials for unilateral contact problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications , <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.07.065>**

(ISSN: 0022-247X; scor relativ de influenta ianuarie 2012: **1,11491**)

*Este prezentat un model de contact unilateral pentru materiale neliniar elastice, stationare, in ipoteza micilor deformatii. Contactul este modelat prin intermediul conditiei Signorini cu gap nul iar frecarea este neglijabila in zona potentiala de contact. Comportamentul materialului este modelat prin intermediul subdiferentialei unei functii constitutive  $\omega$  , modelul propus spre studiu fiind urmatorul:*

$$\text{Div } \sigma(x) + f_0(x) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\sigma(x) \in \partial\omega(\varepsilon(u(x))) \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1$$

$$\sigma(x)v(x) = f_2(x) \quad \text{pe } \Gamma_2$$

$$\sigma_\tau(x) = 0, u_\nu(x) \leq 0, \sigma_\nu(x) \leq 0, \sigma_\nu(x)u_\nu(x) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3.$$

Prin formulare variationala se obtine un sistem de inegalitati dupa cum urmeaza:

$$\begin{aligned} b(v, \sigma) - b(u, \sigma) &\geq (f, v - u)_V & v \in U_0 \\ b(u, \mu) - b(u, \sigma) &\geq 0 & \mu \in \Lambda. \end{aligned}$$

Utilizand tehnici de minimizare s-a studiat existenta si unicitatea solutiei. O pereche  $(u, \sigma)$ , solutie a acestui sistem variational, este o solutie slaba pentru modelul mecanic propus.

**2. Mikael Barboteu, Andaluzia Matei and Mircea Sofonea, Analysis of Quasistatic Viscoplastic Contact Problems with Normal Compliance, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, DOI: 10.1093/qjmam/hbs016.**

(ISSN 0033-5614; scor relativ de influenta ianuarie 2012: **1,07436**)

In aceasta lucrare s-au considerat doua probleme quasistatice ce descriu contactul fara frecare dintre un corp vâscoplastic si un obstacol. In prima problema contactul este modelat prin intermediul unei conditii cu complianta normala, fara ca penetrarea sa fie restrictionata. Astfel, modelul se scrie:

$$\sigma' = E\varepsilon(u') + G(\sigma, \varepsilon(u)) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \quad (2)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, \infty) \quad (3)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, \infty) \quad (4)$$

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu) \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, \infty) \quad (5)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, \infty) \quad (6)$$

$$u(0) = u_0, \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (7)$$

In cea de a doua problema, penetrarea este restrictionata. Al doilea model se scrie pornind de la primul dar inlocuind (5) cu urmatoarea conditie cu complianta normala, cu penetrare limitata:

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \quad (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, \infty).$$

Pentru ambele modele mecanice s-a studiat existenta si unicitatea solutiei slabe. In plus, s-a demonstrat convergenta solutiei slabe a primului model la solutia slaba a celui de al doilea model cand coeficientul de rigiditate al fundatiei tinde la infinit. Lucrarea se incheie cu o validare numerica a rezultatului de convergenta.

**3. Mikael Barboteu, Andaluzia Matei and Mircea Sofonea, On the behavior of the solution of a viscoplastic contact problem, Quarterly of Applied Mathematics, in press.**

(ISSN: 0033-569X; scor relativ de influenta ianuarie 2012: **0,65839**)

Se considera un model care descrie contactul cu frecare dintre un corp vâscoplastic și o fundație. Procesul este presupus quasistatic iar contactul se modelează prin intermediul unei condiții cu complianța normală și constrângere unilaterală. După descrierea modelului mecanic se propune o formulare variațională mixtă. Se demonstrează existența și unicitatea soluției slabe. În plus, se obțin rezultate de dependență continuă a soluției în raport cu funcția complianța normală și cu pragul de penetrare. Articolul se încheie cu validarea numerică a rezultatelor de dependență continuă.

**4. Andaluza Matei, On the solvability of mixed variational problems with solution-dependent sets of Lagrange multipliers, Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics, in press. (ISSN: 0308-2105; scor relativ de influență ianuarie 2012: 1,24689)**

S-a studiat o problemă variațională mixtă, multimea multiplicatorilor Lagrange depinzând de soluție. Problema constă dintr-un sistem format dintr-o ecuație variațională și o inegalitate variațională, după cum urmează:

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= (f, v)_X & v \in X \\ b(u, \mu - \lambda) &\leq 0 & \mu \in \Lambda(u). \end{aligned}$$

Utilizându-se o teoremă de punct fix pentru aplicații slab secvențial continue, s-a demonstrat existența și unicitatea soluției problemei propuse. Astfel de probleme variaționale intervin în studiul unor probleme mecanice. Pentru a exemplifica, în acest articol s-a utilizat rezultatul abstract obținut pentru a demonstra existența soluției slabe a următoarei probleme la limită.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mu(x) \nabla u(x)) + f_0(x) &= 0 & \text{în } \Omega \\ u(x) &= 0 & \text{pe } \Gamma_1 \\ \mu(x) \partial_\nu u(x) &= f_2(x) & \text{pe } \Gamma_2 \\ |\mu(x) \partial_\nu u(x)| &\leq g(x, |u(x)|), & \text{pe } \Gamma_3 \\ \mu(x) \partial_\nu u(x) &= -g(x, |u(x)|) u(x)/|u(x)| \text{ dacă } u(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Această problemă la limită modelează contactul dintre un corp cilindric deformabil și o fundație.

**5. Ionel Roventa, A note on Schur-concave functions, Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012:159, doi:10.1186/1029-242X-2012-159.**

(ISSN: 1025-5834, scor relativ de influență ianuarie 2012: 0,51242)

S-a considerat o clasă de funcții Schur-concave ce verifică proprietăți speciale, date de verificarea inegalităților izoperimetrice și Brunn-Minkowski. Aplicații ale acestor funcții se regăsesc în

programarea geometrică și teoria optimizării. Rezultatul principal al acestei lucrări constă în demonstrarea formei discrete a inegalității isoperimetrice pentru acest tip de funcții de volum  $n$  dimensionale.

- **Lucrari BDI: 1**

**Maria-Magdalena Boureanu, Remarks on Neumann boundary value problems with variable exponents, Bulletin of the Transilvania University of Brasov, in press.**

Se studiaza o clasa de probleme eliptice cu exponenti variabili si cu conditie de tip Neumann pe frontiera. Se lucreaza intr-un domeniu marginit, cu frontiera neteda, din spatiul  $N$ -dimensional,  $N > 1$ . Studiul este efectuat in cadrul spatiilor de tip Sobolev cu exponent variabil. Folosindu-se mai multe rezultate din domeniu, cum ar fi scufundarile de tip Sobolev, o teorema de urma si o teorema de tip Weierstrass, se obtin pe rand, un rezultat de existenta si un rezultat de unicitate. In plus, se fac diverse comentarii si conexiuni cu alte probleme cu care este inrudita problema noastra.

- **Monografie de cercetare: 1**

Poarta de asemenea mentiunea proiectului urmatoarea monografie finalizata si publicata in cursul anului 2012:

**Mircea Sofonea and Andaluzia Matei, Mathematical Models in Contact Mechanics, London Mathematical Society, Lecture Note Series 398, Cambridge University Press, 2012.**

- **Lucrari prezentate in cadrul unor manifestari stiintifice: 3**

- **Lucrarea "Un problème viscoplastique de contact avec contraintes unilatérales"** elaborata de **Andaluzia Matei** si **Mircea Sofonea** a fost prezentata la "**XI-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées**", **Université de Bucarest, 24 - 30 Aout 2012**. S-au prezentat cateva conditii la limita prin intermediul carora se poate modela contactul dintre un corp deformabil si o fundatie. Utilizand aceste conditii la limita s-a propus un model ce poate descrie procese cvasistatice de contact pentru materiale vâscoplastice. S-a prezentat studiul existentei si unicitatii solutiei slabe. De asemenea s-au prezentat cateva rezultate de convergenta.

- **Lucrarea "On the solvability of an abstract variational system"** elaborata de **Andaluzia Matei** si **Ionel Roventa** a fost prezentata in cadrul "**41-ème Congres National d'Analyse Numerique**", **SuperBesse- Puy-de-Dome, 21-25 mai 2012, France ( Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand)**. S-a studiat un sistem variațional abstract ce consta din două inegalități. Necunoscuta problemei

este o pereche ce aparține unui produs cartezian a două submulțimi nevide, închise, convexe, incluse în două spații Banach reflexive. Se analizează existența și unicitatea soluției. Aproximarea soluției este de asemenea discutată utilizând un algoritm multi-nivel de tip aditiv. Sistemul abstract pe care îl investigăm este legat de formularea variațională a unei clase de probleme elastice neliniare. Pentru a da un exemplu, s-a considerat o problemă la limită de tip deplasare-tracțiune.

▪ **Lucrarea "A quasistatic contact model leading to a history-dependent quasivariational inequality. A review of Recent Results"** elaborată de **Andaluzia Matei** a fost prezentată la **"Workshop for Young Researchers in Mathematics", 10-11 May 2012, Ovidius University, Constanta.**

Au fost prezentate aici rezultate variaționale în studiul unei probleme cvasistatice de contact formulată pe intervalul de timp  $[0, \infty)$ . Astfel, după descrierea modelului mecanic s-a prezentat o formulare de tipul unei inegalități cvasivariaționale cu termen istoric-dependent. Utilizându-se o teoremă de punct fix pe spații Frechet, s-a discutat existența și unicitatea soluției slabe.

➤ **Vizite de documentare-cercetare**

○ **Andaluzia-Cristina Matei:** 19-30 aprilie, 2012; Technische Universitat Munchen (TUM), Mathematik und Informatik Zentrum; la invitația Prof. Barbara Wohlmuth.

○ **Maria-Magdalena Boureanu:** 2-11 mai, 2012; Milano Bicocca University; la invitația Prof. Susanna Terracini;

○ **Andaluzia-Cristina Matei:** 10-23 iunie, 2012; University of Perpignan (LAMPS); la invitația Prof. Mircea Sofonea.

➤ **Profesor invitat**

Domnul profesor Mircea Sofonea de la Universitatea din Perpignan, Franța, a susținut pe 12 octombrie 2012, în cadrul seminarului științific al proiectului, prezentarea: **History-dependent operators in contact mechanics.**

Director proiect,

Andaluzia-Cristina Matei