EXERCIȚII

a) ENUNȚURI

1) CAPITOLELE 1-5

1. Fie a, b, $c\in\mathbb{Z}$ numere impare. Să se arate că $\{x\in\mathbb{Q} \mid ax^2+bx+c=0\}=\varnothing$.

2. Să se arate că nu există un număr finit de numere raționale $r_1,\ldots,r_n$ a.î. orice număr $x\in\mathbb{Q}$ să se scrie sub forma $x=x_1r_1+\ldots+x_nr_n$ cu $x_i\in\mathbb{Z}$, $1\le i\le n$.

3. Fie a, b $\in\mathbb{R}$, a<b. Să se arate că $[a, b]\cap\mathbb{Q}\neq\varnothing$ şi $[a, b] \cap \mathbf{I}\neq\varnothing$.

4. Să se determine $k\in\mathbb{Z}$ a.î. rădăcinile ecuației $kx^2+(2k-1)x+k-2=0$ să fie raționale.

5. Dacă a, b, c , $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$, (a, b, c$\ge$0) atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$. Generalizare.

6. Să se arate că $\sqrt[3]{2}\notin\left\{ p+q\sqrt{r} \mid p,q,r\in\mathbb{Q},\ r\ge 0 \right\}$.

7. Să se determine mulțimea $\{a\in\mathbb{Q} \mid \text{există } b\in\mathbb{Q} \text{ a.î. } 5a^2-3a+16=b^2\}$.

8. Dacă a, b, $c\in\mathbb{Q}$ iar $p\in\mathbb{N}$ este un număr prim a.î. $a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}=0$, atunci a=b=c=0.

9. Să se demonstreze că dacă $a_1, \ldots, a_m$ sunt numere naturale două câte două diferite, nici unul dintre ele nefiind pătratul unui număr întreg mai mare decât 1, şi $b_1,\ldots,b_m$ numere întregi nenule, atunci $b_1\sqrt{a_1}+b_2\sqrt{a_2}+\ldots+b_m\sqrt{a_m}\neq 0$.

10. Dacă m, n $\in\mathbb{N}^*$ şi $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$, atunci $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$.

11. Să se arate că există a, b $\in\mathbf{I}$ a.î. $a^b\in\mathbb{N}$.

12. Fie $a\in\mathbb{R}^*$, a.î. $a+\frac{1}{a}\in\mathbb{Z}$. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{Z}$, $a^n+\frac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$.

13. Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$ a.î. $\cos\pi\alpha=\frac{1}{3}$, atunci $\alpha\in\mathbf{I}$.

14. Dacă a, $b\in\mathbb{N}^*$, a.î. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\in\mathbb{N}$, atunci a=b.

15. Să se arate că $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \in \mathbf{I}$.

16. Fie z , $z' \in \mathbb{C}$ a.î. $1+zz' \neq 0$ şi $|z|=|z'|=1$. Să se arate că $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

17. Fie $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$ a.î. $|z_1|=\ldots=|z_n|=r \neq 0$. Să se demonstreze că $\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots(z_n+z_1)}{z_1 z_2 \ldots z_n} \in \mathbb{R}$.

18. Fie $M \subseteq \mathbb{C}$ a.î. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\} \subseteq M$ şi pentru orice $z_1, z_2 \in M \Rightarrow z_1+z_2 \in M$. Să se demonstreze că $M=\mathbb{C}$.

19. Să se arate că numărul natural n este divizibil cu 2 (sau cu 5) dacă şi numai dacă cifra unităților sale este divizibilă prin 2 (sau respectiv prin 5).

20. Să se arate că numărul natural n este divizibil cu 4 (sau cu 25) dacă şi numai dacă numărul format din ultimele sale două cifre este divizibil cu 4 (respectiv cu 25). Mai general, numărul natural n este divizibil cu 2^k (sau cu 5^k) dacă şi numai dacă numărul format de ultimele k cifre din scrierea sa în baza zecimală este divizibil cu 2^k (respectiv cu 5^k).

21. Să se arate că numărul natural n este divizibil cu 3 (respectiv cu 9) dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3 (respectiv cu 9).

22. Să se arate că numărul natural n este divizibil cu 11 dacă şi numai dacă suma alternantă a cifrelor sale este divizibilă cu 11.

23. Să se arate că numărul natural n este divizibil cu 17, respectiv cu 49, dacă şi numai dacă diferența, respectiv suma, dintre dublul numărului obținut din numărul dat suprimându-i ultimele două cifre şi numărul format de cifrele suprimate în ordinea în care se află în numărul dat sunt divizibile cu 17, respectiv cu 49.

24. Să se arate că numărul natural n este divizibil cu 17, respectiv cu 59 dacă şi numai dacă diferența dintre triplul numărului obținut din numărul dat suprimându-i ultimele trei cifre şi numărul format din cifrele suprimate în ordinea în care se află în numărul dat este multiplu de 17, respectiv 59.

25. Să se arate că numărul natural n este divizibil cu 97, respectiv cu 103, dacă şi numai dacă suma, respectiv diferența, dintre triplul numărului obținut din numărul dat suprimându-i ultimele două cifre şi numărul format din cifrele suprimate în ordinea în care se află în numărul dat este multiplu de 97, respectiv 103.

26. Să se arate că numărul natural n este divizibil cu 101 dacă şi numai dacă despărțindu-l în grupe de câte două cifre începând de la dreapta, diferența dintre suma numerelor formate de grupele de rang impar şi suma numerelor formate de grupele de rang par este divizibilă cu 101.

27. Să se arate că numărul natural n este divizibil prin $10k\pm1$ dacă şi numai dacă suprimându-i ultima cifră şi scăzând respectiv adunând de k ori cifra suprimată se obţine un număr divizibil cu $10k\pm1$. Ca aplicaţie să se enunţe criterii de divizibilitate cu 19, 29, 49, şi 21, 31, 41.

28. În ce sistem de numeraţie este valabilă înmulţirea $25\times314=10274$?

29. În ce bază 297 este divizor al lui 792 ?

30. În orice sistem de numeraţie, numărul 10101 este divizibil cu 111.

31. În orice bază mai mare ca 7 numărul 1367631 este cub perfect.

32. Un număr natural este divizibil cu 2, în sistemele de numeraţie cu bază pară, dacă şi numai dacă ultima sa cifră este pară, şi în sistemele de numeraţie cu bază impară, dacă şi numai dacă numărul cifrelor impare este par.

33. Un număr natural este divizibil cu 3, în sistemele de numeraţie cu baza $b=3m$, dacă ultima sa cifră este multiplu de 3, în sistemele de numeraţie cu baza $b=3m+1$, dacă suma cifrelor sale este multiplu de 3, în sistemele de numeraţie cu baza $b=3m-1$, dacă diferenţa între suma cifrelor de ordin par şi suma cifrelor de ordin impar este multiplu de 3.

34. Să se arate că diferenţa dintre un număr natural şi inversul său, scrise în baza b, se divide cu $b-1$. Dacă numărul cifrelor numărului dat este impar această diferenţă se divide şi prin $b+1$.

35. Un număr natural scris în baza b se divide prin $bk+1$ sau $bk-1$ (unde k este tot natural) dacă şi numai dacă suprimându-i ultima cifră şi scăzând respectiv adunând de k ori cifra suprimată se obţine un număr divizibil prin $bk+1$ sau $bk-1$.

36. Se aşază cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 într-o ordine oarecare şi se obţine numărul n în sistemul de numeraţie cu baza 12, apoi într-o altă ordine oarecare şi se obţine numărul m (în aceiaşi bază). Să se arate că $n \nmid m$.

37. Să se arate că oricare ar fi numărul n scris în sistemul de numeraţie cu baza 10, există un alt număr de n cifre, scris doar cu cifrele 1 şi 2 divizibil prin 2^n. Să se studieze problema şi în sistemele de numeraţie cu baza 4 şi 6.

38. Să se demonstreze că în sistemul de numeraţie cu baza 6, nici un număr format din mai multe cifre, toate egale, nu este pătrat perfect.

39. Să se arate că în sistemul de numeraţie cu baza 12, nici un număr format din mai multe cifre, toate egale nu poate fi pătrat perfect.

40. Să se demonstreze că în sistemul de numeraţie cu baza 6, nici un număr cu toate cifrele egale nu este cub perfect.

41. Să se demonstreze că pentru orice număr natural N avem : $\frac{S(8N)}{S(N)} \geq \frac{1}{8}$, unde S(A) este suma cifrelor numărului A (în scrierea zecimală).

2) CAPITOLUL 6

1. Să se arate că pentru $n \geq 4$ numărul $1!+2!+\ldots+n!$ nu este pătrat perfect.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$.

i) Să se arate că $16 \mid 24n^2 + 8n$.

ii) Să se deducă de aici că restul împărțirii lui $(2n+1)^4$ prin 16 este 1.

iii) Dacă există $x_1,\ldots, x_k \in \mathbb{N}$ a.î. $16n+15= x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_k^4$, atunci $k \geq 15$.

3. Să se arate că dacă $\frac{p}{q}$ şi $\frac{r}{s}$ sunt fracții ireductibile a.î. $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = 1$, atunci $q=s$.

4. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci $(a, b)[a, b] = a \cdot b$.

5. Fie $x_1, x_2,\ldots,x_n \in \{\pm 1\}$ a.î. $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. Să se demonstreze că $4|n$.

6. Să se demonstreze că pentru orice număr prim p, numărul: $\underbrace{11...1}_{p\ ori}\underbrace{22...2}_{p\ ori}\underbrace{33...3}_{p\ ori}...\underbrace{99...9}_{p\ ori} - 123456789$ se divide prin p.

7. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ atunci cea mai mare putere naturală a lui 2 ce divide pe $[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$ este $n+1$.

8. Dacă $p \geq 3$ este un număr prim, atunci:

$$[(\sqrt{5}+2)^p] - 2^{p+1} \equiv 0(p)$$

9. Să se arate că pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ exponentul maxim al lui 2 în $(n+1)(n+2)\ldots(2n)$ este n.

10. Să se arate că orice număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ admite multiplii ce se scriu în sistemul zecimal doar cu 0 şi 1. Să se deducă de aici că orice număr natural $n \in \mathbb{N}$ a.î. $(n, 10)=1$ admite multiplii în care toate cifrele sunt 1.

11. Să se arate că dacă $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ iar n este impar, atunci (a^n-1, a^m+1) este 1 sau 2.

12. Dacă $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $m \neq n$, atunci :

$$(a^{2^m}+1, a^{2^n}+1) = \begin{cases} 1 & daca\ a\ este\ par \\ 2 & daca\ a\ este\ impar \end{cases}$$

13. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x=[(2+\sqrt{3})^n]$. Atunci $\frac{(x-1)(x+3)}{12}$ este pătratul unui număr natural.

14. Dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, atunci $n \nmid 2^n - 1$.

15. Dacă p este un număr prim, atunci $C_{2p}^{p} \equiv 2$ (p).

16. Fie p un număr prim iar a, $b\in\mathbb{N}$ a.î. $a\geq b$. Atunci $C_{pa}^{pb} \equiv C_{a}^{b}$ (p).

17. Dacă a, b, $c\in\mathbb{N}^*$, atunci $([a, b], c)=[(a, c), (b, c)]$.

18. Dacă a, b, $c\in\mathbb{N}^*$, atunci $[a,b,c]=\dfrac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}$.

19. Dacă a, b, $c\in\mathbb{N}^*$, atunci $\dfrac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\dfrac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}$.

20. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\in\mathbb{Z}$. Dacă:

i) $9 \mid \sum_{k=1}^{3} a_k^3$, atunci $3 \mid \prod_{k=1}^{3} a_k$.

ii) $9 \mid \sum_{k=1}^{5} a_k^3$, atunci $3 \mid \prod_{k=1}^{5} a_k$

21. Să se arate că $2^{2\cdot 73\cdot 1103} - 2 \equiv 0$ $(2\cdot 73\cdot 1103)$.

22. Să se arate că $2^{2^5}+1 \equiv 0$ (641).

23. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x \equiv 1\ (7) \\ x \equiv 4\ (9) \\ x \equiv 3\ (5) \end{cases}$$

24. Fie $f\in\mathbb{Z}[X]$ şi $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_t^{\alpha_t}$ descompunerea lui n în factori primi. Să se arate că $f(x)\equiv 0$ (n) are soluţie dacă şi numai dacă $f(x)\equiv 0$ $(p_i^{\alpha_i})$ are soluţie pentru i=1, 2, …,t.

25. Să se arate că $x^2 \equiv 1$ (2^b) are o soluţie dacă b=1, două soluţii dacă b=2 şi 4 soluţii dacă $b\geq 3$.

26. Factorialul căror numere naturale n se termină în 1000 de zerouri ?

27. Dacă m, $n\in\mathbb{N}$, atunci $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}\in\mathbb{N}$.

28. Dacă $d_1,d_2,\ldots d_k$ sunt toţi divizorii naturali ai unui număr natural $n\geq 1$ atunci $(d_1d_2\ldots d_k)^2=n^k$.

29. Fie A=$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{1997\cdot 1998}$ şi

B=$\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+...+\frac{1}{1998\cdot 1000}$

Arătaţi că $\frac{A}{B}\in\mathbb{N}^*$.

30. Demonstraţi că un produs de opt numere naturale consecutive nu poate fi pătratul unui număr natural.

31. Fie a, b, c$\in\mathbb{Z}$ a.î. $a+b+c|a^2+b^2+c^2$.

Demonstraţi că există o infinitate de valori naturale distincte ale lui n pentru care $a+b+c|a^n+b^n+c^n$.

32. Dacă $n\in\mathbb{N}$ şi $a_n=1^n+2^n+3^n+4^n$, atunci ultima cifră a lui a_n este 4 dacă $n\equiv 0(4)$ şi 0 în rest.

33. Demonstraţi că $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\notin\mathbb{N}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$.

34. Să se demonstreze că pentru orice număr impar a se găseşte un număr natural b a.î. 2^b-1 se divide la a.

3) CAPITOLUL 7

1. Fie a, b, c, d$\in\mathbb{N}^*$ a.î. ad=bc. Să se arate că a+b+c+d nu poate fi număr prim.

2. Determinaţi toate numerele naturale $n\in\mathbb{N}$ pentru care numerele n+1, n+3, n+7, n+9, n+13 şi n+15 sunt simultan prime.

3. Determinaţi toate numerele naturale $n\in\mathbb{N}$ pentru care numerele n, n+2, n+6, n+8, n+12, şi n+14 sunt simultan prime.

4. Să se determine numerele prime p pentru care $p\mid 2^p+1$.

5. Fie $n\in\mathbb{N}$ a.î. 2^n+1 este număr prim . Atunci n=0 sau $n=2^m$, cu $m\in\mathbb{N}$.

6. Dacă p este un număr prim p>3, atunci $4p^2+1$ se poate scrie ca o sumă de trei pătrate de numere naturale.

7. Dacă $n\geq 10$, atunci $p_n^2<2^n$ (p_n fiind al n-ulea termen din şirul numerelor prime).

8. Fie p un număr prim şi $b_1, b_2, \ldots, b_r$ numere întregi cu $0<b_i<p$ pentru orice $1\leq i\leq r$. Să se arate că utilizând numerele $b_1, b_2, \ldots, b_r$ se pot forma r+1 sume ce dau resturi diferite la împărţirea prin p.

9. Dacă p este un număr prim arbitrar, atunci din orice 2p-1 numere întregi se pot alege p a.î. suma lor să se dividă prin p.

10. Dacă $n\geq 2$ este un număr natural oarecare, atunci din oricare 2n-1 numere întregi se pot alege n a.î. suma lor să se dividă prin n.

11. Demonstrați că orice număr natural $n\geq 7$ se poate scrie sub forma $n=a+b$ cu $a, b\in\mathbb{N}$, $a, b\geq 2$ şi $(a, b)=1$.

12. Demonstrați că pentru orice $k\geq 3$,

$$p_{k+1}+p_{k+2}\leq p_1 p_2 \ldots p_k .$$

13. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ notăm prin q_n cel mai mic număr prim a.î. $q_n \nmid n$. Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{n}=0$.

14. Să se arate că pentru $n\geq 12$, $\frac{n}{p_n}<\frac{1}{3}$.

15. Să se arate că pentru orice $n\geq 230$, $p_{2n+1}<3\, p_{n-2}$.

4) CAPITOLUL 8

1. Să se determine toate numerele $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\varphi(n!)=2^n$.

2. Dacă $m, n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\varphi(m\cdot n)\leq\sqrt{\varphi(m^2)\cdot\varphi(n^2)}$.

3. Să se arate că un număr natural este *perfect* (adică $\sigma(n)=2n$) dacă şi numai dacă $n=2^t(2^{t+1}-1)$, cu $t\in\mathbb{N}$ iar $2^{t+1}-1$ este număr prim.

4. Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$

$$\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right].$$

(unde reamintim că $\tau(n)$ =numărul divizorilor naturali ai lui n).

5. Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$

$$\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+n\cdot\left[\frac{n}{n}\right]$$

(unde reamintim că $\sigma(n)$=suma divizorilor naturali ai lui n).

6. Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$

$$\tau(n)=\sum_{m\geq 1}\left(\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{n-1}{m}\right]\right).$$

7. Dacă $x\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, atunci

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

8. Să se demonstreze că pentru un număr natural n≥2, $\frac{\pi(n-1)}{n-1}<\frac{\pi(n)}{n}$ dacă şi numai dacă n este prim (π(n)=numărul numerelor prime mai mici decât n)

9. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sigma(n\ !)}{n\ !}=\infty$.

10. Fie f:$\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ a.î. f(mn)=f(m)f(n) pentru orice m, n∈$\mathbb{N}^*$ iar $(p_k)_{k\geq 0}$ şirul numerelor prime. Dacă $f(p_k)=k+1$ pentru orice k∈$\mathbb{N}$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{f^2(n)}=2$.

<u>5) CAPITOLUL 9</u>

1. Să se calculeze $\left(\frac{15}{71}\right)$, $\left(\frac{6}{35}\right)$ şi $\left(\frac{335}{2999}\right)$.

2. Să se arate că există o infinitate de numere prime de forma 4n+1, cu n∈$\mathbb{N}$.

3. Dacă p≥5 este un număr prim, atunci:

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\begin{cases}1 & daca \quad p\equiv 1\ (6)\\ -1 & daca \quad p\equiv -1\ (6)\end{cases}$$

4. 2. Să se arate că există o infinitate de numere prime de forma 6n+1, cu n∈$\mathbb{N}$.

5. Să se stabilească dacă congruenţa $x^2\equiv 10$ (13) are sau nu soluţii.

6. Aceiaşi chestiune pentru congruenţa $x^2\equiv 21$ (23).

7. Dacă p este un număr prim de forma 6k+1, atunci există x, y∈$\mathbb{N}$ a.î. $p=3x^2+y^2$.

6) CAPITOLUL 10

1. Să se arate că:

$\sqrt{a^2-1}=(a-1;\overline{1,2a-2})$, $\sqrt{a^2-a}=(a-1;\overline{2,2a-2})$, pentru a∈$\mathbb{N}$, a ≥ 2.

2. Dacă a este un număr par, a≥2, atunci

$\sqrt{a^2+4}=(a;\overline{\frac{a-1}{2},1,1,\frac{a-1}{2},2a})$ iar dacă a≥4 atunci

$\sqrt{a^2-4}=(a-1;\overline{1,\frac{a-3}{2},2,\frac{a-3}{2},1,2a-2})$.

3.Dacă $a\in\mathbb{N}$, atunci $\sqrt{4a^2+4}=(2a;\overline{a,4a})$.

4.Dacă $a, n\in\mathbb{N}$, atunci

$$\sqrt{(na)^2+a}=(na;\overline{2n,2an})$$

$$\sqrt{(na)^2+2a}=(na;\overline{n,2na})$$

$$\sqrt{(na)^2-a}=(na-1;\overline{1,2n-2,1,2(na-1)})\quad (n\geq 2).$$

5. Să se determine numerele naturale de 3 cifre $\overline{xyz}$ a.î. $317 \mid \overline{xyz398246}$.

6. Fie $\alpha=[a_0;a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n+1}]$ unde $a_{n+i}=a_{n-i+1}$, $1\leq i\leq n$.

Dacă notăm redusele lui α prin $\pi_n=\frac{p_n}{q_n}$, atunci $p_{2n+1}=p_n^2+p_{n-1}^2$ şi $q_{2n}=q_n^2+q_{n-1}^2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

7. Fie $\alpha=[1;a_1, \dots, a_n, a_n, \dots, a_2, a_1]$ iar $\pi_n=\frac{p_n}{q_n}$ a n-a redusă a lui α.($n\in\mathbb{N}^*$). Să se arate că $q_{2n}=\frac{p_{2n}p_{2n+1}-1}{p_{2n}+p_{2n+1}}$.

8. Dacă $\pi_n=\frac{p_n}{q_n}$ este a n-a redusă a fracției continue ataşată lui $\sqrt{2}$ atunci :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n}q_k\right)\sqrt{2}\right\}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9. Dacă $\pi_n=\frac{p_n}{q_n}$ este a n-a redusă a lui $\sqrt{2}$, atunci:

i) $p_{n+1}=p_n+2q_n$ ii) $q_{n+1}=p_n+q_n$
iii) $p_{n+1}=q_{n+1}+q_n$ iv) $6p_{n+1}=p_{n+3}+p_{n-1}$ (n≥3)
v) $6q_{n+1}=q_{n+2}+q_{n-1}$ (n≥3) vi) $p_{n+1}=6(p_n-p_{n-2})+p_{n-3}$ (n≥3)
vii) $q_{n+1}=6(q_n-q_{n-1})+q_{n-3}$ (n≥3) viii) $p_n^2-2q_n^2=(-1)^n$

ix)$p_{n-1}^{2}-p_n p_{n-2}=2(-1)^{n-1}$ $(n\geq 2)$

10. Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{N}^*$numitorii reduselor de rang par ai fracției continue a lui $\sqrt{a^2+1}$ sunt numere naturale impare, iar cei de rang impar sunt numere naturale pare.

11. Să se dezvolte în fracție continuă $\sqrt{D}$ cu $D=[(4m^2+1)n+m]^2+4mn+1$, m, $n\in\mathbb{N}$.

7) CAPITOLUL 11

1. Fie $q\in\mathbb{Q}$, $0<q<1$. Să se arate că există $n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $\frac{1}{n+1}\leq q<\frac{1}{n}$.

Să se deducă de aici că orice $q\in\mathbb{Q}$ cu $0<q<1$ se poate reprezenta sub forma $q=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{n_i+1}$ cu $n_i\in\mathbb{N}$ toate distincte şi $k\in\mathbb{N}^*$. Să se efectueze această descompunere în cazurile particulare $q=\frac{7}{22}$ şi $q=\frac{47}{60}$.

2. Să se arate că orice număr natural n se poate reprezenta în mod unic sub forma:

$$n = e_0 + 3e_1 + \ldots + 3^k e_k$$

unde pentru orice i, $0\leq i\leq k$ $e_i\in\{-1, 0, 1\}$.

3. Să se arate că orice fracție subunitară ireductibilă $\frac{a}{b}$ se poate scrie sub forma:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\ldots+\frac{1}{q_1q_2\ldots q_n}$$ unde $q_1,\ldots,q_n\in\mathbb{N}^*$, $q_1\leq q_2\leq\ldots\leq q_n$.

4. Demonstrați că orice număr întreg n admite o infinitate de reprezentări sub forma $n = x^2 + y^2-z^2$ cu x, y, z numere naturale > 1.

5. Demonstrați că numărul 3^{2k} (cu $k\in\mathbb{N}^*$) se poate scrie ca sumă a 3^k numere naturale consecutive.

6. Demonstrați că nici unul dintre numerele lui Fermat $F_n=2^{2^n}+1$ cu $n>1$ nu se poate scrie sub foma p+q, cu p şi q numere prime.

7. Demonstrați că pentru orice $z\in\mathbb{Z}$,un număr rațional $x>1$ se poate scrie sub forma:

$x=(1+\frac{1}{k})(1+\frac{1}{k+1})...(1+\frac{1}{k+s})$, cu s∈ℕ şi k∈ℤ, k>z.

8. Să se arate că orice număr prim $p\geq 3$ se poate scrie în mod unic ca diferență a două pătrate de numere naturale.

9. Care numere naturale pot fi scrise ca diferență de două pătrate de numere întregi ?

10. Să se arate că numerele întregi de forma 4m+3 nu se pot scrie sub forma x^2-3y^2 cu x, y∈ℕ.

11. Să se arate că dacă n se poate scrie sub forma x^2-3y^2 cu x, y∈ℕ, atunci n se poate scrie sub această formă într-o infinitate de moduri.

12. Dacă p este prim, p>3 atunci $4p^2+1$ se poate scrie ca sumă de 3 pătrate de numere naturale.

13. Să se arate că orice fracție ireductibilă $\frac{m}{n}$ cu $0<\frac{m}{n}<1$ poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+...+\frac{1}{q_r}$$

unde $q_i\in\mathbb{N}^*$ pentru $1\leq i\leq r$ a.î. $q_1<q_2<\ldots<q_r$ şi $q_k|\ q_{k-1}$ pentru orice $2\leq k\leq r$.

14. Demonstrați că dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci orice număr $k\in\{1,\ 2,\ \ldots\frac{n(n+1)}{2}\}$ se poate scrie sub forma $k=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{n}{a_n}$ cu $a_1, a_2,\ldots a_n\in\mathbb{N}^*$.

15. Să se arate că numărul descompunerilor unui număr natural nenul n ca sumă de numere naturale nenule consecutive este egal cu numărul divizorilor impari ai lui n.

16. Să se demonstreze că orice număr natural n poate fi scris sub forma $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, unde x şi y sunt numere naturale şi că această reprezentare este unică.

8) CAPITOLUL 12

1. Să se arate că în $\mathbb{Z}^3$ ecuația $x^2+y^2+z^2=2xyz$ are numai soluția banală (0, 0, 0).

2. Să se arate că în $\mathbb{Z}^3$ ecuația $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$ are numai soluția banală (0, 0, 0, 0).

3. Să se arate că în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $3^x-2^y=1$ admite numai soluţiile (1, 1) şi (2, 3).

4. Să se rezolve ecuaţia $x^2+y^2+2xy-mx-my-m-1=0$ în $\mathbb{N}^2$ ştiind că $m\in\mathbb{N}$.

5. Să se arate că ecuaţia $x^2-y^3=7$ nu admite soluţii $(x, y)\in\mathbb{N}^2$.

6. Să se arate că ecuaţia $x^2-2y^2+8z=3$ nu admite soluţii $(x, y, z)\in\mathbb{Z}^3$.

7. Dacă $x, y, z\in\mathbb{N}$ iar $x^2+y^2+1=xyz$, atunci $z=3$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{N}^{*\,3}$ ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

9. Să se rezolve în $\mathbb{Z}^{*\,2}$ ecuaţia $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$ unde $a\in\mathbb{Z}^*$.

10. Să se rezolve în $\mathbb{Q}_+^*$ ecuaţia $x^y=y^x$.

11. Să se rezolve în $\mathbb{N}^{*\,4}$ ecuaţia $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}=1$.

12. Să se demonstreze că există o infinitate de perechi $(x, y)\in\mathbb{N}^2$ pentru care $3x^2-7y^2+1=0$.

13. Să se rezolve în $\mathbb{N}^4$ ecuaţia $x^2+y^2+z^2=t^2$.

14. Să se determine $x, y, z, t\in\mathbb{N}$ pentru care $xy=zt$.

15. Dacă $x, y, z\in\mathbb{N}$ a.î. $x^2+y^2+z^2=1993$, atunci $x+y+z$ nu este pătrat perfect.

16. Dacă $n, p\in\mathbb{N}^*$, atunci ecuaţia $x_1^p+\ldots+x_n^p=(x_1+\ldots+x_n)^p+1$ nu are soluţii în numere întregi.

17. Să se arate că ecuaţia $y^2=x^5-4$ nu are soluţii întregi.

9) CAPITOLUL 13

1. Să se demonstreze că dacă un cerc având raza de lungime un număr natural trece prin două puncte laticiale situate la distanţa 1 unul de celălalt, atunci pe circumferinţa sa nu se mai află nici un alt punct laticial.

2. Să se demonstreze că dacă pentru orice număr natural n există în plan un cerc de centru având coordonatele (a, b) ce conţine în interiorul său exact n puncte laticiale, atunci a şi b nu pot fi simultan raţionale.

3. Fie $\mathfrak{C}$ cercul circumscris pătratului determinat de punctele laticiale de coordonate (0, 0), (1978, 0), (1978, 1978) şi (0, 1978).

Să se demonstreze că $\mathfrak{C}$ nu mai conține pe circumferința sa nici un alt punct laticial diferit de cele patru vârfuri ale pătratului.

4. Să se demonstreze că oricare ar fi 9 puncte laticiale în spațiu, există cel puțin un punct laticial situat în interiorul unui segment determinat de punctele date.

b) SOLUȚII

1) CAPITOLUL 1-5

1. Fie $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ cu p, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. (putem presupune că p şi q nu sunt simultan pare).

Atunci $ax^2 + bx + c = \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2}$. Cum în fiecare din cazurile (p, q impare) sau (p par, q impar) şi (p impar, q par) numărul $ap^2 + bpq + cq^2$ este impar (căci prin ipoteză a, b, c sunt impare) deducem că $ax^2+bx+c \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, de unde concluzia.

2. Presupunem prin absurd că există $r_i = \frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$, $1 \leq i \leq n$ a.î. orice $x \in \mathbb{Q}$ să se scrie sub forma $x = x_1r_1 + \ldots + x_nr_n$ cu $x_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$. (evident p_i, $q_i \in \mathbb{Z}$ şi $q_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$).

În mod evident nu este posibil ca pentru orice $1 \leq i \leq n$, $r_i \in \mathbb{Z}$ (căci atunci putem alege $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ şi nu vor exista $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = x_1r_1 + \ldots + x_nr_n$).

Astfel, scriind $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ cu $(p_i, q_i)=1$ există indici i a.î. $1 \leq i \leq n$ şi $q_i \neq \pm 1$.

Să alegem $q \in \mathbb{Z}$ a.î. $q \nmid q_1 \ldots q_n$. Alegând $x = \frac{1}{q}$ ar trebui să existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ a.î. $\frac{1}{q} = x_1r_1 + \ldots + x_nr_n \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_1 \ldots q_n}$ (cu $\alpha \in \mathbb{Z}^*$) $\Leftrightarrow q_1 \cdot \ldots \cdot q_n = \alpha \cdot q$, de unde ar trebui ca $q \mid q_1 \ldots q_n$ - absurd.

3. Să arătăm la început că $[a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Fie $m = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1 > \frac{1}{b-a}$; deci $m(b-a) > \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$, de unde mb-ma>1, adică mb>ma+1.

Deci mb>[mb]>ma. Notând [mb] =k avem că mb>k>ma.

Astfel, ma<k<mb, de unde $a < \frac{k}{m} < b$, deci $\frac{k}{m} \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$.

Să demonstrăm acum că şi $[a, b] \cap \mathbf{I} \neq \varnothing$. Pentru aceasta fie $s \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$ şi $r \in (a, r) \cap \mathbb{Q}$. Atunci $(r, s) \subset (a, b)$ cu r, s $\in \mathbb{Q}$ şi pentru orice m, n $\in \mathbb{Z}^*$ avem $\frac{m}{n}\sqrt{2} \in \mathbf{I}$. Dacă $\frac{p}{q} \in (0, s-r) \cap \mathbb{Q}$ atunci $0 < \frac{p}{2q}\sqrt{2} < s - r$ şi $\frac{p}{2q}\sqrt{2} \in \mathbf{I}$. Cum $r \in \mathbb{Q}$, $r + \frac{p}{2q}\sqrt{2} \in (r, s) \cap \mathbf{I}$ şi cum $(r, s) \subset (a, b)$ deducem că $r + \frac{p}{2q}\sqrt{2} \in (a, b) \cap \mathbf{I}$, adică $(a, b) \cap \mathbf{I} \neq \varnothing$.

4. $\Delta=(2k-1)^2-4k(k-2)=4k^2-4k+1-4k^2+8k=4k+1$. Pentru ca rădăcinile $x_{1,\,2} = \frac{1-2k \pm \sqrt{4k+1}}{2k} \in \mathbb{Q}$ trebuie ca $4k+1=n^2$, cu $n \in \mathbb{Z}$.

Scriind că $n=2p+1$ cu $p \in \mathbb{Z}$ obținem că $4k+1=(2p+1)^2=4p^2+4p+1$, de unde $k=p^2+p$ cu $p \in \mathbb{Z}$.

5. Dacă $x = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$, atunci $x - \sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$, de unde $x^2 - 2x\sqrt{a} + a = b + c + 2\sqrt{bc}$ egalitate pe care o scriem sub forma $\alpha - 2x\sqrt{a} = 2\sqrt{bc}$ (cu $\alpha = x^2 + a - b - c \in \mathbb{Q}$). Ridicând din nou la pătrat deducem că $\alpha^2 + 4ax^2 - 4\alpha \cdot x\sqrt{a} = 4bc$.

Dacă $\alpha \cdot x \neq 0$, atunci în mod evident $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$.

Dacă $\alpha \cdot x = 0$, atunci $\alpha = 0$ sau x=0. (dacă x=0 atunci $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = 0 \in \mathbb{Q}$).

Dacă $\alpha = 0$, atunci $x^2= - a+b+c$ sau

$$a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} = -a + b + c$$

$\Leftrightarrow 2a + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca} = 0$, de unde a=ab=bc=ac=0.

Dacă b=0, (cum a=0) deducem că $x = \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$.

Dacă c=0 atunci $\sqrt{c}=0\in\mathbb{Q}$.

În toate cazurile am ajuns la concluzia că $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Notând din nou $y=\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ deducem că $y-\sqrt{a}=\sqrt{b}$ deci $y^2-2y\sqrt{a}+a=b$, de unde $2y\sqrt{a}=y^2+a-b$.

Dacă y≠0 atunci din nou $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ şi deducem imediat că şi $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ pe când dacă y=0, atunci $\sqrt{a}=\sqrt{b}=0\in\mathbb{Q}$.

<u>*Observaţie*</u> Procedând inductiv după n deducem că dacă a_1, …, a_n, $\sqrt{a_1}+...+\sqrt{a_n}\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},...,\sqrt{a_n}\in\mathbb{Q}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

6. Dacă q = 0 sau $\sqrt{r}\in\mathbb{Q}$ concluzia este clară.

Să presupunem că q≠0 şi $\sqrt{r}\notin\mathbb{Q}$. Dacă prin absurd $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$ atunci $2=p^3+3q^2pr+\sqrt{r}\left(3qp^2+q^3r\right)$, de unde $p^3+3q^2pr=2$ şi $3qp^2+q^3r=0$. Din $3qp^2+q^3r=0\Rightarrow q(3p^2+q^2r)=0$ şi cum q≠0 deducem că $3p^2+q^2r=0$, adică p=r=0 şi atunci obţinem contradicţiile: 0=2 şi $\sqrt{r}\in\mathbb{Q}$.

7. Avem de găsit soluţiile $(a, b)\in\mathbb{Q}^2$ pentru care $5a^2-3a+16=b^2$. Observăm că o soluţie particulară este (0, 4). Fie $a=a_1$ şi $b=b_1+4$. Înlocuind obţinem că $5a_1^2-b_1^2-3a_1-8b_1=0$. Pentru $(a_1, b_1)\neq(0, 0)$ avem $\frac{b_1}{a_1}=\frac{m}{n}$ cu (m, n)=1.

Înlocuind $b_1=\frac{m}{n}a_1$ obţinem $a_1=\frac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2}$ astfel că mulţimea cerută este $\{a\in\mathbb{Q}\mid a=\frac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2}$, m, n $\in\mathbb{Z}$, (m, n)=1 $\}$.

8. Scriem egalitatea $(\star)$ $a+b\cdot\sqrt[3]{p}+c\cdot\sqrt[3]{p^2}=0$ sub forma $b\cdot\sqrt[3]{p}+c\cdot\sqrt[3]{p^2}=-a$. Înmulţind ambii membri ai lui $(\star)$ cu $\sqrt[3]{p}$ obţinem $a\cdot\sqrt[3]{p}+b\cdot\sqrt[3]{p^2}=-cp$, de unde sistemul

$$(\star\star)\quad \begin{cases} b\cdot\sqrt[3]{p}+c\cdot\sqrt[3]{p^2} & =-a \\ a\cdot\sqrt[3]{p}+b\cdot\sqrt[3]{p^2} & =-cp \end{cases}$$

Înmulțind prima ecuație a lui $(\star\star)$ cu –b iar pe a doua cu c, prin adunare obținem $\sqrt[3]{p}\cdot\left(ac-b^2\right)=ab-c^2p$, de unde $ac=b^2$ şi $ab=c^2p$. Atunci $abc=c^3p$, adică $b^3=c^3p$, de unde b=c=0 (căci în caz contrar am deduce că $\sqrt[3]{p}=\frac{b}{c}\in\mathbb{Q}$ - absurd). Rezultă imediat că şi a=0.

9. Până la n=4 se demonstrează uşor prin reducere la absurd, ridicând de câteva ori la pătrat ambii membri (grupați în mod convenabil). În cazul general, vom face o demonstrație prin inducție după numărul factorilor primi diferiți p_1, p_2, …, p_r care divid pe cel puțin unul dintre numerele a_i. Este util să se demonstreze prin inducție o afirmație mai tare:

Există numere întregi c_1, d_1, …, c_e, d_e, a.î. $d_i\neq 0$, $c_i\geq 1$, toți divizorii primi ai numerelor c_i fac parte dintre p_1, …,p_r şi produsul $\left(d_1\sqrt{c_1}+...+d_e\sqrt{c_e}\right)\left(b_1\sqrt{a_1}+...+b_n\sqrt{a_n}\right)$ este un număr întreg nenul.

Vom nota $S=\left(b_1\sqrt{a_1}+...+b_n\sqrt{a_n}\right)$ şi $S'=\left(d_1\sqrt{c_1}+...+d_e\sqrt{c_e}\right)$.

Dacă r=1, atunci S are forma $b_1\sqrt{p_1}+b_2\sqrt{1}$ şi se poate lua $S'=b_1\sqrt{p_1}-b_2$, atunci $SS'=b_1^2p_1-b_2^2\neq 0$.

Presupunem acum că $r\geq 2$ şi că afirmația noastră este adevărată pentru toate valorile mai mici decât r.

Vom nota prin S_1, …, S_8 sumele de forma $\beta_1\sqrt{\alpha_1}+...+\beta_m\sqrt{\alpha_m}$, unde β_i sunt numere întregi, α_i sunt numere întregi pozitive libere de pătrate, cu divizorii primi cuprinşi între p_1, p_2, …, p_{r-1}, S_1, …, S_8 dacă nu se precizează contrariul, se pot egala cu 0.

Suma S poate fi scrisă sub forma $S=S_1+S_2\sqrt{p_r}$, unde $S_2\neq 0$. După presupunerea de inducție există o astfel de sumă S_2 a.î. $f=S_3S_2$ este un număr întreg nenul. Produsul S_3S are forma $S_3S=S_2S+f\sqrt{p_r}=S_4+f\sqrt{p_r}$, cu $f\neq 0$. Rămâne de demonstrat că $S_5=(S_3S_4-f\cdot S_3\sqrt{p_r})S=S_4^2-f^2p_r\neq 0$.

Dacă $S_4=0$, atunci este evident. Presupunem că $S_4\neq 0$. Fie $S_4=\beta_1\sqrt{\alpha_1}+...+\beta_m\sqrt{\alpha_m}$; dacă m=1, atunci $S_4=\beta_1\sqrt{\alpha_1}$; Atunci

$S_4^2 - f^2 p_r = \beta_1^2 \alpha_1 - f^2 p_r \neq 0$ (Într-adevăr, $\beta_1^2 \alpha_1$ se divide printr-o putere pară a lui p_r, iar $f^2 p_r$ printr-una impară).

Dacă m>1, atunci S_4 poate fi scrisă sub forma $S_4 = S_6 + S_7 \sqrt{p}$, unde p este unul dintre numerele prime $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$, $S_6 S_7 \neq 0$ şi numerele de sub semnul radicalului din sumele $S_6 S_7$ nu se divid prin p. Atunci $S_5 = S_6^2 + S_7^2 p - f^2 p_r + 2 S_6 S_7 \sqrt{p} \neq 0$ datorită ipotezei de inducție, pentru că $2S_6S_7 \neq 0$.

Din nou din ipoteza de inducție se găseşte un S_6 a.î. S_5S_6 este un număr nenul g. Vom lua $S' = S_8 (S_3 S_4 - f \cdot S_3 \sqrt{p_r})$. Atunci $SS' = S_5 S_8 = g$.

Observație În particular, dacă b_i sunt numere raționale oarecare şi a_i numere naturale diferite două câte două, mai mari decât 1 şi libere de pătrate (i=1, 2, …, n ; n>1), atunci numărul $\left(b_1 \sqrt{a_1} + \ldots + b_n \sqrt{a_n}\right)$ este irațional.

10. Din $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$ deducem că $7n^2 - m^2 > 0$, adică $7n^2 - m^2 \geq 1$.

Să arătăm de exemplu că egalitățile $7n^2 - m^2 = 1, 2$ sunt imposibile.

Să presupunem prin absurd că egalitatea $7n^2 - m^2 = 1$ este posibilă. Obținem că $7n^2 = m^2 + 1$.

Însă dacă $m \equiv 0\ (7) \Rightarrow m^2 + 1 \equiv 1\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 1\ (7) \Rightarrow m^2 + 1 \equiv 2\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 2\ (7) \Rightarrow m^2 + 1 \equiv 5\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 3\ (7) \Rightarrow m^2 + 1 \equiv 3\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 4\ (7) \Rightarrow m^2 + 1 \equiv 3\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 5\ (7) \Rightarrow m^2 + 1 \equiv 5\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 6\ (7) \Rightarrow m^2 + 1 \equiv 2\ (7)$, absurd.

Să presupunem că şi egalitatea $7n^2 - m^2 = 2$ este posibilă, adică $7n^2 = m^2 + 2$.

Dacă $m \equiv 0\ (7) \Rightarrow m^2 + 2 \equiv 2\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 1\ (7) \Rightarrow m^2 + 2 \equiv 3\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 2\ (7) \Rightarrow m^2 + 2 \equiv 4\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 3\ (7) \Rightarrow m^2 + 2 \equiv 4\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 4\ (7) \Rightarrow m^2 + 2 \equiv 4\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 5\ (7) \Rightarrow m^2 + 2 \equiv 8\ (7)$, absurd.

Dacă $m \equiv 6\ (7) \Rightarrow m^2 + 2 \equiv 3\ (7)$, absurd.

În concluzie $7n^2-m^2\geq 3$, de unde $7 \geq \frac{3+m^2}{n^2}$, adică $\sqrt{7} \geq \frac{\sqrt{3+m^2}}{n}$.

Este suficient să demonstrăm că

$$\frac{\sqrt{3+m^2}}{n} > \frac{m}{n} + \frac{1}{mn} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3+m^2}}{n} > \frac{m^2+1}{mn}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+m^2} > \frac{m^2+1}{m} \Leftrightarrow m^2\left(3+m^2\right) > \left(m^2+1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$m^4+3m^2 > m^4+2m^2+1 \Leftrightarrow m^2 > 1$, ceea ce este adevărat.

11. Ştim că $2^{\log_2 9} = 9$, de unde $\sqrt{2^{\log_2 9}} = 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 9} = 3 \in \mathbb{N}$.
Putem alege $a = \sqrt{2} \in \mathbf{I}$ şi $b = \log_2 9 \in \mathbf{I}$.

12. Scriind că $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right) = \left(a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}}\right)+\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)$, adică $a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}} = \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)-\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)$ totul rezultă făcând inducție matematică după $n\in\mathbb{N}$.

Dacă n= - m $\in\mathbb{Z}$, cu $m\in\mathbb{N}$ avem că $a^n+\frac{1}{a^n} = a^m+\frac{1}{a^m}$ şi facem inducție matematică după $m\in\mathbb{N}$.

13. Dacă $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ cu $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\cos\left(k\cdot\frac{m\pi}{n}\right)$ ia cel mult 2n valori distincte atunci când $k\in\mathbb{N}$. (pentru aceasta este suficient să ne reamintim că rădăcinile ecuației $x^{2n}-1=0$, care sunt în număr de 2n, sunt date de (1): $x_k = \cos\frac{2k\pi}{2n} + i\sin\frac{2k\pi}{2n} = \cos\frac{k}{n}\pi + i\sin\frac{k}{n}\pi$, $0\leq k\leq 2n-1$ şi că pentru orice valoare a lui k, în afară de cele arătate mai sus, nu obținem numere x_k distincte de cele date de (1)).

Să presupunem acum prin absurd că $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, cu m, n $\in\mathbb{Z}$ şi n $\in\mathbb{N}^*$.

Vom demonstra că pentru $t=2^k$, $k\in\mathbb{N}^*$, $\cos(t\pi\alpha)$ ia o infinitate de valori distincte şi din acest fapt va rezulta că presupunerea $\alpha\in\mathbb{Q}$ este falsă.

Pentru aceasta vom utiliza identitatea $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Cum $x = \alpha\pi$ avem $\cos(2\alpha\pi) = 2\cdot\frac{1}{9} - 1 = \frac{2}{9} - 1$ (cu 2 ce nu se divide prin 3).

În continuare scriem

$\cos\left(2^2\pi\alpha\right) = 2\cos^2(2\pi\alpha) - 1 = 2\left(\frac{2}{9} - 1\right)^2 - 1 = \frac{98}{3^4} - 1 = \frac{98}{3^{2^2}} - 1$ (cu 98 ce nu se divide prin 3).

Să presupunem acum că $\cos\left(2^k\alpha\pi\right) = \frac{r}{3^{2^k}} - 1$ (cu r nedivizibil prin 3) şi să arătăm că $\cos\left(2^{k+1}\alpha\pi\right) = \frac{s}{3^{2^{k+1}}} - 1$ (cu s nedivizibil prin 3).

Într-adevăr,

$\cos\left(2^{k+1}\alpha\pi\right) = 2\cos^2\left(2^k\alpha\pi\right) - 1 = 2\cdot\left(\frac{r}{3^{2^k}} - 1\right)^2 - 1 = \frac{s}{3^{2^{k+1}}} - 1$, unde $s = 2\cdot\left(r^2 - 2r\cdot 3^{2^k} + 3^{2^{k+1}}\right)$ (evident cum r nu se divide prin 3 atunci nici r^2 nu se divide prin 3, deci nici s nu se divide prin 3).

Deci $\cos\left(2^k\alpha\pi\right) = \frac{r}{3^{2^k}} - 1$ (cu $3\nmid r$) pentru orice $k\in\mathbb{N}$ şi astfel concluzia problemei este imediată.

14. Fie $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k$ cu $k\in\mathbb{N}$. Atunci $a^2+b^2=kab \Leftrightarrow a^2+b^2-kab=0$.

Cum $\Delta_a = k^2b^2-4b^2=b^2(k^2-4)$, pentru ca $a\in\mathbb{N}$ trebuie ca expresia k^2-4 să fie pătrat perfect, adică $k^2-4=s^2$ (cu $s\in\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow k^2-s^2=4 \Leftrightarrow (k-s)(k+s)=4 \Leftrightarrow$

(1) $\begin{cases} k-s=-4 \\ k+s=-1 \end{cases}$ sau (2) $\begin{cases} k-s=-2 \\ k+s=-2 \end{cases}$ sau (3) $\begin{cases} k-s=4 \\ k+s=1 \end{cases}$ sau

(4) $\begin{cases} k-s=2 \\ k+s=2 \end{cases}$ sau (5) $\begin{cases} k-s=-1 \\ k+s=-4 \end{cases}$ sau (6) $\begin{cases} k-s=1 \\ k+s=4 \end{cases}$

În cazurile (1), (3), (5) şi (6) obţinem că $k = -\frac{5}{2} \notin\mathbb{N}$ sau $k = \frac{5}{2} \notin\mathbb{N}$.

În cazurile (2) şi (4) obţinem că s=0.

Deci s=0 şi k=±2.

Atunci $a = \frac{kb}{2} = \pm b$. Rămâne numai posibilitatea a=b.

15. Fie $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ şi să presupunem prin absurd că $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

Atunci $x^3 = 5 + 3 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot x$, de unde am deduce că $\sqrt[3]{6} = \frac{x^3 - 5}{3x} \in \mathbb{Q}$ - absurd !.

16. Fie $\alpha = \frac{z + z'}{1 + zz'}$. Cum $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1$ şi $z' \cdot \overline{z'} = |z'|^2 = 1$ deducem că $\overline{z} = \frac{1}{z}$ şi $\overline{z'} = \frac{1}{z'}$, astfel că $\overline{\alpha} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}}{1 + \overline{z} \cdot \overline{z'}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{zz'}} = \frac{z + z'}{zz' + 1} = \alpha$, de unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

17. Fie $\alpha = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3).....(z_n + z_1)}{z_1 \cdot .... \cdot z_n}$.

Cum $z_i \cdot \overline{z_i} = |z_i|^2 = r^2$, pentru orice $1 \le i \le n$, deducem că $\overline{z_i} = \frac{r^2}{z_i}$, pentru orice $1 \le i \le n$. Astfel

$$\overline{\alpha} = \frac{(\overline{z_1} + \overline{z_2})(\overline{z_2} + \overline{z_3}).....(\overline{z_n} + \overline{z_1})}{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot .... \cdot \overline{z_n}} = \frac{\left(\frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2}\right)\left(\frac{r^2}{z_2} + \frac{r^2}{z_3}\right) \cdot ..... \cdot \left(\frac{r^2}{z_n} + \frac{r^2}{z_1}\right)}{\frac{r^2}{z_1} \cdot .... \cdot \frac{r^2}{z_n}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \cdot .... \cdot \left(\frac{1}{z_n} + \frac{1}{z_1}\right)}{\frac{1}{z_1 \cdot ... \cdot z_n}} = \frac{(z_1 + z_2)....(z_n + z_1)}{z_1 ....z_n} = \alpha$$,de unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

18. Să arătăm la început că $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subseteq M$. Cum $|\pm 1| = 1 \Rightarrow -1$, $1 \in M$, adică $0 = (-1) + 1 \in M$. Fie acum $z \in \mathbb{C}$ a.î. $0 < |z| < 1$. Considerăm în planul raportat la sistemul de axe x0y cercul de centru O şi rază 1 şi punctul A de afix z situat în interiorul cercului :

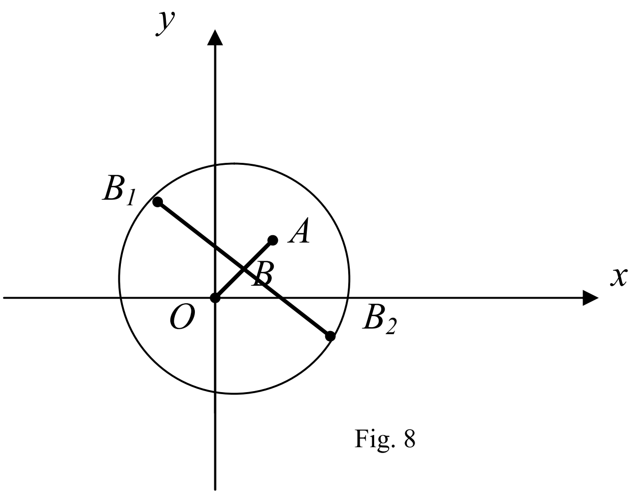

Fig. 8

Dacă B este mijlocul lui OA, atunci B are afixul $\frac{z}{2}$. Perpendiculara în B pe OA taie cercul în B_1 şi B_2. Dacă B_i are afixul z_i , i=1, 2, atunci $z=z_1+z_2$ (căci în Fig. 8, OB_1AB_2 este romb).

Cum $|z_1|=|z_2|=1 \Rightarrow z_1, z_2 \in M$. Atunci $z=z_1+z_2 \in M$, adică $D_0 \subseteq M$.

Să arătăm acum că şi coroana circulară $D_1=\{z \in \mathbb{C} \mid 1<|z|\leq 2\} \subseteq M$.

Pentru $z \in D_1$, $1<|z|\leq 2$, deci $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, adică $\frac{z}{2} \in D_0 \subseteq M$, deci $\frac{z}{2} \in M$.

Cum $z=2\cdot\frac{z}{2}$ iar $\frac{z}{2} \in M$, deducem că $z \in M$, adică $D_1 \subseteq M$.

Analog se demonstrează că în ipoteza $D_n=\{z \in \mathbb{C} \mid 2^{n-1}<|z|\leq 2^n\} \subseteq M \Rightarrow D_{n+1} \subseteq M$. (căci $2^{n-1}<|z|\leq 2^n \Rightarrow$

$$\left|\frac{z}{2}\right|<2^n \Rightarrow \frac{z}{2} \in D_n \subseteq M \Rightarrow \frac{z}{2} \in M \Rightarrow z=2\cdot\frac{z}{2} \in M \text{).}$$

Deci $D_n \subseteq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi cum $\mathbb{C}=\bigcup_{n\geq 0} D_n$ deducem că $\mathbb{C} \subseteq M$ şi cum $M \subseteq \mathbb{C}$ deducem că $M=\mathbb{C}$.

19. Vom scrie n în sistemul zecimal sub forma

$$n=a_m 10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\ldots+a_2 10^2+a_1 10+a_0 \ ,$$

unde a_0, a_1, …, a_m sunt numere naturale cuprinse între 0 şi 9, $a_m \neq 0$. Prin urmare a_0 reprezintă cifra unităţilor, a_1 cifra zecilor, a_2 cifra sutelor, ş.a.m.d.

Într-adevăr, $n=10(a_m10^{m-1}+a_{m-1}10^{m-2}+\ldots+a_210+a_1)+a_0$, deci $n=10k+a_0$. Prin urmare, $2|n$ implică $2|(n-10k)$, adică $2|a_0$. Reciproc, $2|a_0$ implică $2|10k+a_0$, adică $2|n$.

Demonstraţia divizibilităţii cu 5 se face analog.

20. Soluţia este asemănătoare cu cea de la exc. 19.

21. Avem $n=a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\ldots+a_210^2+a_110+a_0=$
$= a_m(10^m-1)+a_{m-1}(10^{m-1}-1)+\ldots+a_2(10^2-1)+a_1(10-1)+(a_m+a_{m-1}+\ldots+a_1+a_0)$.

Din formula $10^k-1=(10-1)(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+1)=9k'$, rezultă că 10^k-1 este multiplu de 9, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, $n=9k+(a_m+a_{m-1}+\ldots+a_1+a_0)$, adică n este divizibil cu 3, respectiv cu 9, dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3, respectiv cu 9.

22. Vom scrie n în sistemul zecimal sub forma

$$n=a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\ldots+a_210^2+a_110+a_0 \ ,$$

unde a_0, a_1, …, a_m sunt numere naturale cuprinse între 0 şi 9, $a_m \neq 0$. Trebuie demonstrat că $11 \mid \ \sum_{k=0}^{m}\left(-1\right)\ k_{al}$.

Pentru a demonstra această afirmaţie, vom scrie cu ajutorul formulei binomului lui Newton :

$$10^k = \left(11-1\right)^k = 11^k - C_k^1\cdot 11^{k-1} + \ldots + \left(-1\right)^k = 11k' + \left(-1\right)^k \text{, } k'\in\mathbb{Z}.$$

Prin urmare, $n = 11p + \sum_{k=0}^{m}\left(-1\right)\ k_{al}$ şi deci n este divizibil cu 11 dacă şi numai dacă $\sum_{k=0}^{m}\left(-1\right)\ k_{al}$ este divizibilă cu 11.

23. Fie $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ numărul dat iar $N' = \overline{a_n a_{n-1} \ldots . a_2}$ numărul obţinut din N suprimându-i ultimele două cifre. În mod evident, $N = 10^2 N' + \overline{a_1 a_0}$. Atunci $10^2\left(2N' - \overline{a_1 a_0}\right) = 2\left(10^2 N'\right) - 100\cdot\overline{a_1 a_0} =$
$= 2\left(N - \overline{a_1 a_0}\right) - 100\cdot\overline{a_1 a_0} = 2N - 102\cdot\overline{a_1 a_0} = 2N - 17\cdot 6\cdot\overline{a_1 a_0}$, de unde deducem că $17|N \Leftrightarrow 17|\left(2N' - \overline{a_1 a_0}\right)$.

Cum $10^2\left(2N' + \overline{a_1 a_0}\right) = 2\left(10^2 N'\right) + 100\cdot\overline{a_1 a_0} =$

$= 2\left(N - \overline{a_1 a_0}\right) + 100 \cdot \overline{a_1 a_0} = 2N + 98 \cdot \overline{a_1 a_0} = 2N + 2 \cdot 49 \cdot \overline{a_1 a_0}$, deducem că $49 \mid N \Leftrightarrow 17 \mid \left(2N + \overline{a_1 a_0}\right)$.

24, 25. Soluția este asemănătoare cu cea de la exc. 23.

26. Fie $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ un număr cu n+1 cifre. Să presupunem că N este impar. Atunci numerele formate din câte două cifre de rang impar sunt $\overline{a_1 a_0}$, $\overline{a_5 a_4}$,...., $\overline{a_{n-6} a_{n-7}}$, $\overline{a_{n-2} a_{n-3}}$ iar cele de rang par vor fi $\overline{a_3 a_2}$, $\overline{a_7 a_6}$,...., $\overline{a_{n-4} a_{n-5}}$, $\overline{a_n a_{n-1}}$ astfel că dacă notăm $N_1 = \overline{a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4} + ... + \overline{a_{n-6} a_{n-7}} + \overline{a_{n-2} a_{n-3}}$ şi $N_2 = \overline{a_3 a_2} + \overline{a_7 a_6} + ... + \overline{a_{n-4} a_{n-5}} + \overline{a_n a_{n-1}}$ atunci

$$N_1 = a_0 + a_4 + \ldots + a_{n-7} + a_{n-3} + 10(a_1 + a_5 + \ldots. + a_{n-6} + a_{n-2}),$$
$$N_2 = a_2 + a_6 + \ldots + a_{n-5} + a_{n-1} + 10(a_3 + a_7 + \ldots. + a_{n-4} + a_n) \text{ iar}$$

$N_1 - N_2 = (a_0 + 10a_1 - a_2 - 10a_3) + (a_4 + 10a_5 - a_6 - 10a_7) + \ldots. + (a_{n-3} + 10a_{n-2} - a_{n-1} - 10a_n)$.

Scriind că $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ avem :

$N - (N_1 - N_2) = (10^2+1)a_2 + (10^3+10)a_3 + (10^4-1)a_4 + (10^5-10)a_5 + (10^6+1)a_6 + (10^7+10)a_7 + \ldots. + (10^{n-3}-1)a_{n-3} + (10^{n-2}-10)a_{n-2} + (10^{n-1}+1)a_{n-1} + (10^n+10)a_n =$
$= (10^2+1)a_2 + 10(10^2+1)a_3 + (10^4-1)a_4 + 10(10^4-1)a_5 + (10^6+1)a_6 + 10(10^6+1)a_7 + \ldots. + (10^{n-3}-1)a_{n-3} + 10(10^{n-3}-1)a_{n-2} + (10^{n-1}+1)a_{n-1} + 10(10^{n-1}+1)a_n$.

Se arată uşor acum că toți coeficienții lui a_2, a_3, …,a_n se divid prin 101, de unde concluzia (cazul n par tratându-se analog).

27. Fie $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ numărul dat iar $N' = \overline{a_n a_{n-1} .... a_1}$, adică $N = 10N' + a_0$. Atunci $10(N' - ka_0) = 10N' - 10ka_0 = N - a_0 - 10ka_0 = N - (10k+1)a_0$, de unde concluzia că $(10k+1) \mid N \Leftrightarrow (10k+1) \mid (N' - ka_0)$.

Analog pentru cazul 10k-1.

Observăm că $19 = 2 \cdot 10 - 1$, $29 = 3 \cdot 10 - 1$, $49 = 5 \cdot 10 - 1$, $21 = 2 \cdot 10 + 1$, $31 = 3 \cdot 10 + 1$, şi $41 = 4 \cdot 10 + 1$ iar acum criteriile de divizibilitate prin 19, …, 41 se enunță ținând cont de formularea generală.

28. Notând cu x baza sistemului de numerație avem :
$(2x+5)(3x^2+x+4) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$ de unde rezultă că $x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 6x - 16 = 0$ sau $(x+2)(x-8)(x^2+1) = 0$. Deci $x = 8$.

29. În baza 19.

30. Rezultă din identitatea : $b^4 + b^2 + 1 = (b^2 + b + 1)(b^2 - b + 1)$.

31. $b^6+3b^5+6b^4+7b^3+6b^2+3b+1=(b^2+b+1)^3$.

32. Fie $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}_{(u)}$ cu u=2k .

Deducem imediat că $2|N \Leftrightarrow 2|a_0$.

Dacă u=2k+1 atunci $N= a_0+a_1(2k+1)+\ldots+a_n(2k+1)^n$ şi se observă că $2|N \Leftrightarrow 2|(a_0+a_1+\ldots+a_n)$ iar $2|(a_0+a_1+\ldots+a_n) \Leftrightarrow$ numărul numerelor impare din mulțimea $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ este par.

33. Fie $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}_{(b)} = a_0+a_1b+\ldots+a_nb^n$ cu $0\le a_i\le b$, $1\le i\le n$.

Dacă b=3m, atunci $N-a_0$ este multiplu de b, deci de 3, astfel că $3|N \Leftrightarrow 3|a_0$.

Dacă b=3m+1, atunci $N=a_0+a_1(3m+1)+\ldots+a_n(3m+1)^n=$ $=a_0+a_1+\ldots+a_n+3t$, cu $t\in\mathbb{N}$, de unde deducem că $3|N \Leftrightarrow 3|(a_0+a_1+\ldots+a_n)$.

Dacă b=3m-1, atunci $N=a_0+a_1(3m-1)+\ldots+a_n(3m-1)^n=$ $=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+a_n\cdot(-1)^n +3t$, cu $t\in\mathbb{N}$, de unde deducem că $3|N \Leftrightarrow 3|(a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+a_n\cdot(-1)^n)=[a_0+a_2+\ldots-(a_1+a_3+\ldots)]$.

34. . Fie $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}_{(b)}$ şi $\overline{N}=\overline{a_0 a_1...a_n}_{(b)}$ inversatul său . Atunci $N = a_0+a_1b+\ldots+a_nb^n$ iar $\overline{N}= a_n+a_{n-1}b+\ldots+a_0b^n$, deci $N-\overline{N}=a_0(1-b^n)+$ $+a_1(b-b^{n-1})+\ldots+a_n(b^n-1)$, de unde concluzia că $b-1|N-\overline{N}$.

Numărul cifrelor lui N este n+1. Dacă n+1 este impar atunci n este par, n=2k cu $k\in\mathbb{N}$.

Cum în acest caz $1-b^n$, $b-b^{n-1}=b(1-b^{n-2})$, $\ldots, b^n-1$ se divide prin $b^2-1=$ $=(b-1)(b+1)$, deducem că $b+1|N$.

35. Fie $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}_{(b)} = a_0+a_1b+\ldots+a_nb^n$ iar $N'=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}_{(b)}$ numărul obținut din N suprimându-i ultima cifră a_0, evident $N=a_0+bN'$.

Avem $N'-ka_0=a_1+\ldots+a_nb^{n-1}-ka_0$, deci $b(N'-ka_0)=a_1b+\ldots+a_nb^n-kba_0=$ $=(a_0+\ldots+a_nb^n)-a_0(kb+1)=N-a_0(kb+1)$, de unde deducem că $bk+1|N'-ka_0$.

Analog pentru bk-1.

36. Suma cifrelor, scrisă în baza 10, este 36, deci $n=M_{11}+3$ şi $m=$ $=M_{11}+3$. Nu putem avea m=nq , $M_{11}+3=(M_{11}+3)q$ cu 1<q<8.

37. Prin inducţie după n. Pentru n=1 sau n=2, se verifică pentru că avem $2 \mid 2$ şi $2^2 \mid 12$. Presupunem că pentru n proprietatea este adevărată, adică există un număr N de n cifre a.î. $2^n \mid N$. Să o demonstrăm pentru n+1.

Fie $N=2^n q$. Dacă q este par, atunci numărul $2\cdot 10^n+N$, care are n+1 cifre, se divide cu 2^{n+1}. Dacă q este impar, atunci numărul $10^n+N=2^n(5^n+q)$, care are n+1 cifre, se divide cu 2^{n+1}.

38. Se ţine cont de faptul că în baza 6 un număr este divizibil cu 4 dacă şi numai dacă numărul format din ultimele sale două cifre este divizibil cu 4.

39. Pătratul unui număr par este M_4, iar pătratul unui număr impar este M_8+1. Ultima cifră a unui pătrat perfect scris în baza 12 poate fi 0, 1, 4, 9. Rămân deci posibile numai numerele formate cu cifra 1, 4 sau 9. Dar $11\ldots1=M_8+5$, $44\ldots4=M_4$, $99\ldots9=M_8+5$. Dar din faptul că numerele de forma $11\ldots1$ nu pot fi pătrate perfecte, rezultă că nici numerele de forma $44\ldots4=4\cdot 11\ldots1$ nu pot fi pătrate perfecte, şi nici cele de forma $99\ldots9$.

40. Pentru ca un număr să fie cub perfect el trebuie să fie de forma 9m sau $9m\pm1$. Ţinând seama că în sistemul de numeraţie cu baza 6, un număr este divizibil cu 9 dacă şi numai dacă numărul format din ultimele sale două cifre este divizibil cu 9, şi cum numerele de forma $aa\ldots a$ sunt $11\ldots1=M_9+7$, $22\ldots2=M_9+5$, $33\ldots3=M_9+3$, $44\ldots4=M_9+1$, $55\ldots5=M_9-1$, rezultă că numerele formate numai cu cifra 1 , 2 sau 3 nu pot fi cuburi perfecte. Dar nici numerele formate numai cu cifra 4 nu pot fi cuburi perfecte pentru că am avea $44\ldots4=A^3$. Cum membrul stâng este par, rezultă că şi membrul drept este par, deci $2|A^3 \Rightarrow 2|A \Rightarrow 8|A^3$, dar $44\ldots4=4\cdot 11\ldots1=4(2k+1)$ şi deci $8 \nmid 44\ldots4$.

Rămân doar numerele formate cu cifra 5. Dar $55\ldots5=5\cdot 11\ldots1=5(1+6+6^2+\ldots+6^{n-1})= 5\cdot\dfrac{6^n-1}{5}=6^n-1$.

Dacă am avea $6^n-1=A^3$ sau $A^3+1=6^n$ ar trebui ca A să fie impar, deci A+1 par. Dar $A^3+1=(A+1)(A^2-A+1)=6^n$.

Deoarece numerele $A+1$, A^2-A+1 sunt prime între ele sau au pe 3 ca divizor comun şi A+1 este par, rezultă că $A+1=2^n\cdot 3^k$ şi $A^2-A+1=3^{n-k}$, k=0 sau k=1. Iar din aceste două relaţii deducem că $2^{2n}\cdot 3^{2k}-2^n\cdot 3^{k+1}+3=3^{n-k}$.

Pentru k=0, această relaţie nu poate fi satisfăcută fiindcă $3 \nmid 2^{2n}$.

Pentru k=1, de asemenea nu poate fi satisfăcută fiindcă ar rezulta n=2 şi totodată , $2^4\cdot 3^2-2^2\cdot 3^2+3=3$, care este falsă.

41. Se observă că $S(8\cdot 125)=S(1000)=1$.

Ne sunt necesare următoarele proprietăţi ale funcţiei S(N):

1) $S(A+B)\leq S(A)+S(B)$

2) $S(A_1+\ldots+A_n)\leq S(A_1)+\ldots+S(A_n)$

3) $S(Na)\leq nS(A)$

4) $S(AB)\leq S(A)S(B)$

Pentru a ne convinge de 1) este suficient să ne închipuim că numerele A şi B se adună scrise unul sub celălalt. Proprietatea 2) rezultă din 1) printr-o inducție simplă, 3) este un caz particular al lui 2). Dacă ne închipuim că numerele A şi B se înmulțesc scrise unul sub celălalt şi la ficare cifră a numărului B aplicăm 3) rezultă 4). Acum este uşor să demonstrăm inegalitatea cerută: $S(N)=S(1000N)=S(125\cdot 8N)\leq S(125)\cdot S(8N)=8\cdot S(8N)$ adică $S(8N)/S(N)\geq 1/8$.

2) CAPITOLUL 6

1. Putem scrie $m_n=1!+2!+\ldots+n!=33+\sum_{k=5}^{n} k!$ şi astfel ultima cifră a lui m_n este 3, deci m_n nu poate fi pătrat perfect. Cum $m_4=33$, nici m_4 nu este pătrat perfect.

2. i) Putem scrie $24n^2+8n=8n(3n+1)$ şi se consideră acum cazurile când n este par sau impar.
ii) Se dezvoltă $(2n+1)^4$ şi se ține cont de i).
iii) Fie $a\in\mathbb{N}$. După punctul precedent, dacă a este impar, atunci restul împărțirii lui a^4 prin 16 este 1 pe când atunci când a este par, evident $16|a^4$.

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea că $x_1,\ldots,x_p$ sunt impare iar $x_{p+1},\ldots,x_k$ sunt pare $(1\leq p\leq k)$.

Atunci $x_1^4+\ldots+x_p^4-15=16n-(x_{p+1}^4+\ldots+x_k^4)$.

Însă membrul drept se divide prin 16 şi cum resturile împărțirii prin 16 a lui $x_1,\ldots,x_p$ sunt toate egale cu 1 deducem că membrul stâng este de forma $16t+p-15$, de unde cu necesitate $p\geq 15$, cu atât mai mult $k\geq 15$.

3. Putem presupune că $q, s\in\mathbb{N}^*$. Condiția din enunț se scrie atunci $sp=q(s-r)$ de unde deducem că $s \mid q(s-r)$. Pe de altă parte, deoarece $\frac{r}{s}$ este ireductibilă, avem $(s, s-r)=1$, de unde cu necesitate $s|q$.

Analog $q|s$, de unde $q=s$.

4. Fie $a = p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$ şi $b=p_1^{\beta_1}\dots p_n^{\beta_n}$ descompunerile în factori primi ale lui a şi b (cu $\alpha_i, \beta_i\in\mathbb{N}$, $1\le i\le n$).

Atunci $(a, b)= p_1^{\gamma_1}\dots p_n^{\gamma_n}$ iar $[a, b]= p_1^{\delta_1}\dots p_n^{\delta_n}$ unde $\gamma_i=\min(\alpha_i, \beta_i)$ iar $\delta_i=\max(\alpha_i,\beta_i)$, $1\le i\le n$, astfel că: $(a, b)[a, b]= p_1^{\gamma_1+\delta_1}\dots p_n^{\gamma_n+\delta_n} = p_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots p_n^{\alpha_n+\beta_n} =(p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n})(p_1^{\beta_1}\dots p_n^{\beta_n})=ab$ (am ținut cont de faptul că $\gamma_i+\delta_i=\min(\alpha_i, \beta_i)+\max(\alpha_i, \beta_i)=\alpha_i+\beta_i$, pentru orice $1\le i\le n$).

5. Cum suma $x_1x_2+\dots+x_nx_1$ are exact n termeni (fiecare fiind –1 sau 1) deducem cu necesitate că n este par (căci numărul termenilor egali cu –1 trebuie să fie egal cu numărul termenilor egali cu +1; dacă k este numărul acestora, atunci n=2k).

Deoarece $(x_1x_2)(x_2x_3)\dots(x_nx_1)=(x_1x_2\dots x_n)^2=1$ deducem că –1 apare de unde un număr par de adică $k=2k'$ şi deci $n=4k'$ cu $k'\in\mathbb{N}$.

6. Fie $12\dots9=A$, $\underbrace{11\dots1}_{p\ ori}\dots\underbrace{99\dots9}_{p\ ori}=B$, $1\underbrace{00\dots0}_{p\ ori}2\underbrace{00\dots0}_{p\ ori}\dots8\underbrace{00\dots0}_{p\ ori}9=C$, $\underbrace{11\dots1}_{p\ ori}=D$.

Atunci $C=10^{8p}+2\cdot10^{7p}+3\cdot10^{6p}+\dots+8\cdot10^p+9$ iar $B=D\cdot C$, $C-A=3(10^{8p}-10^8)+$ $+2(10^{7p}-10^7)+3(10^{6p}-10^6)+\dots+8(10^p-10)$, $10^p-10=(9D+1)-10=9(D-1)$

Conform Micii Teoreme a lui Fermat (Corolarul 5.3. de la Capitolul 6) 10^p-10, $10^{2p}-10^2,\dots, 10^{8p}-10^8$ se divid prin p ca şi $9(D-1)$.

Astfel, $B-A=DC-AD+AD-A=D(C-A)+A(D-1)$, adică $p|B-A$.

7. Avem:

$(1+\sqrt{3})^{2n+1} = 1 + C_{2n+1}^1\sqrt{3} + C_{2n+1}^2 3 + C_{2n+1}^3 3\sqrt{3}+\dots+C_{2n+1}^{2n}3^n + C_{2n+1}^{2n+1}3^n\sqrt{3}$ iar

$(1-\sqrt{3})^{2n+1} = 1-C_{2n+1}^1\sqrt{3} + C_{2n+1}^2 3 - C_{2n+1}^3 3\sqrt{3}+\dots+C_{2n+1}^{2n}3^n - C_{2n+1}^{2n+1}3^n\sqrt{3}$,

de unde $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}=2[1+C_{2n+1}^2 3+\dots+C_{2n+1}^{2n}3^n]$ sau

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1}=(\sqrt{3}-1)^{2n+1}+2[1+C_{2n+1}^2 3+\dots+C_{2n+1}^{2n}3^n].$$

Cum $0<\sqrt{3}-1<1$ şi $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}\in\mathbb{N}$, deducem că

$$[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]=(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}.$$

Însă prin calcul direct deducem că:

$(1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1} = 2^n \{(2-\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n + \sqrt{3}\,[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n]\}$.

Dacă $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ (cu a_n, $b_n \in \mathbb{N}$), atunci $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ şi astfel:

$$[(2+\sqrt{3})^{2n+1}] = 2^n(2a_n+6b_n) = 2^{n+1}(a_n+3b_n).$$

Însă a_n+3b_n este impar (deoarece $(a_n+3b_n)(a_n-3b_n) = a_n^2 - 9b_n^2 = (a_n^2 - 3b_n^2) - 6b_n^2 = (a_n - b_n\sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) - 6b_n^2 = (2-\sqrt{3})^n(2+\sqrt{3})^n - 6b_n^2 = 1 - 6b_n^2$, de unde concluzia că $n+1$ este exponentul maxim al lui 2 în $[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$.

8. Analog ca în cazul exercițiului 7, deducem că $(\sqrt{5}+2)^p - (\sqrt{5}-2)^p \in \mathbb{Z}$ şi cum $0 < \sqrt{5}-2 < 1$, atunci

$[(\sqrt{5}+1)^p] = (\sqrt{5}+2)^p - (\sqrt{5}-2)^p = 2[C_p^1\, 5^{\frac{p-1}{2}} \cdot 2 + C_p^3\, 5^{\frac{p-3}{2}} \cdot 2^3 + \ldots + C_p^{p-2}\, 5 \cdot 2^{p-2}] + 2^{p+1}$, astfel că $[(\sqrt{5}+2)^p] - 2^{p+1} = 2[C_p^1\, 5^{\frac{p-1}{2}} \cdot 2 + \ldots + C_p^{p-2}\, 5 \cdot 2^{p-2}]$ de unde concluzia din enunț (deoarece se arată imediat că $C_p^k \equiv 0(p)$ pentru $k=1, 2,\ldots, p-2$).

9. Fie $E_n = (n+1)(n+2)\ldots(2n)$.

Cum $E_{n+1} = (n+2)(n+3)\ldots(2n)(2n+1)(2n+2) = 2E_n(2n+1)$, prin inducție matematică se probează că $2^n \mid E_n$, însă $2^{n+1} \nmid En$.

10. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, fie $a_k = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{k\ ori}}$. Considerând şirul $a_1, a_2,\ldots, a_n, a_{n+1},\ldots$, conform principiului lui Dirichlet există $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p<q$ a.î. $n \mid a_q - a_p$.

Însă $a_q - a_p = m \cdot 10^p$, unde $m = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{q-p\ ori}}$. Dacă $(n, 10)=1$ atunci m este multiplu de n.

11. Fie $d=(a^n-1, a^m+1)$. Atunci putem scrie $a^n = kd+1$, $a^m = rd-1$ cu $k, r \in \mathbb{N}^*$, astfel că $a^{mn} = (a^n)^m = (kd+1)^m = td+1$ (cu $t \in \mathbb{N}^*$) şi analog $a^{mn} = (a^m)^n = (rd-1)^n = ud-1$ (cu $u \in \mathbb{N}^*$, căci n este presupus impar).

Deducem că $td+1 = ud-1 \Leftrightarrow (u-t)d = 2$, de unde $d \mid 2$.

12. Fie d=(a^{2^m}+1,a^{2^n}+1) şi să presupunem că m<n.

Cum a^{2^n}-1=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^{2^2}+1)…($a^{2^{n-1}}$+1), iar a^{2^m}+1 este unul din factorii din dreapta, deducem că d | a^{2^n}-1.

Deoarece d | a^{2^n}+1 deducem că d | (a^{2^n}+1)-(a^{2^n}-1)=2, adică d=1 sau d=2.

Dacă a este impar, cum a^{2^m}+1 şi a^{2^n}+1 vor fi pare, deducem că în acest caz (a^{2^m}+1, a^{2^n}+1)=2, pe când dacă a este par, cum $2\nmid a^{2^m}+1$ şi $2\nmid a^{2^n}+1$, deducem că în acest caz (a^{2^m}+1, a^{2^n}+1)=1.

13. Prin inducție matematică după n se arată că $(2+\sqrt{3})^n=p_n+q_n\sqrt{3}$ cu $p_n, q_n\in\mathbb{N}$ şi $3q_n^2=p_n^2-1$. (ținând cont că $p_{n+1}=2p_n+3q_n$ şi $q_{n+1}=p_n+2q_n$).

Atunci $(2+\sqrt{3})^n=p_n+\sqrt{3q_n^2}=p_n+\sqrt{p_n^2-1}$ şi $\frac{p_n^2-1}{3}=q_n^2$ este pătrat perfect. Cum însă $p_n-1\le\sqrt{p_n^2-1}<p_n$ deducem că $2p_n-1\le p_n+\sqrt{p_n^2-1}<2p_n$ sau $2p_n-1\le(2+\sqrt{3})^n<2p_n$ şi astfel $x=[(2+\sqrt{3})^n]=2p_n-1$.

Deducem că

$$\frac{(x-1)(x+3)}{12}=\frac{(2p_n-2)(2p_n+2)}{12}=\frac{p_n^2-1}{3}=q_n^2.$$

14. Presupunem prin absurd că există $n\in\mathbb{N}$, $n\ge2$ a.î. $n \mid 2^n-1$. Cum 2^n-1 este impar cu necesitate şi n este impar. Fie p≥3 cel mai mic număr prim cu proprietatea că p|n. Conform teoremei lui Euler, $2^{\varphi(p)}\equiv1(p)$. Dacă m este cel mai mic număr natural pentru care $2^m\equiv1(p)$, atunci cu necesitate m|φ(p)=p-1 astfel că m are un divizor prim mai mic decât p.

Însă $2^n\equiv1(n)$ şi cum p|n deducem că $2^n\equiv1(p)$ şi astfel m|n. Ar rezulta că n are un divizor prim mai mic decât p-absurd!.

15. Avem $4^p=(1+1)^{2p}=$

$$=C_{2p}^0+C_{2p}^1+\ldots+C_{2p}^{p-1}+C_{2p}^p+C_{2p}^{p+1}+\ldots+C_{2p}^{2p-1}+C_{2p}^{2p}$$

$$=2+2(C_{2p}^0+C_{2p}^1+\ldots+C_{2p}^{p-1})+C_{2p}^{2p}.$$

Însă pentru 1≤k≤p-1

$C_{2p}^{k} = \frac{(2p)(2p-1)...(2p-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k} = p\frac{2(2p-1)...(2p-k+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}$ şi cum $C_{2p}^{k} \in \mathbb{N}$ iar pentru $1 \le k \le p-1$, $k \nmid p$, atunci nici $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k \nmid p$, deci $C_{2p}^{k} \equiv 0(p)$.

Deducem că $4^{p} \equiv (2+C_{2p}^{p})(p)$ sau $(4^{p}-4) \equiv (C_{2p}^{p}-2)(p)$.

Dacă p=2 atunci $C_{4}^{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ iar $C_{4}^{2}-2=6-2=4\equiv 0\ (2)$.

Dacă $p\ge 3$, atunci $(4, p)=1$ şi atunci conform Teoremei Euler $4^{p}-4\equiv 0(p)$, de unde şi $C_{2p}^{p}-2\equiv 0(p) \Leftrightarrow C_{2p}^{p}\equiv 2(p)$.

16. Am văzut că pentru orice $1\le k\le p-1$, $p|C_{p}^{k}$, deci în $\mathbb{Z}_p[X]$ avem $(1+X)^{p}=1+X^{p}$.

Astfel $\sum_{k=0}^{pa} C_{pa}^{k} X^{k} = (1+X)^{pa} = [(1+X)^{p}]^{a} = (1+X^{p})^{a} = \sum_{j=0}^{a} C_{a}^{j} X^{jp}$.

Deoarece coeficienții aceloraşi puteri trebuie să fie congruenți modulo p, deducem că $C_{pa}^{pb} \equiv C_{a}^{b}\ (p)$ (deoarece C_{pa}^{pb} este coeficientul lui X^{pb} din stânga iar C_{a}^{b} este coeficientul tot al lui X^{pb} însă din dreapta) pentru $0\le b\le a$.

17. Se alege $a= p_{1}^{\alpha_1} \ldots p_{n}^{\alpha_n}$, $b= p_{1}^{\beta_1} \ldots p_{n}^{\beta_n}$ şi $c= p_{1}^{\gamma_1} \ldots p_{n}^{\gamma_n}$, cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ numere prime iar $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$ pentru $1\le i\le n$.

Atunci $[a,b]= p_{1}^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \ldots p_{n}^{\max(\alpha_n,\beta_n)}$ pe când

$$([a,b],c)= p_{1}^{\min(\max(\alpha_1,\beta_1),\gamma_1)} \ldots p_{n}^{\min(\max(\alpha_n,\beta_n),\gamma_n)}$$

iar $[(a, c), (b, c)]=[\ p_{1}^{\min(\alpha_1,\gamma_1)} \ldots p_{n}^{\min(\alpha_n,\gamma_n)},\ p_{1}^{\min(\beta_1,\gamma_1)} \ldots p_{n}^{\min(\beta_n,\gamma_n)}]= =p_{1}^{\max[\min(\alpha_1,\gamma_1),\min(\beta_1,\gamma_1)]} \ldots p_{n}^{\max[\min(\alpha_n,\gamma_n),\min(\beta_n,\gamma_n)]}$, de unde egalitatea cerută deoarece pentru oricare trei numere reale α, β, γ:

$\min[\max(\alpha, \beta), \gamma]=\max[\min(\alpha, \gamma), (\beta, \gamma)]$ (se ține cont de diferitele ordonări pentru α, β, γ, de ex. $\alpha\le\beta\le\gamma$).

18. Ținând cont de exercițiile 4 şi 17 avem:

$[a,b,c]=[[a,b],c]=$

$$=\frac{[a,b]\cdot c}{([a,b],c)}=\frac{\frac{abc}{(a,b)}}{[(a,c),(b,c)]}=\frac{abc}{(a,b)[(a,c),(b,c)]}=\frac{abc}{(a,b)\cdot\frac{(a,c)\cdot(b,c)}{((a,c),(b,c))}}=$$

$$=\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}.$$

19. Se procedează analog ca la exercițiul precedent.

20. i) Se ține cont de faptul că dacă a nu este multiplu de 3, adică $a=3k\pm1$, atunci a^3 este de aceeaşi formă (adică $a^3\equiv\pm1(3)$).

Cum $\pm1\pm1\pm1\not\equiv0(9)$ deducem că cel puțin unul dintre numerele a_1, a_2, a_3 trebuie să se dividă prin 3.

ii) Analog ca la i) ținându-se cont de faptul că $\pm1\pm1\pm1\pm1\pm1\not\equiv0(9)$.

21. Avem $2\cdot73\cdot1103=161038$ şi $161037=3^2\cdot29\cdot617$. Deci $2^{161037}-1$ se divide prin 2^9-1 şi $2^{29}-1$, dar cum $2^9\equiv1(73)$ şi $2^{29}\equiv1(1103)$ deducem că el se divide şi prin $73\cdot1103$ (numerele fiind prime între ele).

22. Cum $641=640+1=5\cdot2^7+1$ şi $641=625+16=5^4+2^4$ rezultă că $5\cdot2^7\equiv-1(641)$ şi $2^4\equiv-5^4(641)$. Din prima congruență rezultă $5^4\cdot2^{28}\equiv1(641)$, care înmulțită cu a doua dă $5^4\cdot2^{32}\equiv-5^4(641)$, de unde $2^{32}\equiv-1(641)$.

Obs. Numerele de forma $F_n=2^{2^n}+1$ cu $n\in\mathbb{N}$ se zic *numere Fermat*. S-a crezut (ținând cont că lucrul acesta se întâmplă pentru n=1, 2, 3, 4) că numerele Fermat sunt toate numere prime. Exercițiul de mai înainte vine să infirme lucrul acesta (căci $641|F_5$).

Celebritatea numerelor prime ale lui Fermat constă în faptul datorat lui Gauss că un poligon regulat cu n laturi poate fi construit numai cu rigla şi compasul dacă şi numai dacă $n=2^{\alpha}p_1p_2\ldots p_r$, unde $\alpha\in\mathbb{N}$ iar p_1, p_2, …,p_r sunt numere prime ale lui Fermat (deci de forma $2^{2^n}+1$).

23. În cazul nostru particular avem: $b_1=1$, $b_2=4$, $b_3=3$, $m_1=7$, $m_2=9$, $m_3=5$ (ținând cont de notațiile de la Teorema 6.1.) iar $m=315$.

Cu notatiile de la demonstrația Teoremei 6.1., avem $n_1=315/7=45$, $n_2=315/9=35$ iar $n_3=315/5=63$.

Alegem r_i, $s_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le 3$ a.î. $r_1 \cdot 7 + s_1 \cdot 45 = 1$
$r_2 \cdot 9 + s_2 \cdot 35 = 1$ (cu ajutorul algoritmului lui Euclid)
$r_3 \cdot 5 + s_3 \cdot 63 = 1$

Alegem $e_i = s_i \cdot n_i$, $1 \le i \le 3$ (adică $e_1 = 45s_1$, $e_2 = 35s_2$ şi $e_3 = 63s_3$) iar soluția va fi $x_0 = 1 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$.

24. Dacă $f(x) \equiv 0(n)$ are o soluție, atunci acea soluție verifică şi $f(n) \equiv 0(p_i^{\alpha_i})$ pentru orice $1 \le i \le t$.

Reciproc, dacă x_i este o soluție a congruenței $f(x) \equiv 0(p_i^{\alpha_i})$ pentru $1 \le i \le t$, atunci conform Teoremei 6.1., sistemul $x \equiv x_i$ $(p_i^{\alpha_i})$ cu $1 \le i \le t$ va avea o soluție şi astfel $f(x) \equiv 0$ $(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t} = n)$.

25. Totul rezultă din Lema 5.6.

26. Fie $n \in \mathbb{N}$ a.î. n! se termină in 1000 de zerouri. Cum la formarea unui zerou participă produsul $2 \cdot 5$, numărul zerourilor în care se termină n! va fi egal cu exponentul lui 5 în n! (acesta fiind mai mic decât exponentul lui 2 în n!).

Avem deci $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \ldots = 1000$ (conform Teoremei 3.9.).

Cum $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \ldots \le \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \ldots < \frac{n}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{n}{4}$, cu necesitate $1000 < \frac{n}{4} \Leftrightarrow n > 4000$.

De aici şi din faptul că $[a] > a-1$ deducem că $1000 > \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \frac{n}{5^3} + \frac{n}{5^4} + \frac{n}{5^5} - 5 > \frac{n}{5}(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}) + 6 + 1 - 5 = \frac{31}{125}n + 2$, de unde $n < \frac{(1000-2) \cdot 125}{31} = 4025{,}2$.

Numărul n=4005 verifică, dar n=4010 nu mai verifică .

Deci $n \in \{4005, 4006, 4007, 4008, 4009\}$.

27. Se demonstrează uşor că dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$, atunci:

$$[2a] + [2b] \ge [a] + [b] + [a+b]. \qquad (\star)$$

Exponentul unui număr prim p în (2m)!(2n)! este $e_1 = \sum_{k\in N^*}\left([\frac{2n}{p^k}]+[\frac{2m}{p^k}]\right)$ iar în m!n!(m+n)! este $e_2 = \sum_{k\in N^*}\left([\frac{n}{p^k}]+[\frac{m}{p^k}]+[\frac{m+n}{p^k}]\right)$ (conform Teoremei 3.9.).

Conform inegalității ($\star$) $e_1 \geq e_2$ de unde concluzia că $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N}$.

28. Dacă $d_1=1$, $d_2, \ldots d_{k-1}$, $d_k=n$ sunt divizorii naturali ai lui n, atunci $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k}$ sunt aceiaşi divizori, rearanjați însă, de unde deducem că

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k} \Leftrightarrow \left(d_1 d_2 \ldots d_k\right)^2 = n^k$$

29. Cum $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, avem

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1998} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1998}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{1998} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{999} = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \ldots + \frac{1}{1998}.$$

Astfel, $2A = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{1997} + \ldots + \frac{1}{1998} + \frac{1}{1000} =$

$= \frac{2998}{1000 \cdot 1998} + \ldots + \frac{2998}{1998 \cdot 1000} = 2998 \cdot B$, de unde $\frac{A}{B} = 1499 \in \mathbb{N}^*$.

30. Fie $p=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Dacă $n \in \{4, 5, 6\}$ prin calcul direct se arată că p nu este pătrat perfect.

Pentru $n \geq 7$ avem:
$p=(n^2-3n)(n^2-3n+2)(n^2+5n+4)(n^2+5n+6)=[(n^2-3n+1)^2-1]\cdot[(n^2+5n+5)^2-1]$ şi atunci (utilizând faptul că $(a^2-1)(b^2-1)=(ab-1)^2-(a-b)^2$) se arată că

$$[(n^2-3n+1)(n^2+5n+5)-2]^2<p<[(n^2-3n+1)(n^2+5n+5)-1]^2.$$

Cum p este cuprins între două pătrate consecutive atunci el nu mai poate fi pătrat perfect.

31. Dacă $a+b+c | a^2+b^2+c^2$, atunci $a+b+c | 2(ab+ac+bc)$.

Din identitatea $(ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$ deducem că $a+b+c|2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$.

Utilizând identitățile:

$$\left(a^{2^k}b^{2^k}+b^{2^k}c^{2^k}+a^{2^k}c^{2^k}\right)^2=a^{2^{k+1}}b^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}c^{2^{k+1}}+a^{2^{k+1}}c^{2^{k+1}}+$$
$$+2a^kb^kc^k\left(a^{2^k}+b^{2^k}+c^{2^k}\right)$$

şi $\left(a^{2^k}+b^{2^k}+c^{2^k}\right)^2=a^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}+c^{2^{k+1}}+2\left(a^{2^k}b^{2^k}+b^{2^k}c^{2^k}+a^{2^k}c^{2^k}\right)$ prin inducție matematică (după k) se arată că $a+b+c|\,a^{2^k}+b^{2^k}+c^{2^k}$ şi $a+b+c|2\left(a^{2^k}b^{2^k}+b^{2^k}c^{2^k}+a^{2^k}c^{2^k}\right)$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

32. Avem $1^{n+4}\equiv1^n\ (10)$ şi $2^{n+4}\equiv2^n(10)$, $3^{n+4}\equiv3^n(10)$ şi $4^{n+4}\equiv4^n(10)$, de unde deducem că $a_{n+4}\equiv a_n\ (10)$.

Astfel, dacă:

i) $n\equiv0(4)$, ultima cifră a lui a_n coincide cu ultima cifră a lui $a_4=1+8+16+256$, adică 4 ;

ii) $n\equiv1(4)$, ultima cifră a lui a_n coincide cu ultima cifră a lui $a_1=1+2+3+4$, care este zero.

iii) $n\equiv2(4)$, ultima cifră a lui a_n coincide cu ultima cifră a lui $a_2=1+4+9+16$, care este zero.

iv) $n\equiv3(4)$, ultima cifră a lui a_n coincide cu ultima cifră a lui $a_3=1+8+27+64$, care este zero.

33. Fie s cel mai mare număr natural cu proprietatea că $2^s\leq n$ şi considerăm $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{s-1}}{k}$ care se poate scrie sub forma $\frac{a}{b}+\frac{1}{2}$ cu b impar. Dacă $\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\in\mathbb{N}^*$, atunci b=2 (conform exc. 3 de la Cap. 6), absurd.

34.Considerăm numerele 2^0-1, 2^1-1, $2^2-1,\ldots,2^a-1$. Acestea sunt a+1 numere. Două dintre ele cel puțin dau aceleaşi resturi la împărțirea prin a căci sunt numai a asfel de resturi diferite (acest raționament se numeşte Principiul lui Dirichlet). Să presupunem că 2^k-1 şi 2^m-1 dau resturi egale la împărțirea prin a şi $k<m$. Atunci numărul $(2^m-1)-(2^k-1)=2^k(2^{m-k}-1)$ se divide prin a şi întrucât a este impar, rezultă că $2^{m-k}-1$ se divide la a.

La fel se demonstrează şi următoarea afirmație mai generală : dacă numerele naturale a şi c sunt prime între ele atunci se găseşte un număr natural b a.î. c^b-1 se divide prin a. Afirmația rezultă din următoarea Teoremă a lui Euler : Pentru orice numere naturale a şi c, numărul $a^{\phi(a)+1}-c$ se divide cu a, unde $\phi(a)$ este numărul numerelor naturale mai mici decât a şi prime cu el, având formula de calcul $\phi\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}\right)=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\cdot....\cdot\left(p_r^{\alpha_r}-p_r^{\alpha_r-1}\right)$.

3) CAPITOLUL 7

1. Din condiția ad=bc deducem existența numerelor naturale x, y, z, t a.î. a=xy, b=xz, c=yt şi d=zt. Atunci a+b+c+d=(x+t)(y+z) care este astfel număr compus.

2. Pentru n=0, n+15=15 este compus. Pentru n=1, n+3=4 este compus, pentru n=2, n+7=9 este compus, pentru n=3, n+3=6 este compus, pe când pentru n=4 obținem şirul : 5, 7, 11, 13, 17, 19 format din numere prime. Să arătăm că n=4 este singura valoare pentru care problema este adevărată. Fie deci $n\geq5$. Dacă n=5k, atunci 5|n+15. Dacă n=5k+1, atunci 5|n+9, dacă n=5k+2, atunci 5|n+3, dacă n=5k+3, atunci 5|n+7, pe când dacă n=5k+4, atunci 5|n+1.

<u>*Observație*</u> A.Schinzel a emis conjectura că există o infinitate de numere n pentru care numerele n+1, n+3, n+7, n+9 şi n+13 sunt prime (de exemplu pentru n=4, 10 sau 100 conjectura lui Schinzel se verifică).

3. Analog ca la Exc. 2 se arată că numai n=5 satisface condițiile enunțului.

4. Conform Micii Teoreme a lui Fermat $p|2^p-2$. Cum trebuie şi ca $p|2^p+1$ deducem cu necesitate că p|3 adică p=3. Atunci $3|2^3+1=9$.

5. Dacă n=0 atunci $2^0+1=2$ este prim.

Dacă n=1 atunci alegem m=0 şi $2^{2^0}+1=3$ este prim. Să presupunem acum că $n\geq2$. Dacă prin absurd n nu este de forma 2^m cu $m\geq1$, atunci n se scrie sub forma $n=2^k\cdot(2t+1)$, cu t, $k\in\mathbb{N}$ şi atunci $2^n+1=2^{2^k(2t+1)}+1=\left(2^{2^k}\right)^{2t+1}+1=M\cdot\left(2^{2^k}+1\right)$ şi deci 2^n+1 nu mai este prim, absurd. Deci n=0 sau $n=2^m$, cu $m\in\mathbb{N}$.

6.Dacă p>3 este prim, atunci $p=6k\pm1$ cu $k\in\mathbb{N}$. Atunci $4p^2+1=4\cdot(6k\pm1)^2+1=(8k\pm2)^2+(8k\pm1)^2+(4k)^2$.

7. Facem inducție matematică după n.

Pentru n=10, $p_{10}=29$ şi $29^2 < 2^{10}$. Conform Lemei 3.15., dacă $n\geq 6$, atunci între n şi 2n găsim cel puțin două numere prime, deducem că $p_{n-1}<p_n<p_{n+1}<2p_{n-1}$, deci dacă admitem inegalitatea din enunț pentru orice k cu $10<k\leq n$, atunci $p_{n+1}^2 < 4p_{n-1}^2 < 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$.

8. Facem inducție după r ; pentru r =1 totul este clar deoarece sumele dau ca resturi 0 şi b_1.

Să presupunem afirmația adevărată pentru r =k<p-1 şi neadevărată pentru r = k+1 şi vom ajunge la o contradicție.

Presupunem că sumele formate din k termeni $b_1, b_2, \ldots, b_k$ dau k+1 resturi diferite $0, s_1, s_2, \ldots, s_k$. Atunci, întrucât după adăugarea lui $b=b_{k+1}$ numărul sumelor diferite nu trebuie să se mărească, toate sumele $0+b_1$, $s_1+b, \ldots, s_k+b$ (modulo p) vor fi cuprinse în mulțimea $\{0, s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ (cu alte cuvinte, dacă la orice element al acestei mulțimi se adaugă b, atunci se obține din nou un element din aceiaşi mulțime). Astfel, această mulțime conține elementele 0, b, 2b, 3b, …, (p-1)b.

Deoarece ib-jb=(i-j)b iar 0<i-j<p şi 0<b<p, atunci în $\mathbb{Z}_p$, $ij\neq jb$. Contradicția provine din aceea că mulțimea $\{0, s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ conține p elemente diferite deşi am presupus că k+1<p.

9. Fie $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_p\leq a_{p+1}\leq\ldots\leq a_{2p-1}$ resturile împărțirii celor 2p-1 numere la p. Să considerăm acum numerele:

$$(\star)\quad a_{p+1}- a_2 , a_{p+2} - a_3 ,\ldots, a_{2p-1} - a_p.$$

Dacă unul dintre aceste numere este 0, de exemplu $a_{p+j}-a_{j+1}=0$, atunci $a_{j+1}=a_{j+2}=\ldots=a_{j+p}$ iar suma celor p numere $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_{j+p}$ se divide la p. Să examinăm cazul în care toate numerele din $(\star)$ sunt nenule.

Fie x restul împărțirii sumei $a_1+a_2+\ldots+a_p$ la p. Dacă x=0 totul este clar. Dacă $x\neq 0$, ținând cont de exercițiul 8, putem forma din diferențele $(\star)$ o sumă care să dea restul p-x la împărțirea cu p.

Adăugând respectivele diferențe la $a_1+a_2+\ldots+a_p$ şi efectuând reducerile evidente obținem o sumă formată din p termeni care se divide prin p.

10. Să demonstrăm că dacă afirmația problemei este adevărată pentru n=a şi n=b atunci ea este adevărată şi pentru n=ab.

Astfel este suficient să demonstrăm afirmația pentru n prim (aplicând exercițiul 9).

Fie date deci 2ab-1 numere întregi. Întrucât afirmația este presupusă adevărată pentru n=b şi 2ab-1>2b-1, din cele 2ab-1 numere se pot alege b a.î. suma acestora se divide prin b.

Apoi din cele rămase (dacă nu sunt mai puține de 2b-1) alegem încă b numere care se bucură de această proprietate ş.a.m.d.

Deoarece 2ab-1=(2a-1)b+(b-1) atunci această operație se poate repeta de 2a-1 ori şi să se obțină 2a-1 alegeri de câte b numere a.î. media aritmetică a celor b numere este număr întreg. Cum afirmația este presupusă adevărată pentru n=a din aceste 2a-1 medii aritmetice se pot alege a a.î. suma acestora să se dividă prin a.

Este clar atunci că cele ab numere formate din cele a alegeri de câte b numere au proprietatea cerută, căci ab=a+a+a+…+a (de b ori).

11. Dacă n este impar, $n\geq 7$ atunci $n=2+(n-2)$ şi cum $n-2$ este impar, $(2, n-2)=1$ iar $2>1$ şi $n-2>1$.

Să presupunem acum că n este par şi $n\geq 8$.

Dacă $n=4k$ (cu $k\geq 2$), atunci $n=(2k+1)+(2k-1)$ şi cum $2k+1>2k-1>1$ iar $(2k+1, 2k-1)=1$ din nou avem descompunerea dorită.

Dacă $n=4k+2$ ($k\geq 1$), atunci $n=(2k+3)+(2k-1)$ iar $2k+3>2k-1>1$.

Să arătăm că $(2k+3, 2k-1)=1$. Fie $d\in\mathbb{N}^*$ a.î. $d|2k+3$ şi $d|2k-1$. Deducem că $d|(2k+3)-(2k-1)=4$, adică $d|4$.

Cum d trebuie să fie impar deducem că $d=1$.

12. Cum $k\geq 3$, $p_1p_2\ldots p_k\geq p_1p_2p_3=2\cdot 3\cdot 5>6$, deci conform exercițiului 11 putem scrie $p_1p_2\ldots p_k=a+b$ cu $a, b\in\mathbb{N}^*$, $(a, b)=1$.

Avem deci $(a, p_i)=(b, p_j)=1$ pentru orice $i, j\in\{1, 2, \ldots, k\}$.

Fie $p|a$ şi $q|b$ cu p şi q prime şi să presupunem că $p<q$. Cum $(p, p_1p_2\ldots p_k)=1$, $p\geq p_{k+1}$ deci $q\geq p_{k+2}$.

Cum $a+b\geq p+q$ deducem relația cerută.

13. Fie $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 4$, şi $n\in\mathbb{N}$ a.î. $n> p_1p_2\ldots p_m$. Există atunci $k\geq m\geq 4$ a.î. $p_1p_2\ldots p_k\leq n<p_1p_2\ldots p_kp_{k+1}$. Avem că $q_n<p_{k+1}+1<p_k+p_{k+1}$ (căci dacă $q_n\geq p_{k+1}+1>p_{k+1}$ după alegerea lui q_n, atunci fiecare dintre numerele $p_1, p_2, \ldots, p_k$, p_{k+1} vor fi divizori ai lui n şi am avea $n\geq p_1p_2\ldots p_kp_{k+1}$, absurd).

Cum $k \geq 4$, conform exercițiului 12 avem $q_n < p_1 p_2 \dots p_{k-1}$ şi deci $\frac{q_n}{n} < \frac{1}{p_k} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{m}$ şi cum m este oarecare deducem că $\frac{q_n}{n} \to 0$ când $n \to \infty$.

14.Avem $\frac{12}{p_{12}} = \frac{12}{37} < \frac{1}{3}$. Presupunem prin absurd că există $n>12$ a.î. $\frac{n}{p_n} > \frac{1}{3}$. Alegem cel mai mic n cu această proprietate. Atunci $\frac{n-1}{p_{n-1}} < \frac{1}{3}$, de unde deducem că $p_{n-1} < p_n < 3n < p_{n-1}+3$, adică $p_n = p_{n-1}+1$, absurd.

15. Considerăm $f: [230, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{4}{3}\left(\ln(x-2) + \ln\ln(x-2)\right) - \ln(2x+1) - \ln\ln(2x+1) - \frac{3}{2} .$$

Deoarece pentru $x \geq 230$, $\frac{4}{3(x-2)} > \frac{2}{2x+1}$ şi $\frac{1}{\ln(x-2)} > \frac{1}{\ln(2x+1)}$ deducem imediat că

$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\ln(x-2)} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{\ln(2x+1)} \cdot \frac{2}{2x+1} > 0$, adică f este crescătoare pe intervalul $[230, +\infty)$. Folosind tabelele de logaritmi se arată imediat că f (230) $\approx$0, 0443 şi cum eroarea în scrierea logaritmilor este de cel mult 0,0001, din cele de mai sus deducem că $f(230)>0$, adică $f(x)>0$, pentru orice $x \geq 230$.

Deducem astfel că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 230$, avem inegalitatea:

$$\frac{4}{3}\left(\ln(n-2) + \ln\ln(n-2) - \frac{3}{2}\right) > \ln(2n+1) + \ln\ln(2n+1) - \frac{1}{2} .$$

Ținând cont de această ultimă inegalitate, de inegalitățile din observația dinaintea Teoremei 4.7. de la Capitolul 7, ca şi de faptul că pentru $n \geq 230$ avem $3(n-2) > \frac{4}{3}(2n+1)$ deducem că pentru $n \geq 230$ avem :

$$3p_{n-2} > 3(n-2)\left[\ln(n-2) + \ln\ln(n-2) - \frac{3}{2}\right] >$$

$$> \frac{4}{3}(2n+1)\left[\ln(n-2) + \ln\ln(n-2) - \frac{3}{2}\right] >$$

$$>\left[\ln(2n+1)+\ln\ln(2n+1)-\frac{1}{2}\right]\cdot(2n+1)>p_{2n-1}.$$

Observație În [21, p. 149] se demonstrează că inegalitatea din enunț este valabilă şi pentru orice $18\le n<230$.

De asemenea se demonstrează şi următoarele inegalități:

1) $p_{2n+1} < p_{2n}+p_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$
2) $p_{2n} < p_n+2p_{n-1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 9$, n impar
3) $p_{2n+1} < p_{2n}+2p_{n-1}-1$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 10$, n par .

4) CAPITOLUL 8

1. Din $\varphi(n!)=2^n$ deducem că $\varphi(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)=2^n$. Cum φ este multiplicativă iar pentru $n\ge 6$, $n=3^\alpha\cdot m$ cu $\alpha\ge 2$ şi $(3, m)=1$ deducem că $\varphi(n!)=\varphi(3^\alpha\cdot m)=\varphi(3^\alpha)\cdot\varphi(m)=(3^\alpha-3^{\alpha-1})\cdot\varphi(m)=3^{\alpha-1}\cdot 2\cdot\varphi(m)$, astfel că ar trebui ca $3^{\alpha-1}|2^n$ - absurd. Deci $n\le 5$. Prin calcul direct se arată că numai n=5 convine.

2. Fie p_i factorii primi comuni ai lui m şi n, q_j factorii primi ai lui m ce nu apar în descompunerea lui n şi r_k factorii primi ai lui n ce nu apar în descompunerea lui m. Atunci :

$$\varphi(m\cdot n)=m\cdot n\cdot\prod_i\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\cdot\prod_j\left(1-\frac{1}{q_j}\right)\cdot\prod_k\left(1-\frac{1}{r_k}\right)$$

$$\varphi(m^2)=m^2\cdot\prod_i\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\cdot\prod_j\left(1-\frac{1}{q_j}\right)$$

$$\varphi(n^2)=n^2\cdot\prod_i\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\cdot\prod_k\left(1-\frac{1}{r_k}\right)$$

(produsele $\prod_i$,$\prod_j$,$\prod_k$ se înlocuiesc cu 1 dacă nu există factori primi p_i, q_j , r_k).

Ridicând la pătrat ambii membrii ai inegalității din enunț şi ținând cont de egalitățile precedente acesta se reduce la inegalitatea evidentă

$$\prod_j\left(1-\frac{1}{q_j}\right)\cdot\prod_k\left(1-\frac{1}{r_k}\right)\le 1\,.$$

Avem egalitate atunci când m şi n au aceiaşi factori primi.

3. Necesitatea. (Euler). Să presupunem că $n=2^t m$ (cu $t\in\mathbb{N}$ şi m impar) este perfect, adică $\sigma(2^t m)=2^{t+1}m$. Cum $(2^t, m)=1$ iar σ este multiplicativă, $\sigma(2^t m)=\sigma(2^t)\cdot\sigma(m)$, astfel că $\sigma(n)=\sigma(2^t m)=\sigma(2^t)\cdot\sigma(m)=(1+2+2^2+\ldots+2^t)\sigma(m)=$ $=(2^{t+1}-1)\sigma(m)=2^{t+1}m$.

Din ultima egalitate deducem că $2^{t+1}|(2^{t+1}-1)\sigma(m)$ şi deoarece $(2^{t+1}, 2^{t+1}-1)=1$ (fiindcă $2^{t+1}-1$ este impar) rezultă că $2^{t+1}|\sigma(m)$, adică $\sigma(m)=2^{t+1}d$ cu $d\in\mathbb{N}$. Rezultă că $m=(2^{t+1}-1)d$.

Dacă $d\neq 1$, numerele 1, d şi $(2^{t+1}-1)d$ sunt divizori distincţi ai lui m şi vom avea $\sigma(m)\geq 1+d+(2^{t+1}-1)d=2^{t+1}d+1>2^{t+1}d$. Dar $\sigma(m)>2^{t+1}d$ este în contradicţie cu $\sigma(m)=2^{t+1}d$, deci $d=1$, adică $m=2^{t+1}-1$. Dacă m nu este prim atunci $\sigma(m)>(2^{t+1}-1)+1=2^{t+1}$ (fiindcă ar avea şi alţi divizori în afară de 1 şi $2^{t+1}-1$) şi contrazice $\sigma(m)=2^{t+1}$.

Deci dacă n este perfect atunci cu necesitate $n=2^t(2^{t+1}-1)$ cu $t\in\mathbb{N}$ şi $2^{t+1}-1$ prim.

Suficienţa.(Euclid). Dacă $n=2^t(2^{t+1}-1)$ cu $t\in\mathbb{N}$ şi $2^{t+1}-1$ prim, atunci $\sigma(n)=\sigma(2^t(2^{t+1}-1))=\sigma(2^t)\cdot\sigma(2^{t+1}-1)=(1+2+2^2+\ldots+2^t)(1+(2^{t+1}-1))=(2^{t+1}-1)2^{t+1}=2n$, adică n este perfect.

4. Avem $(\star)$ $$\left[\frac{n+1}{k}\right]=\begin{cases}\left[\dfrac{n}{k}\right]+1 & daca\ k\ divide\ n+1\\ \left[\dfrac{n}{k}\right] & daca\ k\ nu\ divide\ n+1\end{cases}$$

Vom face inducţie după n (pentru n=1 totul va fi clar). Să presupunem egalitatea din enunţ adevărată pentru n şi să o demonstrăm pentru n+1, adică $\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n+1)=\left[\frac{n+1}{1}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n}\right]+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]$.

Conform cu $(\star)$ în membrul al doilea rămân neschimbaţi termenii al căror numitor nu divide pe n+1 şi cresc cu 1 acei termeni al căror numitor $k|(n+1)$ cu $k\leq n$. Deci membrul drept creşte exact cu numărul divizorilor lui n+1 (adică cu $\tau(n+1)$) şi astfel proprietatea este probată pentru n+1.

5. Se face ca şi în cazul exerciţiului 4 inducţie matematică după n.

6. Dacă m|n, atunci n=mq şi $\left[\frac{n}{m}\right]=q$, n-1=mq-1=m(q-1)+m-1, deci $\left[\frac{n-1}{m}\right]=q-1$. Astfel $\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{n-1}{m}\right]=q-(q-1)=1$, deci

$$\sum_{m|n}\left(\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{n-1}{m}\right]\right)=\tau(n).$$

Dacă $m\nmid n$, atunci n=mq+r cu 0<r<m şi $\left[\frac{n}{m}\right]=q$. Dar n-1=mq+r-1, 0≤r-1<m şi deci $\left[\frac{n-1}{m}\right]=q$, adică $\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{n-1}{m}\right]=0$ pentru $m\nmid n$.

Avem deci $\sum_{m\geq 1}\left(\left[\frac{n}{m}\right]-\left[\frac{n-1}{m}\right]\right)=\tau(n)$.

7. Dacă $f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$, atunci f(x+1)=f(x), deci este suficient să demonstrăm egalitatea din enunț pentru 0≤x≤1.

Scriind că $\frac{k}{n}\leq x<\frac{k+1}{n}$ cu k≤n, atunci [nx]=k iar

$$f(x)=\underbrace{0+...+0}_{(n-k)\ ori}+\underbrace{1+...+1}_{k\ ori}-k=0.$$

8. Dacă n este prim, atunci π(n)= π(n-1)+1, deci $\frac{\pi(n)}{n}-\frac{\pi(n-1)}{n-1}=\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{\pi(n-1)}{n-1}\right)$. Cum π(k)<k pentru k≥1 deducem imediat că $\frac{\pi(n)}{n}>\frac{\pi(n-1)}{n-1}$.

Să presupunem acum că $\frac{\pi(n-1)}{n-1}<\frac{\pi(n)}{n}$. Dacă n nu este prim, atunci el este compus şi π(n)=π(n-1) astfel că am obține că $\frac{1}{n-1}<\frac{1}{n}$, absurd !.

9. Se arată uşor că $\frac{\sigma(m)}{m}=\frac{1}{d_1}+...+\frac{1}{d_t}$ unde d_1, …d_t sunt divizorii naturali ai lui m (evident t = τ(m)).

Deoarece printre divizorii lui n! găsim cel puțin numerele naturale $\leq$n deducem că $\frac{\sigma(n\,!)}{n\,!} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

10. Conform unei observații anterioare, p_n<ln(ln n+ln ln n) pentru orice n$\geq$6; de unde deducem că $p_n<(n+1)^{5/3}$ pentru orice n$\geq$6.

De asemenea deducem că f(1)=f(1)·f(1), de unde f(1)=1, f(2)=f(p_1)=2, f(3)=f(p_2)=3, f(5)=4, f(7)=5, f(11)=6, respectiv, f(6)=f(2)·f(3)=6, f(4)=f(2)·f(2)=4, f(8)=f^3(2)=8, f(9)=f^2(3)=9, f(10)=f(2)·f(5)=2·4=8, ş.a.m.d.

Cum $p_1=2<2^{5/3}$, $p_2=3<3^{5/3}$, $p_3=5<4^{5/3}$, $p_4=7<5^{5/3}$, $p_5=11<6^{5/3}$, deducem că

(1) $p_n<(n+1)^{5/3}$ pentru orice n$\geq$1.

Să demonstrăm prin inducție că şi $f(n)>n^{3/5}$ pentru orice n$\geq$2.

Dacă n este prim, atunci există k$\geq$1 a.î. n=p_k şi f(n)=f(p_k)=k+1> $p_k^{3/5}$ = =$n^{3/5}$.

Dacă n este compus atunci $n = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ şi

$$f(n) = \prod_{i=1}^{s} f\left(p_i^{\alpha_i}\right) > \prod_{i=1}^{s}\left(p_i^{3/5}\right)^{\alpha_i} = n^{3/5}$$

Cum seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f^2(n)}$ este absolut convergentă, conform unei Teoreme a lui Euler

$$S = \prod_{p\ prim}\frac{1}{1-\frac{1}{f^2(p)}} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{f^2(p_k)}} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{(k+1)^2}} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n+2} = 2$$

de unde S=2.

5) CAPITOLUL 9

1. Avem $\left(\frac{15}{71}\right)=\left(\frac{3}{71}\right)\left(\frac{5}{71}\right)$=-$\left(\frac{71}{3}\right)\left(\frac{71}{5}\right)$=-$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$=1

$\left(\frac{6}{35}\right)=\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{-1}{7}\right)=-1$

$\left(\frac{335}{2999}\right)=-\left(\frac{2999}{335}\right)=-\left(\frac{-16}{335}\right)=-\left(\frac{-1}{335}\right)=1$.

2. Presupunem prin reducere la absurd că există doar un număr finit de numere prime de forma 4n+1 cu n $\in\mathbb{N}^*$; fie acestea $p_1,p_2,\ldots,p_k$.
Considerăm numărul N $=1+(2p_1p_2\ldots p_k)^2>1$. Î n mod evident, divizorii primi naturali ai lui N sunt numere impare.(căci N este impar). Fie p |N un divizor prim impar al lui N. Deducem că $p|1+(2p_1p_2\ldots p_k)^2\Leftrightarrow(2p_1p_2\ldots p_k)^2\equiv-1(p)$ deci $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ adică p este de forma 4t+1 (căci am văzut că $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{p-1/2}$).Cu necesitate deci $p\in\{p_1,p_2\ldots p_k\}$ şi am obținut astfel o contradicție evidentă:$p|1+(2p_1p_2\ldots p_k)^2$.

3. Avem

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{-1\cdot 3}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}=\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{r}{3}\right)$$

cu $p\equiv r(3)$, r=0, 1, 2. Evident nu putem avea r=0.

Dacă r=1, atunci $\left(\frac{1}{3}\right)=1$. Dacă r=2, atunci $\left(\frac{2}{3}\right)=(-1)^{\frac{9-1}{8}}=-1$.

Dar p ≡ 2 (3) ⇔ p ≡ -1 (3). De asemenea 3| p±1 ⇔ 6| p±1 deoarece p este impar.

4. Presupunem ca şi în cazul precedent că ar exista numai un număr finit $p_1, p_2\ldots p_k$ de numere prime de forma 6n+1
Vom considera $N=3+(2p_1p_2\ldots p_k)^2>3$.
Cum N este impar, fie p un divizor prim impar al lui N.

Obținem că $(2p_1p_2\ldots p_k)^2 \equiv -3(p)$, adică $\left(\frac{-3}{p}\right)=1$. Ținând cont de Exc.3 de mai înainte deducem că p este de forma 6t+1, adică $p\in\{p_1, p_2\ldots p_k\}$ – absurd (căci din $p|N \Rightarrow p=3$ care nu este de forma 6t+1).

5. Ținând cont de exercițiul 2 avem:

$$\left(\frac{10}{13}\right)=\left(\frac{2\cdot 5}{13}\right)=\left(\frac{2}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right)=(-1)^{\frac{13^2-1}{8}}\cdot(-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{13-1}{2}}\cdot\left(\frac{13}{5}\right)=-\left(\frac{13}{5}\right)=-\left(\frac{3}{5}\right)=$$

$$=-(-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}\left(\frac{5}{3}\right)=$$

$$=-\left(\frac{5}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)=-(-1)^{\frac{-3-1}{4}}=1,$$ deci 10 este rest pătratic modulo 13 şi în consecință ecuația $x^2 \equiv 10\ (13)$ are soluții.

6. Avem

$$\left(\frac{21}{23}\right)=(-1)^{\frac{21-1}{2}\cdot\frac{23-1}{2}}\left(\frac{23}{21}\right)=(-1)^{\frac{20}{2}\cdot\frac{22}{2}}\left(\frac{2}{21}\right)=(-1)^{\frac{21^2-1}{8}}=-1,$$ deci congruența $x^2\equiv 1(23)$ nu are soluții.

7. Să presupunem că p este un număr prim de forma 6k+1. Atunci $\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)$ şi cum $\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)=1$ deducem că:

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{3}{p}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)=1$$

adică –3 este rest pătratic modulo p, deci există $a\in\mathbb{Z}$ a.î. $a^2+3\equiv 0\ (p)$.

Conform lemei lui Thue (vezi 1.2. de la Capitolul 11) există $x, y\in\mathbb{N}$ a.î. $x, y \le \sqrt{p}$ care au proprietatea că la o alegere convenabilă a semnelor + sau -, $p \mid ax\pm y$. Deducem că $p|\ a^2x^2-y^2$ şi $p|\ a^2+3 \Rightarrow p|\ 3x^2+y^2 \Leftrightarrow 3x^2+y^2=pt$ cu $t\in\mathbb{N}$ (cum $x\le\sqrt{p}$ şi $y\le\sqrt{p} \Rightarrow 3x^2+y^2<4p$, adică $t<4$). Rămâne valabil numai cazul t=1 (dacă t=2 va rezulta că p nu este prim iar dacă t=3 deducem că 3|y, y=3z şi $p=x^2+3$).

6) CAPITOLUL 10

1.– 4. Se aplică algoritmul de după Propoziția 3.15.

5. Dacă notăm cu $a=\overline{xyz}$, cum $1000000=3154\text{x}317+182$ şi $398\cdot246=1256\text{x}317+94$ obținem că $182a + 94=317b$ sau $-182a + 317b=94$.

O soluție particulară este $a_0=-5076, b_0=-2914$ iar soluția generală este:

$a= - 5076 + 317t$

$b= - 2914 + 182t$, cu $t\in\mathbb{Z}$.

Pentru ca a să fie un număr de 3 cifre trebuie să luăm t=17, 18 şi 19 obținând corespunzător numerele a=316, 630 şi 947.

6. Pentru $0\le s\le n$ avem:

$p_{n-s}\cdot p_{n+s}+p_{n+s-1}\cdot p_{n-s-1}=(p_{n-s-1}\cdot a_{n-s}+p_{n-s-2})p_{n+s}+p_{n+s-1}\cdot p_{n-s-1}=p_{n-s-1}(p_{n+s}\cdot a_{n+s}+p_{n+s-1})+$
$+p_{n+s}\cdot p_{n-s-2}=p_{n-s-1}(p_{n+s}\cdot a_{n+s+1}+p_{n+s-1})+p_{n+s}\cdot p_{n-s-2}=p_{n-s-1}\cdot p_{n+s+1}+p_{n+s}p_{n-s-2}=p_{n-(s+1)}\cdot p_{n+(s+1)}+$
$+p_{n+(s+1)-1}\cdot p_{n-(s+1)-1}$

Pentru s=0 obținem $p_n\cdot p_n+p_{n-1}\cdot p_{n-1}=p_{n-1}\cdot p_{n+1}+p_n\cdot p_{n-2}=\ldots=$
$=p_{-1}\cdot p_{2n+1}+p_{2n}\cdot p_{-2}=p_{2n+1}$ sau $p_{2n+1}=p_n^2+p_{n-1}^2$.

Analog se arată că $q_{n-s}\cdot q_{n+s}+q_{n+s-1}\cdot q_{n-s-1}= q_{n-(s+1)}\cdot q_{n+(s+1)}+q_{n+(s+1)-1}\cdot q_{n-(s+1)-1}$ pentru $1\le s\le n$, de unde pentru s=0 obținem $q_n^2+q_{n-1}^2=q_{n-1}\cdot q_{n+1}+q_n\cdot q_{n-2}=\ldots=$
$=q_{-1}\cdot q_{2n+1}+q_{2n}\cdot q_2=q_{2n}$.

7. Se deduc imediat relațiile:

$q_{2n}=p_{2n+1}-q_{2n+1}$ şi

$p_{2n+1}\cdot q_{2n}-p_{2n}\cdot q_{2n+1}=-1$, de unde $q_{2n}=\dfrac{p_{2n}p_{2n+1}-1}{p_{2n}+p_{2n+1}}$.

8. Avem $q_0=1$, $q_1=2$ şi $q_n=2q_{n-1}+q_{n-2}$ pentru $n\ge2$, de unde deducem că pentru orice $k\in\mathbb{N}$ $q_k=\dfrac{(1+\sqrt{2})^{k+1}-(1-\sqrt{2})^{k+1}}{2\sqrt{2}}$.

Astfel $\left(\sum_{k=0}^{n} q_k\right)\sqrt{2}=q_{n+1}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^{n+2}$, de unde concluzia.

9. Se face inducție matematică după n ținându-se cont de relațiile de recurență pentru $(p_n)_{n\ge0}$ şi $(q_n)_{n\ge0}$ (date de Propoziția 3.1.).

10. Se ştie că $\sqrt{a^2+1}=[a;\overline{2a}]$. Prin inducție matematică se arată că

$$q_{2n}=2a\sum_{k=0}^{n-1} q_{2k+1}+1 \quad \text{şi} \quad q_{2n+1}=2a\sum_{k=0}^{n} q_{2k}$$

11.Cum $[(4m^2+1)n+m]^2 \le D < [(4m^2+1)n+m+1]^2$ deducem că:
$a_0=\left[\sqrt{D}\right]=(4m^2+1)n+m$.

Avem $D-a_0^2=4mn+1$ iar dacă $\sqrt{D}=a_0+\dfrac{1}{\alpha_1}$ deducem că $\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{D}-a_0}=\dfrac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2}$ şi cum $a_0<\sqrt{D}<a_0+1$, $2a_0<\sqrt{D}+a_0<2a_0+1$

şi cum $a_0=(4mn+1)m+n$ avem $2m+\dfrac{2n}{4mn+1}<\dfrac{\sqrt{D}+a_0}{D-a_0^2}<2m+\dfrac{2n+1}{4mn+1}$.

Ținând cont că $\dfrac{2n+1}{4mn+1}<1$ avem că $a_1=[\alpha_1]=2m$. Scriind că $\alpha_1=a_1+\dfrac{1}{\alpha_2}$ deducem $\alpha_2=\dfrac{1}{\alpha_1-a_1}=\dfrac{\sqrt{D}+(4mn+1)m-n}{4mn+1}$.

Cum $a_0<\sqrt{D}<a_0+1$ şi $(4mn+1)m+n<\sqrt{D}<(4mn+1)m+n+1$, avem $2m<\alpha_2<2m+\dfrac{1}{4mn+1}$ de unde $a_2=[\alpha_2]=2m$.

Scriind acum $\alpha_2=a_2+\dfrac{1}{\alpha_3}$ deducem imediat că

$$\alpha_3=\frac{(4mn+1)\left[\sqrt{D}+(4mn+1)m+n\right]}{D-[(4mn+1)m+n]^2}=\sqrt{D}+(4mn+1)m+n=\sqrt{D}+a_0,$$ de unde

$a_3=[\alpha_3]=2a_0$, de unde $\sqrt{D}=[(4mn+1)m+n;\ \overline{2m,\ 2m,\ 2(4mn+1)m+2n}\ ]$.

7) CAPITOLUL 11

1. Pentru prima parte putem alege n=[$\frac{1}{q}$] dacă $\frac{1}{q}\notin\mathbb{N}$ şi n=[$\frac{1}{q}$]-1 dacă $\frac{1}{q}\in\mathbb{N}$.

Fie acum $q\in\mathbb{Q}\cap(0, 1)$. Conform celor de mai înainte există $n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $\frac{1}{n_0+1}\le q<\frac{1}{n_0}$.

Dacă $q=\frac{1}{n_0+1}$ atunci proprietatea este stabilită. În caz contrar avem: $0<q-\frac{1}{n_0+1}=q_1<\frac{1}{n_0(n_0+1)}<1$, deci $q_1\in\mathbb{Q}\cap(0, 1)$.

Din nou există $n_1\in\mathbb{N}$ a.î. $\frac{1}{n_1+1}\le q_1<\frac{1}{n_1}$.

Deoarece $\frac{1}{n_1+1}\le q_1=q_0-\frac{1}{n_0+1}<\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_0+1}=\frac{1}{n_0(n_0+1)}$ deducem imediat că $n_1+1>n_0(n_0+1)\ge n_0+1$ iar de aici faptul că $n_1>n_0$.

Procedând recursiv, după k paşi vom găsi $q_k\in\mathbb{Q}\cap(0, 1)$ şi $n_k\in\mathbb{N}$ a.î. $\frac{1}{n_k+1}\le q_k<\frac{1}{n_k}$ şi $n_k>n_{k-1}>\ldots>n_0$.

Să arătăm că procedeul descris mai sus nu poate continua indefinit iar pentru aceasta să presupunem că $q_k=\frac{a_k}{b_k}$. Vom avea $q_{k+1}=\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\frac{a_k}{b_k}-\frac{1}{n_k+1}=\frac{a_k(n_k+1)-b_k}{b_k(n_k+1)}$, de unde $a_{k+1}=a_k(n_k+1)-b_k$. Din $a_kn_k-b_k<0$ rezultă imediat $a_{k+1}<a_k$ şi din aproape în aproape $a_{k+1}<a_k<\ldots<a_0$.

Cum între 1 şi a_0 există numai un număr finit de numere naturale, va exista $k_0\in\mathbb{N}$ pentru care $q_{k_0}-\frac{1}{n_{k_0}+1}=0$, de unde $q=\sum_{i=0}^{k_0}\frac{1}{n_i+1}$ (faptul că termenii sumei sunt distincţi este o consecinţă a inegalităţilor $n_{k_0}>n_{k_0-1}>$ $>\ldots>n_0$).

În cazurile particulare din enunţ reprezentările sunt date de:

$$\frac{7}{22}=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{14+1}+\frac{1}{559+1} \quad \text{şi} \quad \frac{47}{60}=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{3+1}+\frac{1}{29+1}.$$

2. Facem inducție matematică după n.

Pentru n=1, avem $e_0=1$ iar $e_i=0$ pentru $i\geq 1$. Să presupunem afirmația adevărată pentru n şi fie i_0 primul dintre indicii 0, 1,…,k pentru care e_{i_0} este –1 sau 0. Atunci:

n+1= $e_0' + 3e_1' + ... + 3^k e_k'$ unde $e_i{}' = \begin{cases} -1 & pentru \quad i < i_0 \\ e_{i_0} + 1 & pentru \quad i = i_0 \\ e_i & pentru \quad i > i_0 \end{cases}$. Dacă un astfel de indice nu există, urmează $e_0'=e_1'=\ldots=e_k'=1$ şi atunci $n+1=-1-3+\ldots+3^k+3^{k+1}$. Unicitatea se stabileşte prin reducere la absurd.

3. Fie $q_1\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\frac{1}{q_1}\leq\frac{a}{b}<\frac{1}{q_1-1}$. Atunci $\frac{a}{b}-\frac{1}{q_1}=\frac{aq_1-b}{bq_1}$ şi are numărătorul mai mic strict decât a (căci din $\frac{a}{b}<\frac{1}{q_1-1}\Rightarrow$ $aq_1-b<a$). Fie q_2 a.î. $\frac{1}{q_2}\leq\frac{aq_1-b}{b}<\frac{1}{q_2-1}$. Deoarece $aq_1-b<a$ rezultă $\frac{aq_1-b}{b}<\frac{a}{b}$ deci $q_2\geq q_1$.

Rezultă $\frac{1}{q_1q_2}\leq\frac{aq_1-b}{bq_1}<\frac{1}{q_1(q_2-1)}$.

Avem $\frac{a}{b}-\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_1q_2}=\frac{aq_1q_2-bq_2-b}{bq_1q_2}$ (fracție cu numărător mai mic decât aq_1-b).

Continuând procedeul, numărătorul fracției scade continuu cu cel puțin 1 la fiecare pas.

După un număr finit de paşi el va fi zero, deci $\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\ldots+\frac{1}{q_1q_2\ldots q_n}$.

4. Fie n=2k-1 cu k$\in\mathbb{N}$. Atunci pentru e>k avem identitatea:

$$n=2k-1=(2e^2-k)^2 + (2e)^2 - (2e^2-k+1)^2$$

(deci putem alege $x=2e^2-k$, $y=2e$, $z=2e^2-k+1$).

Dacă n este par, adică n=2k, de asemenea pentruu e>k avem identitatea:

$$n=2k=(2e^2+2e-k)^2 + (2e+1)^2 - (2e^2+2e-k+1)^2$$

(deci în acest putem alege $x=2e^2+2e-k$, $y=2e+1$, $z=2e^2+2e-k+1$).

Evident, în ambele cazuri, putem alege e>k a.î. x, y, z>1.

5. Scriind că $3^{2k}=(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+3^k)$ deducem că $n=\dfrac{3^k-1}{2}\in\mathbb{N}$.

6. Cum pentru n>1 F_n este impar, dacă există p, q prime a.î. $F_n=p+q$ atunci cu necesitate p=2 şi q>2 şi astfel q= $2^{2^n}-1=(2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^{n-1}}-1)$ -absurd.

7. Pentru orice k, s $\in\mathbb{N}^*$ avem $(1+\dfrac{1}{k})(1+\dfrac{1}{k+1})...(1+\dfrac{1}{k+s})=1+\dfrac{s+1}{k}$.

Dacă x>1, x$\in\mathbb{Q}$ atunci putem scrie $x-1=\dfrac{m}{n}$ cu m, n$\in\mathbb{N}^*$ şi n>z (cu z arbitrar, căci nu trebuie neapărat ca (m, n)=1 !).

Este suficient acum să alegem k=n şi s=m-1.

8. Fie $p=x^2-y^2$ cu x>y şi deci p=(x-y)(x+y) şi cum p este prim x-y=1 şi x+y=p (în mod unic!), de unde $x=\dfrac{p+1}{2}$ şi $y=\dfrac{p-1}{2}$.

Deci $p=\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$.

9. Dacă numărul natural n se poate scrie ca diferenţă de două pătrate ale numerelor întregi a şi b, atunci n este impar sau multiplu de 4 şi reciproc.

Într-adevăr, fie $n=a^2-b^2$. Pentru a şi b de aceeaşi paritate rezultă n multiplu de 4. Pentru a şi b de parităţi diferite rezultă n impar.

Reciproc, dacă n=4m, atunci $n=(m+1)^2-(m-1)^2$ iar dacă n=2m+1, atunci $n=(m+1)^2-m^2$.

10. Se ţine cont de faptul că pătratul oricărui număr întreg impar este de forma 8m+1.

11. Se ţine cont de identitatea $(2x+3y)^2-3(x+2y)^2=x^2-3y^2$.

12. Din p prim şi p>3 rezultă p=6k±1 şi atunci:

$$4p^2+1=4(6k\pm1)^2+1=(8k\pm2)^2+(8k\pm1)^2+(4k)^2$$

13. Facem inducţie matematică după m (pentru m=1 atunci afirmaţia este evidentă).

Să presupunem afirmaţia adevărată pentru toate fracţiile cu numărătorii <m şi să o demonstrăm pentru fracţiile cu numărătorii m. Să presupunem deci că 1<m<n. Împărţind pe n la m avem:

(1) $n = m(d_0-1)+m-k = md_0-k$ cu $d_0>1$ şi $0<k<m$, de unde $md_0 = n+k \Leftrightarrow$

(2) $$\frac{m}{n}=\frac{1}{d_0}\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Cum k<m, aplicând ipoteza de inducţie lui k/n avem:

(3) $$\frac{k}{n}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1d_2}+\ldots+\frac{1}{d_1d_2\ldots d_r}$$ cu $d_i\in\mathbb{N}$, $d_i>1$ pentru $1\le i\le r$.

Din (2) şi (3) deducem că:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_0d_1}+\ldots+\frac{1}{d_0d_1\ldots d_r}$$ şi cu aceasta afirmaţia este probată.

De exemplu:

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{168}.$$

14. Clar, dacă $k=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\ldots+\frac{n}{a_n}$ cu $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N}^*$, atunci $k\le 1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Să probăm acum reciproca. Dacă k=1 atunci putem alege $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{n(n+1)}{2}$. Dacă k=n alegem $a_1=1$, $a_2=2$, …,$a_n=n$.

Pentru 1<k<n alegem $a_{k-1}=1$ şi $a_i=\frac{n(n+1)}{2}-k+1$ (căci

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}=k-1+\frac{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}{\frac{n(n+1)}{2}-k+1}=k\ ).$$

Dacă $n<k<\frac{n(n+1)}{2}$ atunci scriind pe k sub forma $k=n+p_1+p_2+\ldots+p_i$ cu $n-1\geq p_1>p_2>\ldots>p_i\geq 1$, atunci putem alege $a_{p_1+1}=a_{p_2+1}=\ldots=a_{p_i+1}=1$ şi $a_j=j$ în rest.

15. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $n=a+(a+1)+\ldots+(a+k-1)$, $(k>1)$ atunci $n=\frac{k(2a+k-1)}{2}$ şi pentru k impar, k este divizor impar al lui n, iar pentru k par, 2a+k-1 este divizor impar al lui n. Deci oricărei descompuneri îi corespunde un divizor impar al lui n.

Reciproc, dacă q este un divizor impar al lui n, considerăm 2n=pq (cu p par) şi fie $a=\frac{1}{2}|p-q|+\frac{1}{2}$ şi $b=\frac{1}{2}(p+q)-\frac{1}{2}$.

Se observă că $a, b\in\mathbb{N}^*$ şi $a\leq b$. În plus,

$$a+b=\frac{p+q+|p-q|}{2}=\max(p,\ q) \text{ iar}$$

$$b-a+1=\frac{p+q-|p-q|}{2}=\min(p,\ q).$$

Deci (a+b)(b-a+1)=pq=2n.

Am obţinut că $a+(a+1)+\ldots+b=\frac{(a+b)(b-a+1)}{2}=n$.

(Se observă că dacă $q_1\neq q_2$ sunt divizori impari ai lui n atunci cele două soluţii construite sunt distincte).

16. Vom nota suma x+y prin s şi vom transcrie formula dată astfel:

$$n=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}=\frac{s^2+s}{2}+x. \qquad (1)$$

Condiţia că x şi y sunt numere naturale este echivalentă cu $x\geq 0$ şi $s\geq x$, x şi s numere naturale. Pentru s dat, x poate lua valorile 0, 1, …,s. În mod corespunzător, n determinat de formula (1) ia valorile $\frac{s^2+s}{2}$, $\frac{s^2+s}{2}+1$, ..., $\frac{s^2+s}{2}+s$. Astfel, fiecărui s=0, 1, 2…. îi corespunde o mulţime formată din s+1 numere naturale n. Să observăm că ultimul număr al mulţimii corespunzătoare lui s este cu 1 mai mic decât primul număr al mulţimii corespunzătoare lui s+1: $\left(\frac{s^2+s}{2}+1+s\right)=\frac{(s+1)^2+(s+1)}{2}$. De aceea, aceste mulțimi vor conține toate numerele naturale n şi fiecare n va intra numai într-o astfel de mulțime, adică lui îi va corespunde o singură pereche de valori s şi x.

8) CAPITOLUL 12

1. x=y=z=0 verifică ecuația. Dacă unul dintre numerele x, y, z este zero atunci şi celelalte sunt zero. Fie x>0, y>0, z>0. Cum membrul drept este par trebuie ca şi membrul stâng să fie par astfel că sunt posibile situațiile (x, y impare, z par) sau (x, y, z pare).

În primul caz membrul drept este multiplu de 4 iar membrul stâng este de forma 4k+2, deci acest caz nu este posibil.

Fie deci $x=2^{\alpha}x_1$, $y=2^{\beta}y_1$, $z=2^{\gamma}z_1$ cu x_1, y_1, $z_1\in\mathbb{Z}$ impare iar α, β, $\gamma\in\mathbb{N}^*$.

Înlocuind în ecuație obținem

$2^{2\alpha}\cdot x_1^2+2^{2\beta}\cdot y_1^2+2^{2\gamma}\cdot z_1^2=2^{\alpha+\beta+\gamma}\cdot x_1\cdot y_1\cdot z_1$, astfel că dacă, de exemplu, $\alpha=\min(\alpha, \beta, \gamma)$,

$$(1)\qquad 2^{2\alpha}\left(x_1^2+2^{2(\beta-\alpha)}\cdot y_1^2+2^{2(\gamma-\alpha)}\cdot z_1^2\right)=2^{\alpha+\beta+\gamma+1}\cdot x_1\cdot y_1\cdot z_1 .$$

Dacă $\beta>\alpha$ şi $\gamma>\alpha \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma>2\alpha$ şi egalitatea (1) nu este posibilă (membrul stâng este impar iar cel drept este par). Din aceleaşi considerente nu putem avea $\alpha=\beta=\gamma$.

Dacă $\beta=\alpha$ şi $\gamma>\alpha$ din nou $\alpha+\beta+\gamma+1>2\alpha+1$ (din paranteză se mai scoate 2^1) şi din nou (1) nu este posibilă.

Rămâne doar cazul x = y = z = 0.

2. În esență soluția este asemănătoare cu cea a exercițiului 1.

Sunt posibile cazurile :

i) x, y pare, z, t impare - imposibil (căci membrul drept este de forma 4k iar cel stâng de forma 4k+2).

ii) x, y, z, t impare, din nou imposibil (din aceleaşi considerente).

iii) x, y, z, t pare : $x=2^{\alpha}x_1$, $y=2^{\beta}y_1$, $z=2^{\gamma}z_1$ şi $t=2^{\delta}t_1$ cu x_1, y_1, z_1, t_1 impare iar α, β, γ, $\delta\in\mathbb{N}^*$.

Fie $\alpha=\min(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$; înlocuind în ecuație se obține (2): $2^{2\alpha}\cdot\left(x_1^2+2^{2(\beta-\alpha)}\cdot y_1^2+2^{2(\gamma-\alpha)}\cdot z_1^2+2^{2(\delta-\alpha)}\cdot t_1^2\right)=2^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}\cdot x_1\cdot y_1\cdot z_1\cdot t_1$.

Dacă $\beta, \gamma, \delta > \alpha$ egalitatea (1) nu este posibilă deoarece paranteza din (1) este impară şi $\alpha+\beta+\gamma+\delta+1>2\alpha$.

Dacă $\beta=\alpha$, $\gamma, \delta > \alpha$, din paranteza de la (1) mai iese 2 factor comun şi din nou $\alpha+\beta+\gamma+\delta+1>2\alpha+1$.

Contradicţii rezultă imediat şi în celelalte situaţii.

Rămâne deci doar posibilitatea $x = y = z = t = 0$.

3. Se verifică imediat că (1, 1) şi (2, 3) sunt soluţii ale ecuaţiei. Să arătăm că sunt singurele. Fie $(x, y)\in\mathbb{N}^2$, $2x\geq 3$, $y>1$ a.î. $3^x-2^y=1$; atunci $3^x-1=2^y$ sau

$$(1) \quad 3^{x-1}+3^{x-2}+\ldots+3+1=2^{y-1}.$$

Dacă $y>1$, membrul drept din (1) este par, de unde concluzia că x trebuie să fie par. Fie $x=2n$ cu $n\in\mathbb{N}$. Deoarece $x\neq 2$ deducem că $x\geq 4$, deci $y>3$. Ecuaţia iniţială se scrie atunci $9^n-1=2^y$, sau $9^{n-1}+9^{n-2}+\ldots+9+1=2^{y-3}$.

Deducem din nou că n este par, adică $n=2m$ cu $m\in\mathbb{N}$. Ecuaţia iniţială devine $3^{4m}-1=2^y$ sau $81^m-1=2^y$, imposibil (căci membrul stâng este multiplu de 5).

4. Ecuaţia se mai scrie sub forma $(x+y+1)(x+y-m-1)=0$ şi cum $x, y\in\mathbb{N}$, atunci $x+y+1\neq 0$, deci $x+y=m+1$ ce admite soluţiile $(k, m+1-k)$ şi $(m+1-k, k)$ cu $k=0, 1, \ldots, m+1$.

5. Dacă $y\equiv 0(2)$ atunci $x^2\equiv 7(8)$ ceea ce este imposibil căci 7 nu este rest pătratic modulo 8. Dacă $y\equiv 1(2)$, $y=2k+1$ atunci $x^2+1=y^3+2^3=(y+2)[(y-1)^2+3]$, de unde trebuie ca $(2k)^2+3|x^2+1$. Acest lucru este imposibil deoarece $(2k)^2+3$ admite un divizor prim de forma $4k+3$ pe când x^2+1 nu admite un astfel de divizor.

6. Dacă y este par, $x^2=y^2-8z+3\equiv 0$ (8), ceea ce este imposibil.

Dacă y este impar, $y=2k+1$, $x^2=3-8z+8k^2+8k+2\equiv 5(8)$, ceea ce este de asemenea imposibil (căci x este impar şi modulo 8 pătratul unui număr impar este egal cu 1).

7. Presupunem că $z\neq 3$ şi îl fixăm.

Fie $(x, y)\in\mathbb{N}^2$ o soluţie a ecuaţiei (cu z fixat). Dacă $x=y$, atunci $x=y=1$ şi deci $z=3$, absurd !.

Putem presupune $x < y$ iar dintre toate soluţiile va exista una (x_0, y_0) cu y_0 minim. Fie $x_1=x_0z-y_0$ şi $y_1=x_0$.

Avem : $y_0 \cdot (x_0 z - y_0) = x_0^2 + 1 > 1$, deci $x_1 \in \mathbb{N}$.

Cum

$$x_1^2 + y_1^2 + 1 = (x_0 z - y_0)^2 + x_0^2 + 1 = x_0^2 + y_0^2 + 1 + x_0^2 z^2 - 2x_0 y_0 z =$$

$= x_0 y_0 z + x_0^2 z^2 - 2x_0 y_0 z = x_0^2 z - x_0 y_0 z = x_0 z(x_0 z - y_0) = x_0 z x_1 = x_1 y_1$ z, adică şi (x_1, y_1) este soluţie a ecuaţiei. Cum $x_1<y_1$ iar $y_1<y_0$ se contrazice minimalitatea lui y_0, absurd, deci z=3.

8. Ecuaţia fiind simetrică în x, y şi z să găsim soluţia pentru care $x \le y \le z$.

Atunci $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Leftrightarrow 1 \le \frac{3}{x} \Leftrightarrow x \le 3$.

Cazul x=1 este imposibil. Dacă x=2 atunci ecuaţia devine $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ şi deducem imediat că y=z=4 sau {y, z}={3, 6}.

Dacă x=3 atunci ecuaţia devine $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$, de unde y=z=3.

Prin urmare x=y=z=3 sau {x, y, z}={2, 4} (două egale cu 4) sau {x, y, z}={2, 3, 6}.

9. Ecuaţia se pune sub forma echivalentă $(x-a)(y-a)=a^2$. Dacă notăm prin n numărul divizorilor naturali ai lui a^2, atunci ecuaţia va avea 2n-1 soluţii, ele obţinându-se din sistemul :

$$\begin{cases} x-a=\pm d \\ y-a=\pm \dfrac{a^2}{d} \end{cases}, \text{ (cu } d|a^2,\ d\in\mathbb{N}^*\text{)}.$$

Nu avem soluţie în cazul x-a=-a şi y-a=-a.

10. O soluţie evidentă este y=x cu $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

Să presupunem că $y \ne x$, $y>x$. Atunci $w = \frac{x}{y-x} \in \mathbb{Q}_+^*$, de unde $y = \left(1 + \frac{1}{w}\right)x$. Astfel $x^y = x^{\left(1+\frac{1}{w}\right)x}$ şi cum $x^y=y^x$ atunci $x^{\left(1+\frac{1}{w}\right)x} = y^x$ ceea ce dă $x^{1+\frac{1}{w}}=y=\left(1+\frac{1}{w}\right)x$, de unde $x^{\frac{1}{w}}=1+\frac{1}{w}$, deci $x=\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w}$, $y=\left(1+\frac{1}{w}\right)^{w+1}$ (1).

Fie $w=\frac{n}{m}$ şi $x=\frac{r}{s}$ din $\mathbb{Q}$ ireductibile. Din (1) deducem că $\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{n}{m}}=\frac{r}{s}$, de unde $\frac{(m+n)^n}{n^n}=\frac{r^m}{s^m}$. Cum ultima egalitate este între fracţii ireductibile deducem că $(m+n)^n=r^m$ şi $n^n=s^m$. Deci vor exista numerele naturale k, l a.î. $m+n=k^m$, $r=k^n$ şi $n=l^m$, $s=l^n$. Astfel $m+l^m=k^m$, de unde $k\geq l+1$. Dacă $m>1$, am avea $k^m\geq(l+1)^m\geq l^m+ml^{m-1}+1>l^m+m$, prin urmare $k^m>l^m+m$, imposibil. Astfel m=1, de unde $w=\frac{n}{m}=n$ şi astfel avem soluţia $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ cu $n\in\mathbb{N}^*$ arbitrar.

De aici deducem că singura soluţie în $\mathbb{N}$ este pentru n=1 cu {x, y}={2, 4}.

11. Evident nici unul dintre x, y, z, t nu poate fi egal cu 1. De asemenea nici unul nu poate fi superior lui 3, căci dacă de exemplu x=3, cum y, z, t≥2 atunci :
$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{31}{36}<1$, imposibil !. Deci x=2 şi analog y=z=t=2.

12. Se observă imediat că perechea (3, 2) verifică ecuaţia din enunţ.

Dacă $(a, b)\in\mathbb{N}^2$ este o soluţie a ecuaţiei atunci ţinând cont de identitatea :

$$3(55a+84b)^2-7(36a+55b)^2=3a^2-7b^2$$

deducem că şi (55a+84b, 36a+55b) este o altă soluţie (evident diferită de (a, b)).

13. Să observăm la început că cel puţin două dintre numerele x, y, z trebuie să fie pare, căci dacă toate trei sunt impare atunci $x^2+y^2+z^2$ va fi de forma

8k+3, deci nu putem găsi t∈ℕ a.î. $t^2 \equiv 3(8)$. (pătratul oricărui număr natural este congruent cu 0 sau 1 modulo 4).

Să presupunem de exemplu că y şi z sunt pare, adică y=2l şi z=2m cu l, m∈ℕ.

Deducem imediat că t>x, fie t-x=u. Ecuația devine $x^2+4l^2+4m^2=(x+u)^2 \Leftrightarrow u^2=4l^2+4m^2-2xu$. Cu necesitate u este par, adică u=2n cu n∈ℕ. Obținem $n^2=l^2+m^2-nx$, de unde $x=\frac{l^2+m^2-n^2}{n}$ iar $t=x+u=x+2n=\frac{l^2+m^2+n^2}{n}$.

Cum x∈ℕ, deducem că $n^2<l^2+m^2 \Leftrightarrow n<\sqrt{l^2+m^2}$.

În concluzie (1)

$x=\frac{l^2+m^2-n^2}{n}$, $y=2l$, $z=2m$, $t=\frac{l^2+m^2+n^2}{n}$ cu m, n, l∈ℕ, $n|l^2+m^2$ şi $n<\sqrt{l^2+m^2}$.

Reciproc orice x, y, z, t dați de (1) formează o soluție pentru ecuația $x^2+y^2+z^2=t^2$.

Într-adevăr, cum

$\left(\frac{l^2+m^2-n^2}{n}\right)^2+(2l)^2+(2m)^2=\left(\frac{l^2+m^2+n^2}{n}\right)^2$, pentru orice l, m, n ținând cont de (1) deducem că $x^2+y^2+z^2=t^2$.

14. Alegem x şi z arbitrare şi atunci cum $\left(\frac{x}{(x,z)},\frac{z}{(x,z)}\right)=1$, din $\frac{x}{(x,z)}\cdot y=\frac{z}{(x,z)}\cdot t$ deducem că $\frac{z}{(x,z)}$ | y, adică $y=\frac{uz}{(x,z)}$, deci $t=\frac{ux}{(x,z)}$.

Pe de altă parte, luând pentru x, z, u valori arbitrare şi punând $y=\frac{uz}{(x,z)}$ şi $t=\frac{ux}{(x,z)}$ obținem că soluția generală în $\mathbb{N}^4$ a ecuației xy=zt este x=ac, y=bd, z=ad şi t=bc cu a, b, c, d∈ℕ arbitrari.

15. Presupunem prin absurd că $x^2+y^2+z^2=1993$ şi $x+y+z=a^2$, cu a∈ℕ. Cum $a^2=x+y+z<\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}=\sqrt{5979}<78$, deducem că $a^2\in\{1,$ 4, 9,

…,64}. Cum $(x+y+z)^2= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$ deducem că x+y+z trebuie să fie impar, adică $a^2\in\{1, 9, 25, 49\}$.

De asemenea , din $(x+y+z)^2>x^2+y^2+z^2$ şi $25^2<1993$ deducem că $a^2=49$, de unde sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1993 \\ x+y+z=49 \end{cases}$$

Înlocuind y+z=49-x obținem $(49-x)^2=(y+z)^2>y^2+z^2=1993-x^2$, adică

$x^2-49x+204>0$, deci $x<\frac{49-\sqrt{1585}}{2}$ sau $x>\frac{49+\sqrt{1585}}{2}$. În primul caz $x\geq 45$ deci $x^2=2025>1993$, absurd. În al doilea caz $x\leq 4$. Problema fiind simetrică în x, y, z deducem analog că şi $y, z\leq 4$, deci $49=x+y+z\leq 4+4+4=12$, absurd.

Observație De fapt ecuația $x^2+y^2+z^2=1993$ are în $\mathbb{N}^3$ doar soluțiile: (2, 30, 33), (2, 15, 42), (11, 24, 36), (15, 18, 38), (16, 21, 36) şi (24, 24, 29).

16. Ecuația nu are soluții în numere întregi pentru că membrii săi sunt de parități diferite.

Într-adevăr, $x_1^p+\ldots+x_n^p\equiv x_1+\ldots+x_n\ (2)$ şi

$(x_1+\ldots+x_n)^2\equiv x_1+\ldots+x_n\ (2)$ sau $(x_1+\ldots+x_n)^2+1\equiv x_1+\ldots+x_n+1\ (2)$, de unde deducem că $x_1^p+\ldots+x_n^p-(x_1+\ldots+x_n)^2-1$ este impar, deci nu poate fi zero.

17. Reducând modulo 11 se obține că $x^5\equiv\pm 1(11)$ (aplicând Mica Teoremă a lui Fermat) iar $x^5\equiv 0(11)$ dacă $x\equiv 0(11)$.

Pe de altă parte, $y^2+4\equiv 4, 5, 8, 2, 9, 7\ (11)$ deci egalitatea $y^2=x^5-4$, cu x, $y\in\mathbb{Z}$ este imposibilă.

9) CAPITOLUL 13

1. Fie A şi B puncte laticiale situate la distanța 1 între ele prin care trece cercul $\mathfrak{C}$ din enunț (de rază $r\in\mathbb{N}^*$). Vom considera un sistem ortogonal de axe cu originea în A având pe AB drept axă x′x şi perpendiculara în A pe AB drept axă y′y (vezi Fig. 9)

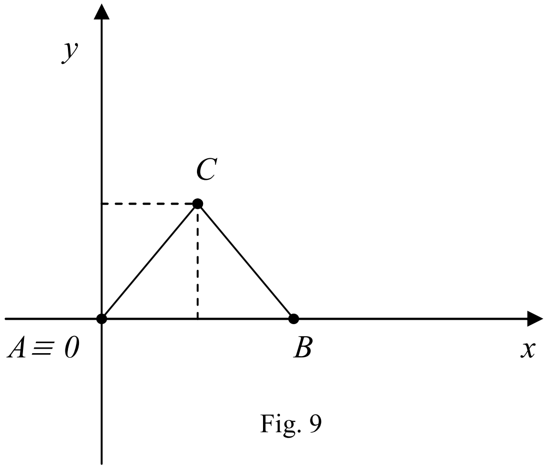

Fig. 9

Dacă C este centrul acestui cerc, atunci coordonatele lui C sunt $(\frac{1}{2}, \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}})$.

Dacă M(x, y) mai este un alt punct laticial prin care trece $\mathfrak{C}$, atunci x, y$\in\mathbb{Z}$ şi

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}\right)^2=r^2 \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+r^2-2y\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-x=2y\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}= y\sqrt{4r^2-1}\,.$$

Ultima egalitate implică $4r^2-1=k^2$ cu $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(2r-k)(2r+k)=1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2r-k=1\\2r+k=1\end{cases} \text{ sau } \begin{cases}2r-k=-1\\2r+k=-1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}r=\frac{1}{2}\\k=0\end{cases} \text{ sau } \begin{cases}r=-\frac{1}{2}\\k=0\end{cases} \text{ - absurd !.}$$

2. Fie $x=\frac{p}{q}$ şi $y=\frac{r}{q}$ cu p, q, r$\in\mathbb{Z}$, q$\neq$0.

Atunci punctele laticiale de coordonate (r, -p) şi (–r, p) au aceiaşi distanţă până la punctul de coordonate (x, y) deoarece :

$$\left(r-\frac{p}{q}\right)^2+\left(-p-\frac{r}{q}\right)^2=\left(-r-\frac{p}{q}\right)^2+\left(p-\frac{r}{q}\right)^2.$$

Prin urmare, pentru orice punct de coordonate raţionale există două puncte laticiale distincte egal depărtate de acel punct.

Dacă presupunem prin absurd că a∈ℚ şi b∈ℚ, atunci conform cu observaţia de mai înainte, există două puncte laticiale distincte ce sunt egal depărtate de punctul de coordonate (a, b). Astfel dacă cercul cu centrul în punctul de coordonate (a, b) conţine în interiorul său n puncte laticiale, atunci un cerc concentric cu acesta însă de rază mai mare va conţine în interiorul său cel puţin n+2 puncte laticiale, neexistând astfel de cercuri cu centrul în punctul de coordonate (a, b) care să conţină în interiorul său exact n+1 puncte laticiale - absurd !. Deci a∉ℚ sau b∉ℚ.

3.

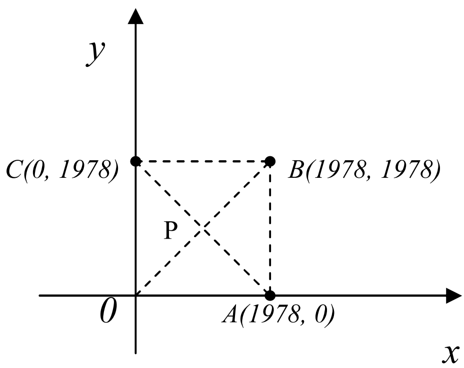

Fig. 10

Se observă (vezi Fig. 10) că centrul cercului va avea coordonatele (989, 989) şi raza $r=989\cdot\sqrt{2}$, astfel că un punct M(x, y)∈$\mathfrak{C}$ ⇔

$$(1)\quad (x-989)^2+(y-989)^2=2\cdot 989^2.$$

Cum membrul drept din (1) este par deducem că dacă (x, y)∈$\mathbb{Z}^2$, atunci x-989 şi y-989 au aceiaşi paritate.

Astfel $A=\frac{1}{2}\cdot(x+y)-989$ şi $B=\frac{1}{2}\cdot(x-y)$ sunt numere întregi.

Deducem imediat că x-989=A+B şi y-989=A-B şi cum $(A+B)^2+(A-B)^2=2A^2+2B^2$, (1) devine :

$$(2) \quad A^2+B^2=989^2.$$

Observăm că $n=989^2=23^2 \cdot 43^2$. Conform Teoremei 1.7. de la Capitolul 11 ecuația (2) va avea soluții întregi.

Prin calcul direct se constată că numărul $d_1(n)$ al divizorilor lui n de forma 4k+1 este $d_1(n)=5$ iar numărul $d_3(n)$ al divizorilor lui n de forma 4k+3 este $d_3(n)=4$ astfel că în conformitate cu Teorema 1.7. de la Capitolul 11, numărul de soluții naturale ale ecuației (2) este $4(d_1(n)-d_3(n))=4(5-4)=4$.

Cum (0, 0), (0, 989), (989, 0) şi (989, 989) verifică (2) deducem că acestea sunt toate, de unde şi concluzia problemei.

4. Fie date punctele laticiale $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le 9$. Definim $f:\{P_1, \ldots, P_9\} \to \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0,1\}$ prin

$$f(P_i)=\left(x_i - 2\cdot\left[\frac{x_i}{2}\right] \; , \; y_i - 2\cdot\left[\frac{y_i}{2}\right] \; , \; z_i - 2\cdot\left[\frac{z_i}{2}\right]\right), \; 1 \le i \le 9.$$

Cum domeniul are 9 elemente iar codomeniul are 8, f nu poate să fie injectivă. Deci există $i, j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $i \neq j$ pentru care $f(P_i)= f(P_j)$, adică $x_i- x_j$,y_i-y_j , $z_i-z_j \in 2\cdot\mathbb{Z}$.

În acest caz $\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}, \frac{z_i + z_j}{2} \in \mathbb{Z}$. Am găsit astfel punctul laticial $P\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}, \frac{z_i + z_j}{2}\right)$ care este mijlocul segmentului $P_i P_j$.

<u>Observație</u> Problema se poate extinde imediat la cazul a $m \ge 2^k+1$ puncte laticiale din $\mathbb{R}^k$.

BIBLIOGRAFIE

1. **BUŞNEAG D, MAFTEI I.** : Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983.

2. **BUŞNEAG D.**: Teoria grupurilor, Editura Universitaria, Craiova, 1994

3. **BUŞNEAG D.**: Capitole speciale de algebră, Editura Universitaria, Craiova, 1997

4. **BUŞNEAG D., BOBOC FL., PICIU D.**: Elemente de aritmetică şi teoria numerelor , Editura Radical, Craiova, 1998.

5. **CHAHAL J. S.** : Topics in Number Theory, Plenum Press –1988.

6. **COHEN H.** : A Course in Computational Algebraic Number Theory, Springer –1995.

7. **COHEN P. M.** : Universal Algebra, Harper and Row –1965.

8. **CUCUREZEANU I.** : Probleme de aritmetică şi teoria numerelor, Editura Tehnică, Bucureşti –1976.

9. **DESCOMBES E.** : Éleménts de théorie des nombres, Press Universitaires de France – 1986.

10. **ECKSTEIN G.** : Fracţii continue, RMT, nr 1, pp.17-36, -1986.

11. **HINCIN A.I.** : Fracţii continue, Editura Tehnică, Bucureşti, -1960.

12. **HONSBERGER R.** : Mathematical Gems, vol 1, The Mathematical Association of America –1973.

13. **IAGLOM A.M., I.M.** : Probleme neelementare tratate elementar, Editura Tehnică, Bucureşti –1983.

14. **I. D. ION , NIŢĂ C.** : Elemente de aritmetică cu aplicaţii în tehnici de calcul, Editura Tehnică, Bucureşti - 1978.

15. **IRLEAND K., ROSEN M.** : A Classical Introduction to Modern Number Theory, Second edition, Springer –1990.

16. **KONISK J.M., MERCIER A.** : Introduction à la théorie des nombers, Modulo Editeur –1994.

17. **Mc. CARTHY** : Introduction to Arithmetical Functions, Springer-Verlag- 1986.

18. **NĂSTĂSESCU C.** : Introducere în teoria mulţimilor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti – 1974.

19. **NĂSTĂSESCU C., NIŢĂ C., VRACIU C.** : Aritmetică şi algebră, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti – 1993.

20. **NIVEN I., ZUCKERMAN H. S., MONTGOMERY H. L.** : An introduction to the Theory of Numbers, Fifth edition, John and Sons, Inc. – 1991.

21. **PANAITOPOL L., GICA L.** , Probleme celebre de teoria numerelor, Editura Universităţii din Bucureşti, 1998.

22. **POPESCU D., OBROCEANU G.** : Exerciții şi probleme de algebră, combinatorică şi teoria mulțimilor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti – 1983.

23. **POPOVICI C. P.** : Teoria Numerelor, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti – 1973.

24. **POSNIKOV M. M.** : Despre teorema lui Fermat (Introducere în teoria algebrică a numerelor), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti – 1983.

25. **RADOVICI MĂRCULESCU P.** : Probleme de teoria elementară a numerelor, Editura Tehnică, Bucureşti - 1983.

26. **RIBENBOIM P.** : Nombres premiers ; mysteres et records, Press Universitaire de France – 1994.

27. **ROSEN K. H.** : Elementary Number Theory and its Applications, Addison – Wesley Publishing Company – 1988.

28. **RUSU E.** :Bazele teoriei numerelor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1953.

29. **SERRE J. P.** : A Course in Arithmetics, Springer – Verlag – 1973.

30. **SHIDLOVSKY A. B.** : Transcedental numbers, Walter de Gayter – 1989.

31. **SIERPINSKY W.** : Elementary Theory of Numbers, Polski Academic Nauk, Warsaw – 1964.

32. **SIERPINSKY W.** : Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime, Editura Ştiințifică, Bucureşti – 1966.

33. **SIERPINSKY W.** : 250 Problemes des Théorie Elementaire des Nombres, Collection Hachette Universite – 1972.