

## **Raport stiintific**

*privind implementarea proiectului*

*" Probleme puternic neliniare in Mecanica Contactului "*

*cod PN-II-RU-TE-2011-3-0223,*

*in perioada 01 ianuarie 2014 –04 octombrie 2014*

**Echipa** proiectului ( Andaluzia-Cristina Matei, Maria-Magdalena Boureau, Ionel Roventa) a

*desfasurat activitate de documentare, cercetare si diseminare a rezultatelor obtinute, focalizand obiectivele formulate in propunerea de proiect: (obiectiv 1) abordari variationale alternative in studiul matematic al problemelor de contact; (obiectiv 2) proprietati calitative in studiul unor noi modele de contact implicand materiale non-standard.*

\*\*\*

*Prezentam in cele ce urmeaza principalele realizari ce poarta mentiunea proiectului, in legatura cu perioada 1 ianuarie 2014-4 octombrie 2014 .*

- **Articole** (publicate sau acceptate sau trimise spre publicare in intervalul 1 ianuarie 2014-4 octombrie 2014):
  - Mikael Barboteu, **Andaluzia Matei** and Mircea Sofonea, *On the behavior of the solution of a viscoplastic contact problem*, Quarterly of Applied Mathematics (ISI), DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0033-569X-2014-01345-4> (publicat electronic pe 25 septembrie 2014), Online ISSN 1552-4485; Print ISSN 0033-569X.

*Se considera un model care descrie contactul cu frecare dintre un corp vâscoplastic si o fundatie deformabila, pentru procese cvasistatice; contactul se modeleaza prin intermediul unei conditii cu complianta normala si constrangere unilaterala.*

$$\sigma' = E(\varepsilon(u')) + G(\sigma, \varepsilon(u)) \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

$$u = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1 \times (0, T)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{pe } \Gamma_2 \times (0, T)$$

$$\sigma_\tau = 0, \quad u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0, \quad (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_3 \times (0, T)$$

$$u(0) = u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{in } \Omega.$$

*Pentru acest model mecanic se propune o formulare variationala mixta pentru care se demonstreaza existenta si unicitatea solutiei. In plus, se obtin rezultate de dependenta continua a solutiei in raport cu functia complianta normala si cu pragul de penetrare. Articolul se incheie cu validarea numerica a rezultatelor de dependenta continua.*

- **A. Matei**, Weak solvability via Lagrange multipliers for contact problems involving multi-contact zones, *Mathematics and Mechanics of Solids*, **ISI**, DOI:10.1177/1081286514541577, publicat online pe 7 iulie 2014;

Se investigheaza comportamentul unui corp elastic care, pe o bucata a frontierei este in contact cu frecare cu o fundatie, iar pe o alta bucata de frontiera poate intra in contact cu un obstacol rigid. Asociem acestui cadru fizic doua modele mecanice. Fiecare model este descris din punct de vedere matematic prin intermediul unei probleme la limita ce consta dintr-un sistem de ecuatii cu derivate partiale asociat cu o conditie la limita in deplasari, o conditie la limita in tractiuni, o conditie de contact cu frecare si o conditie de contact unilateral fara frecare. In ambele modele contactul unilateral este descris prin conditia Signorini cu gap nenul. Diferenta dintre modele este data de conditia de contact cu frecare utilizata. In primul model se utilizeaza o conditie cu tensiune normala impusa. Astfel, primul model se scrie:

$$\text{Div } \sigma(x) + f_0(x) = 0 \text{ in } \Omega$$

$$\sigma(x) = C\varepsilon(u(x)) \text{ in } \Omega$$

$$u(x) = 0 \text{ pe } \Gamma_1$$

$$\sigma v(x) = f_2(x) \text{ pe } \Gamma_2$$

$$-\sigma_v(x) = F(x), \quad ||\sigma_\tau(x)|| \leq k(x) |\sigma_v(x)| \quad \text{pe } \Gamma_3$$

$$\sigma_\tau(x) = -k(x) |\sigma_v(x)| u_\tau(x) / ||u_\tau(x)|| \text{ daca } u_\tau(x) \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3$$

$$\sigma_\tau(x) = 0, \sigma_v(x) \leq 0, u_v(x) \leq g(x), \sigma_v(x)(u_v(x) - g(x)) = 0 \text{ pe } \Gamma_4.$$

In al doilea model se utilizeaza o conditie de contact bilateral cu frecare, dupa cum urmeaza:

$$\text{Div } \sigma(x) + f_0(x) = 0 \text{ in } \Omega$$

$$\sigma(x) = C\varepsilon(u(x)) \text{ in } \Omega$$

$$u(x) = 0 \text{ pe } \Gamma_1$$

$$\sigma v(x) = f_2(x) \text{ pe } \Gamma_2$$

$$u_v(x) = 0, \quad ||\sigma_\tau(x)|| \leq g(x, ||u_\tau(x)||) \quad \text{pe } \Gamma_3$$

$$\sigma_\tau(x) = -g(x, ||u_\tau(x)||) u_\tau(x) / ||u_\tau(x)|| \text{ daca } u_\tau(x) \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3$$

$$\sigma_\tau(x) = 0, \sigma_v(x) \leq 0, u_v(x) \leq g(x), \sigma_v(x)(u_v(x) - g(x)) = 0 \text{ pe } \Gamma_4.$$

Pentru fiecare model se obtine o formulare variationala care este o problema de punct și generalizata de forma:

$$a(u, v-u) + b(v-u, \lambda) + j(v) - j(u) \geq f(v-u) \quad v \in X$$

$$b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \mu \in \Lambda.$$

Se studiaza apoi existenta, unicitatea si marginirea solutiilor slabe. Se discuta de asemenea aspecte privind aproximarea solutiilor slabe. Initial, lucrarea a fost trimisa spre publicare cu titlul " A

variational technique for solving a class of multi-contact problems"; titlul a fost schimbat la sugestia referentilor.

- **A. Matei**, An existence result for a mixed variational problem arising from Contact Mechanics, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **ISI**, online 20 May 2014, DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.01.010, vol. 20, December 2014, 74-81. ISSN: 1468-1218

Se considera o problema variationala mixta guvernata de un operator generalizat-monoton, hemicontinuu, neliniar, A. Problema propusa este un sistem variational ce consta dintr-o ecuatie variationala scrisa intr-un spatiu Banach reflexiv real si o inegalitate variationala scrisa intr-o submultime a unui al doilea spatiu Banach reflexiv real, dupa cum urmeaza

$$(Au, v)_{X, X^*} + b(v, \lambda) = f(v) \quad v \in X$$

$$b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \mu \in \Lambda.$$

Se investigheaza existenta solutiei utilizand o teorema de punct fix pentru aplicatii multivoce. Pentru a ilustra teoria este prezentat un exemplu din Mecanica Contactului.

- **A. Matei**, A variational approach via bipotentials for a class of frictional contact problems, *Acta Applicandae Mathematicae*, **ISI**, DOI: 10.1007/s10440-014-9868-1, publicat online pe 7 februarie 2014.

Se studiaza o clasa de probleme de contact cu frecare cu tensiune normala impusa, pentru materiale neliniar elastice. Utilizand o functie bipotential ce depinde de aplicatia constitutiva si de conjugata ei Fenchel, precum si un potential ce depinde de tensiunea normala impusa si de coeficientul de frecare, se obtine o formulare variationala ce consta dintr-un sistem format din doua inegalitati variationale guvernate de o functionala convexa  $j$ , dupa cum urmeaza:

$$b(v, \sigma) - b(u, \sigma) + j(v) - j(u) \geq f(v - u) \text{ in } K$$

$$b(u, \mu) - b(u, \sigma) \geq 0 \quad \text{in } \Lambda.$$

Necunoscuta sistemului este perechea formata din vectorul deplasare si tensorul tensiune Cauchy. Se demonstreaza existenta si unicitatea solutiei slabe utilizand argumente de minimizare pentru functionale atasate sistemului variational. De asemenea se discuta relevanta acestei noi abordari, evidentiindu-se relatia de legatura intre noua abordare si abordarile anterioare.

- **M.M. Boureanu, A. Matei and M. Sofonea**, Nonlinear problems with  $p(\cdot)$ -growth conditions and applications to antiplane contact models, *Advanced Nonlinear Studies*, **ISI**, ISSN 1536-1365, 14 (2014), 295-313.

Se considera o problema la limita ce implica operatori de forma  $\operatorname{div}(a(\bullet, \nabla u(\bullet)))$ , in care  $a$  este o functie Caratheodory ce satisface o conditie de  $p(\bullet)$ -crestere. In vederea rezolvarii in sens slab a problemei se introduc spatii Lebesgue si Sobolev cu exponent variabil, precizandu-se principalele proprietati ale acestora. Principalul rezultat de existenta si unicitate este Teorema 3.1 a carei demonstratie se bazeaza pe un argument de tip Weierstrass. Sunt considerate apoi doua probleme de contact antiplane pentru materiale elastice neomogene, de tip Hencky.

Contactul este cu frecare. Intr-un prim exemplu, contactul se modeleaza cu o versiune regularizata a legii de frecare Tresca, dupa cum urmeaza.

$$\operatorname{div}(\mu(x) \|\nabla u(x)\|^{p(x)-2} \nabla u(x)) + f_0(x) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1$$

$$\mu(x) \|\nabla u(x)\|^{p(x)-2} \partial_\nu u(x) = f_2(x) \quad \text{pe } \Gamma_2$$

$$\mu(x) \|\nabla u(x)\|^{p(x)-2} \partial_\nu u(x) = -g(x)u(x)/(u(x)^2 + \rho^2)^{1/2} \quad \text{pe } \Gamma_3.$$

Intr-un al doilea exemplu, contactul cu frecare se modeleaza cu o lege de frecare tip putere. Deoarece modelele mecanice se incadreaza in tiparul problemei abstracte studiate, studiul acestora a fost realizat utilizand Teorema 3.1.

- **A. Matei**, Two abstract mixed variational problems and applications in Contact Mechanics, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **ISI**, acceptat in septembrie 2014, publicat online pe 13 octombrie 2014, <http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.09.014> (DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.09.014).

Prezenta lucrare focalizeaza doua probleme variationale mixte abstracte. Fiecare problema este un sistem variational de doua inegalitati. Prima problema este guvernata de doua functionale convexe,  $J$  si  $\phi$ :

$$J(v) - J(u) + b(v-u, \lambda) + \phi(v) - \phi(u) \geq f(v-u) \quad v \in X$$

$$b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \mu \in \Lambda.$$

A doua problema este guvernata de o functională convexă  $J$  și de o bifuncțională  $j$ , convexă în al doilea argument.

$$J(v) - J(u) + b(v-u, \lambda) + j(\lambda, v) - j(\lambda, u) \geq f(v-u) \quad v \in X$$

$$b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \mu \in \Lambda.$$

Utilizand o tehnica de punct sa, se demonstreaza existenta si unicitatea solutiei primei probleme. Apoi, se combina acest rezultat cu o tehnica de punct fix si se demonstreaza existenta si unicitatea solutiei celei de a doua probleme. Rezultatele abstracte obtinute se aplica la rezolvarea in sens slab a unor probleme de mecanica contactului. Pentru a ilustra aplicabilitatea rezultatelor obtinute, in prezentul articol sunt indicate trei exemple.

- **I. Roventa**, Generalized equilibrium problems related to Ky Fan inequalities, *Abstract and Applied Analysis* Volume 2014 (2014), **ISI**, Article ID 301901, 6 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/301901>.

Se demonstreaza existenta solutiei pentru o problema de echilibru generalizata folosind o extensie asimetrica a inegalitatii Ky-Fan, ceea ce permite introducerea unui algoritm de punct fix.

- **A. Matei**, Weak Solutions via Lagrange Multipliers for a Slip-dependent Frictional Contact Model, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 44 (3), 2014, 151-156 (special issue, [http://www.iaeng.org/IJAM/issues\\_v44/issue\\_3/index.html](http://www.iaeng.org/IJAM/issues_v44/issue_3/index.html))

Se investigheaza un model elastostatic 3D, cu frecare dependenta de alunecare. Din punct de vedere matematic modelul este descris prin intermediul unui sistem de ecuatii cu derivate partiale caruia i se asociaza o conditie la limita in deplasari omogena, o conditie la limita in tractiuni si o conditie la limita de contact cu frecare dependenta de alunecare, dupa cum urmeaza:

$$\text{Div } \sigma(x) + f_0(x) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\sigma(x) = E(\varepsilon(u(x))) \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1$$

$$\sigma v(x) = f_2(x) \quad \text{pe } \Gamma_2$$

$$u_\nu(x) = 0, \quad ||\sigma_\tau(x)|| \leq g(x, ||u_\tau(x)||) \quad \text{pe } \Gamma_3$$

$$\sigma_\tau(x) = -g(x, ||u_\tau(x)||) u_\tau(x) / ||u_\tau(x)|| \quad \text{daca } u_\tau(x) \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3.$$

Dupa descrierea modelului se propune urmatoarea formulare variationala

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = (f, v)_X \quad v \in X$$

$$b(u, \mu - \lambda) \leq 0 \quad \mu \in \Lambda(u).$$

Se studiaza existenta si marginirea solutiilor pentru aceasta problema variationala.

Lucrarea, publicata intr-un volum special ICAEM'14 (WCE 2014), este varianta extinsa si imbunatatita a lucrarii [A. Matei, A mixed variational formulation for a slip-dependent frictional contact model, Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2014, 2-4 July, 2014, London, U.K., pp 750-754 (ISBN: 978-988-19253-5-0, ISSN: 2078-0958).]

- **A. Matei**, Weak solutions via Lagrange multipliers for frictional contact models with normal compliance, special issue IECMSA 2014 Konuralp Journal of Mathematics, **Proceedings of 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications**) submitted.

Se considera urmatoarea problema de contact cu frecare si complianta normala:

$$\text{Div } \sigma(x) + f_0(x) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\sigma(x) = E(\varepsilon(u(x))) \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = 0 \quad \text{pe } \Gamma_1$$

$$\sigma v(x) = f_2(x) \quad \text{pe } \Gamma_2$$

$$-\sigma_\nu(x) = p_\nu(u_\nu(x) - g_\alpha), \quad ||\sigma_\tau(x)|| \leq p_\tau(x, u_\nu(x) - g_\alpha) \quad \text{pe } \Gamma_3$$

$$\sigma_\tau(x) = (-p_\tau(x, u_\nu(x) - g_\alpha) u_\tau(x)) / ||u_\tau(x)|| \quad \text{daca } u_\tau(x) \neq 0 \quad \text{pe } \Gamma_3.$$

Legea de contact cu frecare se scrie prin intermediul conditiei cu complianta normala in combinatie cu o versiune a legii lui Coulomb. Dupa formularea ipotezelor de lucru se investigheaza existenta si marginirea solutiilor utilizandu-se un rezultat abstract recent obtinut in lucrarea [A. Matei, On the solvability of mixed variational problems with solution-dependent

sets of Lagrange multipliers, *Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 143(05), 2013, 1047-1059].

➤ **Conferinte/Autori/Titluri/Rezumat**

- ❖ *The International Conference of Applied and Engineering Mathematics London, U.K., 2-4 July 2014 (ICAEM'14), into the frame of The World Congress on Engineering 2014 (WCE 2014) London*

- **A. Matei**, *A mixed variational formulation for a slip-dependent frictional contact model, Lecture Notes in Engineering and Computer Science: Proceedings of The World Congress on Engineering 2014, 2-4 July, 2014, London, U.K., pp 750-754 (ISBN: 978-988-19253-5-0, ISSN: 2078-0958).*

*S-a discutat un model tridimensional de contact cu frecare dependenta de alunecare. Pentru acest model s-a propus o formulare variationala ca problema variationala mixta a carei multime de multiplicatori este dependenta de solutie. Pentru problema variationala formulata s-a investigat existenta si marginirea solutiilor. Demonstratiile s-au bazat pe un recent rezultat care poate fi gasit in lucrarea [A. Matei, On the solvability of mixed variational problems with solution-dependent sets of Lagrange multipliers, *Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 143(05), 2013, 1047-1059]. (<http://www.iaeng.org/WCE2014/schedule/index.html>).*

- ❖ *The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 07- July 11, 2014, Madrid, Spain*

- **M.M. Boureanu**, *Variable exponent problems involving generalized operators*

*Studiul problemelor cu exponenti variabili devine din ce in ce mai popular datorita unei game largi de aplicatii in variate domenii. In acest context, suntem preocupati de problemele eliptice cu operatori generalizati ce sunt inruditi cu doua clase bine cunoscute de operatori. Mai exact, ne referim la operatorii de tip Laplace si la operatorii de tip curbura medie. Discutia noastra este purtata in cadrul spatiilor cu exponent variabil si demonstratiile se bazeaza pe teoria punctului critic ([http://www.aims sciences.org/AIMS-Conference/conf-reg2014/abstracts/ss34\\_Abtract.pdf](http://www.aims sciences.org/AIMS-Conference/conf-reg2014/abstracts/ss34_Abtract.pdf))*

- ❖ *3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Viena, 25-28 August, 2014*

- **A. Matei**, *Weak solutions via Lagrange multipliers for contact models with normal compliance.*

*S-a studiat o problema de contact tridimensională, cu frecare și complianță normală, pentru materiale liniar elastice, procesele vizate fiind cele stationare. S-au prezentat rezultate de existență*

si marginire pentru solutii in sens slab, utilizandu-se o formulare variationala mixta cu multimea multiplicatorilor dependenta de solutie. (<http://www.iecmsa.org/kitapciklar/abstractbook.pdf>)

➤ **Vizite de documentare-cercetare**

- **Andaluzia-Cristina Matei:** 10-18 august, 2014; Technische Universitat Munchen (TUM), Mathematik und Informatik Zentrum; la invitatia Prof. Barbara Wohlmuth.

*Tema vizitei: Probleme de evolutie in Mecanica Contactului intr-o abordare cu multiplicatori Lagrange.*

Director proiect,

Lect.univ.dr. Andaluzia-Cristina Matei