

# RAPORT STIINTIFIC SINTETIC

*privind implementarea proiectului  
in perioada octombrie 2011-noiembrie 2013*

➤ Scurta descriere a proiectului (date generale)

- **Titlu: Probleme puternic neliniare in Mecanica Contactului**
- **GRANT al Autoritatii Nationale pentru Cercetare Stiintifica CNCS-UEFISCDI**
- **Cod: PN-II-RU-TE-2011-3-0223**
- **Perioada de derulare a proiectului: 05.10.2011-04.10.2014**
- Prezentul proiect focalizeaza probleme practice de Mecanica Contactului care se scriu prin intermediul ecuatiilor cu derivate partiale.

Proiectul are doua obiective principale. Un prim obiectiv este acela de a aduce o contributie in studiul variational al problemelor de mecanica contactului propunand abordari variationale alternative cum ar fi abordarile cu multiplicatori Lagrange sau abordarile prin intermediul bipotentialilor. Un al doilea obiectiv este acela de a aduce o contributie la rezolvarea unor noi modele de contact pentru materiale non standard; sunt focalizate probleme de contact pentru materiale cu comportament neliniar, de exemplu materiale ale caror legi constitutive implica exponent variabil, materiale cu proprietati cuplate, materiale vascoelastice.

Sunt vizate in principal rezultate de existenta, unicitate si stabilitate pentru solutii in sens variational; de asemenea prezinta interes aproximarea eficienta a solutiilor slabe precum si controlul optimal pe frontiera pentru o clasa de modele.

Pentru realizarea proiectului sunt necesare tehnici moderne de Matematica Aplicata Avansata, combinand Mecanica Mediilor Continue si Mecanica Materialelor cu Teoria Ecuatiilor cu Derivate Partiale, Analiza Neliniara, Analiza Convexa si Analiza Numerica.

- **Echipa**

Andaluzia-Cristina Matei (**Director**)

Maria Magdalena Boureanu

Ionel Roventa

- Obiective principale

**(O1) Abordari variationale alternative in studiul matematic al problemelor de contact.** Sunt focalizate formulari variationale via multiplicatori Lagrange sau formulari variationale via bipotentiali. Se vizeaza studiul existentei, unicitatii si stabilitatii solutiei slabe, precum si stabilirea tehnicii de aproximare.

**(O2) Proprietati calitative pentru noi modele de contact ce implica materiale non-standard.** Se focalizeaza studiul existentei, unicitatii si stabilitatii solutiei slabe pentru modele stationare sau modele cvasistatice (atat pe interval temporal marginit cat si pe interval temporal nemarginit), materialele implicate avand un comportament neliniar, non-standard, cum ar fi materiale a caror lege constitutiva implica termeni cu exponent variabil, materiale cu proprietati cuplate, materiale vascoelastice.

- **Principalele rezultate** au fost incluse in **16 lucrari** care poarta mentiunea proiectului, dupa cum urmeaza.

### Articole publicate

1. **A. Matei**, On the solvability of mixed variational problems with solution-dependent sets of Lagrange multipliers, Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics (ISI), published online 25 September 2013; 143(05), October 2013, 1047-1059; <http://dx.doi.org/10.1017/S0308210512000637>; ISSN: 0308-2105.

2. S. Hüber, **A. Matei**, B. Wohlmuth, A contact problem for electro-elastic materials, Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM) (ISI), DOI: 10.1002/zamm.201200235, 93 (10-11), 789-800, October 2013. Special Issue: Mathematical Modeling: Contact Mechanics, Phase Transitions, Multiscale Problems. In Memory of Christof Eck.

3. **A. Matei**, Weak solvability via Lagrange multipliers for two frictional contact models, Proceedings of 11-th French-Romanian Conference on Applied Mathematics (Colloque Franco-Roumain), 2012, Bucharest, Annals of the University of Bucharest (mathematical series), 4(LXII), 179-191, 2013.

4. **A. Matei**, A variational approach via bipotentials for unilateral contact problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications (ISI), ISSN 0022-247X, Volume 397, Issue 1, 1 January 2013, Pages 371-380. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.07.065>.

5. I. Andrei, N. Costea and **A. Matei**, Antiplane shear deformation of piezoelectric bodies in contact with a conductive support, Journal of Global Optimization (ISI); ISSN: 0925-5001 DOI: 10.1007/s10898-011-9815-x; Volume 56, Issue 1, pp 103-119, May 2013.

6. M. Barbotou, **A. Matei** and M. Sofonea, Analysis of Quasistatic Viscoplastic Contact Problems with Normal Compliance, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics (ISI), DOI: 10.1093/qjmmam/hbs016, 65(4), 555-579, 2012, ISSN 0033-5614.

7. **I. Roventa**, A note on Schur-concave functions, Journal of Inequalities and Applications (ISI), DOI: 10.1186/1029-242X-2012-159, 2012:159, 9 pages.

**8. M.M. Boureanu**, Remarks on Neumann boundary value problems with variable exponents, Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 5(54), 55-66, 2012.

#### **Monografie de cercetare publicata**

9. M. Sofonea and **A. Matei**, Mathematical Models in Contact Mechanics, London Mathematical Society, Lecture Note Series 398, Cambridge University Press, 2012.

#### **Articole acceptate pentru publicare**

**10. M. Boureanu, A. Matei** and M. Sofonea, Nonlinear problems with  $p(\cdot)$ -growth conditions and applications to antiplane contact models, Advanced Nonlinear Studies (ISI) , ISSN 1536-1365, accepted.

11. M. Barboteu, **A. Matei** and M. Sofonea, On the behavior of the solution of a viscoplastic contact problem, Quarterly of Applied Mathematics (ISI), accepted; ISSN 0033-569X.

#### **Articole sumise, cu decizie de revizuire**

**12. A. Matei**, A variational approach via bipotentials for a class of frictional contact problems, Acta Applicandae Mathematicae (ISI), Decision (September 10, 2013): *Minor Revisions Needed*.

**13. A. Matei**, An existence result for a mixed variational problem arising from Contact Mechanics, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Decision (October 20, 2013): *Accept with revision*.

#### **Articole sumise, fara o decizie**

**14. I. Roventa**, Generalized equilibrium problems related to Ky Fan inequalities, submitted.

**15. I. Roventa**, Strongly majorization properties and applications related to Schur-convexity, submitted.

**16. A. Matei**, A variational technique for solving a class of multi-contact problems, submitted.

➤ O importanta componenta a activitatii de cercetare-documentare a fost realizata in timpul urmatoarelor vizite:

- Technische Universitat Munchen (TUM), Mathematik und Informatik Zentrum: August 26- September 12, 2013 (**A. Matei**)  
Principala tema abordata in timpul vizitei: probleme de contact cu complianta normala.
- Technische Universitat Munchen (TUM), Mathematik und Informatik Zentrum: July 22- August 02, 2013 (**A. Matei**)  
Principala tema abordata in timpul vizitei: probleme de contact vascoelastice.
- University of Perpignan (LAMPS): June 10-23, 2012 (**A. Matei**)

Principala tema abordata in timpul vizitei: modele matematice vascoplastice in Mecanica Contactului.

- Technische Universitat Munchen (TUM), Mathematik und Informatik Zentrum: April 19-30, 2012 (**A. Matei**)

Principala tema abordata in timpul vizitei: probleme electro-elastice.

- Milano Bicocca University: May 2-11, 2012 (**M.M. Boureau**)

Principala tema abordata in timpul vizitei: ecuatii cu derivate partiale neliniare.

- O parte a rezultatelor obtinute au fost diseminate in cadrul urmatoarelor evenimente stiintifice:

- The 21-st Conference of Applied and Industrial Mathematics-CAIM 2013, 19-22 September, Bucharest, Romania (**A. Matei**)
- Workshop for Young Researchers in Mathematics, May 09-10, 2013 Ovidius University, Constanta, Romania (**A. Matei**).
- XI-eme Colloque Franco-Roumain de Mathematiques Appliquees, Universite de Bucarest, 24-30 Aout 2012, Roumanie (**A. Matei**: joint work with Mircea Sofonea)
- 41-eme Congres National d'Analyse Numerique, SuperBesse- Puy-de-Dome, 21-25 mai 2012, Universite Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France (**joint work A. Matei and I. Roventa**).
- Workshop for Young Researchers in Mathematics, May 10-11, 2012, Ovidius University, Constanta, Romania (**A. Matei**).

- Seminarul stiintific al proiectului a gazduit urmatoarea prelegere a unui colaborator invitat:

History-dependent operators in Contact Mechanics

**Professor Mircea Sofonea**, University of Perpignan, France; October 12, 2012.

- Scurta descriere a principalelor rezultate

#### ❖ **Rezultate corespunzatoare primului obiectiv**

**1. A. Matei**, On the solvability of mixed variational problems with solution-dependent sets of Lagrange multipliers, Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics (ISI), published online 25 September 2013; 143(05), October 2013, 1047-1059; <http://dx.doi.org/10.1017/S0308210512000637>; ISSN: 0308-2105.

*Rezumat - S-a studiat o problema variationala mixta abstracta, multimea multiplicatorilor Lagrange depinzand de solutie. Problema consta dintr-un sistem format dintr-o ecuatie variationala si o inegalitate variationala. Se demonstreaza existenta solutiei utilizand o tehnica de punct fix pentru aplicatii slab secvential continue. Rezultatul abstract obtinut se aplica la rezolvarea in sens slab a unei probleme la limita ce modeleaza contactul cu frecare dintre un corp cilindric deformabil si o fundatie rigida.*

**2. A. Matei**, Weak solvability via Lagrange multipliers for two frictional contact models, Proceedings of 11-th French-Romanian Conference on Applied Mathematics (Colloque

Franco-Roumain), 2012, Bucharest, Annals of the University of Bucharest (mathematical series), 4(LXII), 179-191, 2013.

*Rezumat - Se considera doua modele de contact cu frecare pentru materiale elastic neliniare. Pentru fiecare model se propune o formulare variationala in forma unei probleme de punct și generalizata. Se demonstreaza apoi existenta, unicitatea și stabilitatea solutiei slabe. Demonstratiile se bazeaza pe rezultate abstracte in studiul unei clase de probleme de punct și generalizate abstracte.*

**3. A. Matei**, A variational approach via bipotentials for unilateral contact problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications (ISI), ISSN 0022-247X, Volume 397, Issue 1, 1 January 2013, Pages 371-380. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.07.065>.

*Rezumat - Se considera un model de contact unilateral pentru materiale neliniar elastice, in ipoteza micilor deformatii, pentru procese stationare. Contactul este modelat cu conditia Signorini cu gap nul iar frecarea se neglijeaza in potentiala zona de contact. Comportamentul materialului se modeleaza prin intermediul unei incluziuni subdiferentiale, aplicatia constitutiva fiind proprie, convexa și inferior semicontinua. Dupa descrierea modelului se realizeaza o formulare variationala utilizand o functie bipotential ce depinde de aplicatia constitutiva și de conjugata ei Fenchel. Se ajunge la un sistem de doua inegalitati variationale a carui necunoscuta este perechea formata din vectorul deplasare și tensorul tensiune Cauchy. Necunoscuta se cauta intr-un produs cartezian de doua submultimi convexe, inchise, nemarginite a doua spatii Hilbert. Se demonstreaza existenta și unicitatea solutiei slabe utilizand argumente de minimizare pentru functionale potrivit asociate sistemului variational. Se discuta de asemenea in ce masura noua abordare variationala propusa este legata de abordarile variationale anterioare, prezente in literatura.*

**4. I. Roventa**, A note on Schur-concave functions, Journal of Inequalities and Applications (ISI), DOI: 10.1186/1029-242X-2012-159, 2012:159, 9 pages.

*Rezumat - S-a considerat o clasă de funcții Schur-concave ce verifică proprietăți speciale, date de verificarea inegalităților izoperimetrice și Brunn-Minkowski. Aplicații ale acestor funcții se regăsesc în programarea geometrică și teoria optimizării.*

**5. A. Matei**, A variational approach via bipotentials for a class of frictional contact problems, Acta Applicandae Mathematicae (ISI), Decision (September 10, 2013): MINOR REVISIONS NEEDED.

*Rezumat - Se studiaza o clasa de probleme de contact cu frecare cu tensiune normala impusa, pentru materiale neliniar elastice. Utilizand o functie bipotential ce depinde de aplicatia constitutiva și de conjugata ei Fenchel, precum și un potential ce depinde de tensiunea normala impusa și de coeficientul de frecare, se obtine o formulare variationala ce consta dintr-un sistem format din doua inegalitati variationale. Necunoscuta sistemului este perechea formata din vectorul deplasare și tensorul tensiune Cauchy. Se demonstreaza existenta și unicitatea solutiei slabe utilizand argumente de minimizare pentru functionale atasate sistemului variational. De asemenea se discuta relevanta acestei noi abordari, evidentiindu-se relatia de legatura intre noua abordare și abordarile anterioare.*

**6. A. Matei**, An existence result for a mixed variational problem arising from Contact Mechanics, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Decision (October 20, 2013): ACCEPT WITH REVISION.

*Rezumat - Se considera o problema variationala mixta in a carei scriere apare un operator generalizat-monoton, hemicontinuu, neliniar. Problema propusa este un sistem variational ce consta dintr-o ecuatie variationala scrisa intr-un spatiu Banach reflexiv real si o inegalitate variationala scrisa intr-o submultime a unui al doilea spatiu Banach reflexiv real. Se investigheaza existenta solutiei utilizand o teorema de punct fix pentru aplicatii multivoce. Pentru a ilustra teoria este prezentat un exemplu din Mecanica Contactului.*

**7. I. Roventa**, Generalized equilibrium problems related to Ky Fan inequalities, submitted.

*Rezumat - Se demonstreaza existenta solutiei pentru o problema de echilibru generalizata folosind o extensie asimetrice a inegalitatii Ky-Fan, ceea ce permite introducerea unui algoritm de punct fix.*

**8. I. Roventa**, Strongly majorization properties and applications related to Schur-convexity, submitted.

*Rezumat - In aceasta lucrare, se introduce un nou concept de majorizare pe baza caruia se studiaza noi proprietati de majorizare, cu aplicatii in teoria grafurilor, teoria optimizarii si a inegalitatilor geometrice.*

**9. A. Matei**, A variational technique for solving a class of multi-contact problems, submitted.

*Rezumat - Se investigheaza comportamentul unui corp elastic care, pe o bucata a frontierei este in contact cu frecare cu o fundatie, iar pe o alta bucata de frontiera poate intra in contact cu un obstacol rigid. Asociem acestui cadru fizic doua modele mecanice. Fiecare model este descris din punct de vedere matematic prin intermediul unei probleme la limita ce consta dintr-un sistem de ecuatii cu derivate parțiale asociat cu o conditie la limita in deplasari, o conditie la limita in tractiuni, o conditie de contact cu frecare si o conditie de contact unilateral fara frecare. In ambele modele contactul unilateral este descris prin conditia Signorini cu gap nenul. Diferenta dintre modele este data de conditia de contact cu frecare utilizata. In primul model se utilizeaza o conditie cu tensiune normala impusa. In al doilea, se utilizeaza o conditie de contact bilateral cu frecare. Pentru fiecare model se obtine o formulare variationala care este o problema de punct fix generalizata. Se studiaza apoi existenta, unicitatea si marginirea solutiilor slabe. Se discuta de asemenea aspecte privind aproximarea solutiilor slabe.*

#### ❖ Rezultate corespunzatoare celui de al doilea obiectiv

**10. S. Hüber, A. Matei, B. Wohlmuth**, A contact problem for electro-elastic materials, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM) (ISI)*, DOI: 10.1002/zamm.201200235, 93 (10-11), 789-800, October 2013. Special Issue: Mathematical Modeling: Contact Mechanics, Phase Transitions, Multiscale Problems. In Memory of Christof Eck.

*Rezumat - Se analizeaza contactul unilateral fara frecare dintre un corp electro-elastic si o fundatie rigida, conductiva electric. In potentiala zona de contact se scrie conditia Signorini cu gap nenul si o conditie de contact electric, coeficientul de conductivitate depinzand de vectorul Cauchy. Se obtine o formulare variationala si se demonstreaza existenta, unicitatea si stabilitatea solutiei slabe. Studiul se bazeaza pe o tehnica de punct fix pentru aplicatii slab secvential continue. Aplicabilitatea modelului este ilustrata printr-un exemplu numeric.*

**11. I. Andrei, N. Costea and A. Matei,** Antiplane shear deformation of piezoelectric bodies in contact with a conductive support, Journal of Global Optimization (ISI); ISSN: 0925-5001 DOI: 10.1007/s10898-011-9815-x; Volume 56, Issue 1, pp 103-119, May 2013.

*Rezumat - Se considera un model matematic ce descrie contactul cu frecare dintre un corp piezoelectric si un suport electric conductiv. Comportamentul materialului se modeleaza printr-o lege constitutiva cuplata, electro-elastica; contactul cu frecare este descris prin intermediul unei conditii la limita ce implica gradientul generalizat in sensul lui Clarke iar conditia electrica pe suprafata de contact este descrisa utilizand subdiferentiala unei functionale proprii, convexe, inferior semicontinue. Se obtine o formulare variationala a modelului si utilizand o teorema de punct fix pentru aplicatii multivoce se demonstreaza existenta a cel putin unei solutii slabe. Unicitatea solutiei este de asemenea discutata. Investigarea se bazeaza pe argumente in teoria inegalitatilor variational-hemivariationale.*

**12. M. Barbotou, A. Matei and M. Sofonea,** Analysis of Quasistatic Viscoplastic Contact Problems with Normal Compliance, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics (ISI), DOI: 10.1093/qjmam/hbs016, 65(4), 555-579, 2012, ISSN 0033-5614.

*Rezumat - Se considera doua probleme cvasistatice ce descriu contactul dintre un corp vascoplastic si un obstacol. Contactul este fara frecare si este modelat cu complianta normala asa incat, in prima problema penetrarea nu este restrictionata dar in a doua problema penetrarea este restrictionata cu o constrangere unilaterala. Pentru fiecare problema se obtine o formulare variationala dupa care se realizeaza o rezolvare in sens slab. Demonstratiile se bazeaza pe un rezultat recent in teoria inegalitatilor cvasivariationale istoric-dependente obtinut in (Sofonea and Matei, Eur. J. Appl. Math. 22 (2011)) . In continuare se demonstreaza convergenta solutiei slabe a primei probleme la solutia slaba a celei de a doua probleme, cand coeficientul de rigiditate al fundatiei converge la infinit. In final se realizeaza validarea numerica a rezultatului de convergenta, prezentandu-se simulari numerice in studiul unui exemplu 2D.*

**13. M.M. Boureau,** Remarks on Neumann boundary value problems with variable exponents, Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 5(54), 55-66, 2012.

*Rezumat - Se studiaza probleme eliptice cu conditii Neumann in cadrul spatiilor izotropice si anizotropice cu exponenti variabili. Se stabileste un rezultat de existenta si unicitate privind o problema cu un operator generalizat  $p(\cdot)$  - Laplace. In plus, sunt prezentate legaturi cu alte rezultate anterioare: unele legaturi vizeaza acelasi operator  $p(\cdot)$  - Laplace, altele vizeaza operatorul  $p^{\rightarrow}(\cdot)$  -Laplace.*

**14. M. Sofonea and A. Matei**, Mathematical Models in Contact Mechanics, London Mathematical Society, Lecture Note Series 398, Cambridge University Press, 2012 (research monograph).

*Acest text furnizeaza o introducere completa in teoria inegalitatilor variationale cu accent pe Mecanica Contactului. Acopera rezultate de existenta, unicitate si rezultate de convergenta pentru inegalitati variationale, incluzand modelarea si analiza variationala a unor probleme de contact cu frecare pentru materiale elastice, vascoelastice, vascoplastice. Sunt prezentate noi modele de contact, incluzand cazul contactului pentru materiale piezoelectrice. O atentie particulara a fost acordata studiului unor inegalitati cvasivariationale istoric-dependente precum si aplicatiilor acestora in studiul unor probleme de contact cu constrangeri unilaterale. Cartea ilustreaza puternica legatura intre modelare, analiza matematica neliniara si aplicatii.*

**15. M. Boureanu, A. Matei and M. Sofonea**, Nonlinear problems with  $p(\cdot)$ -growth conditions and applications to antiplane contact models, Advanced Nonlinear Studies (ISI), ISSN 1536-1365, accepted.

*Rezumat - Se considera o problema la limita ce implica operatori de forma  $\operatorname{div}(a(\cdot, \nabla u(\cdot)))$ , in care  $a$  este o functie Caratheodory ce satisface o conditie de  $p(\cdot)$ -crestere. In vederea rezolvarii in sens slab a problemei se introduc spatii Lebesgue si Sobolev cu exponent variabil, precizandu-se principalele proprietati ale acestora. Principalul rezultat de existenta si unicitate este Teorema 3.1 a carei demonstratie se bazeaza pe un argument de tip Weierstrass. Sunt considerate apoi doua probleme de contact antiplane pentru materiale elastice neomogene, de tip Hencky. Contactul este cu frecare si se modeleaza cu o versiune regularizata a legii de frecare Tresca precum si cu o lege de frecare tip putere. Deoarece modelele mecanice se incadreaza in tiparul problemei abstracte studiate, studiul acestora a fost relizat utilizand Teorema 3.1.*

**16. M. Barboteu, A. Matei and M. Sofonea**, On the behavior of the solution of a viscoplastic contact problem, Quarterly of Applied Mathematics (ISI), accepted; ISSN 0033-569X.

*Rezumat- Se considera un model matematic care descrie contactul fara frecare dintre un corp vascoplastic si un obstacol. Procesul este cvasistatic si contactul este modelat cu complianta normala si contrangere unilaterala. S-a dat o formulare variationala mixta a modelului dupa care s-a demonstrat existenta si unicitatea solutiei slabe. De asemenea, a fost obtinuta o estimare care conduce la dependenta continua a solutiei slabe in raport cu functia complianta normala si pragul de penetrare. Rezultatul de convergenta a fost validat numeric.*

**Conferinte** (nume conferinte/titluri/autori/rezumat)

- The 21-st Conference of Applied and Industrial Mathematics-CAIM 2013, 19-22 September, Bucharest, Romania

*A variational method for solving a class of boundary value problems arising from Contact Mechanics (Andaluzia Matei)*

*Prezenta lucrare este bazata pe recentul articol [A. Matei, On the solvability of mixed variational problems with solution-dependent sets of Lagrange multipliers, Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics]. A fost vizata o metoda*



*variatională în rezolvarea unei clase de probleme la limita în Mecanica Contactului. Baza din punct de vedere variational o constituie o problema variatională abstractă mixtă având multimea multiplicatorilor Lagrange dependentă de soluție. S-a discutat în primul rând existența soluției problemei abstracte. Discuția s-a bazat pe o tehnică de punct fix pentru aplicații slab secvențial continue. În continuare s-a aplicat rezultatul abstract la rezolvarea în sens slab a unei probleme la limita care modelează contactul cu frecare între un corp cilindric deformabil și o fundație rigidă, în context antiplan. În plus, au fost indicate modele 3D de contact ce conduc la probleme variatională mixte având multimea multiplicatorilor Lagrange dependentă de soluție.*

- Workshop for Young Researchers in Mathematics, May 09-10, 2013 Ovidius University, Constanta, Romania.

*A unilateral contact model and its weak solvability by a new variational approach. A review of recent results (Andaluzia Matei)*

*În această prelegere au fost prezentate rezultate recent obținute în articolul [A. Matei, A variational approach via bipotentials for unilateral contact problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 397, Issue 1, 2013, Pages 371-380]. S-a considerat un model de contact unilateral fără frecare, 3D pentru materiale neliniar elastice. Modelul mecanic a fost descris din punct de vedere matematic printr-o problemă la limita ce constă dintr-un sistem de ecuații cu derivate parțiale asociat unei condiții la limita în deplasări, unei condiții la limita în tracțiuni și unei condiții de contact. Contactul a fost modelat cu o condiție Signorini cu gap zero, neglijându-se frecarea în zona potențială de contact. Comportamentul materialului a fost descris prin intermediul unei legi constitutive care implică un operator neliniar elastic, posibil multivoc. S-a dat o formulare variatională utilizând o funcție bipotential ce depinde de aplicația constitutivă și conjugată ei Fenchel. Se ajunge la un sistem de două inegalități variatională a cărui necunoscută este perechea ce constă din vectorul deplasare și tensorul tensiune Cauchy. Se demonstrează existența și unicitatea soluției slabe utilizând argumente de minimizare pentru funcționale asociate sistemului variational.*

- XI-eme Colloque Franco-Roumain de Mathematiques Appliquees, Universite de Bucarest, 24-30 Aout 2012, Roumanie.

*Un probleme viscoplastique de contact avec contraintes unilaterales (Andaluzia Matei, Mircea Sofonea)*

*Au fost prezentate mai multe condiții la limita care pot modela contactul între un corp deformabil și o fundație. Apoi aceste condiții au fost utilizate în construirea unui model matematic ce descrie procese cvasistatice de contact pentru materiale viscoplastice. Acest model a fost studiat în cadrul Teoriei Matematice a Mecanicii Contactului demonstrându-se existența și unicitatea soluției slabe precum și mai multe rezultate de convergență. Demonstrațiile au fost bazate pe argumente de inegalități cvasivariatională cu termen memorie. Au fost prezentate de asemenea simulări numerice care validează rezultatele de convergență.*

- 41-eme Congres National d'Analyse Numerique, SuperBesse- Puy-de-Dome, 21-25 mai 2012, Universite Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France.

*On the solvability of an abstract variational system*  
(Ionel Roventa, Andaluza Cristina Matei)

*Aceasta prelegere a focalizat rezolvarea unui sistem variational abstract care consta din doua inegalitati variationale. Necunoscuta sistemului este o pereche intr-un produs cartezian de doua submultimi inchise, convexe, nemarginite a doua spatii Banach reflexive. S-a demonstrat existenta si unicitatea solutiei; de asemenea s-a discutat problema aproximarii solutiei utilizand un algoritm multinivel de tip aditiv. Astfel de algoritmi au fost recent introdusi in lucrarea [L. Badea, Multigrid methods for variational inequalities, Preprint series of the Institute of Mathematics of the Romanian Academy 1, 2010] pentru o clasa de inegalitati variationale abstracte. Sistemul variational abstract in discutie se afla in legatura cu formularea variationala a unor probleme elastice neliniare. Pentru a exemplifica, s-a facut referire la problema la limita in deplasari-tractiuni recent studiata in lucrarea [A. C. Matei and C. P. Niculescu, Weak solutions via bipotentials in mechanics of deformable solids, J. Math. Anal. Appl. 379 (2011), No. 1, 15-25].*

- Workshop for Young Researchers in Mathematics, May 10-11, 2012, Ovidius University, Constanta, Romania.

*A quasistatic contact model leading to a history-dependent quasivariational inequality*  
(Andaluza Matei)

*In aceasta prelegere, bazata pe o lucrare in colaborare cu Mircea Sofonea, s-a focalizat un model de contact cvasistatic formulat pe intervalul temporal nemarginit  $[0; \infty)$ . Dupa descrierea modelului, s-a indicat o formulare variationala sub forma unei inegalitati cvasivariationale cu termen istoric dependent. Bazat pe un rezultat de punct fix obtinut in lucrarea [M. Sofonea, C. Avramescu and A. Matei, A Fixed point result with applications in the study of viscoplastic frictionless contact problems, Communications on Pure and Applied Analysis, DOI:10.3934/cpaa.2008.7.645, 7(3), 645-658, 2008], s-a demonstrat existenta si unicitatea solutiei slabe. S-au indicat apoi mai multe modele de contact ce pot fi analizate similar, facandu-se referire la lucrarea [M. Sofonea and A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in contact mechanics, European Journal of Applied Mathematics, DOI:10.1017/S0956792511000192, vol. 22, 471-491, 2011].*

**Prelegere/colaborator invitat :**

History-dependent operators in Contact Mechanics; October 12, 2012, **Professor Mircea Sofonea**, University of Perpignan, France.

*In aceasta prelegere au fost prezentate rezultate de existenta si unicitate pentru inegalitati variationale si hemivariationale cu operatori istoric dependenti. Aceste rezultate au fost utilizate apoi in studiul mai multor probleme de contact pentru materiale vascoelastice sau vascoplastice. In plus, au fost discutate probleme de regularitate si rezultate de convergenta. De asemenea au fost prezentate simulari numerice pentru probleme test 2D.*

**In lucru!** In prezent, principalele teme in atenta membrilor echipei sunt: solutii slabe pentru o clasa de probleme degenerate si singulare (**M.M. Boureau, A. Matei**); probleme de punct şa-un rezultat de convergenta (**A. Matei, I. Roventa**)

Alte aspecte relevante asupra activitatii de implementare a proiectului sunt cuprinse in urmatoarele trei tabele.

TABEL 1.

<p>1.</p>	<p><i>Formulari variationale reprezentative</i></p>	<p><i>Formulari cu multiplicatori Lagrange</i></p> <p>1) <math>(Au, v) + b(v, \lambda) = (f, v)_X \quad v \in X</math>  <math>b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \mu \in \Lambda.</math></p> <p>2) <math>a(u, v) + b(v, \lambda) = (f, v)_X \quad v \in X</math>  <math>b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \mu \in \Lambda(u).</math></p> <p>3) <math>a(u, v) + e(v, \phi) + b(v, \lambda) = (f, v)_X \quad v \in X</math>  <math>c(\phi, \psi) - e(u, \psi) + j(\lambda, \phi, \psi) = (q, \psi)_Y \quad \psi \in Y</math>  <math>b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \mu \in \Lambda.</math></p> <hr/> <p><i>Formulari via bipotentiali</i></p> <p>1) <math>b(v, \sigma) - b(u, \sigma) \geq f(v - u) \text{ in } K</math>  <math>b(u, \mu) - b(u, \sigma) \geq 0 \text{ in } \Lambda</math></p> <p>2) <math>b(v, \sigma) - b(u, \sigma) + j(v) - j(u) \geq f(v - u) \text{ in } K</math>  <math>b(u, \mu) - b(u, \sigma) \geq 0 \text{ in } \Lambda</math></p>
<p>2.</p>	<p><i>Modele de contact reprezentative</i></p>	<p><i>Un model 3D electro-elastic cu coeficient de conductivitate ce depinde de tensiunea normala</i></p> <p><math>Div \sigma + f_0 = 0 \text{ in } \Omega</math>  <math>div D = q_0 \text{ in } \Omega</math>  <math>\sigma = C\varepsilon(u) + E^T \nabla \phi \text{ in } \Omega</math>  <math>D = E\varepsilon(u) - \beta \nabla \phi \text{ in } \Omega</math>  <math>u = 0 \text{ pe } \Gamma_1,</math>  <math>\sigma v = f_2 \text{ pe } \Gamma_2</math>  <math>\phi = 0 \text{ pe } \Gamma_a</math>  <math>D \cdot v = q_b \text{ pe } \Gamma_b</math>  <math>\sigma_\tau = 0, \sigma_v \leq 0, u_v \leq g, \sigma_v (u_v - g) = 0 \text{ pe } \Gamma_3,</math>  <math>D \cdot v = -k(\sigma_v)(\phi - \phi_0) \text{ pe } \Gamma_3</math></p> <hr/> <p><i>Un model antiplan pentru materiale neliniare, legea constitutiva fiind cu termen cu exponent variabil</i></p> <p><math>div (\mu(x) \ \nabla u(x)\ ^{p(x)-2} \nabla u(x)) + f_0(x) = 0 \text{ in } \Omega</math>  <math>u(x) = 0 \text{ pe } \Gamma_1</math>  <math>\mu(x) \ \nabla u(x)\ ^{p(x)-2} \partial_\nu u(x) = f_2(x) \text{ pe } \Gamma_2</math>  <math>\mu(x) \ \nabla u(x)\ ^{p(x)-2} \partial_\nu u(x) = -g(x)u(x)/(u(x)^2 + \rho^2)^{1/2} \text{ pe } \Gamma_3</math></p>

		<p><i>Un model de contact unilateral fara frecare pentru materiale neliniar elastice</i></p> $\begin{aligned} \operatorname{Div} \sigma(x) + f_0(x) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \sigma(x) &\in \partial\omega(\varepsilon(u(x))) \quad \text{in } \Omega \\ u(x) &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \\ \sigma(x)v(x) &= f_2(x) \quad \text{pe } \Gamma_2 \\ \sigma_\tau(x) &= 0, \quad u_v(x) \leq 0, \quad \sigma_v(x) \leq 0, \quad \sigma_v(x)u_v(x) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \end{aligned}$ <hr/> <p><i>Un model de contact cu frecare pentru materiale neliniar elastice</i></p> $\begin{aligned} \operatorname{Div} \sigma(x) + f_0(x) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \sigma(x) &\in \partial\omega(\varepsilon(u(x))) \quad \text{in } \Omega \\ u(x) &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \\ \sigma(x)v(x) &= f_2(x) \quad \text{pe } \Gamma_2 \\ \sigma_v(x) &= F, \quad \ \sigma_\tau(x)\  \leq k  \sigma_v(x)  \quad \text{pe } \Gamma_3 \\ \sigma_\tau(x) &= -k  \sigma_v(x)  u_\tau(x) / \ u_\tau(x)\  \quad \text{daca } u_\tau(x) \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \end{aligned}$ <hr/> <p><i>Un model viscoplastic cu complianta normala si constrangere unilaterala pentru interval temporal nemarginit</i></p> $\begin{aligned} \sigma' &= E\varepsilon(u') + G(\sigma, \varepsilon(u)) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ \operatorname{Div} \sigma + f_0 &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ u &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \sigma v &= f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, \infty) \\ u_v &\leq g, \quad \sigma_v + p(u_v) \leq 0, \quad (u_v - g)(\sigma_v + p(u_v)) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, \infty) \\ \sigma_\tau &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, \infty) \\ u(0) &= u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$ <hr/> <p><i>Un model antiplan electro-elastic</i></p> $\begin{aligned} \operatorname{div} (\mu(x) \nabla u(x) + e(x) \nabla \phi(x)) + f_0(x) &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} (e(x) \nabla u(x) - \beta(x) \nabla \phi(x)) &= q_0(x) \quad \text{in } \Omega \\ u(x) &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \\ \phi(x) &= 0 \quad \text{pe } \Gamma_a \\ \mu(x) \partial_v u(x) + e(x) \partial_v \phi(x) &= f_2(x) \quad \text{pe } \Gamma_2 \\ e(x) \partial_v u(x) - \beta(x) \partial_v \phi(x) &= q_b(x) \quad \text{pe } \Gamma_b \\ -\mu(x) \partial_v u(x) - e(x) \partial_v \phi(x) &\in h(x, u(x)) \partial j(x, u(x)) \quad \text{pe } \Gamma_3, \\ e(x) \partial_v u(x) - \beta(x) \partial_v \phi(x) &\in \bar{\partial} \varphi(x, \phi(x) - \phi_F(x)) \quad \text{pe } \Gamma_3 \end{aligned}$
--	--	---

**TABEL 2.**

Nr	Articole ISI ce poarta mentiunea proiectului PN-II-RU-TE-2011-3-0223	Jurnal	Situatia articolului/ Decizia	Factor de impact
1	<p><b>A. Matei</b>, On the solvability of mixed variational problems with solution-dependent sets of Lagrange multipliers;</p> <p>143(05), October 2013, 1047-1059</p> <p><a href="http://dx.doi.org/10.1017/S0308210512000637">http://dx.doi.org/10.1017/S0308210512000637</a></p>	<p>Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics</p> <p>ISSN: 0308-2105.</p>	<p>published</p> <p>online: 25 September 2013</p> <p>print: October 2013</p>	0,637
2	<p>S. Hüeber, <b>A. Matei</b>, B. Wohlmuth, A contact problem for electro-elastic materials;</p> <p>DOI: 10.1002/zamm.201200235,</p> <p>93 (10-11), 789-800, October 2013.</p> <p>Special Issue: Mathematical Modeling: Contact Mechanics, Phase Transitions, Multiscale Problems. In Memory of Christof Eck.</p>	<p>Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)</p> <p>ISSN: 0044-2267</p>	<p>published</p> <p>online: July 2013</p> <p>print: October 2013</p>	0,948
3	<p><b>A. Matei</b>, A variational approach via bipotentials for unilateral contact problems;</p> <p>Volume 397, Issue 1, 1 January 2013, Pages 371-380.</p> <p><a href="http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.07.065">http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.07.065</a>.</p> <p>WOS: 000309381100031</p>	<p>Journal of Mathematical Analysis and Applications (JMAA)</p> <p>ISSN 0022-247X;</p>	<p>published</p> <p>January 2013</p>	1,050
4	<p>I. Andrei, N. Costea and <b>A. Matei</b>, Antiplane shear deformation of piezoelectric bodies in contact with a conductive support;</p> <p>DOI: 10.1007/s10898-011-9815-x;</p> <p>Volume 56, Issue 1, pp 103-119, May 2013.</p> <p>WOS: 000317079100006</p>	<p>Journal of Global Optimization (JOGO)</p> <p>ISSN: 0925-5001</p>	<p>published</p> <p>May 2013</p>	1,307

5	M. Barboteu, <b>A. Matei</b> and M. Sofonea, Analysis of Quasistatic Viscoplastic Contact Problems with Normal Compliance;  DOI: 10.1093/qjmam/hbs016  65(4), 555-579, 2012.  WOS: 000310892600005	The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics (QJMAM)  ISSN 0033-5614.	published November 2012	1,271
6	<b>I. Roventa</b> , A note on Schur-concave functions;  DOI: 10.1186/1029-242X-2012-159  2012:159, 9 pages.	Journal of Inequalities and Applications  ISSN: 1029-242X (Springer Open Journal)	published July 2012	0,82
7	<b>M. Boureau</b> , <b>A. Matei</b> and M. Sofonea, Nonlinear problems with $p(\cdot)$ -growth conditions and applications to antiplane contact models.	Advanced Nonlinear Studies  ISSN 1536-1365	accepted 2013	0,538
8	M. Barboteu, <b>A. Matei</b> and M. Sofonea, On the behavior of the solution of a viscoplastic contact problem.	Quarterly of Applied Mathematics (QAM)  ISSN 0033-569X.	accepted 2012	0,728
9	<b>A. Matei</b> , A variational approach via bipotentials for a class of frictional contact problems.	Acta Applicandae Mathematicae (ACTA APPL MATH)  ISSN: 0167-8019 (Print) 1572-9036 (Online)	DECISION September 10, 2013: Minor revisions needed	0,985
10	<b>A. Matei</b> , An existence result for a mixed variational problem arising from Contact Mechanics	Nonlinear Analysis: Real World Applications (NARWA)  ISSN: 1468-1218	DECISION October 20, 2013:  ACCEPT WITH REVISION	2,201

**TABEL 3.**

<b>Nr.</b>	<b>Indicator</b>	<b>Numar de rezultate</b>	
1.	Articole ISI	publicate	6
		acceptate	2
		Articol recomandat pentru publicare (Minor Revisions Needed)	1
		Articol cu decizie de revizuire (Accept with revision)	1
2.	Articole BDI	2	
3.	Monografie de cercetare (Cambridge University Press 2012)	1	
4.	Articole sumise fara o decizie	3	
5.	Conferinte internationale	5	
6.	Vizite de cercetare-documentare ale membrilor echipei	5	
7.	Colaborator invitat	1	

Director,  
Lect. dr. Andaluzia-Cristina Matei