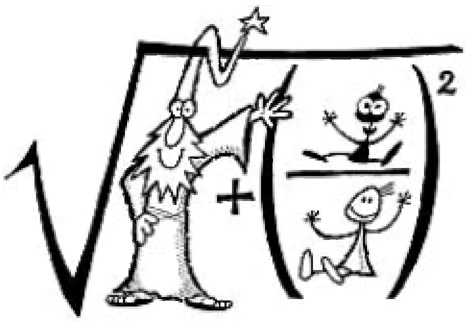
DUMITRU BUŞNEAG

FLORENTINA CHIRTEŞ   DANA PICIU

PROBLEME
de
ALGEBRĂ LINIARĂ



Prefață

Această nouă lucrare apare ca o continuare firească a lucrării [6]; ambele reprezintă de fapt aplicații la lucrările [4, 5].

Dacă [6] conține aplicții legate de structurile algebrice fundamentale de grup, inel şi corp, actuala lucrare conține aplicații legate de spații vectoriale.

Cele aproape 200 de probleme (împreună cu soluțiile complete) sunt structurate pe 6 paragrafe în concordanță cu structura lucrărilor [4,5].

Lucrarea se adresează în primul rând studenților de la facultățile de matematică-informatică, oferind „material" pentru seminarizarea cursurilor de algebră liniară.

Ea poate fi utilizată în egală măsură şi de studenții politehnişti ca şi de profesorii de matematică din învățământul preuniversitar.

Primele 4 paragrafe pot fi utilizate şi de elevii claselor a XI-a şi a XII-a pentru pregătirea tradiționalelor concursuri de matematică de la noi.

Sperăm că şi de data aceasta am oferit cititorilor noştri o lucrare utilă şi de calitate.

Craiova, 13.10.2002 Autorii

Index de notații şi abrevieri

a.î.	: astfel încât
$\Rightarrow(\Leftrightarrow)$	: implicația (echivalența) logică
$(\forall)$ $((\exists))$	: cuantificatorul universal (existențial)
$x\in A$	: elementul x aparține mulțimii A
$A\subseteq B$	: mulțimea A este inclusă în mulțimea B
$A\subsetneq B$	: mulțimea A este inclusă strict în mulțimea B
$A\cap B$	: intersecția mulțimilor A şi B
$A\cup B$	: reuniunea mulțimilor A şi B
$A \setminus B$	: diferența mulțimilor A şi B
$A\Delta B$	: diferența simetrică a mulțimilor A şi B
P(M)	: familia submulțimilor mulțimii M
C_MA	: complementara în raport cu M a mulțimii A
$A\times B$	: produsul cartezian al mulțimilor A şi B
$\|M\|$	: cardinalul mulțimii M (dacă M este finită $\|M\|$ reprezintă numărul elementelor lui M)
1_A	: funcția identică a mulțimii A
$\mathbb{N}(\mathbb{N}^*)$	: mulțimea numerelor naturale (nenule)
$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^*)$	: mulțimea numerelor întregi (nenule)
$\mathbb{Q}(\mathbb{Q}^*)$	: mulțimea numerelor raționale (nenule)
$\mathbb{Q}_+^*$	: mulțimea numerelor raționale strict pozitive
$\mathbb{R}(\mathbb{R}^*)$	: mulțimea numerelor reale (nenule)
$\mathbb{R}_+^*$	: mulțimea numerelor reale strict pozitive
$\mathbb{C}(\mathbb{C}^*)$	: mulțimea numerelor complexe (nenule)
δ_{ij}	: simbolul lui Kronecker (adică 1 pentru $i = j$ şi 0 pentru $i \neq j$)
$\|z\|$	: modulul numărului complex z
K	: vom desemna în general un corp comutativ
K^n	: $K \times ... \times K$ (de n ori)

$m \mid n$	: numărul întreg m divide numărul întreg n
$[m,n]$	: cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale m şi n
c.m.m.m.c.	: cel mai mic multiplu comun
(m,n)	: cel mai mare divizor comun al numerelor naturale m şi n
c.m.m.d.c.	: cel mai mare divizor comun
$m \equiv n \ (\mathrm{mod}\ p)$	: m este congruent cu n modulo p (adică $p \mid m-n$)
$\mathbb{Z}_n$	: mulțimea claselor de resturi modulo numărul natural n ($n \geq 2$)
$M_n(K)$	: mulțimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente din mulțimea K
$M_{m,n}(K)$	: mulțimea matricelor cu m linii şi n coloane, cu elemente din mulțimea K
$I_n(O_n)$	: matricea unitate (nulă) de ordin n ($n \geq 2$)
$tr(M)$	: urma matricei pătratice M
$det(M)$	: determinantul matricei pătratice M
M^{-1}	: inversa matricei pătratice M
M^t	: transpusa matricei pătratice M
M^*	: adjuncta matricei pătratice M
$rang(M)$	: rangul matricei M
$GL_n(K)$	: grupul liniar de grad n peste corpul K
$SL_n(K)$	: grupul special de grad n peste corpul K
S_n	: mulțimea permutărilor asupra unei mulțimi cu n elemente
$H \leq G$	: H este subgrup al grupului G
$V_1 \approx V_2$	: K-spațiile vectoriale V_1şi V_2 sunt izomorfe
$Hom_K(V_1,V_2)$	: mulțimea aplicațiilor liniare de la V_1 la V_2
$End_K(V)$:	: mulțimea endomorfismelor lui V
$dim_K(V)$	: dimensiunea lui V peste K
$Ker(f)$	: nucleul lui f
$Im(f)$	: imaginea lui f
$rang(f)$	: rangul lui f
$V_1 + V_2$	: suma K-spațiilor vectoriale V_1 şi V_2
$V_1 \oplus V_2$	: suma directă a K-spațiilor vectoriale V_1 şi V_2

P_f	: polinomul caracteristic al lui f
P_M	: polinomul caracteristic al matricei M
V_λ	: spațiul vectorial al vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ
PPL	: problemă de programare liniară
A[X]	: inelul polinoamelor într-o nedeterminată cu coeficienți în inelul comutativ A
$\widetilde{f}$	: funcția polinomială atașată polinomului $f \in A[X]$

CUPRINS

A. ENUNȚURI.

§1. Matrice. Determinanți. Inversa unei matrice. Rangul unei matrice.

1.1. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ iar $\overline{A}$ matricea ce se obține din A înlocuind fiecare element prin conjugatul său. Să se demonstreze că:

(i) $\det\left(\overline{A}\right)=\overline{\det(A)}$;

(ii) $\det(A\cdot\overline{A})=\left|\det(A)\right|^2\geq 0$;

(iii) Dacă A, $B\in M_n(\mathbb{R})$ şi AB=BA, atunci $\det(A^2+B^2)\geq 0$;

(iv) Dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$, atunci $\det(A^2+I_n)\geq 0$.

1.2. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Să se arate că :

(i) A verifică ecuația matriceală $X^2-(a+d)X+\det(A)I_2=O_2$;

(ii) Dacă există $k\geq 2$ a.î. $A^k=O_2$ şi $A\neq O_2$ atunci $A^2=O_2$.

1.3. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Să se arate că pentru orice $n\geq 1$ există $x_n, y_n\in\mathbb{C}$ a.î. $A^n=x_nA+y_nI_2$ cu $x_1=1$, $x_2=a+d$, $y_1=0$, $y_2=-\det(A)$ iar pentru $n\geq 2$, $x_{n+1}=x_2x_n+y_2x_{n-1}$ şi $y_n=y_2x_{n-1}$.

Aplicație. Să se calculeze A^n $(n\geq 2)$ pentru $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4. Să se determine A=$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$∈$M_2(\mathbb{Z})$ a.î. $\det(A^3-A^2) = 1$.

1.5. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Să se determine $X\in M_2(\mathbb{R})$ a. î.:

$$X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.6. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = I_n$. Să se demonstreze că pentru orice $X\in M_n(\mathbb{R})$, există Y, $Z\in M_n(\mathbb{R})$ unice a. î. $X = Y + Z$, $AY = Y$ şi $AZ = -Z$.

1.7. Fie A, $B\in M_n(\mathbb{R})$ ($n\geq 2$) a.î. $A^2+B^2 = O_n$.
Să se demonstreze că :

(i) Dacă $n = 4k$ cu $k\in\mathbb{N}^*$, atunci $\det(AB-BA)\geq 0$;

(ii) Dacă $n = 4k+2$ cu $k\in\mathbb{N}^*$, atunci $\det(AB-BA)\leq 0$;

(iii) Dacă $n = 4k+1$ sau $4k+3$ cu $k\in\mathbb{N}^*$, atunci $\det(AB-BA) = 0$.

1.8. Fie A, $B\in M_2(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $ABAB = O_2$, atunci $BABA = O_2$. Este rezultatul adevărat în $M_3(\mathbb{R})$?

1.9. Fie A, $B\in M_n(\mathbb{C})$ şi $\alpha\in\mathbb{C}$.
Să se arate că :

(i) $tr(A\pm B) = tr(A) \pm tr(B)$;

(ii) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$;

(iii) $tr(AB) = tr(BA)$;

(iv) Dacă $U\in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă, atunci $tr(UAU^{-1}) = tr(A)$.

1.10. Dacă A, $B\in M_n(\mathbb{C})$ şi $A+B = AB$, atunci $AB = BA$.

1.11. Fie A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$∈$M_3(\mathbb{C})$.

(i) Calculând în două moduri det(A) să se deducă egalitatea:

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

(ii) Utilizând (i) să se deducă faptul că produsul a două numere de forma $a^3+b^3+c^3-3abc$ (cu $a, b, c\in\mathbb{Z}$) este de aceeaşi formă.

1.12. Fie $a, b, c, a', b', c'\in\mathbb{C}$.

(i) Să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & a & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ b & 1 & a \\ c & 1 & b \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\,;$$

(ii) Utilizând (i) să se deducă identitatea:

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a'^2+b'^2+c'^2-a'b'-a'c'-b'c') =$$
$$= A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC,$$

unde $A = aa'+bc'+cb'$, $B = ac'+bb'+ca'$, $C = ab'+ba'+cc'$.

1.13. Fie $A\in M_m(\mathbb{C})$, $B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $C\in M_n(\mathbb{C})$. Să se demonstreze că

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_{n,m} & C \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(C)$$

(unde $O_{n,m}\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ este matricea cu toate elementele egale cu zero).

1.14. Fie $A, B, C\in M_n(\mathbb{C})$. Să se demonstreze că

$$\det\begin{pmatrix} O_n & A \\ B & C \end{pmatrix} = (-1)^n\cdot\det(A)\cdot\det(B)\,.$$

1.15. Fie $A, B\in M_n(\mathbb{C})$. Să se demonstreze că

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \left|\det(A+iB)\right|^2.$$

1.16. Fie M = $\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ $\in M_4(\mathbb{C})$.

Să se demonstreze că $\det(M) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

1.17. Fie $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ şi

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Să se arate că $\det A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2$;

(ii) Dacă mai avem $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{C}$, atunci

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot A(y_1, y_2, y_3, y_4) = A(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

cu $z_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$

$z_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$

$z_3 = x_1y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2$

$z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1$;

(iii) Să se deducă din (ii) *identitatea lui Euler*:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\,(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

1.18. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, atunci

(i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d$;

(ii)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & -1 & d \\ a & b & c & d & 0 \end{vmatrix} = -4[a^2+b^2+c^2+d^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)].$$

1.19. (*Chio*) Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ şi $a_{11}\neq 0$ avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

(unde $a_{ij}\in\mathbb{C}$).

1.20. Fie $A_1, A_2,\dots, A_n$ mulţimi finite. Notăm cu a_{ij} numărul de elemente ale mulţimii $A_i\cap A_j$, i, j=1, …, n. Dacă A este matricea $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ să se arate că $\det(A)\geq 0$.

1.21. Fie $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ o matrice de ordinul n, definită astfel: $a_{ij} = \max(i, j)$, oricare ar fi i, j = 1, 2, …, n. Să se calculeze det(A).

1.22. Fie $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ o matrice de ordinul n, definită astfel: $a_{ij} = \min(i, j)$, oricare ar fi i, j = 1, 2, …, n. Să se calculeze det(A).

1.23. Fie $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ o matrice de ordinul n, definită astfel: $a_{ij} = |i-j|$, oricare ar fi i, j = 1, 2, …, n. Să se calculeze det(A).

1.24. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sunt –1 şi +1. Să se arate că:

(i) det(A) este un număr par;

(ii) Să se determine valoarea maximă (respectiv minimă) pe care o poate lua det(A).

1.25. Fie A o matrice pătratică de ordinul 3, ale cărei elemente sunt 0 şi 1. Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua det(A).

1.26. Fie $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ o matrice de ordinul n, a. î. $a_{ij}\in\{-1, +1\}$, oricare ar fi i, j=1, 2, …, n. Să se arate că det(A) este un număr întreg multiplu de 2^{n-1}.

1.27. Să se calculeze valoarea maximă (respectiv minimă) a determinanţilor de ordinul 4 ale căror elemente sunt –1 şi +1.

1.28. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{C})$ ecuaţia $X^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $(n\geq 2)$.

1.29. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ inversabilă. Să se demonstreze că $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

1.30. Dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă şi simetrică, atunci şi A^{-1} este simetrică.

1.31. Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$ pentru care există $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, a. î. $A^k = O_2$. Să se demonstreze că $\det(I_2+A+\ldots+A^{k-1}) = 1$.

1.32. O matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ se zice *involutivă* dacă $A^2 = I_n$ şi *idempotentă* dacă $A^2 = A$. Să se demonstreze că:

(i) Dacă A este idempotentă atunci $2A-I_n$ este involutivă;

(ii) Dacă A este involutivă atunci $\frac{1}{2}(A+I_n)$ este idempotentă.

1.33. Fie $A\in M_3(\mathbb{R})$ ce are elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{1}{2}$ iar suma elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloană egală cu 1.

Să se arate că det (A) > 0.

1.34. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ şi $X\in M_n(\mathbb{R})$ ce are toate elementele egale. Să se arate că $\det(A+X)\cdot\det(A-X) \leq \det^2(A)$.

1.35. Dacă $A, B\in M_2(\mathbb{C})$, atunci

$$(\ast)\ \det(A+B)+\det(A-B) = 2[\det(A)+\det(B)].$$

Reciproc, dacă avem $n\geq 2$ a.î. $(\ast)$ este verificată pentru orice $A, B\in M_n(\mathbb{C})$, atunci $n = 2$.

1.36. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ cu $a\neq d$, $b\neq c$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Să se demonstreze că, dacă pentru numărul natural $n\geq 1$ notăm $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, atunci $\frac{b_n}{b}=\frac{c_n}{c}=\frac{a_n-d_n}{a-d}$, pentru orice $n\geq 1$.

1.37. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$. Să se demonstreze că pentru orice $n\geq 2$ există matricele $X, Y\in M_2(\mathbb{C})$ nenule, distincte şi a. î. $A = X^n + Y^n$.

1.38. Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ a.î. $A^3 = A+I_n$. Să se demonstreze că $\det(A)>0$.

1.39. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $A\in M_n(\mathbb{R})$ a. î. pentru un $k\in\mathbb{N}^*$ să avem $A^k = A+I_n$. Să se demonstreze că:

(i) Pentru k impar avem $\det(A) > 0$;

(ii) Pentru k par şi n impar concluzia de la punctul (i) nu mai este neapărat adevărată.

1.40. Să se demonstreze că, dacă $A, B, C\in M_n(\mathbb{R})$, iar aceste matrice comută între ele, atunci $\det(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)\geq 0$.

1.41. Fie A, B$\in M_2(\mathbb{R})$ a. î. $\det(AB+BA)\leq 0$. Să se arate că $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

1.42. Dacă A, B$\in M_n(\mathbb{C})$ şi $\alpha\in\mathbb{C}$, atunci $\det(\alpha I_n+AB) = \det(\alpha I_n+BA)$, iar apoi să se deducă faptul că dacă $P\in\mathbb{C}[X]$, atunci $\det P(AB) = \det P(BA)$.

1.43. Fie B$\in M_2(\mathbb{R})$ a. î. $B^2 = O_2$. Arătați că pentru orice $A\in M_2(\mathbb{R})$ au loc inegalitățile: $\det(AB+BA)\geq -1$ şi $\det(AB-BA)\leq 1$.

1.44. Fie A, B$\in M_2(\mathbb{R})$. Să se calculeze det(A) ştiind că sunt îndeplinite condițiile:

(i)

$$\det(A+B)+\det(A-C_n^1 B)+\det(A+C_n^2 B)+...+\det(A+(-1)^n C_n^n B)=0$$

(ii) $\det(B^2+I_2) = 0$.

1.45. Fie A$\in M_2(\mathbb{R})$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) există $p\in\mathbb{N}^*$ a. î. $A^p = O_2$;

(ii) există a, b$\in\mathbb{R}$ a. î. A = $a\cdot\begin{pmatrix}\cos b & 1+\sin b\\ -1+\sin b & -\cos b\end{pmatrix}$.

1.46. Fie A, B, C$\in M_n(\mathbb{C})$, B fiind inversabilă. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) ABC = AB + BC;

(ii) $CB^{-1}A = CB^{-1} + B^{-1}A$.

1.47. Fie A$\in M_2(\mathbb{R})$, $A\neq\lambda I_2$, pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$. Să se arate că ecuația $X^{-1}\cdot X^t = A$ admite soluții $X\in M_2(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă există $p\in\mathbb{R}-\{2\}$ a. î. $A^2+I_2 = pA$.

1.48. Fie A$\in M_2(\mathbb{R})$ cu det(A) = d $\neq$ 0, a. î. $\det(A+dA^*) = 0$. Să se arate că $\det(A-dA^*) = 4$.

1.49. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ cu $a+d>2$. Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, $A^n\neq I_2$.

1.50. Fie $A, B, C\in M_2(\mathbb{R})$, matrice care comută două câte două, a. î. numerele $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$ sunt nenule şi nu au toate acelaşi semn. Să se demonstreze că $\det(A^2+B^2+C^2) > 0$.

1.51. Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$, $A\neq O_2$ cu proprietatea că există $a\in\mathbb{R}^*$ a. î. $A+A^t=aI_2$. Să se arate că oricare ar fi $m\in\mathbb{Z}$ există $b\in\mathbb{R}$ (care depinde de m) a. î. $A^m+(A^t)^m=bI_2$.

1.52. Fie matricele nenule $A_0, A_1, \ldots, A_n\in M_2(\mathbb{R})$, $n\geq 2$ cu proprietăţile: $A_0\neq aI_2$, $a\in\mathbb{R}$ şi $A_0A_k = A_kA_0$, pentru orice $k\in\{1, \ldots, n\}$.

Să se arate că:

(i) $\det\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\right)\geq 0$;

(ii) Dacă $\det\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\right)=0$ şi $A_2\neq aA_1$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, atunci $\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = O_2$.

1.53. Să se arate că pentru orice $A\in M_2(\mathbb{C})$ există $C\in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $A^* = C\cdot A^t\cdot C^{-1}$ şi să se determine toate matricele $C\in M_2(\mathbb{C})$ care au această proprietate.

1.54. Fie $A\in M_n(\mathbb{Q})$ a. î. $\det(A+\sqrt[n]{2}I_n)=0$. Să se demonstreze că:

$$\det(A-I_n) = \det(A) + (\det(A+I_n))^n.$$

1.55. Se consideră mulţimea matricelor

$$M=\left\{A \,\middle|\, A\in M_n(C),\quad A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}\right\}$$

şi $B\in M_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $AB = BA$, oricare ar fi $A\in M$ dacă şi numai dacă $B\in M$.

1.56. Să se arate că dacă $A, B\in M_n(\mathbb{C})$ sunt două matrice inversabile cu proprietatea că $AB + BA = O_n$ şi există $a, b, c, d\in\mathbb{C}$ a. î. $aI_n+bA+cB+dAB = O_n$, atunci $a = b = c = d = 0$.

1.57. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Pentru orice matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$, notăm cu $m(A)$ numărul tuturor minorilor săi nenuli. Să se arate că:

(i) $m(I_n) = 2^n-1$;

(ii) dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ este nesingulară, atunci $m(A)\geq 2^n-1$.

1.58. Fie $A, B\in M_n(\mathbb{R})$, asemenea în $M_n(\mathbb{C})$ (adică există o matrice inversabilă $P\in M_n(\mathbb{C})$ a. î. $AP = PB$). Să se demonstreze că A şi B sunt asemenea şi în $M_n(\mathbb{R})$.

1.59. Fie matricele $A, B\in M_n(\mathbb{C})$, care verifică relaţiile:

$$AB = BA,\ A^{1997} = I_n,\ B^{1998} = I_n.$$

Să se arate că matricea $A + B + I_n$ este inversabilă.

1.60. Fie A un inel comutativ unitar şi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Notăm

$$GL_n(A) = \{M\in M_n(A) \mid \det(M) \text{ este un element inversabil în } A\}$$

$$SL_n(A) = \{ M\in M_n(A) \mid \det(M) = 1\}.$$

Să se demonstreze că:

(i) $GL_n(A)$ şi $SL_n(A)$ sunt grupuri relativ la înmulțirea matricelor, $SL_n(A)$ este subgrup al lui $GL_n(A)$ şi pentru orice $X \in GL_n(A)$ şi orice $Y \in SL_n(A)$ avem $X^{-1}YX \in SL_n(A)$;

(ii) Dacă K este un corp finit cu p elemente, atunci $GL_n(K)$ are

$$(p^n-1)(p^n-p)\dots(p^n-p^{n-1}) \text{ elemente;}$$

(iii) Dacă U, $V \in M_2(\mathbb{Z})$, $U=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $UV \in SL_2(\mathbb{Z})$ şi pentru orice $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ există matricele $T_1, \dots, T_r \in \{U, V\}$ şi numerele $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{Z}$ a. î. $M = T_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot T_r^{t_r}$;

(iv) Dacă mai considerăm şi $W \in M_2(\mathbb{Z})$, $W=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $W \in GL_2(\mathbb{Z})$ şi pentru orice $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ există matricele $R_1, \dots, R_s \in \{U, V, W\}$ şi numerele $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{Z}$ a. î. $M = R_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot R_s^{r_s}$.

1.61. Fie $A \in M_{3,2}(\mathbb{C})$, $B \in M_{2,3}(\mathbb{C})$ a. î. $AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze det(BA).

1.62. Demonstrați că dacă n-1 linii ale unui determinant D de ordin $n \geq 4$ au elementele în progresie aritmetică, atunci D = 0.

1.63. Fie p şi q două numere reale a. î. $p^2-4q < 0$. Să se arate că dacă n este un număr natural impar şi $A \in M_n(\mathbb{R})$, atunci

$$A^2+pA+qI_n \neq O_n.$$

1.64. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice a. î. $A^n = \alpha A$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pm 1$. Să se arate că matricea $B = A+I_n$ este inversabilă.

1.65. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincte două câte două a. î. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{\pi}{2}$. Se defineşte matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A=(a_{kp})_{1 \leq k,p \leq n}$, unde $a_{kp} = \cos(x_k - kx_p) + i\sin(x_k - kx_p)$, k, p$\in\{1, \dots, n\}$. Să se arate că det(A)$\in\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă n este impar.

1.66. Fie A, B$\in M_k(\mathbb{R})$ cu AB =BA. Să se arate că det(A+B)≥ 0 dacă şi numai dacă $\det(A^n+B^n) \geq 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

1.67. Să se determine matricele $A\in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea $(A^*)^* = A$.

1.68. Să se arate că produsul a două matrice simetrice este o matrice simetrică dacă şi numai dacă matricele comută.

1.69. O matrice $A = (a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ se numeşte *ortogonală* dacă $A\cdot A^t = I_n$. Arătați că pentru ca o matrice pătratică să fie ortogonală este necesar şi suficient ca să aibă loc una dintre următoarele relații:

a) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$, pentru orice $1\leq i, j\leq n$

b) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$, pentru orice $1\leq i, j\leq n$.

1.70. Fie $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}\in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Să se arate că rang(A)$\leq 1$ dacă şi numai dacă există $x_1, x_2, \dots, x_m\in\mathbb{R}$ şi $y_1, y_2, \dots, y_n\in\mathbb{R}$ a. î. $a_{ij} = x_iy_j$, oricare ar fi $(i, j)\in\{1, 2, \dots, m\}\times\{1, 2, \dots, n\}$.

1.71. Să se discute după valorile parametrului real λ rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.72. Să se calculeze rangul matricei:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ -5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.73. Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ iar $B\in M_{n,m}(\mathbb{C})$ cu $m>n$. Să se demonstreze că $\det(AB) = 0$.

§2. Spații vectoriale

2.1. Fie $V = \{ x\in\mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Definim $\oplus : V\times V \to V$ şi $\odot : \mathbb{R}\times V \to V$ prin $x\oplus y = xy$ oricare ar fi $x, y\in V$, şi $\alpha\odot x = x^{\alpha}$, oricare ar fi $x\in V$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(i) Să se arate că V este un $\mathbb{R}$ spațiu vectorial;

(ii) Să se determine o bază a lui V şi dimensiunea lui V peste $\mathbb{R}$.

2.2. (i) Să se arate că mulțimea $V = \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} \mid a, b, c\in\mathbb{Q}\}$ este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale față de operațiile obişnuite de adunare a două numere reale şi de înmulțire a unui număr real cu un număr rațional.

(ii) Acelaşi lucru pentru $V = \{ a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c\in\mathbb{Q}\}$.

2.3. Fie V un K – spațiu vectorial. Dacă $\alpha\in K^*$ şi $x\in V$ iar $\alpha x = 0$, atunci $x = 0$.

2.4. Fie k şi K două corpuri a.î. $k \subseteq K$ iar k este subcorp al lui K. Să se demonstreze că grupul $(K,+)$ devine în mod canonic k - spațiu vectorial.

2.5. Să se arate că vectorii $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ sunt liniar dependenți în $\mathbb{R}$ privit ca $\mathbb{R}$ - spațiu vectorial şi liniar independenți în $\mathbb{R}$ privit ca $\mathbb{Q}$ - spațiu vectorial.

2.6. Fie $M_{s,n}(\mathbb{C}) = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^t = A\}$ şi

$M_{as,n}(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^t = - A\}$.

(i) Să se arate că $M_{s,n}(\mathbb{C})$ şi $M_{as,n}(\mathbb{C})$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $M_n(\mathbb{C})$;

(ii) Să se determine câte o bază a acestora şi să se arate că $\dim_{\mathbb{C}} M_{s,n}(\mathbb{C}) = \frac{n(n+1)}{2}$ iar $\dim_{\mathbb{C}} M_{as,n}(\mathbb{C}) = \frac{n(n-1)}{2}$;

(iii) Să se arate că $M_n(\mathbb{C}) = M_{s,n}(\mathbb{C}) \oplus M_{as,n}(\mathbb{C})$.

2.7. Să se arate că V = $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \middle\| a, b, c \in R \right\}$ este subspaţiu vectorial al lui $M_2(\mathbb{R})$ iar apoi să se determine o bază şi dimensiunea lui V.

2.8. Fie $a_1 = (a_{11},\ldots,a_{1n}),\ldots, a_n = (a_{n1},\ldots,a_{nn}) \in \mathbb{C}^n$.

Atunci $\{a_1,\ldots,a_n\}$ este bază în $\mathbb{C}^n$ dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2.9. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. vectorii $a_1 = (1, 2, 1, -1)$, $a_2 = (3, \alpha, 2, 0)$, $a_3 = (4, -2, 2, 2)$, $a_4 = (3, -4, 1, 3)$ din $\mathbb{R}^4$ să genereze:

(i) un subspaţiu vectorial de dimensiune 4;

(ii) un subspaţiu vectorial de dimensiune 3.

2.10. Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. matricele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{din } M_2(\mathbb{R})$$

să fie liniar independente.

2.11. În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^4$ se dau vectorii $a_1 = (1, 1, 0, 2)$ şi $a_2 = (1, -1, 2, 0)$. Să se completeze aceştia până la o bază a lui $\mathbb{R}^4$.

2.12. (*Grasmann*) Fie V un K- spaţiu vectorial de dimensiune finită iar V_1 şi V_2 două subspaţii vectoriale ale sale.

Să se arate că :

$$\dim_K(V_1+V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K(V_1 \cap V_2).$$

2.13. Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n iar V_1 ,V_2 două subspaţii vectoriale ale sale de dimensiune p şi q respectiv, cu $p + q > n$.

Să se arate că V_1 şi V_2 au în comun cel puţin un element nenul.

2.14. (i) Să se arate că mulţimea:

$$M_1 = \{ A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in M_3(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ pentru } i > j\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui $M_3(\mathbb{R})$;

(ii) Să se determine o bază pentru M_1 şi $\dim_{\mathbb{R}} M_1$;

(iii) Să se găsească câte o bază pentru subspaţiile $M_{s,3}(\mathbb{R}) \cap M_1$ şi $M_{s,3}(\mathbb{R}) + M_1$.

2.15. Fie V un K - spaţiu vectorial şi $x_1, x_2, x_3 \in V$ a.î. $\mathrm{ind}_K\{x_1, x_2, x_3\}$. Să se arate că $\mathrm{ind}_K\{x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1\}$.

2.16. Fie $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

(i) Să se arate că $F(\mathbb{R})$ devine în mod canonic spaţiu vectorial real, definind pentru $f,g \in F(\mathbb{R})$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$:

$f + g, \alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

(ii) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sunt distincte două câte două, atunci funcţiile $\{x \to e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ sunt liniar independente în $F(\mathbb{R})$;

(iii) Acelaşi lucru pentru mulţimile de funcţii:

a) $\{ x \to \sin x, \cos x\}$;
b) $\{x \to 1, \sin x, \cos x\}$;
c) $\{x \to 1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx\}$;
d) $\{x \to \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$;
e) $\{x \to 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}$;
f) $\{x \to 1, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x\}$;

g) $\{x \to 1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x\}$, $n \geq 1$.

2.17. Fie V un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune finită $n \geq 2$, iar V_1, V_2 subspaţii vectoriale ale lui V, $V_1 \neq V_2$, $\dim_K V_1 = \dim_K V_2 = n-1$. Să se arate că $V_1+V_2 = V$ şi $\dim_K(V_1 \cap V_2) = n-2$.

2.18. Fie V_1, V_2 două subspaţii de dimensiuni finite ale spaţiului vectorial V; $B_1 = \{a_1,\ldots,a_p\}$, $B_2 = \{b_1,\ldots,b_q\}$, $B_3 = \{a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_r\}$ $(r \leq q)$, baze, respectiv, ale subspaţiilor V_1, V_2, $V_1 + V_2$.

Dacă $b_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} b_j$, $r+1 \leq i \leq q$, sunt scrierile vectorilor $b_{r+1},\ldots,b_q$ în baza B_3, atunci vectorii $c_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} a_j$, $r+1 \leq i \leq q$, constituie o bază a subspaţiului $V_1 \cap V_2$.

2.19. Folosind rezultatul din problema anterioară să se determine o bază a lui $V_1 \cap V_2$ unde V_1 şi V_2 sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^4$ cu bazele $B_1 = \{a_1,a_2,a_3\}$, $B_2 = \{b_1,b_2,b_3\}$, respectiv, unde $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,1,0)$, $a_3 = (0,0,1,1)$, $b_1 = (1,0,1,0)$, $b_2 = (0,2,1,1)$, $b_3 = (1,2,1,2)$.

2.20. Fie V_1 şi V_2 două subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiuni finite, având bazele $B_1=\{a_1,\ldots,a_k\} \subseteq V_1$ şi $B_2 = \{b_1,\ldots,b_l\} \subseteq V_2$ $(k, l \leq n)$.

Să se pună în evidenţă un algoritm care să permită construirea, pornind de la B_1 şi B_2, a unor baze pentru V_1+V_2 şi $V_1 \cap V_2$.

Să se determine câte o bază pentru subspaţiile V_1+V_2 şi $V_1 \cap V_2$ în fiecare din cazurile:

(i) $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1)$, $a_3 = (1, 3, 3)$,
$b_1 = (2, 3, -1)$, $b_2 = (1, 2, 2)$, $b_3 = (1, 1, -3)$;

(ii) $a_1 = (1, 2, 1, -2)$, $a_2 = (2, 3, 1, 0)$, $a_3 = (1, 2, 2, -3)$,
$b_1 = (1, 1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 0, 1, -1)$, $b_3 = (1, 3, 0, -4)$;

(iii) $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$,
$b_1 = (1, 0, 1, 0)$, $b_2 = (0, 2, 1, 1)$, $b_3 = (1, 2, 1, 2)$.

2.21. În $\mathbb{R}^3$ considerăm vectorii: $a_1 = (1, 2, -1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (-1, 0, 1)$, $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (1, -1, 0)$, $b_3 = (2, -1, 0)$.

(i) Să se arate că $B_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ formează o bază pentru $\mathbb{R}^3$;

(ii) Să se scrie matricele de trecere de la B_1 la B_2 şi de la B_2 la B_1;

(iii) Dacă $x = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ să se determine coordonatele lui x în raport cu bazele B_1 şi B_2.

2.22. Să se calculeze cu ajutorul lemei substituției rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ -5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.23. Să se discute cu ajutorul lemei substituției (după parametrul real α) rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & \alpha - 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.24. Fie $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (-1, 1, 1)$, $a_3 = (-1, 0, 1)$ şi $x = (1, 3, -1)$ din $\mathbb{R}^3$. Cu ajutorul lemei substituției să arate că vectorii $\{a_1, a_2, a_3\}$ formează o bază pentru $\mathbb{R}^3$ iar apoi să se determine coordonatele lui x în această nouă bază.

2.25. Să se calculeze cu ajutorul lemei substituției inversa matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

2.26. Fie $n \geq 1$ un număr natural şi notăm cu V_n mulțimea polinoamelor cu coeficienți din $\mathbb{C}$, de grad cel mult n.

(i) Să se demonstreze că în raport cu operațiile uzuale (adunarea polinoamelor, respectiv înmulțirea unui polinom cu un scalar complex) V_n este un $\mathbb{C}$- spațiu vectorial de dimensiune n+1;

(ii) Să se demonstreze că pentru $\alpha \in \mathbb{C}$ fixat, mulțimea $B = \{1, X\text{-}a, (X\text{-}a)^2, \ldots,(X\text{-}a)^n\}$ este o bază a spațiului vectorial V_n;

(iii) Să se determine coordonatele lui f în raport cu baza de la (ii).

2.27. Fie $(\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\beta)\in\mathbb{C}^{t+1}$ $(t \geq 1)$. Să se arate că mulțimea $M = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \alpha_1 f(1) + \ldots + \alpha_t f(t) = \beta\}$ înzestrată cu adunarea obişnuită a funcțiilor şi înmulțirea unei funcții cu un număr complex, formează un $\mathbb{C}$- spațiu vectorial dacă şi numai dacă $\beta = 0$.

2.28. Fie p un număr prim şi n un număr natural. Considerăm mulțimile:

$$V_n = \{f\in\mathbb{Z}_p[X] \mid \text{grad } f \leq n\}\ ,\ V' = \{\, f' \mid f\in V\}$$

(unde prin f′ înțelegem derivata formală a polinomului f).

(i) Să se arate că V_n este un $\mathbb{Z}_p$ - spațiu vectorial, iar V' este un subspațiu al lui V_n;

(ii) Să se determine dimensiunile celor două spații vectoriale V_n şi V'.

2.29. Se notează cu S mulțimea tuturor şirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere complexe care verifică recurența liniară de ordin k:

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \text{ oricare ar fi } n\in\mathbb{N}.$$

Presupunem că *ecuația caracteristică* asociată :

$$a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

are rădăcinile simple $r_1, r_2,\ldots,r_k\in\mathbb{C}$.

(i) Să se demonstreze că în raport cu operațiile uzuale (adunarea şirurilor, respective produsul dintre un şir şi un număr complex) S este un spațiu vectorial complex ;

(ii) Fie $(x_n)_{n\geq 0}\in S$ un şir fixat. Notând cu $(A_1, A_2,\ldots,A_k)$ soluția sistemului:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_k = x_0 \\ r_1 A_1 + r_2 A_2 + \ldots + r_k A_k = x_1 \\ r_1^2 A_1 + r_2^2 A_2 + \ldots + r_k^2 A_k = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^{k-1} A_1 + r_2^{k-1} A_2 + \ldots + r_k^{k-1} A_k = x_{k-1} \end{cases}$$

să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, avem :

$$x_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \ldots + A_k r_k^n .$$

(iii) Să se deducă, pe baza celor de la (ii), că mulțimea $B = \{(r_1^n)_{n\geq 0}, (r_2^n)_{n\geq 0},\ldots,(r_k^n)_{n\geq 0}\}$ este o bază a spațiului vectorial S.

2.30. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ $(n\geq 2)$. Să se demonstreze că A se poate scrie sub forma $A = XY - YX$ (cu $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$) dacă şi numai dacă $tr(A) = 0$.

§3. Aplicații liniare.

3.1. Dacă V şi V′ sunt K-spații vectoriale, atunci $f : V\to V'$ este aplicație liniară dacă şi numai dacă pentru orice $\alpha, \beta\in K$ şi $x, y\in V$ avem $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$.

3.2. Fie V un K-spațiu vectorial. Sunt echivalente următoarele afirmații:

(i) $\dim V = 1$;

(ii) pentru orice $f\in End_K(V)$ există $\alpha\in K$ a.î. $f(x) = \alpha x$.

3.3. Dacă V şi V′ sunt două K-spații vectoriale, atunci pentru $f : V\to V'$ aplicație liniară sunt echivalente:

(i) f este funcție injectivă;

(ii) f transformă orice sistem de vectori liniar independenți din V în sistem de vectori liniar independenți din V′;

(iii) Ker(f) = {0};

(iv) Pentru oricare K-spațiu vectorial V′′ şi g, h : V′′→V aplicații liniare, din $f\circ g = f\circ h \Rightarrow g = h$.

Observație. Această problemă ne permite să numim *monomorfisme* aplicațiile liniare injective.

3.4. Dacă V şi V′ sunt două K-spații vectoriale, atunci pentru f : V→V′ aplicație liniară sunt echivalente:

(i) f este funcție surjectivă;

(ii) Im(f) = V′;

(iii) Pentru oricare K-spațiu vectorial V′′ şi g, h : V′→V′′ aplicații liniare, din $g\circ f = h\circ f \Rightarrow g = h$.

Observație. Această problemă ne permite să numim *epimorfisme* aplicațiile liniare surjective.

3.5. Fie $\mathbb{R}_n[X] = \{P\in\mathbb{R}[X] \mid \text{grad}(P) \le n\}$ şi

$$D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X],\ D(P) = P',\ P\in\mathbb{R}_n[X]$$

$$I : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X],\ I(P) = \int_0^X \widetilde{P}(t)dt,\ P\in\mathbb{R}_n[X].$$

Să se arate că D şi I sunt aplicații liniare şi să se pună în evidență matricele lor în raport cu bazele canonice.

3.6. Fie diagrama comutativă de K-spații vectoriale:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & M'' \arrow[d, "\gamma"] \\ N' \arrow[r, "u"] & N \arrow[r, "v"] & N'' \end{tikzcd}$$

cu cele două linii exacte (adică Ker(g) = Im(f) şi Ker(v) = Im(u)).

Să se arate că:

(i) Dacă α, γ şi u sunt monomorfisme, atunci β este monomorfism;

(ii) Dacă α, γ şi g sunt epimorfisme, atunci β este epimorfism;

(iii) Dacă β este epimorfism şi u şi γ sunt monomorfisme, atunci α este epimorfism.

3.7. În raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$ se defineşte $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1-2x_3,\ x_1+3x_2+2x_3,\ -x_1+x_2+x_3),\ (x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3.$$

(i) Să se arate că $f\in End(\mathbb{R}^3)$;

(ii) Să se scrie matricea lui f în raport cu bazele canonice;

(iii) Să se arate că $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ unde $b_1 = (1, -1, 1)$, $b_2 = (2, 1, -1)$, $b_3 = (1, 2, -1)$ formează o nouă bază pentru $\mathbb{R}^3$ şi apoi să se scrie matricea lui f în raport cu noua bază B.

3.8. O aplicație liniară $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ are în raport cu bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^4$ matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine câte o bază şi dimensiunile pentru Ker(f) şi Im(f).

3.9. Fie $f, g\in End(\mathbb{R}^2)$. Dacă matricea lui f în raport cu baza $a_1=(1, 2)$, $a_2=(2, 3)$ este $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ iar matricea lui g în raport cu baza $b_1=(3, 1)$, $b_2=(4, 2)$ este $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ să se scrie matricele aplicațiilor f+g, $f\circ g$ în raport cu baza $\{b_1, b_2\}$ (vectorii a_i şi b_i, i = 1, 2 sunt scrişi în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$).

3.10. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ o aplicație liniară a cărei matrice în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^3$ şi $\mathbb{R}^4$ este $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ -8 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$. Se cere:

(i) Să se determine rangul lui f;

(ii) Să se precizeze baza şi dimensiunea pentru Ker(f) şi Im(f);

(iii) Să se determine o bază şi dimensiunea pentru subspațiul vectorial f(V) al lui $\mathbb{R}^4$ unde $V = \{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

3.11. Fie $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ o aplicație liniară a.î. $f(e_1+e_2)=(1, 1, -1, -1)$

$$f(e_1-e_2) = (-1, -1, 1, 1)$$
$$f(e_3+e_4) = (-1, 1, -1, 1)$$
$$f(e_3-e_4) = (1, -1, 1, -1)$$

unde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^4$. Să se determine:

(i) Matricea lui f în raport cu bazele canonice;

(ii) O bază şi dimensiunile pentru Ker(f) şi Im(f).

3.12. Fie V un K-spațiu vectorial şi V_1, V_2 subspații vectoriale ale lui V a.î. $V = V_1\oplus V_2$. Definim $p_i : V \to V_i$, $p_i(x) = x_i$, $i = 1, 2$ oricare ar fi $x = x_1 + x_2$, $x_1\in V_1$, $x_2\in V_2$. Să se arate că:

(i) $p_i\in End(V)$, $i =1, 2$;

(ii) $Ker(p_1) = V_2$, $Ker(p_2) = V_1$, $Im(p_1) = V_1$, $Im(p_2) = V_2$;

(iii) $p_1\circ p_2 = p_2\circ p_1 = 0$;

(iv) $p_1^2 = p_1, p_2^2 = p_2$;

(v) $p_1+p_2 = 1_V$.

3.13. Fie $z_0 = a+ib \in \mathbb{C}$ fixat. Definim $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ prin $f(z) = z \cdot z_0$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că $f \in End(\mathbb{C})$ şi să se scrie matricea sa în raport cu baza $\{1, i\}$.

3.14. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $f \in End(V)$.

Să se arate că $V' = \{g \in End(V) \mid f \circ g = 0\}$ este un subspaţiu vectorial al lui End(V).

3.15. Fie $a_1 = (1, 0, 2, 2)$, $a_2 = (0, 1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ iar $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Dacă notăm $V_1 = <\{e_1, e_2\}>$ şi $V_2 = <\{a_1, a_2\}>$, atunci $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

3.16. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $f \in End(V)$. Să se demonstreze că $V = Ker(f) + Im(f)$ dacă şi numai dacă $Im(f) = Im(f \circ f)$.

3.17. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită.

(i) Dacă $\dim_K V = 2n \in \mathbb{N}^*$, să se construiască o aplicaţie liniară $f \in End(V)$ a.î. $Im(f) = Ker(f)$;

(ii) Este posibilă o astfel de construcţie dacă dimensiunea lui V este număr impar?

3.18. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită $n \geq 1$. Daţi exemplu de o aplicaţie liniară $f : V \to V$ pentru care nu are loc egalitatea $V = Ker(f) \oplus Im(f)$.

3.19. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită $n \geq 1$. Să se dea exemplu de două endomorfisme $f, g \in End(V)$, $f \neq g$ a.î. $Im(f) = Im(g)$ şi $Ker(f) = Ker(g)$.

3.20. Fie V, W două K-spaţii vectoriale, W de dimensiune finită iar $f, g \in Hom_K(V, W)$. Să se arate că:

$$\dim Im(f+g) \leq \dim Im(f) + \dim Im(g).$$

3.21. Fie V un K-spaţiu vectorial iar

$$\mathrm{End}(V) = \{f:V\to V \mid f \text{ aplicaţie liniară}\}.$$

Pentru f, g∈End(V) definim f+g, f∘g : V→V prin (f+g)(x) = = f(x)+g(x) şi (f∘g)(x) = f(g(x)), x∈V. Să se arate că (End(V), +, ∘) devine astfel inel unitar.

3.22. Fie V şi W două K-spaţii vectoriale iar

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) = \{f:V\to W \mid f \text{ aplicaţie liniară}\}.$$

Pentru f, g∈ $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ şi a∈K definim f+g, af : V→W prin (f+g)(x) = f(x)+g(x) şi (af)(x) = af(x), x∈V. Să se arate că în felul acesta $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ devine în mod canonic K-spaţiu vectorial.

3.23. Fie K un corp comutativ, V(K) clasa K-spaţiilor vectoriale şi N∈V(K) fixat.

Definim h^N, h_N : V(K)→V(K) prin $h^N(X) = \mathrm{Hom}_K(N, X)$ respectiv, $h_N(X) = \mathrm{Hom}_K(X, N)$. Dacă X, Y∈V(K) şi f∈$\mathrm{Hom}_K(X, Y)$, definim $h^N(f):h^N(X)\to h^N(Y)$ şi $h_N(f):h_N(Y)\to h_N(X)$ prin $h^N(f)(\alpha) = f\circ\alpha$ şi respectiv $h_N(f)(\beta) = \beta\circ f$, pentru orice $\alpha\in h^N(X)$ şi $\beta\in h_N(Y)$. Să se arate că:

(i) $h^N(f)$ şi $h_N(f)$ sunt aplicaţii liniare;

(ii) h^N duce monomorfisme în monomorfisme pe când h_N duce epimorfisme în monomorfisme;

(iii) Dacă în V(K) avem şirul exact scurt de aplicaţii liniare

$$0\longrightarrow M'\xrightarrow{\ f\ } M\xrightarrow{\ g\ } M''\longrightarrow 0$$

atunci şi şirurile:

$$(1)\quad 0\longrightarrow h^N(M')\xrightarrow{h^N(f)} h^N(M)\xrightarrow{h^N(g)} h^N(M'')\longrightarrow 0$$

$$(2)\quad 0\longrightarrow h_N(M'')\xrightarrow{h_N(g)} h_N(M)\xrightarrow{h_N(f)} h_N(M')\longrightarrow 0$$

sunt exacte în V(K).

3.24. Fie V un $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$-spațiu vectorial iar f, g$\in$End(V) a.î. f, g şi f+g sunt proiectori. Să se arate că Im(f+g) = Im(f) $\oplus$ Im(g) şi Ker(f+g) = Ker(f) $\cap$ Ker(g).

3.25. Dacă V este un K-spațiu vectorial de dimensiune n, atunci V $\approx$ K^n (izomorfism de K-spații vectoriale).

3.26. Fie k un corp finit de caracteristică p > 0. Să se demonstreze că numărul elementelor lui k este de forma p^n cu n$\in\mathbb{N}^*$.

3.27. Să se demonstreze că grupurile ($\mathbb{R}$,+) şi ($\mathbb{C}$,+) sunt izomorfe.

§4. Sisteme de ecuații liniare. Vectori şi valori proprii.

4.1. Fie P = $a_0+a_1X+...+a_nX^n\in\mathbb{C}[X]$ (n $\geq$ 1) pentru care există $x_1, ..., x_{n+1}\in\mathbb{C}$ diferite două câte două a.î. $\widetilde{P}(x_1) = ... = \widetilde{P}(x_{n+1}) = 0$, ($\widetilde{P}$ fiind funcția polinomială ataşată lui P).

Să se arate că $a_0 = a_1 =...= a_n = 0$.

4.2. Să se demonstreze că dacă P$\in\mathbb{R}$[X], grad(P) = n şi $\int_0^1 x^k \widetilde{P}(x)dx = 0$, 0 $\leq$ k $\leq$ n, atunci P = 0.

Să se deducă de aici că:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

4.3. Să se discute după α, β∈ℝ sistemul

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ (\alpha + 1)x_1 + (\beta + 1)x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 4 \end{cases}.$$

4.4. Fie a, b∈ℝ. Să se demonstreze că sistemul $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ are soluții strict pozitive ⇔ $|a| + |b| < 1$.

4.5. Să se demonstreze că dacă a, b, c∈ℤ, atunci sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = ax + by + cz \\ \frac{1}{2}y = cx + ay + bz \\ \frac{1}{2}z = bx + cy + az \end{cases}$$

admite numai soluția banală x = y = z = 0.

4.6. Să se determine soluțiile de bază ale sistemului omogen

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

4.7. Dacă a, b, c, d∈ℝ nu sunt toate nule, atunci sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ bx - ay + dz - ct = 0 \\ cx - dy - az + bt = 0 \\ dx + cy - bz - at = 0 \end{cases}$$

admite numai soluția banală.

4.8. Să se găsească condiții necesare şi suficiente pentru ca suma a două soluții ori produsul unei soluții printr-un număr $\alpha \neq 1$ să fie din nou o soluție a aceluiaşi sistem de ecuații liniare.

4.9. Să se găsească condiții necesare şi suficiente pentru ca o combinație liniară dată, de soluții ale unui sistem neomogen de ecuații liniare, să fie din nou o soluție a acestui sistem.

4.10. (i) Să se găsească condiții necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuații $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$ să aibă soluție unică;

(ii) Aceeaşi problemă pentru sistemul $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

4.11. (i) Să se găsească condiții necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuații $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$ să aibă soluție unică;

(ii) Aceeaşi problemă pentru sistemul $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

4.12. Dacă a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, să se găsească condiții necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x = by + cz + du + av \\ y = cz + du + bv + ax \\ z = du + cv + ax + by \\ u = dv + ax + by + cz \\ v = ax + by + cz + du \end{cases}$$

să aibă soluții nenule.

4.13. Să se găsească condiții necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali

$$\begin{cases} \lambda x + ay + bz + ct = 0 \\ ax - \lambda y - fz + et = 0 \\ bx + fy - \lambda z - dt = 0 \\ cx - ey + dz - \lambda t = 0 \end{cases}$$

să aibă soluții nenule.

4.14. Fie a_1, a_2, …, a_n numere reale distincte două câte două ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$) şi fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^n \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^n \end{pmatrix}$. Dacă notăm cu A_j matricea care se obține din A suprimând coloana ce conține puterile de ordin j ale lui a_1, a_2, …, a_n ($j\in\{0, …, n\}$), să se demonstreze că, $\det(A_j) = \sum a_1 a_2 ... a_{n-j} \prod\limits_{1\leq k<l\leq n}(a_l - a_k)$, pentru orice j = 0, …, n.

4.15. Fie numerele reale λ, a_i, b_i, c_i, (i = 1, 2, 3) a.î.

$$a_1\lambda^2 + b_1\lambda + c_1 = a_2\lambda^2 + b_2\lambda + c_2 = a_3\lambda^2 + b_3\lambda + c_3 .$$

Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} .$$

4.16. (i) Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $AA^t = O_n$, atunci $A = O_n$;

(ii) Fie A, B, $C\in M_n(\mathbb{R})$. Să se arate că dacă $BAA^t = CAA^t$, atunci BA = CA;

(iii) Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ cu proprietatea că există $A'\in M_{n,m}(\mathbb{R})$ a.î. $AA'A = A$. Să se arate că ecuația matriceală AX = B, unde $B\in M_{m,1}(\mathbb{R})$ este compatibilă dacă şi numai dacă $AA'B = B$. În acest caz să se arate că mulțimea soluțiilor ecuației considerate este:

$$\{A'B+Y-A'AY \mid Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

4.17. Să se arate că:

(i) Dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ este singulară ($\det(A) = 0$), atunci există $B\in M_n(\mathbb{C})$, nenulă, a.î. $AB = BA = O_n$;

(ii) O matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ este singulară dacă şi numai dacă există o matrice $B\in M_n(\mathbb{C})$, nenulă, a.î. pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$,

$$(A+B)^p = A^p + B^p.$$

4.18. Să se determine vectorii şi valorile proprii ai matricelor:

$$\text{(i) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ (ii) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ (iii) } \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \ (a\neq 0),$$

$$\text{(iv) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \text{ (v) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.19. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ o matrice ale cărei valori proprii sunt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Fie, de asemenea, $f\in\mathbb{C}[X]$, $f = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_{k-1}X + a_k$ şi notăm $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_kI_n$.

Să se arate că $\det(f(A)) = f(\lambda_1)\ldots f(\lambda_n)$.

4.20. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ o matrice ale cărei valori proprii le presupunem cunoscute. Să se determine valorile proprii ale matricelor:

(i) A^{-1} (dacă există);

(ii) A^2;

(iii) A^k ($k\in\mathbb{N}^*$);

(iv) $a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_{k-1}A + a_kI_n$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_k\in\mathbb{C}$.

4.21. Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$ ($n\geq 2$) cu valorile proprii distincte două câte două. Să se indice un procedeu de a calcula A^k, pentru $k\in\mathbb{N}^*$.

Aplicație. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.

4.22. Folosind teorema Cayley-Hamilton să se calculeze inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.23. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită şi f, $g \in End_K(V)$ a.î. $g \circ f = 1_V$. Să se arate că pentru orice $h \in End_K(V)$, aplicaţiile liniare $g \circ h \circ f$ şi h au aceleaşi valori proprii.

4.24. Fie V un K-spaţiu vectorial şi f, $g \in End_K(V)$ a.î. $f \circ g = g \circ f$. Să se arate că:

(i) Orice subspaţiu propriu al lui f (adică $V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$, cu λ valoare proprie a lui f) este invariant în raport cu g;

(ii) Im(f) şi Ker(f) sunt subspaţii vectoriale ale lui V invariante în raport cu g.

4.25. Fie $A_1, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că $\det(A_1^t A_1 + \ldots + A_m^t A_m) \geq 0$.

Să se deducă de aici că dacă $A_1, \ldots, A_m$ sunt simetrice, atunci $\det(A_1^2 + \ldots + A_m^2) \geq 0$.

4.26. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Să se demonstreze că det(A+B) = = det(A) + det(B) pentru orice $B \in M_n(\mathbb{C})$ pentru care AB = BA, dacă şi numai dacă $A^n = O_n$.

4.27. Fie $A \in M_2(\mathbb{Q})$. Să se demonstreze că $\det(2A^2-90A+13I_2)=$ $=0$ dacă şi numai dacă $2A^2-90A+13I_2 = O_2$. Rămâne adevărată afirmaţia dacă $A \in M_2(\mathbb{R})$?

4.28. Fie $a \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ şi matricea $A \in M_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$. Să se determine matricea $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a.î. AX = aX.

4.29. Fie Γ o parte stabilă a mulțimii $M_n(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea şi înmulțirea a.î. $-I_n \in \Gamma$. Să se arate că:

(i) Dacă $U \in \Gamma$ şi $\det(U) = \pm 1$, atunci $U^{-1} \in \Gamma$;

(ii) Dacă $U \in \Gamma$ şi $\det(U) = 0$, atunci există $V \in \Gamma$, $V \neq O_n$ a.î. $UV = VU = O_n$.

4.30. Determinați numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ a.î. $(AB - BA)^2 = I_n$.

4.31. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere naturale nenule. Dacă notăm $d_{ij} = (a_i, a_j)$, i, j = 1,..., n. Să se arate că $\det(d_{ij})_{1 \le i, j \le n} \ge 0$.

4.32. Fie $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$, A şi C inversabile.

Dacă $A^k B = C^k D$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, să se arate că B = D.

4.33. Fie V, W două K-spații vectoriale de dimensiuni n şi respectiv m iar $f \in Hom_K(V, W)$, $g \in Hom_K(W, V)$.

Să se arate că $(-1)^n \lambda^n P_{f \circ g}(\lambda) = (-1)^m \lambda^m P_{g \circ f}(\lambda)$.

Să se deducă faptul că dacă V este un $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ spațiu vectorial de dimensiune finită iar f, $g \in End(V)$ atunci $f \circ g$ şi $g \circ f$ au acelaşi polinom caracteristic.

4.34. Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice de rang 2 (n>2). Să se demonstreze că există numerele $p_i, q_i, r_i, s_i \in \mathbb{C}$ a. î. $a_{ij} = p_i q_j + r_i s_j$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, …, n\}$.

§ 5. Programare liniară. *

5.1. Să se scrie sistemul de restricții

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \ge 12 \end{cases}$$

sub forma unui sistem de restricții de acelaşi semn $\le$.

5.2. Să presupunem că variabilele din problema **5.1.** au semnele $x_1 \ge 0$, x_2 oarecare, $x_3 \le 0$, $x_4 \ge 0$. Să se scrie restricțiile din problema **5.1.** sub forma $\le$ cu toate variabilele pozitive.

5.3. Să se arate că mulțimea X_p a soluțiilor posibile a unei PPL este convexă.

Consecință: Dacă X_p conține cel puțin două puncte diferite, atunci conține o infinitate de puncte.

5.4. Să se scrie sub *formă canonică* următoarele PPL:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \le 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \; \textit{oarecare}, \;\; x_3 \le 0, \;\; x_4 \ge 0 \\ [\max] f = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 \le 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; x_3 \; \textit{oarecare}, \;\; x_4 \ge 0 \\ [\min] f = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

* Acest paragraf (împreună cu soluțiile problemelor propuse) este redactat în cea mai mare parte după lucrarea [15].

5.5. Să se scrie sub *formă standard* următoarele PPL:

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 \ge 14 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \le 0,\ \ x_3 \ \textit{oarecare},\ \ x_4 \le 0,\ \ x_5 \ge 0 \\ [opt] f = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \\ [\max] f = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 12 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \\ [\min] f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\text{(iv)}\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \ge -15 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ \textit{oarecare},\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \le 0 \\ [\max] f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

(v) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 5 \\ x_1 \leq 0, \quad x_2 \ oarecare, \quad x_3 \geq 0 \\ [\min] f = 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

5.6. Să se determine matriceal *soluțiile de bază* ale următoarelor PPL:

(i) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ [\max] f = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ [\min] f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

(iii) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ [\max] f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

5.7. Să se rezolve grafic următoarele PPL:

(i) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ [\max] f = 3x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

(ii) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 0 \le x_1, x_2 \le \dfrac{2}{3} \\ [\max] f = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ 4x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ [\max] f = 2x_1 + 5x_2 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ [\max] f = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ [\max] f = 3x_1 + 5x_2 \end{cases}$

5.7. Să se rezolve cu ajutorul *algoritmului simplex* următoarele PPL:

(i) $$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ [\max] f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ [\max] f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

(iii) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 12 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ [\max] f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 10x_6 \end{cases}$$

(iv) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ [\max] f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \end{cases}$$

(v) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ [\max] f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

§6. Forme biliniare. Forme pătratice.

6.1. Fie V un K- spaţiu vectorial de dimensiune finită $n \geq 1$, iar $b:V\times V\to K$ o formă biliniară nenulă. Să se arate că există două aplicaţii liniare $f,g:V\to K$ a.î. $b(x,y) = f(x)g(y)$, pentru orice $x,y\in V$, dacă şi numai dacă rangul lui b este 1.

6.2. Pentru un spaţiu vectorial real V notăm:

$B(V) =\{b:V\times V\to \mathbb{R} \mid b$ este formă biliniară $\}$,

$B_s(V) = \{b\in B(V) \mid b$ este simetrică pe $V\}$ iar

$B_{as}(V) = \{b\in B(V) \mid b$ este antisimetrică pe $V\}$.

Să se arate că:

(i) B(V) devine în mod canonic spaţiu vectorial real în raport cu operaţiile canonice de adunare a formelor biliniare şi de înmulţire a lor cu un număr real;

(ii) $B_s(V)$ şi $B_{as}(V)$ sunt subspaţii vectoriale ale lui B(V);

(iii) $B(V) = B_s(V) \oplus B_{as}(V)$.

6.3. Fie V un spaţiu vectorial real. Să se arate că $b\in B_{as}(V)$ dacă şi numai dacă $b(x,x) = 0$ pentru orice $x\in V$.

6.4. Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune finită $n \geq 1$ iar $f : V\to\mathbb{R}$ o formă pătratică pozitiv definită. Să se arate că dacă A este matricea lui f în raport cu baza B a lui V, atunci A este inversabilă şi dacă notăm cu g forma pătratică a cărei matrice în raport cu baza B a lui V este A^{-1}, atunci g este pozitiv definită.

6.5. Fie $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$ şi fie $b:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ forma pătratică pentru care $b(e_1, e_1)= -1$, $b(e_2, e_2) = 1$, $b(e_3, e_3) = 2$, $b(e_1-e_2 , e_2) = 2$, $b(e_2, e_1+2e_2) = 5$, $b(e_3-e_1, e_1) = 4$, $b(2e_1+e_2, e_3) = 7$, $b(e_1+e_3, e_2) = 4$, $b(e_1-2e_2, e_3) = 1$.

Se cere:

(i) Să se scrie matricea formei biliniare b în raport cu baza B;

(ii) Să se arate că B este simetrică;

(iii) Să se scrie expresia analitică a formei pătratice $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x) = b(x, x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^3$;

(iv) Folosind metoda Jacobi să se determine o expresie canonică pentru f şi baza lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu care f are această expresie canonică.

6.6. Fie $b:M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ definită prin

$$b(A,B) = 2tr(AB) - tr(A)tr(B),$$

oricare ar fi $A,B\in M_n(\mathbb{R})$.

1) Să se arate că b este o formă biliniară simetrică;
2) Pentru n = 2 se cere:

(i) Să se scrie expresia analitică a lui b în raport cu baza canonică a lui $M_2(\mathbb{R})$;

(ii) Să se scrie matricea lui b în raport cu baza canonică a lui $M_2(\mathbb{R})$;

(iii) Să se determine o expresie canonică a formei pătratice $f:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ definită prin $f(A) = b(A, A)$, oricare ar fi $A\in M_2(\mathbb{R})$, folosind metoda lui Gauss-Lagrange şi să se găsească baza lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu care f are această formă canonică;

(iv) Să se precizeze signatura formei pătratice f.

6.7. Fie $b : \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma biliniară a cărei expresie analitică în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$ este:

$$b(x, y) = x_1y_1+x_1y_4-x_2y_1+x_2y_2+x_3y_1+2x_3y_2+x_3y_3+4x_3y_4+x_4y_3+x_4y_4,$$

oricare ar fi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)\in\mathbb{R}^4$.

Se cere:

(i) Să se scrie expresia matriceală a lui b în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$;

(ii) Să se scrie matricea lui b în raport cu baza $B' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ a lui $\mathbb{R}^4$, unde $e_1' = (1, -1, 0, 0)$, $e_2' = (1, 1, 0, 0)$, $e_3' = (0, 0, 1, 1)$, $e_4' = (0, 0, 1, -1)$.

6.8. Fie $\mathbb{R}_2[X]$ spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale reale de grad cel mult 2 şi fie $b:\mathbb{R}_2[X]\times\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}$, definită prin $b(p,q) = \int_0^1 \widetilde{p}(t)\widetilde{q}(t)dt$, oricare ar fi $p,q\in\mathbb{R}_2[X]$.

Se cere:

(i) Să se arate că b este o formă biliniară simetrică;

(ii) Să se scrie matricea lui b în raport cu baza $\{1, X, X^2\}$ a lui $\mathbb{R}_2[X]$;

(iii) Să se scrie matricea lui b în raport cu baza $\{1, 1\text{-}X, 1\text{-}X^2\}$;

(iv) Să se scrie expresia analitică a formei biliniare b şi expresia analitică a formei pătratice f: $\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}$, $f(p) = b(p, p)$, $p\in\mathbb{R}_2[X]$, în raport cu baza $\{1, X, X^2\}$;

(v) Folosind metoda lui Gauss-Lagrange să se determine o expresie canonică pentru f şi baza lui $\mathbb{R}_2[X]$ în raport cu care f are această expresie canonică.

6.9. Fie V un spaţiu vectorial real cu baza $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ a.î. forma pătratică $f:V\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1^2 +2\alpha x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2 +2\alpha x_2x_3+2x_3^2,$$

$x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3\in V$ este pozitiv definită.

6.10. Folosind metoda lui Gauss-Lagrange să se aducă la forma canonică forma pătratică $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = 2x_1^2 +3x_2^2 - x_3^2 +2x_1x_2 + 4x_1x_3+ 3x_2x_3.$$

6.11. Se consideră forma pătratică $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ care în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$ are expresia analitică

$$f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_4 +3x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 +2x_3^2 + 4x_3x_4 - x_4^2,$$

$x = (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$.

Să se determine o expresie canonică a sa, folosind metoda Jacobi şi să se găsească baza lui $\mathbb{R}^4$ în raport cu care f are această expresie canonică. Este f pozitiv definită?

6.12. Aceleaşi cerinţe ca şi în problema precedentă pentru $f :\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 +2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2$.

B. SOLUŢII.

§1. Matrice. Determinanţi. Inversa unei matrice. Rangul unei matrice.

1.1. (i). Dacă $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ atunci:

$$\det\left(\overline{A}\right)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\overline{a_{1\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\overline{a_{n\sigma(n)}}=\overline{\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}}=\overline{\det(A)}.$$

(ii). Conform cu (i) avem

$$\det(A\cdot\overline{A})=\det(A)\cdot\det(\overline{A})=\det(A)\cdot\overline{\det(A)}=\left|\det(A)\right|^2\geq 0.$$

(iii). Avem $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)=C\cdot\overline{C}$ (unde $C=A+iB$) şi totul rezultă din (ii).

(iv). Rezultă din (iii) alegând $B=I_n$.

1.2. (i). Prin calcul direct.

(ii). Dacă există $k\geq 2$ a.î. $A^k=O_2$ deducem că $\det(A)=0$, astfel că $A^2=(a+d)A$ şi deci $O_2=A^k=(a+d)^{k-1}A$. Cum $A\neq O_2$ atunci cu necesitate $a+d=0$ şi astfel $A^2=0\cdot A=O_2$.

1.3. În mod evident $x_1=1$ iar $y_1=0$. Din problema **1.2.**, (i) deducem că putem alege $x_2=a+d$ iar $y_2=-\det(A)$.

Cum $A^{n+1}=A^n\cdot A=(x_nA+y_nI_2)A=x_nA^2+y_nA=x_n(x_2A+y_2I_2)+y_nA=$ $=(x_2x_n+y_n)A+y_2x_nI_2$ deducem că $x_{n+1}=x_2x_n+y_n$, şi $y_{n+1}=y_2x_n$.

Cum $y_n=y_2x_{n-1}$ deducem că $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică recurenţa $x_{n+1}=x_2x_n+y_2x_{n-1}$, pentru $n\geq 2$ cu $x_1=1$ şi $x_2=a+d$ iar $(y_n)_{n\geq 1}$ recurenţa $y_n=y_2x_{n-1}$ pentru $n\geq 2$ ($y_1=0$ şi $y_2=-\det(A)$).

Astfel, pentru şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ avem condiţiile $x_1=1$ şi $x_2=a+d$ iar pentru $n\geq 2$:

$$x_{n+1}=(a+d)x_n-\det(A)x_{n-1},$$

deci ecuaţia caracteristică a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este:

$$(\star)\ \lambda^2-(a+d)\lambda+\det(A)=0.$$

Notând prin λ_1, λ_2 rădăcinile (complexe) ale ecuației caracteristice $(\star)$, atunci (vezi [2]):

i) dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$(\star\star)\quad A^n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot A - \det(A) \cdot \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot I_2$$

ii) dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$(\star\star\star)\quad A^n = n\lambda^{n-1} A - (n-1)\det(A)\lambda^{n-2} I_2 \text{, pentru orice } n \geq 2.$$

În cazul particular A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ecuația caracteristică $(\star)$ este λ^2-2λ+2=0, de unde λ_1=1+i, λ_2=1-i. Prin calcul direct deducem că $\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$, astfel că dacă ținem cont de relația $(\star\star)$ putem scrie:

$$A^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \sin\frac{(n-1)\pi}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4} \\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

Pentru A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ avem ecuația caracteristică λ^2-5λ+6=0 cu λ_1=2 şi λ_2=3. Conform cu $(\star\star\star)$:

$$A^n = \frac{2^n - 3^n}{2-3} A - 6\frac{2^{n-1} - 3^{n-1}}{2-3} I_2 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}.$$

Pentru A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ avem ecuația caracteristică λ^2-4λ+4=0 cu λ_1=λ_2=2. Conform cu $(\star\star\star)$:

$$A^n = n \cdot 2^{n-1} A - 4(n-1) \cdot 2^{n-2} I_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} n \cdot 2^{n-1} - 4(n-1) \cdot 2^{n-2} & -n \cdot 2^{n-1} \\ n \cdot 2^{n-1} & 3n \cdot 2^{n-1} - 4(n-1) \cdot 2^{n-2} \end{pmatrix}.$$

1.4. Condiția $\det(A^3-A^2) = 1$ este echivalentă cu
$$\det(A^2)\det(A-I_2) = 1,$$
de unde $\det(A^2) = \det(A-I_2) = 1$ (căci $\det(A^2)\geq 0$), sau $\det(A) = \pm 1$ şi $\det(A-I_2) = 1$.

Avem astfel sistemele: $\begin{cases} ac-b=1 \\ (a-1)(c-1)-b=1 \end{cases}$ şi $\begin{cases} ac-b=-1 \\ (a-1)(c-1)-b=1 \end{cases}$.

Primul sistem este echivalent cu $\begin{cases} ac-b=1 \\ a+c=1 \end{cases}$ iar al doilea cu $\begin{cases} ac-b=-1 \\ a+c=-1 \end{cases}$.

Deducem imediat că $b = -a^2+a-1$ şi $c = 1-a$, cu $a\in\mathbb{Z}$ (în primul caz) şi respectiv $b=-a^2-a+1$ şi $c = -1-a$, cu $a\in\mathbb{Z}$ (în al doilea caz).

1.5. Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$ o soluție a ecuației.

Obținem, folosind $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$,
$$(\det(X))^{n-2}\cdot\det(X+iI_2)\cdot\det(X-iI_2) = 0. \quad (1)$$
Dacă $\det(X+iI_2)=0$ rezultă $(a+i)(d+i)-bc=0$, de unde $\begin{cases} ad-bc=1 \\ a+d=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} d=-a \\ bc=-1-a^2 \end{cases}$.

Prin urmare, $X^2=\begin{pmatrix} a^2-1-a^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I_2$, adică $X^2+I_2 = O_2$, relație din care $X^n + X^{n-2} = O_2$, contradicție. Deci $\det(X+iI_2) \neq 0$. Analog $\det(X-iI_2) \neq 0$.

Din relația (1), rezultă $\det(X) = 0$ şi înlocuind în relația cunoscută, $X^2-(a+d)X+\det(X)\cdot I_2 = O_2$ (conform problemei **1.2.**, (i)), obținem $X^2 = (a+d)X$ şi de aici $X^k = (a+d)^{k-1}X$, cu $k\in\mathbb{N}^*$.

Dacă notăm α = a+d, relația $X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, prin identificarea elementelor devine: $a(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}) = 1$, $d(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}) = 1$, $b(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}) = -1$, $c(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-3}) = -1$. Adunând primele două relații rezultă $\alpha^n+\alpha^{n-2}-2 = 0$.

Dacă $f(\alpha) = \alpha^n+\alpha^{n-2}-2$, rezultă $f'(\alpha) = \alpha^{n-3}(n\alpha^2+n-2)$. Dacă n este par, atunci f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi $f(-1) = f(1) = 0$. Dacă n este impar, atunci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $f(1) = 0$. Rezultă posibilitățile:

$$X = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru n impar}$$

$$X = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru n par,}$$

matrice care verifică relația din enunț.

1.6. Se arată uşor că $Y = \frac{1}{2}\cdot(X+AX)$ şi $Z = \frac{1}{2}\cdot(X-AX)$ verifică condițiile din enunț. Pentru partea de unicitate fie (Y', Z') o altă soluție a problemei.

Atunci $Y+Z = Y'+Z'$, $AY = Y$, $AY' = Y'$, $AZ = -Z$, $AZ' = -Z'$. Deci $Y-Y' = Z'-Z$. Pe de altă parte, $A(Y-Y') = AY-AY' = Y-Y'$; $A(Z'-Z) = AZ'-AZ = -Z'+Z$, şi deci avem şi $Y-Y' = -(Z'-Z)$, adică $Y-Y' = Z - Z' = 0$ şi prin urmare, $Y = Y'$ şi $Z = Z'$.

1.7. Cum în condițiile enunțului avem

$$(A+Bi)(A-Bi) = -i(AB-BA)$$

deducem că

$$\det(A+Bi)\cdot\det(A-Bi) = (-i)^n\cdot\det(AB-BA)\ .$$

Dacă $\det(A+Bi) = a+bi$ (cu $a, b\in\mathbb{R}$), atunci $\det(A-Bi) = a-bi$ astfel că obținem egalitatea $a^2+b^2 = (-i)^n\cdot\det(AB-BA)$, de unde se deduc imediat concluziile de la (i), (ii) şi (iii).

1.8. Din relația ABAB = O_2 rezultă B(ABAB)A = O_2 adică $(BA)^3 = O_2$. Dacă $X \in M_2(\mathbb{R})$ şi $X^3 = O_2$, atunci $X^2 = O_2$ (vezi problema **1.2.**, (ii)), adică $(BA)^2$ = BABA = O_2.

În cazul lui $M_3(\mathbb{R})$, un contraexemplu este oferit de perechea de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.9. (i), (ii), (iii) se deduc imediat prin calcul, iar (iv) rezultă din (iii).

1.10. Condiția din enunț este echivalentă cu $(I_n-A)(I_n-B) = I_n$ adică $I_n - A$ este inversabilă şi $(I_n-A)^{-1}=I_n-B$. Astfel şi $(I_n-B)(I_n-A)=I_n$, de unde concluzia că BA = A+B = AB.

1.11. (i). Într-un prim mod calculăm det(A) cu regula lui Sarrus iar în alt mod adunând ultimele două linii la prima.

(ii). Fie $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ iar $E_i = a_i^3 + b_i^3 + c_i^3 - 3a_ib_ic_i$, (i = 1, 2).

Ținând cont de (i) avem: $E_i=-\det(A_i)$, unde $A_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ b_i & c_i & a_i \\ c_i & a_i & b_i \end{pmatrix}$,

i =1, 2, astfel că $E_1 \cdot E_2=\det(A_1)\cdot\det(A_2)=\det(A_1\cdot A_2)$ iar prin calcul avem

că $A_1\cdot A_2=\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ c_3 & a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{pmatrix}$, deci

$$E_1\cdot E_2 = \det(A_1\cdot A_2) = a_3^3 + b_3^3 + c_3^3 - 3a_3b_3c_3$$

cu $a_3 = a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$, $b_3 = a_1b_2+b_1c_2+c_1a_2$ şi $c_3 = a_1c_2+b_1a_2+c_1b_2$.

1.12. (i). Prin calcul.

(ii). Notăm s = a+b+c şi s′ = a′+b′+c′.

Utilizând regula lui Laplace, proprietățile elementare ale determinanților şi (i) avem:

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)(a'^2 + b'^2 + c'^2 - a'b' - a'c' - b'c') =$$

$$= -\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ b & 1 & a \\ c & 1 & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' & 1 \\ c' & a' & 1 \\ b' & c' & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & C & s \\ s' & s' & 3 \\ B & A & s \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} A & C & ss' \\ 1 & 1 & 3 \\ B & A & ss' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A & C & B \\ 1 & 1 & 1 \\ B & A & C \end{vmatrix}$$

(am sumat la ultima coloană opusele primelor două)

$= A^2+B^2+C^2 - AB-AC-BC$.

1.13. Totul rezultă din regula lui Laplace dezvoltând determinantul $\det\begin{pmatrix} A & B \\ O_{n,m} & C \end{pmatrix}$ după primele m coloane.

1.14. Totul rezultă din regula lui Laplace dezvoltând determinantul $\det\begin{pmatrix} O_n & A \\ B & C \end{pmatrix}$ după primele n coloane.

1.15. La coloana k a matricei $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ adunăm coloana n+k înmulțită cu -i ($1 \leq k \leq n$) şi obținem că

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+iB & -B \\ B-iA & A \end{pmatrix}.$$

Acum la linia n+k a ultimei matrice adunăm linia k înmulțită cu i ($1 \leq k \leq n$) şi obținem că $\det\begin{pmatrix} A+iB & -B \\ B-iA & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+iB & -B \\ O_n & A-iB \end{pmatrix}$.

Astfel (ținând cont şi de problemele **1.1.** şi **1.13.**) obținem că:

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\cdot\det(A-iB) =$$

$$= \det(A+iB)\cdot\overline{\det(A+iB)} = \left|\det(A+iB)\right|^2$$

1.16. Dacă notăm A = $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ şi B = $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ atunci M=$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, deci conform problemei **1.15.** avem că $\det(M) = \left|\det(A+iB)\right|^2$ şi cum

$$\det(A+iB) = \begin{vmatrix} a+ic & -b+id \\ b+id & a-ic \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2,$$

deducem că det(M) = $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

1.17. (i). Se calculează $A \cdot A^t$.
(ii). Se ține cont de formula det(AB) = det(A) · det(B).
(iii). Rezultă direct din (ii).

1.18. (i), (ii). Prin calcul direct utilizând proprietățile determinanților.

1.19. Din linia i se scade linia 1 înmulțită cu $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, i = 2,…, n.

1.20. Fie E = $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$. Considerăm matricea $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, B = (b_{ij}) cu $1 \le i \le n$ şi $1 \le j \le p$, unde $b_{ij} = \begin{cases} 1, & dacă\ e_j \in A_i \\ 0, & dacă\ e_j \notin A_i \end{cases}$ şi astfel A = $B^t \cdot B$. Totul rezultă acum din regula lui Laplace.

1.21. det(A) = $n(-1)^{n-1}$.

1.22. det(A) = 1.

1.23. det(A) = $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$.

1.24. (i). Paritatea rezultă din faptul că toți termenii determinantului sunt numerele 1 şi –1 şi ei eventual se reduc doi câte doi.

(ii).Valoarea maximă este 4, de exemplu, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Valoarea minimă este –4.

1.25. Valoarea maximă pe care o poate lua det(A) este 2, de exemplu, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.26. Adunând prima linie la toate celelalte linii obținem o matrice care are pe liniile de rang 2, 3, …, n elementele 0, 2 sau –2, ceea ce ne permite să scoatem factor comun pe 2 de pe aceste linii.

1.27. Se aplică problemele **1.24.** şi **1.26.**. Se obține valoarea maximă 16, iar cea minimă –16.

1.28. Deducem imediat că det(X) = 0 şi astfel dacă $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, atunci $X^2=\alpha X$, deci $X^n=\alpha^{n-1}X$ (cu $\alpha=a+d$). Obținem că $\alpha^{n-1}X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, adică $\alpha^{n-1}a=2$, $\alpha^{n-1}b=3$, $\alpha^{n-1}c=4$ şi $\alpha^{n-1}d=6$. Deducem imediat că $\alpha^n = \alpha^{n-1}(a+d) = \alpha^{n-1}a + \alpha^{n-1}d = 2+6 = 8$ şi prin urmare $X = \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ cu $\alpha^n=8$.

1.29. Avem $A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I_n^{\,t} = I_n$, de unde concluzia că $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

1.30. Ținând cont de problema **1.29.**, avem: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$, adică A^{-1} este simetrică.

1.31. Dacă A = O_2, totul este clar.

Să presupunem că $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq O_2$. Relația $A^k = O_2$, implică det(A) = 0 şi deci $A^2 = (a+d)A$. Rezultă $O_2 = A^k = (a+d)^{k-1}A$, deci $a+d = 0$. Prin urmare, $A^2 = O_2$. Atunci $I_2+A+A^2+\ldots+A^{k-1} = I_2+A =$ $= \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ şi deci $\det(I_2+A+\ldots+A^{k-1}) = (a+1)(d+1)-bc =1$.

1.32. Atât (i) cât şi (ii) se verifică direct prin calcul.

1.33. Deducem imediat că A este de forma

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2}-x \\ \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{cu } x\in\mathbb{R}.$$

Astfel

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}-x & x & 2x-\frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2}-2x & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-2x & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix}$$

$$=3x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}>0.$$

1.34. Putem scrie $\det(A+X)=\det(A)+x\sum_{i=1}^{n} D_i$, unde D_i este determinantul obținut din det(X) prin înlocuirea coloanei de ordin i cu coloana formată numai cu elemente egale cu 1 ($1\leq i\leq n$). Analog

$\det(A - X) = \det(A) - x\sum_{i=1}^{n} D_i$, de unde deducem că

$\det(A + X) \cdot \det(A - X) = \det^2(A) - x^2 (\sum_{i=1}^{n} D_i)^2 \leq \det^2(A)$.

1.35. Prin calcul direct. Pentru reciprocă facem în $(*)$ pe A = B cu $\det(A) \neq 0$ şi deducem că $\det(2A) = 4\det(A) \Rightarrow 2^n = 4 \Rightarrow n = 2$.

1.36. Facem inducție după n; pentru n=1 totul este clar, deoarece $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$ şi $d_1=d$. Scriind că $A^{n+1} = A^n \cdot A$, obținem relațiile de recurență: $\begin{cases} a_{n+1} = aa_n + cb_n \\ b_{n+1} = ba_n + db_n \\ c_{n+1} = ac_n + cd_n \\ d_{n+1} = bc_n + dd_n \end{cases}$ pentru orice $n \geq 1$. Să presupunem deci că $\frac{b_n}{b} = \frac{c_n}{c} = \frac{a_n - d_n}{a - d}$. Atunci $\frac{b_{n+1}}{b} = a_n + d \cdot \frac{b_n}{b}$, $\frac{c_{n+1}}{c} = d_n + a \cdot \frac{c_n}{c}$ şi astfel

$\frac{b_{n+1}}{b} = \frac{c_{n+1}}{c} \Leftrightarrow a_n + d \cdot \frac{b_n}{b} = d_n + a \cdot \frac{c_n}{c} \Leftrightarrow a_n - d_n = a \cdot \frac{c_n}{c} - d \cdot \frac{b_n}{b}$

$\Leftrightarrow a_n - d_n = \frac{b_n}{b}(a - d)$, ceea ce este adevărat, din ipoteza de inducție. Analog restul de egalități.

1.37. Deoarece det(A) = 0, rezultă că $A^2-(3+10)A = O_2$, deci $A = 13^{1-n} \cdot A^n$, pentru orice $n \geq 1$. Rezultă că reprezentarea cerută este posibilă, alegând de exemplu, $X = 13^{(1-n)/n} \cdot \alpha^{1/n} \cdot A$ şi $Y = 13^{(1-n)/n} \cdot \beta^{1/n} \cdot A$, cu α, β numere reale arbitrare a. î. $\alpha \neq \beta$, $\alpha + \beta = 1$.

1.38. Din $A^3 = A+I_n \Rightarrow A(A^2-I_n) = I_n \Rightarrow \det(A) \neq 0$. De asemenea, din $A^3 = A+I_n \Rightarrow A^3+A^2 = A^2+A+I_n \Rightarrow A^2(A+I_n) = A^2+A+I_n \Rightarrow \det(A+I_n) \geq 0$ şi revenind la $A^3 = A+I_n \Rightarrow \det(A) > 0$.

1.39. Vom demonstra pentru început următoarea:

Lemă. Fie P un polinom cu coeficienţi reali, fără rădăcini reale şi care are coeficientul puterii de gradul cel mai mare pozitiv. Atunci det(P(A))≥0, pentru orice A ∈$M_n(\mathbb{R})$.

Într-adevăr, P este de forma $P(x) = a\prod_{k=1}^{r}(x^2 + b_k x + c_k)^{n_k}$, cu $a > 0$, $b_k^2 - 4c_k < 0$ şi $n_k \in \mathbb{N}^*$, pentru orice k.

Atunci $\det(P(A)) = a^n \prod_{k=1}^{r} \det(A^2 + b_k A + c_k I_n)^{n_k}$ şi rămâne să observăm că fiecare factor al produsului din membrul drept este pozitiv.

Se foloseşte faptul că

$$A^2 + b_k A + c_k I_n = \left(A_k - \frac{b_k}{2}\cdot I_n\right)^2 + \frac{4c_k - b_k^2}{4}\cdot I_n,$$

pentru orice k şi că $\det(X^2+Y^2) \geq 0$, pentru orice X, Y∈$M_n(\mathbb{R})$ cu XY = YX (conform problemei **1.1.**, (iii)).

Trecem la rezolvarea problemei date:

(i). Evident, k≥3. Din $A^k = A + I_n$ obţinem $A(A^{k-1} - I_n) = I_n$, deci $\det(A)\neq 0$. Pe de altă parte, $A^{k+1} = A^2 + A$ şi deci $A(A-I_n)(A^{k-1} +\ldots+ I_n)=$ $= A^2$. Conform lemei, $\det(A^{k-1} +\ldots+A+ I_n) > 0$. Rezultă $\det(A(A-I_n))>0$.

Cum k = 2p+1, din relaţia $A(A^{k-1} - I_n) = I_n$, deducem că $A(A^2-I_n)(A^{2(p-1)} +\ldots+A^2+I_n) = I_n$ şi de aici că $\det(A+I_n)>0$.

Cum $A^k = A + I_n$ şi k este impar, concluzionăm că det(A) > 0.

(ii). Fie k un numar par şi $A = \alpha I_n$. Egalitatea $A^k = A + I_n$ este echivalentă cu $(\alpha^k-\alpha-1)I_n = O_n$. Deci $\alpha^k-\alpha-1 = 0$. Deoarece $f(\alpha)=\alpha^k-\alpha-1$ este continuă, $f(-\infty)=\infty$ şi f(0) = -1 rezultă că f admite o rădăcină $\alpha_0 < 0$ şi în acest caz $A = \alpha_0 I_n$ verifică relaţia $A^k = A + I_n$, dar $\det(A) = \alpha_0^n < 0$.

1.40. Deoarece matricele A, B, C comută între ele, putem scrie că: $M=A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA=(A+\alpha B+\alpha^2 C)(A+\alpha^2 B+\alpha C)$, cu α rădăcina cubică a unităţii (α≠1). Astfel, $\det(M)=\det(A+\alpha B+\alpha^2 C)\cdot\det(A+\alpha^2 B+\alpha C)$ şi, dacă $\det(A+\alpha B+\alpha^2 C) = a+b\alpha+c\alpha^2$, atunci $\det(A+\alpha^2 B+\alpha C) =$ $= a+b\alpha^2+c\alpha$ (a, b, c∈ℝ) şi astfel:

$$\det(M)=(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0.$$

1.41. Fie $X=A^2+B^2$ şi $Y=AB+BA$. Cum:
$X+Y=A^2+B^2+AB+BA=(A+B)^2$ şi $X-Y=A^2+B^2-AB-BA=(A-B)^2$ obținem: $\det((A+B)^2)+\det((A-B)^2)=2\det(A^2+B^2)+2\det(AB+BA)$
(conform problemei **1.35.**), deci

$$\det(A^2+B^2)=\frac{1}{2}\left[(\det(A+B))^2+(\det(A-B))^2-2\det(AB+BA)\right]$$

şi cum $\det(AB+BA)\leq 0$, rezultă $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

1.42. Dacă A este inversabilă atunci putem scrie $\alpha I_n+AB=A(\alpha I_n+BA)A^{-1}$ şi astfel

$$\det(\alpha I_n+AB)=\det(A)\det(\alpha I_n+BA)\det(A^{-1})=\det(\alpha I_n+BA).$$

Dacă A nu este inversabilă, observăm că exceptând o submulțime finită x de elemente din $\mathbb{C}$ avem

$$\det[\alpha I_n+(xI_n+A)B]=\det[\alpha I_n+B(xI_n+A)],$$

pentru orice $\alpha\in\mathbb{C}$. Cum cei doi determinanți sunt polinoame în x egalitatea se menține şi în x=0, deci din nou obținem că $\det(\alpha I_n+AB)=\det(\alpha I_n+BA)$.

Fie acum P de forma $P=a(X-x_1)\ldots(X-x_n)$, cu $a, x_1, \ldots, x_n\in\mathbb{C}$.

Atunci $P(AB)=a\prod_{k=1}^{n}(AB-x_kI_n)$ şi $P(BA)=a\prod_{k=1}^{n}(BA-x_kI_n)$ şi astfel egalitatea $\det P(AB)=\det P(BA)$ este imediată.

1.43. Se ştie că dacă $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ atunci $\det(AB-I_2)=\det(BA-I_2)$ şi $\det(AB+I_2)=\det(BA+I_2)$ (conform problemei **1.42.**). Rezultă că $\det[(AB-I_2)(BA-I_2)]=\det(AB-I_2)^2=[\det(AB-I_2)]^2\geq 0$. (1)

Dar $(AB-I_2)(BA-I_2)=I_2-(AB+BA)$ (deoarece $B^2=O_2$).

Analog $\det(I_2+(AB+BA))\geq 0$. (2).

Folosind acum relația: $\det(X+Y)+\det(X-Y)=2[\det(X)+\det(Y)]$, pentru orice $X, Y\in M_2(\mathbb{R})$ (conform problemei **1.35.**), din (1) şi (2) rezultă

$0\leq\det(I_2-(AB+BA))+\det(I_2+(AB+BA))=2[\det(I_2)+\det(AB+BA)]=$
$=2[1+\det(AB+BA)]$, adică $\det(AB+BA)\geq -1$. Din $B^2=O_2$ rezultă

det(B) = 0 deci 0 = 2[det(AB)+det(BA)] = det(AB+BA)+det(AB-BA) şi folosind prima inegalitate rezultă a doua.

Observație. Se poate demonstra de aici că

$$\det(AB-BA)\leq 0\leq \det(AB+BA).$$

1.44. $\det(B^2+I_2) = 0 \Rightarrow \det(B+iI_2)\cdot\det(B-iI_2) = 0$.

Cum $B\in M_2(\mathbb{R})$, avem $\det(B+iI_2) = \det(B-iI_2) = 0$.

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = \det(B+xI_2)$. Avem $g(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha=\det(I_2)=1$, $\gamma=\det(B)$. Extinzând pe g la $\mathbb{C}$, pentru x=i, avem:

(1) $0 = \det(B+iI_2) = -1+\beta i+\det(B)$, deci $\beta = 0$ şi $\det(B) = 1$.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \det(A+xB)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Atunci $f(x)=ax^2+bx+c$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $c = f(0) = \det(A)$ şi $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\det\left(\frac{A}{x}+B\right) = \det(B)$.

Relația din ipoteză se scrie sub forma $\sum\limits_{k=0}^{n} f((-1)^k C_n^k) = 0$. Ținând seama de forma funcției f, se obține egalitatea: $\det(B)\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 + b\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k + (n+1)\det(A) = 0 \Rightarrow$

(2) $\det(B)C_{2n}^n + (n+1)\det(A) = 0$.

Din (1) şi (2) deducem că $\det(A) = -\frac{C_{2n}^n}{n+1}$.

1.45. (i) $\Rightarrow$(ii). Dacă p=1 $\Rightarrow A=O_2 \Rightarrow a=0$, $b\in\mathbb{R}$, deci (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Fie $p\in\mathbb{N}^*$, $p\geq 2$, a.î. $A^p=O_2 \Rightarrow \det(A^p)=(\det(A))^p=0$, deci $\det(A)=0$.

Luăm $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow A^2-(x+t)A+\det(A)\cdot I_2=O_2 \Rightarrow A^2=(x+t)A$ şi prin inducţie, $A^p = (x+t)^{p-1}A$, pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$, deci (i) $\Leftrightarrow \begin{cases} A = O_2 \\ sau \\ x+t=0 \end{cases}$.

Dacă $A = O_2 \Rightarrow a = 0$ şi $b\in\mathbb{R} \Rightarrow$ (ii).

Dacă $x+t = 0 \Rightarrow t =-x \Rightarrow A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ şi $\det(A) = 0 \Rightarrow x^2+yz = 0$.

Luăm $x = a\cdot\cos b$ şi $y = a(1+\sin b)$, $z = a(-1+\sin b)$, cu $a, b\in\mathbb{R}$ şi astfel rezultă (ii).

(ii) $\Rightarrow$(i). Dacă $a=0$, $b\in\mathbb{R} \Rightarrow A=O_2 \Rightarrow$există $p=1$ a.î. $A^p= A^1=O_2$.

Dacă $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R} \Rightarrow A^2=O_2 \Rightarrow$există $p=2\in\mathbb{N}^*$, $p>1$ a.î. $A^p= O_2$.

1.46. Vom demonstra pentru început următoarea:

Lemă. Dacă două matrici pătratice X, Y verifică relaţia $XY = I_n$, atunci ele sunt nesingulare, $X^{-1} = Y$ şi $YX = I_n$.

Demonstraţia lemei se bazează pe faptul că $XY = I_n$ implică $\det(X) \neq 0$. Rezultă că matricea X este inversabilă. Înmulţind la stânga relaţia $XY = I_n$ cu X^{-1} obţinem $Y = X^{-1}$ deci şi $YX = I_n$.

Lema se aplică astfel:

(i) $\Rightarrow$ (ii). Din relaţia $ABC = AB+BC$ deducem $(I_n-A)B(I_n-C) = (B-AB)(I_n-C) = B-BC-AB+ABC = B$, deci $(I_n-A)B(I_n-C)B^{-1} = I_n$.

Conform lemei, avem şi $(I_n-C)B^{-1}(I_n-A)B=I_n$, adică $(B^{-1}-CB^{-1})(I_n-A) = B^{-1}$. Prin urmare, $B^{-1}-B^{-1}A-CB^{-1}+CB^{-1}A = B^{-1}$, deci

$$CB^{-1}A = CB^{-1}+B^{-1}A.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Se demonstrează analog.

1.47. „$\Rightarrow$”. Presupunem că ecuaţia $X^{-1}\cdot X^t =A$ admite soluţia $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Atunci $X^{-1} = \frac{1}{\det(X)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $X^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ şi deci

$$A = X^{-1} \cdot X^{t} = \frac{1}{\det(X)}\begin{pmatrix} ad-b^2 & (c-b)d \\ (b-c)a & ad-c^2 \end{pmatrix},$$

unde evident impunem condiția $\det(X)\neq 0 \Leftrightarrow ad\neq bc$.

Deoarece $A\in M_2(\mathbb{R})$ şi orice matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ verifică ecuația caracteristică $A^2-tr(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=O_2$, deducem că $\det(A) =$ $= \det(X^{-1})\cdot\det(X^{t}) = \frac{1}{\det(X)}\cdot\det(X)=1$ şi $tr(A)=\frac{2ad-b^2-c^2}{ad-bc}=p$.

Dacă $p=2 \Leftrightarrow (b-c)^2=0 \Leftrightarrow b=c \Leftrightarrow A=I_2$, obținem o contradicție. Deci există $p\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ a.î. $A^2-pA+I_2=O_2$, unde p a fost definit mai sus.

„$\Leftarrow$”. Dacă există $p\in\mathbb{R}-\{2)$ a. î. $A^2-pA+I_2 = O_2$ şi $A\neq\lambda I_2$, folosim faptul că A verifică ecuația caracteristică $A^2-tr(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=O_2$, şi prin scădere deducem că $(tr(A)-p)A =$ $= (\det(A)-1)I_2$, de unde $p = tr(A)$ şi $\det(A) = 1$.

Prin urmare A se scrie sub forma $A=\begin{pmatrix} u & v \\ \frac{-1+pu-u^2}{v} & p-u \end{pmatrix}$,

cu $u, v\in\mathbb{R}$, $v\neq 0$ şi deducem că sistemul $\frac{ad-b^2}{ad-bc}=u$, $\frac{ad-c^2}{ad-bc}=p-u$, $\frac{(c-b)d}{ad-bc}=v$, $\frac{(b-c)a}{ad-bc}=\frac{pu-u^2-1}{v}$ are soluție doar dacă $p\neq 2$, şi anume $a=\frac{u^2-pu+1}{v^2}d$, $b=\frac{u-1}{v}d$, $c=\frac{u+1-p}{v}d$,

unde $d\in\mathbb{R}^*$ şi deci matricea $X=\frac{d}{v}\begin{pmatrix} \frac{u^2-pu+1}{v} & u-1 \\ u-p+1 & v \end{pmatrix}$ satisface ecuația $X^{-1}\cdot X^{t} = A$.

1.48. Fie $A=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix} q & -n \\ -p & m \end{pmatrix}$, $d = mq-np$, $m, n, p, q\in\mathbb{R}$. Prin calcul direct avem: $\det(A+dA^*) = \begin{vmatrix} m+qd & n(1-d) \\ p(1-d) & q+md \end{vmatrix} =$ $= d[(d-1)^2+(m+q)^2]$, iar condiția din enunț devine $d = 1$ şi $m+q = 0$.

Atunci $\det(A-dA^*) = \det(A-A^*) = \begin{vmatrix} m-q & 2n \\ 2p & q-m \end{vmatrix} =$
$= -(m+q)^2+4(mq-np) = 4d = 4$.

1.49. Matricea A verifică ecuația sa caracteristică, deci $A^2-(a+d)A+(ad-bc)\cdot I_2=O_2$. Presupunem că există $n\geq 1$ a. î. $A^n = I_2$. Rezultă că $(\det(A))^n=1$, deci $\det(A)\in\{-1, 1\}$. Considerăm polinoamele $f=X^2-uX+v$, $g=X^n-1$, unde $u=a+d>2$, iar $v\in\{-1, 1\}$. Ecuația $f(x)=0$ are rădăcinile x_1, x_2 reale deoarece $\Delta=u^2-4v>0$. Rădăcinile x_1, x_2 nu pot fi rădăcini ale ecuației $g(x)=0$, deoarece dacă $x_1^n-1=0$ rezultă $|x_1|=1$ şi cum $x_1^2-ux_1+v=0$, am avea $|u|=|ux_1|=\left|x_1^2+v\right|\leq|x_1|^2+|v|=2$, contradicție. Rezultă că polinoamele f şi g sunt prime între ele, deci există polinoamele cu coeficienți reali P şi Q a.î. $P\cdot f+Q\cdot g=1$. Această egalitate fiind o identitate polinomială, se păstrează când înlocuim pe X prin matricea A, deci $P(A)f(A)+Q(A)g(A)=I_2$. Deoarece $f(A)=g(A)=O_2$, această egalitate matriceală devine $O_2=I_2$, contradicție.

1.50. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(A^2+B^2+C^2+BCx)$. Avem că $f(2)=\det[A^2+(B+C)^2] > 0$ şi $f(-2) = \det[A^2+(B-C)^2] > 0$. Să presupunem de exemplu că $\det(BC) = \det(B)\det(C) < 0$.

Graficul lui f este o parabolă, deci $\det(A^2+B^2+C^2) = f(0) > 0$.

1.51. Fie $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$, $A\neq O_2$, a. î. $A+A^t=aI_2 \Rightarrow$
$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow x = t$ şi $z = -y \Rightarrow A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Din $A\neq O_2$ rezultă că $\det(A) = x^2+y^2\neq 0$, deci A este inversabilă.

Fie $B=\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}A$.

Observăm că $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=1$, deci există $t\in[0, 2\pi)$ a.î. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos t$ şi $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin t \Rightarrow$ $B=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

Se verifică prin inducţie după $m\geq 0$, că $B^m=\begin{pmatrix}\cos mt & \sin mt\\ -\sin mt & \cos mt\end{pmatrix}$ şi apoi pentru $m\leq 0$, deci pentru $m\in\mathbb{Z}$.

Atunci $A^m+(A^t)^m=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m(B^m+(B^t)^m)=$

$$=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m\begin{pmatrix}2\cos mt & 0\\ 0 & 2\cos mt\end{pmatrix}=bI_2,$$

pentru $b=2\cos mt\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m$.

1.52. Dacă $A_k=\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix}$, din $A_0A_k=A_kA_0$ rezultă $\frac{b_k}{b_0}=\frac{c_k}{c_0}=\frac{d_k-a_k}{d_0-a_0}=\alpha_k$ şi cum $A_0\neq aI_2 \Rightarrow b_0$, c_0, d_0-a_0 nu sunt toate nule, avem $b_k=\alpha_k b_0$, $c_k=\alpha_k c_0$, $d_k=\alpha_k d_0+\beta_k$, $a_k=\alpha_k a_0+\beta_k$, aşadar, $A_k=\alpha_k A_0+\beta_k I_2$, $1\leq k\leq n$.

(i). Dacă $\alpha_k=0$, $k\in\{1,\ldots,n\}$ atunci $\sum_{k=1}^{n}A_k^2=\left(\sum\beta_k^2\right)\cdot I_2$, deci

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n}A_k^2\right)=\left(\sum\beta_k^2\right)^2\geq 0.$$

Dacă $\alpha=\sum\alpha_k^2\neq 0$, atunci

$$\sum A_k^2=\left(\sum\alpha_k^2\right)\cdot A_0^2+2\left(\sum\alpha_k\beta_k\right)A_0+\left(\sum\beta_k^2\right)I_2=P(A_0),$$

P fiind un polinom de grad doi cu discriminantul:

$$\Delta=\left(\sum \alpha_k\beta_k\right)^2-\left(\sum \alpha_k^2\right)\left(\sum \beta_k^2\right)\le 0 .$$

Rezultă $P(z)=\alpha(z-z_0)(z-\overline{z_0})$, $z_0\in\mathbb{C}$, de unde $P(A_0)=\alpha(A_0-z_0I_2)(A_0-\overline{z_0}I_2)$, deci

$$\det P(A_0)=\alpha^2\left|\det(A_0-z_0I_2)\right|^2\ge 0 .$$

(ii). Din condiția $A_2\ne aA_1$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, rezultă $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\ne\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$ adică $\Delta<0$, prin urmare $z_0\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$.

Atunci $\det P(A_0)=0\Rightarrow \det(A_0-z_0I_2)=0$ sau $\det(A_0-\overline{z_0}I_2)=0$, deci z_0 sau $\overline{z_0}$ este rădăcina ecuației cu coeficienți reali $\det(A_0-zI_2)=0$, deci ambele numere sunt rădăcini.

Din $\det(A_0-zI_2)=z^2-(a_0+d_0)z+(a_0d_0-b_0c_0)$ şi $A_0^2-(a_0+d_0)A_0+(a_0d_0-b_0c_0)I_2=O_2$ rezultă $P(A_0)=0$, adică $\sum_{k=1}^{n}A_k^2=O_2$.

1.53. Pentru $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ avem adjuncta $A^*=\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ şi respectiv transpusa $A^t=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. Se observă că matricea $C=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ cu $C^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ verifică proprietatea din enunț: $A^*=C\cdot A^t\cdot C^{-1}$, pentru orice $A\in M_2(\mathbb{C})$. Dacă $S\in M_2(\mathbb{C})$ satisface de asemenea condiția din enunț, atunci: $(C^{-1}S)A^t=A^t(C^{-1}S)$, pentru orice $A\in M_2(\mathbb{C})$ şi reciproc. Cum $f: M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$, $f(A)=A^t$, pentru orice $A\in M_2(\mathbb{C})$, este bijectivă, se obține că $C^{-1}S$ comută cu toate matricele din $M_2(\mathbb{C})$, deci se află în centrul lui $M_2(\mathbb{C})$. Rezultă că există $\alpha\in\mathbb{C}$ a.î.

$C^{-1}S = \alpha I_2$, deci $S = \alpha C$. Ca urmare, matricele căutate sunt de forma: $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

1.54. Fie $P(X) = \det(A + XI_n) \in \mathbb{Q}[X]$. $P(X)$ şi X^n-2 nu sunt prime între ele în $\mathbb{Q}[X]$. Într-adevăr, presupunând contrariul, există polinoamele R, $S \in \mathbb{Q}[X]$ a.î. $PR + (X^n-2)S = 1$, de unde $R\left(\sqrt[n]{2}\right)\cdot P(\sqrt[n]{2}) = 1$. Dar, din ipoteză, $P(\sqrt[n]{2}) = 0$, contradicție. Cum însă X^n-2 este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ (conform criteriului lui Eisenstein), deducem că $(X^n-2) \mid P$. Deoarece grad $P = n$ şi P este monic, rezultă $P = X^n-2$. Deci $\det(A+XI_n) = X^n-2$ şi obținem: $\det(A) = \det(A+0\cdot I_n) = -2$; $\det(A+I_n) = \det(A+1\cdot I_n) = -1$; $\det(A-I_n) = \det(A+(-1)\cdot I_n) = (-1)^n-2$. Rezultă: $\det(A-I_n) = \det(A)+(\det(A+I_n))^n$.

1.55. Să notăm cu $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ matricea din M determinată de numerele $a_1, a_2, ..., a_n$. Notăm cu $A_1 = I_n$ şi pentru orice $i \in \{2, …, n\}$ A_i matricea determinată de $a_{ij} = \delta_{i,j-1}$. Se observă că $A(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i$. Facem convenția să identificăm pe n+i cu i, pe –i cu n-i pentru $1 \le i \le n$ şi pe 0 cu n. Se observă uşor prin calcul că $A_iA_j = A_jA_i = A_{i+j}$, pentru $1 \le i, j \le n$.

Fie $A = \sum_{i=1}^{n} a_i A_i$ şi $B = \sum_{j=1}^{n} b_j A_j$. Atunci:

$$AB = (\sum_{i=1}^{n} a_i A_i)\ (\sum_{j=1}^{n} b_j A_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j A_i A_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j A_j A_i) =$$

$$= (\sum_{j=1}^{n} b_j A_j)\ (\sum_{i=1}^{n} a_i A_i) = BA.$$

Reciproc, să presupunem că matricea B comută cu orice matrice $A \in M$. Atunci elementul a_{ij} al matricei A_2 se poate scrie, ținând cont de convenția făcută, sub forma:

$$a_{ij} = \delta_{i,j-1} = \begin{cases} 0 & pentru\ i \neq j-1, \\ 1 & pentru\ i = j-1 \end{cases}.$$

Fie $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ matricea care comută cu orice matrice $A\in M$. Deci $BA_2=A_2B$ sau $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\delta_j^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{k-1}^{i}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\delta_k^i b_{k+1,j}$, de unde rezultă că $b_{i,j-1}= b_{i+1,j}$ pentru orice $1\leq i, j\leq n$.

Facem pe rând pe i=1, 2, …, n şi j=1, 2, …, n şi obţinem:

$$b_{11} = b_{22} = ... = b_{nn} = b_1,$$
$$b_{12} = b_{23} = ... = b_{n-1,n} = b_{n,1} = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$b_{1n} = b_{21} = b_{32} = ... = b_{n,n-1} = b_n,$$

de unde deducem că $B = A(b_1, b_2, ..., b_n) \in M$.

1.56. Avem:

$O_n = A\cdot O_n = A(aI_n+bA+cB+dAB) = aA+bA^2+cAB+dA^2B = aA+bA^2-cBA-dABA=(aI_n+bA-cB-dAB)A$, deci $aI_n+bA-cB-dAB = O_n$.

Rezultă $aI_n+bA = O_n$.

Dacă $b\neq 0$, atunci $a\neq 0$ şi $A = -\frac{a}{b}I_n$ deci $AB + BA = -\frac{2a}{b}B \neq O_n$, absurd, deci a = b = 0. Cum $cB+dAB = O_n$ implică $cI_n+dA = O_n$ rezultă şi c = d = 0.

1.57. (i). Considerăm coloanele $i_1<\ldots<i_k\in\{1, \ldots, n\}$ ale matricei I_n. Observăm că singurul minor de ordin k nenul este format din liniile $i_1<\ldots<i_k$, deci pentru oricare k dintre coloane, avem un singur minor nenul. Rezultă că numărul minorilor nenuli de ordin k este C_n^k şi că suma lor este 2^n-1.

(ii). Fie $k\in\{1, \ldots, n\}$ fixat şi coloanele $i_1<\ldots<i_k\in\{1, \ldots, n\}$. Dacă toţi minorii de ordin k care conţin aceste coloane ar fi nuli, atunci orice minor de ordin k+1 care conţine aceste coloane ar fi nul. Analog, orice minor de ordin k+2, care conţine aceste coloane ar fi nul, şi în final, det(A)=0, fals. Deci există un minor de ordin k cu elemente din

aceste coloane care este nenul. Rezultă că avem cel puțin C_n^k minori de ordin k nenuli (putem alege C_n^k sisteme de k coloane din n) şi atunci numărul total este cel puțin 2^n-1.

1.58. Fie $P\in M_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă astfel încât AP = PB. Atunci:

$$P = (z_{kj})_{k,j} = (u_{kj}+iv_{kj})_{k,j} = U+iV, \text{ unde } U, V\in M_n(\mathbb{R}).$$

Din relația A(U+iV) = (U+iV)B, separând partea reală şi partea imaginară, rezultă că AU = UB şi AV = VB.

Fie polinomul cu coeficienți reali f(x) = det(U+xV). Deoarece f(i) = det(P) $\neq$ 0, rezultă că f este nenul şi deci există $\alpha\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(\alpha) \neq 0$.

Atunci $\det(U+\alpha V) \neq 0$, adică $U+\alpha V$ este o matrice inversabilă în $M_n(\mathbb{R})$. Dar $A(U+\alpha V) = AU+\alpha AV = UB+\alpha VB = (U+\alpha V)B$, deci A şi B sunt asemenea şi în $M_n(\mathbb{R})$.

1.59. Inversabilitatea matricei $A+B+I_n$ este echivalentă cu faptul că singura soluție a sistemului liniar omogen $(A+B+I_n)x = 0$ este soluția banală x = 0 (din $\mathbb{C}^n$).

Presupunând că v este o soluție, avem (folosind faptul că AB = BA şi inducția matematică)

$$B^k v = (-1)^k(I_n+A)^k v.$$

Astfel, $v = B^{1998}X = (I_n+A)^{1998}v$.

Lemă. Polinoamele $P(X) = (X+1)^{1998}-1$ *şi* $Q(X) = X^{1997}-1$ *sunt prime între ele.*

Demonstrație. Fie z_0 o rădăcină comună. Atunci $|z_0|=1$ şi $|z_0+1|=1$. Prin urmare, 0, 1 şi z_0+1 sunt vârfurile unui triunghi echilateral. Rezultă de aici că $\arg(z_0+1)\in\{-\pi/3, \pi/3\}$.

Deci $z_0+1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ sau $z_0+1=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$.

În ambele cazuri, $z_0^{1997} \neq 1$, contradicție.

Conform lemei, există două polinoame R, $S\in\mathbb{C}[X]$ cu proprietatea că $R\cdot[(X+1)^{1998}-1]+S\cdot[X^{1997}-1] = 1$.

Atunci $R(A)[(A+I_n)^{1998}-I_n]+S(A)[A^{1997}-I_n] = I_n$ în $M_n(\mathbb{C})$. Aplicând la cei doi membri pe v, obținem în stânga 0 şi în dreapta v. Deci v = 0.

1.60. (i). Evident.

(ii). Dacă V este un K-spațiu vectorial de dimensiune n, atunci $| V | = p^n$. Interpretând elementele lui $GL_n(K)$ drept mulțimea aplicațiilor liniare inversabile pe $V = K^n$, se observă imediat că $| GL_n(K) |$ este egal cu numărul sistemelor ordonate $(e_1, \ldots, e_n)$ de elemente ale lui V ce constituie baze ale lui V peste K. Însă, pentru a alege o bază a lui V peste K, putem alege mai întâi pe e_1 ca fiind orice element nenul al lui V (avem p^n-1 posibilități), apoi pe e_2 ca fiind orice element al lui V ce nu este de forma ae_1, cu $a\in K$ (avem p^n-p posibilități); apoi pe e_3 ca fiind orice element din V ce nu este de forma $a_1e_1+a_2e_2$, cu $a_1, a_2\in K$ (avem p^n-p^2 posibilități) etc.

Deci $| GL_n(K) | = (p^n-1)(p^n-p)\ldots(p^n-p^{n-1})$.

(iii). Cum det(U) = det(V) = 1, deducem că $U, V\in SL_2(\mathbb{Z})$.

Prin calcul direct se verifică egalitățile: $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $U^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $V^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$, precum şi egalitatea:

$$(\star) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = U^{-1}V^2U^{-1}V^2.$$

Fie acum $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ cu ad-bc = 1.

Vom demonstra prin inducție matematică asupra lui |c| că M poate fi scrisă sub forma cerută de enunț. Dacă |c| = 0, atunci ad=1 deci a = d = 1 sau a = d = -1, astfel că $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U^b$, respectiv $M=\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U^{-1}V^2U^{-1}V^2U^{-b}$ (ținem cont de $(\star)$).

Presupunem acum că $|c|\neq 0$ şi fie q, $r\in\mathbb{R}$ astfel încât $a=cq+r$ cu $0\leq r<c$. Deoarece $M_1=V\,U^{-q-1}M=\begin{pmatrix} r-c & b-(q+1)d \\ r & b-qd \end{pmatrix}$.

Conform ipotezei de inducție putem scrie: $M_1 = T_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot T_m^{t_m}$ cu $T_i\in\{U, V\}$, $t_i\in\mathbb{Z}$, $1\leq i\leq m$, de unde $M=U^{q+1}V^{-1}M_1= U^{q+1}V^{-1}\, T_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot T_m^{t_m}$.

(iv). Cum det(W) = -1 deducem că $W\in GL_2(\mathbb{Z})$. Fie acum $M\in GL_2(\mathbb{Z})$ cu det(M) = 1 sau –1. Dacă det(M)=-1 cum şi det(W)=-1 deducem că det(WM)=(-1)(-1)=1, deci $WM\in SL_2(\mathbb{Z})$ şi totul rezultă din (iii).

Dacă det(M)=1, atunci $M\in SL_2(\mathbb{Z})$ şi din nou se aplică (iii).

1.61. $(AB)^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, deci $\mathrm{rang}((AB)^2) = 2 =$

$= \mathrm{rang}(A(BA)B)\leq\mathrm{rang}(BA)\leq 2$, deci rang(BA) = 2, adică BA este inversabilă.

Cum $(AB)^3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, avem $(AB)^3-3(AB)^2+2(AB)=0$.

Înmulțind la stânga cu B şi la dreapta cu A se obține

$$(BA)^4-3(BA)^3+2(BA)^2=0.$$

Cum BA este inversabilă, rezultă $(BA)^2-3(BA)+2I_2 = 0$. Notând cu t = tr(BA), d = det(BA), avem $(BA)^2-t(BA)+dI_2=0$. Dacă $d\neq 2$, atunci $t\neq 3$ şi ar rezulta $BA=\frac{d-2}{t-3}\cdot I_2$ de unde

$$(AB)^2 = ABAB = A\cdot\frac{d-2}{t-3}\cdot I_2\cdot B = \frac{d-2}{t-3}\cdot AB,$$

ceea ce se observă că nu are loc. Deci d=2.

1.62.

Avem:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+r_1 & a_1+2r_1 & \dots & a_1+(n-1)r_1 \\ a_2 & a_2+r_2 & a_2+2r_2 & \dots & a_2+(n-1)r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-1}+r_{n-1} & a_{n-1}+2r_{n-1} & \dots & a_{n-1}+(n-1)r_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & r_1 & 2r_1 & \dots & (n-1)r_1 \\ a_2 & r_2 & 2r_2 & \dots & (n-1)r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & r_{n-1} & 2r_{n-1} & \dots & (n-1)r_{n-1} \\ b_1 & b_2-b_1 & b_3-b_1 & \dots & b_n-b_1 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)!\begin{vmatrix} a_1 & r_1 & r_1 & \dots & r_1 \\ a_2 & r_2 & r_2 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & r_{n-1} & r_{n-1} & \dots & r_{n-1} \\ b_1 & b_2-b_1 & \frac{b_3-b_1}{2} & \dots & \frac{b_n-b_1}{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)!\begin{vmatrix} a_1 & r_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & r_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & r_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2-b_1 & c_3 & \dots & c_n \end{vmatrix}$$ = 0, (dezvoltând pe D după ultima coloană).

1.63. Presupunem prin absurd că $A^2+pA+qI_n=O_n$. Atunci din identitatea $A^2+pA+qI_n=\left(A+\frac{p}{2}I_n\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}I_n$, rezultă că $\left(A+\frac{p}{2}I_n\right)^2=\frac{p^2-4q}{4}I_n$. Aplicând determinantul în ambii membri obținem $\det\left(A+\frac{p}{2}I_n\right)^2=\left(\frac{p^2-4q}{4}\right)^n$. Membrul stâng al egalității este pozitiv iar membrul drept al egalității este strict negativ deoarece p^2-4q < 0 şi n este un număr natural impar, deci am obținut o contradicție. Rezultă deci că $A^2+pA+qI_n\neq O_n$.

1.64. Se obține $A = B-I_n$ şi condiția $A^n = \alpha A$ se poate scrie astfel:
$$(B-I_n)^n = \alpha(B-I_n)$$
sau $B^n - C_n^1 B^{n-1} + ... + (-1)^n I_n = \alpha B - \alpha I_n$,

sau $B^n - C_n^1 B^{n-1} + ... + (-1)^{n-1} B - \alpha B = -\alpha I_n - (-1)^n I_n$.

De aici putem scrie

$B(B^{n-1} - C_n^1 B^{n-2} + ... + (-1)^{n-1} I_n - \alpha I_n) = I_n((-1)^{n+1} - \alpha)$, de unde

$$(1)\quad B(B^{n-1} - C_n^1 B^{n-2} + ... + (-1)^{n-1} I_n - \alpha I_n)\cdot\frac{1}{(-1)^{n+1}-\alpha} = I_n.$$

Am ținut cont că $\alpha\neq\pm1$ şi $B^nI_n = I_nB^n$. Din relația (1) rezultă că matricea B are inversă la dreapta şi datorită faptului că B comută cu orice putere a sa, rezultă că această inversă la dreapta este inversă şi la stânga. Deci matricea B este inversabilă.

1.65. Notăm $z_k = \cos x_k + i\sin x_k$, k∈{1, …, n}.

Să observăm că $a_{kp} = \frac{z_k}{z_p^k}$ şi

$$z_1 z_2 ... z_n = \cos(x_1 + x_2 + ... + x_n) + i\sin(x_1 + x_2 + ... + x_n) = i.$$

$$\text{Atunci } \det(A) = \begin{vmatrix} \frac{z_1}{z_1} & \frac{z_1}{z_2} & \dots & \frac{z_1}{z_n} \\ \frac{z_2}{z_1^2} & \frac{z_2}{z_2^2} & \dots & \frac{z_2}{z_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{z_n}{z_1^n} & \frac{z_n}{z_2^n} & \dots & \frac{z_n}{z_n^n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \dots & \frac{1}{z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{z_1^{n-1}} & \frac{1}{z_2^{n-1}} & \dots & \frac{1}{z_n^{n-1}} \end{vmatrix} = V_n\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_n}\right),$$

unde V_n este determinantul Vandermonde de ordinul n (s-au dat factori comuni $z_1, z_2, \dots, z_n$ pe linii şi $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_n}$ pe coloane). Avem aşadar:

$$\det(A) = \prod_{1\le k<p\le n}\left(\frac{1}{z_p} - \frac{1}{z_k}\right) = \frac{\prod_{1\le k<p\le n}(z_k - z_p)}{(z_1 z_2 \dots z_n)^{n-1}} = \frac{1}{i^{n-1}}\prod_{1\le k<p\le n}(z_k - z_p)$$

şi $\overline{\det(A)} = \prod_{1\le k<p\le n}\left(\frac{1}{\overline{z_p}} - \frac{1}{\overline{z_k}}\right) = \prod_{1\le k<p\le n}(z_p - z_k) = \prod_{1\le k<p\le n}(-1)(z_k - z_p)$

$$= (-1)^{n(n-1)/2}\prod_{1\le k<p\le n}(z_k - z_p).$$

Atunci $\det(A) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \det(A) = \overline{\det(A)} \Leftrightarrow (-1)^{n(n-1)/2} i^{n-1} = 1$.

Este necesar pentru aceasta ca n-1 să fie par $\Rightarrow$ n impar. În plus, este şi suficient: n=2k+1 $\Rightarrow (-1)^{(2k+1)2k/2} i^{2k} = [(-1)^{2k+1}]^k(-1)^k = (-1)^{2k} = 1$, ceea ce încheie soluţia.

1.66. Presupunem că $\det(A+B) \ge 0$ şi vom demonstra că $\det(A^n+B^n) \ge 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (cealaltă implicaţie fiind evidentă). Considerăm două cazuri după cum n este par sau n este impar.

a) n par, adică n = 2p, $p \in \mathbb{N}$. Avem:

$$A^{2p}+B^{2p} = (A^p)^2+(B^p)^2 = (A^p+iB^p)(A^p-iB^p) = (A^p+iB^p)\overline{(A^p+iB^p)}$$

şi trecând la determinanţi, rezultă:

$$\det(A^{2p}+B^{2p}) = \det(A^p+iB^p)\overline{\det(A^p+iB^p)} = |\det(A^p+iB^p)|^2 \ge 0.$$

b) n impar, adică n = 2p+1, $p \in \mathbb{N}$. Să notăm cu $x_0 = -1, x_1, x_2, \dots, x_{2p}$ rădăcinile complexe ale ecuaţiei binome (1) $x^{2p+1}+1 = 0$. Ţinând seama de faptul că matricele A şi B comută, precum şi de relațiile lui Viète pentru ecuația (1), putem scrie:

$$\prod_{j=0}^{2p}(A-x_jB)=A^{2p+1}-\left(\sum_{j=0}^{2p}x_j\right)A^{2p}B+\left(\sum_{0\le j<k\le 2p}x_jx_k\right)A^{2p-1}B^2-...+B^{2p+1}$$

$$.\qquad = A^{2p+1}+B^{2p+1}.$$

Deoarece $x_0 = -1$ iar rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$ sunt două câte două conjugate, putem scrie identitatea obținută sub forma:

$$(2)\qquad (A+B)\prod_{j=1}^{2p}(A-x_jB)(A-\overline{x_j}B)=A^{2p+1}+B^{2p+1}.$$

Deoarece A şi B au elemente reale, avem pentru fiecare $j\in\{1, 2,\dots p\}$:

$$\det(A-x_jB)(A-\overline{x_j}B)=\det(A-x_jB)\cdot\det(A-\overline{x_j}B)=$$

$$=\det(A-x_jB)\cdot\det\overline{(A-x_jB)}=$$

$$=\det(A-x_jB)\cdot\overline{\det(A-x_jB)}=\left|\det(A-x_jB)\right|^2\ge 0,$$

unde am notat cu $\overline{X}\in M_k(\mathbb{C})$ matricea obținută din $X\in M_k(\mathbb{C})$ înlocuind elementele acesteia cu conjugatele lor. Deoarece şi $\det(A+B)\ge 0$, trecând în (2) la determinanți, rezultă

$$\det(A+B)\prod_{j=1}^{2p}\det((A-x_jB)(A-\overline{x_j}B))=\det(A^{2p+1}+B^{2p+1})\ge 0.$$

1.67. Dacă n = 2, atunci se verifică uşor că pentru orice matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ avem $(A^*)^* = A$. Pentru $n\ge 3$ deosebim cazurile:

i) rang(A) = n. Notăm d=det(A). În acest caz $A^* = d\cdot A^{-1}\Rightarrow$ $\det(A^*) = d^n\cdot\det(A^{-1}) = d^{n-1}\Rightarrow (A^*)^* = d^{n-1}\cdot(A^*)^{-1} = d^{n-1}\cdot d^{-1}\cdot A = d^{n-2}\cdot A$ şi atunci $(A^*)^* = A \Leftrightarrow d^{n-2}\cdot A = A \Leftrightarrow d^{n-2} = 1 \Leftrightarrow$ d este rădăcină de ordinul n-2 a unității;

ii) rang(A) = n-1. În acest caz presupunând $A\neq 0$ rezultă că există $i, j\in\{1, 2, \dots, n\}$ a.î. $a_{ij}\neq 0$ (de fapt, există n-1 asemenea elemente) şi fixăm unul dintre ele. Înlocuim elementul a_{ij} fixat anterior cu $a_{ij}+t$ şi astfel rezultă o nouă matrice notată A(t). În acest mod obținem că detA(t) este o funcție polinomială de gradul întâi în t şi detA(0) = 0.

Într-adevăr, dezvoltând detA(t) după linia i, avem: $\det A(t) = a_{i1}\Gamma_{i1} + ... + (a_{ij} + t)\Gamma_{ij} + ... + a_{in}\Gamma_{in} = \det A(0) + t\Gamma_{ij} = t\Gamma_{ij}$.

Procedând ca în cazul i), avem $A^*(t) = \det A(t)(A(t))^{-1}$, pentru $t \neq 0$ şi $(A^*(t))^* = (\det A(t))^{n-2} A(t)$. Elementele lui $A^*(t)$ sunt funcții continue în t de grad cel mult unu, deci elementele lui $(A^*(t))^*$ sunt polinoame de grad cel mult n-1 în t. Atunci când $t \to 0$ rezultă că elementele lui $(A^*(t))^*$ tind către elementele lui $(A^*(0))^*$, acestea fiind nule. Deci $(A^*)^* = 0 \Rightarrow A = 0$. Contradicție, şi prin urmare în acest caz $A = 0$.

iii) rang(A) < n-1. În acest caz $A^* = 0 \Rightarrow (A^*)^* = 0$ şi deci $(A^*)^* = A \Leftrightarrow A = 0$.

1.68. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt simetrice (adică $A = A^t$ şi $B = B^t$) atunci:

i) Dacă AB este simetrică avem că $(AB)^t = AB \Rightarrow B^tA^t = AB \Rightarrow$ $\Rightarrow BA = AB$.

ii) Dacă AB = BA, atunci $(AB)^t = B^tA^t = BA = AB$.

1.69. Prin calcul direct.

1.70. „⇒”. Să presupunem că rang(A)≤1. Dacă rang (A)=0, avem $a_{ij}=0$, oricare ar fi $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, deci putem lua $x_1=x_2=\ldots=x_m=y_1=y_2=\ldots=y_n=0$. Dacă rang (A)=1 există un element nenul a_{kp}, unde $(k, p) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ este fixată, iar toți minorii de ordinul doi ai matricei date sunt nuli. Deoarece $a_{kp} \in \mathbb{R}^*$, putem fixa $x_k \in \mathbb{R}^*$, $y_p \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a_{kp}=x_ky_p$. Pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, m\}$ vom nota $x_i = a_{ip}y_p^{-1}$ şi pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, n\}$ vom nota $y_j = a_{kj}x_k^{-1}$. Rezultă $a_{ip}=x_iy_p$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, respectiv $a_{kj}=x_ky_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Fie acum $i \in \{1, 2, \ldots, m\}-\{k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{p\}$. Scriind că minorul de ordin doi obținut prin intersecția liniilor k şi i cu coloanele p şi j este nul rezultă $a_{kp}a_{ij}=a_{ip}a_{kj}$. Această egalitate se scrie, echivalent, $x_ky_pa_{ij}=x_iy_px_ky_j$, şi împărțind prin $x_ky_p \in \mathbb{R}^*$, obținem $a_{ij}=x_iy_j$.

Am demonstrat deci că $a_{ij}=x_i y_j$, oricare ar fi $(i, j)\in\{1, 2, \ldots, m\}\times\{1, 2, \ldots, n\}$.

„$\Leftarrow$". Dacă există $x_1, x_2, \ldots, x_m\in\mathbb{R}$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_n\in\mathbb{R}$ a. î. $a_{ij}=x_i y_j$, oricare ar fi $(i, j)\in\{1, 2, \ldots, m\}\times\{1, 2, \ldots, n\}$ se constată uşor că toți minorii de ordinul doi ai matricei date sunt nuli, deci $\text{rang}(A)\leq 1$.

1.71. Cum $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, $\text{rang}(A)\geq 2$.

Avem $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda-9$. Pentru $\lambda\neq 3$, $\text{rang}(A) = 3$, iar pentru $\lambda=3$, $\text{rang}(A) = 2$.

1.72. $\text{rang}(A) = 2$.

1.73. Avem că $\text{rang}(AB)\leq\min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}\leq n<m$, astfel că, în mod necesar, $\det(AB) = 0$.

§2. Spaţii vectoriale.

2.1. (i). Se verifică axiomele spaţiului vectorial (elementul nul fiind 1).

(ii). Fie $a > 1$, $a \neq 1$ (deci a este nenul în V). Deoarece pentru orice $x \in V$ (deci $x > 0$) există $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $x = \alpha \odot a = a^{\alpha}$ (şi anume $\alpha = \log_a x$) deducem că $\{a\}$ este sistem de generatori. Dacă $\alpha \odot a = 1$, atunci $a^{\alpha} = 1$ şi cum $a \neq 1$ deducem că $\alpha = 0$, adică $\{a\}$ este liniar independentă peste $\mathbb{R}$. Deci $\{a\}$ este o bază iar $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$.

2.2. (i), (ii). Se verifică axiomele spaţiului vectorial.

2.3. Cum $\alpha \neq 0$ există α^{-1} în K. Astfel obţinem $\alpha^{-1}(\alpha x)=\alpha^{-1} \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow (\alpha^{-1}\alpha)x = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2.4. Dacă $x \in K$ şi $\alpha \in k$ atunci în mod evident $\alpha x \in K$ şi astfel (K,+) devine k - spaţiu vectorial, înmulţirea de pe K jucând rolul înmulţirii cu scalari.

2.5. Deoarece, de exemplu, $0 \cdot 1 + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} + (-\sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{4} = 0$ rezultă că vectorii $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ sunt $\mathbb{R}$ - liniar dependenţi.

Fie $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$, $a,b,c \in \mathbb{Q}$, o combinaţie liniară nulă a elementelor $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$. Dacă unul din elementele a,b,c este zero, atunci obligatoriu şi celelalte sunt zero.

Presupunem că a,b,c nu sunt toate nule. Înmulţind relaţia de mai sus cu $\sqrt[3]{2}$ şi eliminând pe $\sqrt[3]{4}$ între cele două relaţii, obţinem :

$$(ab - 2c^2) + (b^2 - ac)\sqrt[3]{2} = 0$$

şi deoarece $a,b,c \in \mathbb{Q}$, obţinem sistemul: $\begin{cases} ab - 2c^2 = 0 \\ b^2 - ac = 0 \end{cases}$. Înmulţind prima ecuaţie cu c şi a doua cu b şi adunându-le, obţinem: $2c^3 = b^3$ ceea ce arată că $\sqrt[3]{2}$ este un număr raţional – contradicţie, de unde $b = c = 0$. Deducem imediat şi că $a = 0$, adică sistemul $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ este $\mathbb{Q}$-liniar independent.

2.6. (i). Dacă $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ şi $A,B\in M_{s,n}(\mathbb{C})$, atunci cum $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B$, deducem că $\alpha A+\beta B\in M_{s,n}(\mathbb{C})$, deci $M_{s,n}(\mathbb{C})$ este subspaţiu vectorial al lui $M_n(\mathbb{C})$.

Analog pentru $M_{as,n}(\mathbb{C})$.

(ii). Pentru $1\le i,j\le n$, $i \ne j$, notăm prin E_{ij} matricea ce are pe poziţiile (i,j) şi (j,i) pe 1 şi 0 în rest (acestea sunt în număr de $\frac{n(n-1)}{2}$). În mod evident aceste matrice sunt din $M_{s,n}(\mathbb{C})$. Dacă mai notăm prin E_i $(1\le i \le n)$ matricea simetrică ce are 1 pe poziţia (i,i) şi 0 în rest, atunci $\{(E_{ij})_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}}, (E_i)_{1\le i\le n}\}$ formează o bază pentru $M_{s,n}(\mathbb{C})$.

Deci $\dim_{\mathbb{C}} M_{s,n}(\mathbb{C}) = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Cum o matrice antisimetrică din $M_{as,n}(\mathbb{C})$ este de forma :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

deducem că dacă notăm prin $F_{ij}(1\le i,j\le n,\ i \ne j)$ matricea ce are 1 pe poziţia (i,j) (i < j) şi –1 pe poziţia (j,i), atunci $\{F_{ij}\}_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}}$ (ce are $\frac{n(n-1)}{2}$ elemente) formează o bază pentru $M_{as,n}(\mathbb{C})$, deci $\dim_{\mathbb{C}} M_{as,n}(\mathbb{C}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

(iii). Pentru orice $M\in M_n(\mathbb{C})$ notând $M_1 = \frac{1}{2}(M + M^t)$ şi $M_2 = \frac{1}{2}(M - M^t)$ se deduce imediat că $M_1\in M_{s,n}(\mathbb{C})$, $M_2\in M_{as,n}(\mathbb{C})$ şi $M = M_1 + M_2$, adică $M_n(\mathbb{C}) = M_{s,n}(\mathbb{C}) + M_{as,n}(\mathbb{C})$.

Dacă $M\in M_{s,n}(\mathbb{C}) \cap M_{as,n}(\mathbb{C})$, atunci $M = M^t$ şi $M = -M^t$, de unde $M = O_n$, adică $M_n(\mathbb{C}) = M_{s,n}(\mathbb{C}) \oplus M_{as,n}(\mathbb{C})$.

2.7. Se probează imediat că dacă $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -a_i \end{pmatrix} \in V$, cu $a_i,b_i,c_i\in\mathbb{R}$ (i=1,2) şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci $\alpha M_1 + \beta M_2\in V$, adică V este subspaţiu vectorial al lui $M_2(\mathbb{R})$.

Scriind $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$=a$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$+b$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$+c$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ deducem că $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq$ V formează o bază pentru V şi deci $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$.

2.8. Rezultă imediat din teoria elementară a sistemelor Crameriene.

2.9. (i). Trebuie ca $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & \alpha & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Dar determinantul se observă că este nul indiferent de valorile lui α (căci linia 3 este suma liniilor 1 şi 4). Deci, cei patru vectori nu pot genera un subspaţiu vectorial de dimensiune 4.

(ii). Trebuie ca rang $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & \alpha & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$.

Minorul de ordin 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\alpha + 2$, iar acesta este nenul dacă şi numai dacă $\alpha \neq 1$. Deci, dacă $\alpha \neq 1$ cei patru vectori formează un subspaţiu de dimensiune 3. Dacă $\alpha = 1$, rangul este 2.

2.10. Fie M matricea formată din coordonatele celor trei matrice din $M_2(\mathbb{R})$ (în raport cu baza canonică din $M_2(\mathbb{R})$):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ca matricele să fie liniar independente trebuie ca sistemul:

$$x_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & \beta\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \beta x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

să aibă solutia banală. Acest lucru se întâmplă dacă rang $(M^t) = 3 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ sau $\beta \neq 0$.

2.11. Alegem $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$, $i = 3, 4$, a.î.:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} \neq 0 \text{ (conform problemei } \mathbf{2.8.}\text{)}$$

Putem alege, de exemplu, $a_3 = (1, 1, 1, 0)$ şi $a_4 = (0, 1, 1, 0)$ deoarece :

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6 \neq 0.$$

2.12. Fie $\{c_1,\dots,c_n\} \subseteq V_1 \cap V_2$ o bază pe care o completăm cu vectorii $a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_q$ a.î. $\{c_1,\dots,c_n, a_1,\dots,a_p\} \subseteq V_1$ este bază, iar $\{c_1,\dots,c_n, b_1,\dots,b_q\} \subseteq V_2$ este bază.

Se arată acum uşor că $\{c_1,\dots,c_n, a_1,\dots,a_p, b_1,\dots,b_q\}$ este bază pentru $V_1 + V_2$, astfel că relația din enunț se verifică.

2.13. Conform problemei **2.12.** avem:

$$\dim_K(V_1 \cap V_2) \geq p + q - n > 0, \text{ de unde concluzia.}$$

2.14. (i). Avem că o matrice din M_1 este de forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

şi se arată uşor că o combinaţie liniară de astfel de matrice este de aceeaşi formă.

(ii). Dacă notăm prin E_{ij} matricea ce are 1 pe poziţia (i,j) şi 0 în rest pentru $i \geq j$, atunci $\{E_{ij}\}_{1\leq j\leq i\leq 3}$ este o bază pentru M_1 şi deci $\dim_{\mathbb{R}} M_1=6$.

(iii). Dacă notăm $M_2 = M_{s,3}(\mathbb{R})$, avem că:

$$M_2 \cap M_1 = M_{s,3}(\mathbb{R}) \cap M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ii} \in R, 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

şi deducem imediat că matricele:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formează o bază pentru $M_2 \cap M_1$, deci $\dim_{\mathbb{R}}(M_2 \cap M_1) = 3$.

Conform problemei **2.12.** avem că :

$\dim_{\mathbb{R}}(M_1 + M_2) = \dim_{\mathbb{R}}(M_2) + \dim_{\mathbb{R}}(M_1) - \dim_{\mathbb{R}}(M_2 \cap M_1) = \frac{3\cdot 4}{2} + 6 - 3 = 9$ iar o bază pentru $M_2 + M_1$ este dată de: $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, F_{12}, F_{13}, F_{23}, E_{12}, E_{13}, E_{23}\}$ unde F_{ij} este matricea ce are pe poziţiile (i, j) şi (j, i) 1 iar în rest 0, iar E_{ij} au fost definite la (i).

2.15. Dacă $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in K$ şi $\alpha_1(x_1+x_2) + \alpha_2(x_2+x_3) + \alpha_3(x_3+x_1) = 0$, atunci: $(\alpha_1 + \alpha_3)x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)x_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)x_3 = 0$, de unde $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, adică $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ şi apoi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

2.16. (i). Se verifică axiomele spaţiului vectorial prin calcul direct.

(ii). Fie $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ a.î. (1) $\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n x} = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Făcând pe $x = 0$ obţinem că $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0$.

Derivând în (1) în raport cu x obţinem:

(2) $\lambda_1\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + \lambda_n\alpha_n e^{\lambda_n x} = 0$.

Făcând pe x = 0 în (2) obținem $\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n = 0$.

Continuând procedeul şi făcând de fiecare dată x = 0, obținem sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0 \\ \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n = 0 \\ \lambda_1^2\alpha_1 + \ldots + \lambda_n^2\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1^{n-1}\alpha_1 + \ldots + \lambda_n^{n-1}\alpha_n = 0 \end{cases}$$

ce are numai soluția banală $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

(iii). a). Dacă $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ şi $\alpha\sin x + \beta\cos x = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci pentru x = 0 obținem $\beta = 0$ iar pentru $x = \pi/2$ obținem $\alpha = 0$.

b). Dacă $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ şi (∗) $\alpha + \beta\sin x + \gamma\cos x = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci derivând relația (∗) obținem $\beta\cos x - \gamma\sin x = 0$, de unde $\beta = \gamma = 0$ (conform cu a).), iar apoi $\alpha = 0$.

c). Vom demonstra prin inducție matematică după n că dacă $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ a.î. (∗) $\alpha_0 + \alpha_1\cos x + \ldots + \alpha_n\cos nx = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Pentru n = 0,1- totul este evident.

Derivând de două ori (∗) obținem ;

(∗∗) $\alpha_1\cos x + 2^2\alpha_2\cos 2x + \ldots + n^2\alpha_n\cos nx = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Din (∗) şi (∗∗) deducem că:

$$n^2\alpha_0 + (n^2\alpha_1 - \alpha_1)\cos x + \ldots + (n^2\alpha_{n-1} - (n-1)^2\alpha_{n-1})\cos(n-1)x = 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n^2\alpha_0 + (n^2-1)\alpha_1\cos x + \ldots + (2n-1)\alpha_{n-1}\cos(n-1)x = 0$.

Conform ipotezei de inducție deducem că $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ (căci $2n - 1 \neq 0$); înlocuind în (∗) şi făcând pe x = 0 obținem că şi $\alpha_n = 0$.

d), e), f), g) se probează analog.

2.17. Din relația $\dim_K(V_1+V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K(V_1 \cap V_2)$ (conform problemei **2.12.**) şi $\dim_K(V_1+V_2) \leq \dim_K V = n$, ținând cont că $\dim_K V_1 = \dim_K V_2 = n-1$, deducem că $\dim_K(V_1 \cap V_2) \geq n-2$.

Dacă $\dim_K(V_1 \cap V_2) = n\text{-}1$, folosind incluziunile $V_1 \cap V_2 \subset V_1$, $V_1 \cap V_2 \subset V_2$ şi egalităţile $\dim_K V_1 = \dim_K V_2 = n\text{-}1$ ar rezulta că $V_1 = V_2 = V_1 \cap V_2$, ceea ce ar contrazice ipoteza $V_1 \neq V_2$. De asemenea, dacă $\dim_K(V_1 \cap V_2) = n$, având în atenţie incluziunile $V_1 \cap V_2 \subset V_1 \subset V$ şi $V_1 \cap V_2 \subset V_2 \subset V$ ar rezulta că $V_1 = V_2 = V$ ceea ce este fals deoarece $V_1 \neq V_2$.

Deci, $\dim_K(V_1 \cap V_2) = n\text{-}2$ şi astfel

$$\dim_K(V_1+V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K(V_1 \cap V_2) = n,$$

adică $V_1 + V_2 = V$.

2.18. Din problema **2.12.** avem :

$$\dim_K(V_1+V_2)=\dim_k V_1+\dim_K V_2-\dim_K(V_1 \cap V_2),$$

de unde $\dim_K(V_1 \cap V_2) = p + q - p - r = q - r$.

Vectorii $c_{r+1},\dots,c_q$ aparţin lui $V_1 \cap V_2$. Demonstrăm că ei sunt liniar independenţi. Din $\sum_{i=r+1}^{q} \lambda_i\, c_i = 0$ rezultă $\sum_{i=r+1}^{q} \lambda_i\, (b_i - \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij}\, b_j) = 0$ şi din liniar independenţa vectorilor din B_2 rezultă că $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_q = 0$, deci $\{c_{r+1},\dots,c_q\}$ este o bază a lui $V_1 \cap V_2$.

2.19. Subspaţiul V_1+V_2 este generat de sistemul $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$. Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ rezultă că $\{a_1, a_2, a_3, b_1\}$ este o bază pentru V_1+V_2.

Avem: $b_2 = a_1 + a_2 + a_3 - b_1$ şi $b_3 = 2a_1 + 2a_3 - b_1$, deci vectorii $c_1 = a_1 + a_2 + a_3 = (1, 2, 2, 1)$ şi $c_2 = 2a_1 + 2a_3 = (2, 2, 2, 2)$ constituie o bază a subspaţiului $V_1 \cap V_2$.

2.20. Fie $S = V_1 + V_2$. În mod evident $\{a_1, \dots,a_k, b_1,\dots,b_l\}$ formează un sistem de generatori pentru S. Cum vectorii $a_1, \dots,a_k$ sunt liniar independenţi vom adjuncţiona la aceştia acei vectorii $b_1,\dots,b_t$ ($t \leq l$) a.î. $\mathrm{ind}_K\{a_1, \dots,a_k, b_1,\dots,b_{s-k}\}$ şi astfel $\{a_1, \dots,a_k, b_1,\dots,b_t\}$ va fi o bază pentru S (renumerotând eventual vectorii $b_1,\dots,b_{s-k}$ dacă este cazul). Deci $\dim_K(V_1+V_2) = s = k+t \leq n$.

Fie $D = V_1 \cap V_2$ şi să considerăm ecuaţia :

(1) $x_1a_1 + \ldots + x_k a_k = y_1b_1 + \ldots + y_l b_l$ care este echivalentă cu n sisteme omogene în k+l necunoscute: $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_l$ şi de rang $s = k+t$.

Deoarece primele s coloane ale matricei sistemului (1) sunt liniar independente (deci cel puţin un minor de ordin s format cu elemente ale acestor coloane este diferit de zero) putem considera că ultimele $k + l - s = d$ necunoscute $y_{s-k+1}, \ldots, y_l$ sunt secundare. Putem găsi pentru (1) următoarele mulţimi de soluţii fundamentale:

(2) $x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ik}, y_{i1},y_{i2},\ldots, y_{il}$ $(i = 1,2,\ldots,d)$ a.î. :

$$\begin{vmatrix} y_{1,s-k+1}\ldots\ldots y_{1l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{d,s-k+1}\ldots\ldots y_{dl} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atunci o bază pentru $D = V_1 \cap V_2$ este formată din vectorii $c_i = \sum_{j=1}^{l} y_{ij}\, b_j$, cu $1 \leq i \leq d$. Conform celor de mai înainte avem:

(i). În acest caz baza pentru V_1+V_2 este formată din a_1,a_2,b_1, iar pentru $V_1 \cap V_2$ este formată dintr-un singur vector $c = 2a_1+a_2 = b_1+b_2 = =(3, 5, 1)$.

(ii). În acest caz baza pentru V_1+V_2 este formată de exemplu din a_1, a_2, b_1, b_2 iar pentru $V_1 \cap V_2$ este formată de exemplu din $b_1= -2a_1 + a_2 + a_3$ şi $b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$.

(iii). Baza pentru V_1+V_2 constă, de exemplu, din vectorii a_1, a_2, a_3, b_1, iar pentru $V_1 \cap V_2$ din vectorii $c_1= a_1+ a_2 + a_3 = b_1 + b_2 = (1,2,2,1)$ şi $c_2 = 2a_1+2a_3 = b_1 + b_3 = (2,2,2,2)$.

2.21. (i). Se verifică uşor că $ind_{\mathbb{R}}\{a_1, a_2, a_3\}$ şi $ind_{\mathbb{R}}\{b_1, b_2, b_3\}$ şi cum $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = 3$, atunci B_1 şi B_2 sunt baze în $\mathbb{R}^3$.

(ii). Punem $b_i = \alpha_{i1}a_1 + \alpha_{i2}a_2 + \alpha_{i3}a_3$, $i = 1,2,3$, şi scriind pe componente, obţinem trei sisteme liniare fiecare cu trei ecuaţii şi trei necunoscute. De exemplu, pentru i = 1 avem:

$$\begin{cases} \alpha_{11} - \alpha_{13} = 1 \\ 2\alpha_{11} + \alpha_{12} = 2 \\ -\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} = 3 \end{cases}$$ de unde $\alpha_{11} = -1$, $\alpha_{12} = 4$, $\alpha_{13} = -2$.

Analog se obţin: $\alpha_{21} = -1$, $\alpha_{22} = 1$, $\alpha_{23} = -2$ şi $\alpha_{31} = -3/2$, $\alpha_{32} = 2$, $\alpha_{33} = -7/2$.

Astfel, matricea de trecere de la B_1 la B_2 este :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3/2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -7/2 \end{pmatrix}.$$

Analog se obţine şi matricea de trecere de la B_2 la B_1 (care este de fapt A^{-1}).

(iii). Scriem $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ şi rezultă că $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -3/2$. Deci coordonatele lui x în baza B_1 vor fi $x_{B_1} = (-1/2, 2, -3/2)$ iar ale lui x în baza B_2 vor fi $x_{B_2} = A^{-1} x_{B_1} = (1/3, -4/3, 1)$.

2.22. Avem tabelul:

B	**c_1**	**c_2**	**c_3**	**c_4**	**c_5**
e_1	-1	2	1	0	2
e_2	-2	4	2	2	0
e_3	-3	6	3	2	2
e_4	-5	12	6	4	4
c_1	1	-2	-1	0	-2
e_2	0	0	0	2	-4
e_3	0	0	0	2	-4
e_4	0	2	1	4	-6
c_1	1	-2	-1	0	-2
e_2	0	-1	-1/2	0	-1
e_3	0	-1	-1/2	0	-1
c_4	0	1/2	1/4	1	-3/2

Cum c_2 şi c_3 nu mai pot intra în baza $\{c_1, e_2, e_3, c_4\}$ deducem că rang(A) = 2.

2.23. Avem tabelul:

B	c_1	c_2	c_3	c_4
e_1	1	2	-1	2
e_2	4	-1	3	0
e_3	5	1	α-1	2
e_4	3	α	4	-2
c_1	1	2	-1	2
e_2	0	-9	7	-8
e_3	0	-9	α+4	-8
e_4	0	α-6	7	-8
c_1	1	0	5/9	2/9
c_2	0	1	-7/9	8/9
e_3	0	0	α-3	0
e_4	0	0	$\frac{7\alpha+21}{9}$	$\frac{-8\alpha-24}{9}$

Dacă $\alpha = 3$ atunci $\alpha - 3 = 0$, însă $\frac{7\alpha+21}{9} = \frac{14}{3}$ astfel că c_3 intră în bază în locul lui e_4 şi rang(A) = 3. Dacă $\alpha \neq 3$ se continuă pivotarea:

B	c_1	c_2	c_3	c_4
c_1	1	0	5/9	2/9
c_2	0	1	-7/9	8/9
e_3	0	0	α-3	0
e_4	0	0	$\frac{7\alpha+21}{9}$	$\frac{-8\alpha-24}{9}$
c_1	1	0	0	2/9
c_2	0	1	0	8/9
c_3	0	0	1	0
e_4	0	0	0	$\frac{-8\alpha-24}{9}$

Dacă $\alpha = -3$, atunci $\frac{-8\alpha-24}{9} = 0$ şi deci rang(A) = 3.

Dacă $\alpha \neq -3$, atunci $\frac{-8\alpha-24}{9} \neq 0$ şi deci rang(A) = 4 (şi c_4 intră în bază în locul lui e_4).

2.24. Avem tabelul:

B	a_1	a_2	a_3	x
e_1	1	1	-1	1
e_2	2	1	0	3
e_3	3	1	1	-1
a_1	1	-1	-1	1
e_2	0	3	2	1
e_3	0	4	4	-4
a_1	1	0	-1/3	4/3
a_2	0	1	2/3	1/3
e_3	0	0	4/3	-16/3
a_1	1	0	0	0
a_2	0	1	0	3
a_3	0	0	1	-4

Deci $\{a_1, a_2, a_3\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$ iar coordonatele lui x în raport cu această bază sunt (0,3,-4).

2.25. Avem tabelul:

B	c_1	c_2	c_3	e_1	e_2	e_3
e_1	1	2	-1	1	0	0
e_2	0	1	1	0	1	0
e_3	-1	0	1	0	0	1
a_1	1	2	-1	1	0	0
e_2	0	1	1	0	1	0
e_3	0	2	0	1	0	1
a_1	1	0	-3	1	-2	0
a_2	0	1	1	0	1	0
e_3	0	0	-2	1	-2	1
a_1	1	0	0	-1/2	1	-3/2
a_2	0	1	0	1/2	0	1/2
a_3	0	0	1	-1/2	1	-1/2

Deci, matricea A este inversabilă şi inversa ei este matricea

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2.26. (i). Faptul că V_n este un $\mathbb{C}$ - spaţiu vectorial se arată uşor. Mulţimea $\{1,X,X^2,\ldots,X^n\}$ este o bază a acestui spaţiu căci fiecare polinom $f\in V_n$ se exprimă în mod unic sub forma

$$f = a_0 + a_1X + \ldots+a_nX^n, \text{ cu } a_i\in\mathbb{C}, \text{ deci } \dim_{\mathbb{C}}V_n = n +1.$$

(ii). Arătăm mai întâi că B este o mulţime liniar independentă. Fie $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ a.î. :

$$(1)\ \lambda_0 + \lambda_1(X\text{-}a) + \ldots + \lambda_n(X\text{-}a)^n = 0.$$

Egalitatea (1) se mai scrie:

$$\lambda_0 = - (X\text{-}a)[\ \lambda_1 + \ldots +\lambda_n(X\text{-}a)^{n-1}].$$

Dacă λ_0 ar fi nenul, trecând la grade ar rezulta că grad $\lambda_0 \geq 1$, contradicţie cu faptul că λ_0 este un polinom constant. Deci $\lambda_0=0$. Egalitatea (1) devine $\lambda_1(X\text{-}a) + \ldots + \lambda_n(X\text{-}a)^n = 0$ şi împărţind prin polinomul nenul X-a (căci $\mathbb{C}[X]$ este domeniu de integritate) obţinem :

$$(2)\ \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n(X\text{-}a)^{n-1} = 0.$$

Procedând ca mai sus obţinem că $\lambda_1 = 0$ şi continuând raţionamentul obţinem că $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots= \lambda_n = 0$, deci B este liniar independentă.

Arătăm acum că B este un sistem de generatori al spaţiului V_n. Fie $f\in V_n$ un polinom oarecare. Polinomul $g(X) = f(X+a)$ va avea gradul cel mult n, deci putem scrie $g(X) = a_0 + a_1X + \ldots+ a_nX^n$ cu $a_i \in\mathbb{C}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Deci $f(X+a) = a_0 + a_1X + \ldots+ a_nX^n$ şi facând schimbarea $X\to X\text{-}a$ obţinem:

$$(3)\quad f = a_0 + a_1(X - a) + \ldots+ a_n (X\text{-}a)^n.$$

Deci B este o bază pentru V_n.

(iii). Fie $f\in V_n$ care se exprimă în raport cu baza B prin relaţia (3). Atunci $a_0 = f(a)$. Derivând formal în (3) obţinem:

$$(4) \quad f' = a_1 + 2a_2(X - a) + \ldots + na_n(X-a)^{n-1}$$

de unde obținem $a_1 = f'(a)$. Derivând formal în (4) găsim că $a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$.

Continuând raționamentul găsim $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n$.

Deci polinomul f se scrie în raport cu baza B astfel:

$$f = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(X - a) + \frac{f''(a)}{2!}(X - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n.$$

2.27. Să presupunem mai întâi că M este un $\mathbb{C}$ - spațiu vectorial. Cum elementul nul din acest spațiu va fi chiar funcția nulă $0_M:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $0_M(z) = 0$, oricare ar fi $z\in\mathbb{C}$, luând $f = 0_M$ vom avea

$$\alpha_1\cdot 0_M(1) + \alpha_2\cdot 0_M(2) + \ldots + \alpha_t\cdot 0_M(t) = \beta, \text{ adică } \beta = 0.$$

Reciproc, presupunem că $\beta = 0$ şi să demonstrăm că M este un $\mathbb{C}$-spațiu vectorial. Se constată repede că adunarea funcțiilor şi înmulțirea unei funcții cu un scalar sunt respectiv operație internă şi externă pe M.

De exemplu, pentru adunare, dacă $f, g\in M$ atunci:

$$\alpha_1 f(1) + \alpha_2 f(2) + \ldots + \alpha_t f(t) = 0$$
$$\alpha_1 g(1) + \alpha_2 g(2) + \ldots + \alpha_t g(t) = 0$$

ceea ce duce prin adunare la $\alpha_1(f+g)(1)+\alpha_2(f+g)(2)+\ldots+\alpha_t(f + g)(t) = 0$, adică $f + g\in M$.

Faptul că (M, +) este grup abelian se arată uşor. De asemenea celelalte axiome de spațiu vectorial sunt imediate, deci M este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{C}$.

2.28. (i). Dacă $f,g\in V_n$ atunci $\text{grad}(f + g) \le \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g))$ deci $f + g\in V_n$. Dacă $\lambda\in\mathbb{Z}_p$ şi $f\in V_n$, avem $\text{grad}(\lambda f) \le \text{grad}(f)$, deci $\lambda f\in V_n$. Astfel, adunarea polinoamelor este o operație internă pe V_n iar înmulțirea cu scalari din $\mathbb{Z}_p$ este o operație externă.

Se verifică imediat toate axiomele structurii de spațiu vectorial , deci V_n este un $\mathbb{Z}_p$- spațiu vectorial.

Dacă $f', g'\in V'$ atunci $f' - g' = (f - g)'\in V'$, iar pentru $\lambda\in\mathbb{Z}_p$ şi $f'\in V'$ avem $\lambda f' = (\lambda f)'\in V'$. Rezultă că V' este un subspațiu vectorial al lui V_n.

(ii). Evident $|V_n| = p^{n+1}$, deci dimensiunea lui V_n este n+1.

Pentru V' observăm că derivata oricărui polinom $f = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X + \ldots + \hat{a}_n X^n \in V_n$ este un polinom $f' = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X + \ldots + \hat{b}_{n-1} X^{n-1} \in V_n$ în care lipsesc termenii ce conțin pe X^{ap-1}, $a \in \mathbb{N}$ (pentru că un astfel de termen ar proveni din derivarea unuia ce conține pe X^{ap}, deci ar începe cu $\widehat{ap} = \hat{0}$).

Reciproc, orice polinom de tipul $g = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X + \ldots + \hat{b}_{n-1} X^{n-1} \in V_n$ în care lipsesc termenii cu X^{ap-1}, $a \in \mathbb{N}$, este derivata unui polinom din V_n. Într-adevăr, dacă $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $i \neq ap-1$, avem $\widehat{i+1} \neq \hat{0}$ şi atunci un termen $\hat{b}_i X^i$ provine din derivarea termenului $\hat{b}_i (\widehat{i+1})^{-1} X^{i+1}$.

În concluzie, am demonstrat egalitatea de mulțimi:

$$V' = \{g \mid g = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X + \ldots + \hat{b}_{n-1} X^{n-1}, \hat{b}_i \in \mathbb{Z}_p,\ \hat{b}_{p-1} = \hat{b}_{2p-1} = \ldots = \hat{0}\}.$$

Dar numerele de forma ap-1, cu $a \in \mathbb{N}$, care nu îl depăşesc pe n-1 sunt în număr de $[n/p]$ (căci avem $ap-1 \leq n-1 \Leftrightarrow a \leq n/p \Leftrightarrow 1 \leq a \leq [n/p]$).

Pentru ceilalți indici $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, cu $i \neq ap-1$, elementele $\hat{b}_i$ parcurg independent $\mathbb{Z}_p$, deci fiecare asemenea $\hat{b}_i$ poate lua p valori. Rezultă că $|V'| = p^{n-[n/p]}$, deci dimensiunea spațiului vectorial V' este $n-[n/p]$.

2.29. (i). Se verifică uşor axiomele spațiului vectorial .

(ii). Sistemul considerat are determinantul Vandermonde şi acesta este nenul deoarece $r_i \neq r_j$ pentru $i \neq j$. Aşadar sistemul se rezolvă prin regula lui Cramer şi are soluție unică $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

Egalitatea:

$$(1)\ x_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \ldots + A_k r_k^n$$

se probează prin inducție după n. Pentru $n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ această egalitate deja funcționează.

Fie acum $n \geq k$. Presupunem (1) adevărată pentru 0, 1, 2, …, n-1 şi o vom demonstra şi pentru n. Folosind relația de recurență, avem:

$$x_n = -\frac{1}{a_k}(a_{k-1}x_{n-1} + a_{k-2}x_{n-2} + \ldots + a_1 x_{n-k+1} + a_0 x_{n-k}).$$

Folosind ipoteza de inducție, putem continua astfel:

$$x_n = -\frac{1}{a_k}[a_{k-1}(A_1r_1^{n-1} + A_2r_2^{n-1} + \ldots + A_kr_k^{n-1}) + a_{k-2}(A_1r_1^{n-2} + A_2r_2^{n-2} + \ldots + A_kr_k^{n-2}) + \ldots + a_1(A_1r_1^{n-k+1} + A_2r_2^{n-k+1} + \ldots + A_kr_k^{n-k+1}) + a_0(A_1r_1^{n-k} + A_2r_2^{n-k} + \ldots + A_kr_k^{n-k})] = -\frac{1}{a_k}[A_1(a_{k-1}r_1^{n-1} + a_{k-2}r_1^{n-2} + \ldots + a_1r_1^{n-k+1} + a_0r_1^{n-k}) + A_2(a_{k-1}r_2^{n-1} + a_{k-2}r_2^{n-2} + \ldots + a_1r_2^{n-k+1} + a_0r_2^{n-k}) + \ldots + A_k(a_{k-1}r_k^{n-1} + a_{k-2}r_k^{n-2} + \ldots + a_1r_k^{n-k+1} + a_0r_k^{n-k})].$$

Ținând seama că $r_1, r_2, \ldots, r_k$ verifică ecuația caracteristică, putem considera mai departe:

$$x_n = -\frac{1}{a_k}[A_1r_1^{n-k}(-a_kr_1^k) + A_2r_2^{n-k}(-a_kr_2^k) + \ldots + A_kr_k^{n-k}(-a_kr_k^k)]$$
$$= A_1r_1^n + A_2r_2^n + \ldots + A_kr_k^n,$$

ceea ce arată că relația este adevărată pentru orice n.

(iii). Egalitatea de la (ii) arată că orice şir $(x_n)_{n\geq 0}\in S$ se scrie în mod unic (căci $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sunt unic determinați în funcție de şirul $(x_n)_{n\geq 0}$) drept combinație liniară de şirurile $(r_1^n)_{n\geq 0}$, $(r_2^n)_{n\geq 0}, \ldots, (r_k^n)_{n\geq 0}$ cu coeficienții $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Aceasta înseamnă că mulțimea B a acestor şiruri este o bază a spațiului vectorial S. În concluzie, dimensiunea acestui spațiu vectorial este k, deci este egală cu gradul ecuației caracteristice.

2.30. Dacă A este de forma $A = XY - YX$, atunci un calcul direct ne arată că $tr(A) = 0$.

Reciproc, fie $A\in M_n(\mathbb{C})$, $A \neq \alpha I_n$ ($\alpha \neq 0$) cu $tr(A) = 0$. Utilizând inducția matematică după n, se arată mai întâi că există o matrice nesingulară $S\in M_n(\mathbb{C})$ a.î. $S^{-1}AS$ are toate elementele de pe diagonala principală egale cu zero, adică:

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr, din faptul că $A \neq \alpha I_n$, pentru $\alpha \neq 0$, deducem că există un vector $u\in\mathbb{C}^n$ a.î. Au şi u să fie liniar independenți.

Considerând o bază a lui $\mathbb{C}^n$ din care fac parte vectorii Au şi u, deducem că A este asemenea cu o matrice de forma :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ 1 & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ 0 & \gamma_{32} & \dots & \gamma_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & \Gamma \end{pmatrix}.$$

Evident, $tr(A') = tr(\Gamma) = 0$. Dacă prin inducţie matematică presupunem că $\Gamma = S^{-1}\Gamma' S$ cu Γ' având toate elementele de pe diagonala principală egale cu 0, atunci toate elementele de pe diagonala principală a matricii:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^{-1} A' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & PS \\ S^{-1}Q & S^{-1}PS \end{pmatrix}$$

sunt egale cu 0; evident, A este asemenea cu A′, care este asemenea cu A″.

Putem deci presupune că $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Alegem $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, cu $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, arbitrare, distincte două câte două, şi Y de forma $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$.

Egalitatea A = XY – YX are loc pentru $y_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_i - \alpha_j}$, dacă $i \neq j$.

§3. Aplicații liniare.

3.1. Evident.

3.2. (i)$\Rightarrow$(ii). Alegem $B = \{e_1\}$ bază în V. Avem $f(e_1)\in V$, deci $f(e_1) = \alpha e_1$. Fie $x\in V$ oarecare.

Atunci $x = \beta e_1$, deci $f(x) = f(\beta e_1) = \beta f(e_1) = \beta\alpha e_1 = \alpha x$, pentru orice $x\in V$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Presupunem prin reducere la absurd că $\dim V > 1$, deci putem considera baza $B = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ a lui V cu cel puțin două elemente diferite.

Luăm $f : V \rightarrow V$ a.î. $f(e_1) = e_1$

$$f(e_2) = 2e_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(e_i) = 2e_i,$$

şi conform ipotezei trebuie să găsim $\alpha\in K$ a.î. $f(x) = \alpha x$, cu $\alpha \neq 0$ (căci $f \neq 0$).

În particular, $e_1 = \alpha e_1$, $2e_2 = \alpha e_2$, … Deci $\alpha = 1$ şi atunci $2e_2 = e_2$ $\Rightarrow$ $e_2 = 0$, absurd.

3.3. (i)$\Rightarrow$(ii). Fie $S\subseteq V$ a.î. $\mathrm{ind}_K S$ şi să demonstrăm că $\mathrm{ind}_K f(S)$. Dacă $x_1,\ldots, x_n\in S$ şi $\alpha_1,\ldots, \alpha_n\in K$ a.î. $\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n) = 0 \Rightarrow$ $f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = 0 = f(0) \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Fie $x\in \mathrm{Ker}(f)$ (deci $f(x) = 0$). Dacă $x \neq 0$, cum $\mathrm{ind}_K\{x\}$ ar trebui ca şi $\mathrm{ind}_K\{f(x) = 0\}$ – absurd, deci $x = 0$, adică $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Evident.

Am demonstrat astfel că (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(i)$\Rightarrow$(iv). Să presupunem că f verifică (iv) şi totuşi f nu este ca funcţie o injecţie. Atunci $Ker(f) \neq \{0\}$ şi considerând diagrama

$Ker(f) \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} V \xrightarrow{f} V'$, cu g = incluziunea şi h = morfismul nul

(adică h(x) = 0 pentru orice $x \in Ker(f)$) avem în mod evident $f \circ g = f \circ h = 0$ şi totuşi $g \neq h$ -absurd.

3.4. (i)$\Leftrightarrow$(ii) ca şi (i) $\Rightarrow$(iii) sunt evidente.

(iii)$\Rightarrow$(i). Să presupunem că f verifică (iii) şi totuşi f nu este surjectivă (adică $Im(f) \neq V'$).

Considerăm diagrama $V \xrightarrow{f} V' \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} V'' = V'/\mathrm{Im}(f)$, unde g este morfismul nul iar h surjecţia canonică. Cum $Im(f) \neq V'$ avem $g \neq h$ şi cum în mod evident $g \circ f = h \circ f = 0$, obţinem o contradicţie, de unde deducem că f este în mod obligatoriu surjecţie.

3.5. Faptul că D şi I sunt aplicaţii liniare este imediat. Reamintim că baza canonică a lui $\mathbb{R}_n[X]$ este $\{1, X, \ldots, X^n\}$. Cum $D(1) = 0$, $D(X) = 1$, …, $D(X^n) = nX^{n-1}$ deducem că matricea ataşată lui D în raport cu bazele canonice este: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix} \in M_{n,n+1}(\mathbb{R})$.

Deoarece $I(1) = X$, $I(X) = \frac{1}{2}X^2$, …, $I(X^n) = \frac{1}{n+1} X^{n+1}$ deducem că matricea ataşată lui I în raport cu bazele canonice este:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \in M_{n+2,n+1}(\mathbb{R}).$$

3.6. (i). Fie $x \in M$ a.î. $\beta(x) = 0$. Din $\gamma \circ g = v \circ \beta$ deducem că $\gamma(g(x)) = v(\beta(x)) = v(0) = 0$ şi cum γ este monomorfism deducem că $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Ker(g) = Im(f)$, deci $x = f(x')$ cu $x' \in M'$.

Din $\beta \circ f = u \circ \alpha$ deducem că $\beta(f(x')) = u(\alpha(x'))$, adică $0 = \beta(x) = u(\alpha(x')) \Rightarrow \alpha(x') \in Ker(u) = \{0\} \Rightarrow \alpha(x') = 0 \Rightarrow x' \in Ker(\alpha) = \{0\} \Rightarrow x' = 0$, astfel că $x = f(x') = f(0) = 0$. Deci $Ker(\beta) = \{0\}$, adică β este monomorfism (conform problemei **3.3.**)

(ii). Fie $y \in N$. Atunci $v(y) \in N''$ şi cum γ şi g sunt epimorfisme $v(y) = \gamma(x'')$ şi $x'' = g(z)$ cu $x'' \in M''$ şi $z \in M$. Astfel $v(y) = \gamma(g(z)) = (\gamma \circ g)(z) = (v \circ \beta)(z) = v(\beta(z))$, de unde deducem că $y - \beta(z) \in Ker(v) = Im(u)$, adică $y - \beta(z) = u(t)$ cu $t \in N'$. Cum α este epimorfism putem scrie $t = \alpha(x')$ cu $x' \in M'$.

Din $\beta \circ f = u \circ \alpha$ deducem că $\beta(f(x')) = u(\alpha(x')) = u(t) = y - \beta(z)$ deci $y = \beta(f(x')) + \beta(z) = \beta(f(x') + z)$, adică β este epimorfism.

(iii). Fie $y' \in N'$. Cum β este epimorfism putem scrie $u(y') = \beta(x)$ cu $x \in M$. Din $\gamma \circ g = v \circ \beta$ deducem că $\gamma(g(x)) = v(\beta(x)) = v(u(y')) = (v \circ u)(y') = 0$ (căci $Ker(v) = Im(u)$). Cum γ este monomorfism deducem că $g(x) = 0$, adică $x \in Ker(g) = Im(f) \Rightarrow x = f(x')$ cu $x' \in M'$. Cum $\beta \circ f = u \circ \alpha \Rightarrow \beta(x) = \beta(f(x')) = u(\alpha(x'))$. Deducem că $u(y') = u(\alpha(x'))$ şi cum u este monomorfism rezultă că $y' = \alpha(x')$, adică α este epimorfism.

3.7. (i). Prin calcul.

(ii). Reamintim că baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este B = {e_1, e_2, e_3}, unde e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0) şi e_3 = (0, 0, 1). Cum $f(e_1)$ = (1, 1, -1), $f(e_2)$ = (0, 3, 1) şi $f(e_3)$ = (-2, 2, 1) deducem că matricea căutată este

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii). Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, conform problemei **2.8.** deducem că B′ = {b_1, b_2, b_3} formează o bază pentru $\mathbb{R}^3$.

Să găsim matricea de trecere de la B la B′.

Cum $b_1 = 1\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2 + 1\cdot e_3$,

$b_2 = 2\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + (-1)\cdot e_3$,

$b_3 = 1\cdot e_1 + 2\cdot e_2 + (-1)\cdot e_3$,

deducem că matricea de trecere de la B la B′ este

$$N_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Astfel, matricea lui f în raport cu B este $N_{B'}^{-1} \cdot M_B \cdot N_{B'}$.

3.8. Cum $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ = -5 ≠ 0 şi toţi minorii de ordin 3 ce bordează pe $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ sunt 0 deducem că rangul lui M este 2 şi $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Ker}(f)$ = 4-2 = 2 iar pentru a găsi o bază pentru Ker(f) trebuie să determinăm soluţiile de bază ale sistemului omogen:

$$\begin{cases} x+3y+5z+t=0 \\ 2x+y+3z+t=0 \end{cases}$$

(ce va avea drept necunoscute principale pe x şi y).

Pentru z = 1 şi t = 0 obținem sistemul $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$ cu $x=-\frac{4}{5}$ şi $y=-\frac{7}{5}$ iar pentru z = 0 şi t = 1 obținem sistemul $\begin{cases} x+3y=-1 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ cu $x=-\frac{2}{5}$ şi $y=-\frac{1}{5}$.

Astfel, notând a_1 = (-4/5, -7/5, 1, 0) şi a_2 = (-2/5, -1/5, 0, 1) deducem că $\{a_1, a_2\}$ este o bază pentru Ker(f).

În ceea ce priveşte pe Im(f), avem că

dim Im(f) = 4-dim Ker(f) = 4-2 = 2.

Pentru a găsi o bază a lui Im(f) procedăm astfel: completăm pe $\{a_1, a_2\}$ cu $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^4$ a.î. $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ este bază pentru $\mathbb{R}^4$ şi atunci $\{f(b_1), f(b_2)\}$ va fi bază pentru Im(f). Putem alege de exemplu b_1 = (0, 0, 1, 0) şi b_2 = (0, 0, 0, 1).

3.9. Dacă notăm cu A_1 matricea de trecere de la $\{a_1, a_2\}$ la $\{b_1, b_2\}$ atunci $A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ iar matricea lui f în raport cu $\{b_1, b_2\}$ va fi $A_2 = A_1^{-1} \cdot A \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix}$. Astfel, matricele lui f+g şi f∘g în raport cu $\{b_1, b_2\}$ vor fi $A_2+B = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}$, respectiv

$$BA_2 = \begin{pmatrix} -53 & -52 \\ -\frac{159}{2} & -78 \end{pmatrix}.$$

3.10. (i). Rang(A) = 2 $\Rightarrow$ rg(f) = 2.

(ii). Avem dim Im(f) = rg(f) = 2. O bază pentru Im (f) este, de exemplu, $B_1 = \{a_1, a_2\}$, $a_1 = (5, -1, -8, 3)$, $a_2 = (2, -2, -3, -1)$.

Atunci dim Ker(f) = dim $\mathbb{R}^3$ - dim Im(f) = 3-2 = 1. Pentru a determina o bază rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 5a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ -a_1 - 2a_2 - 3a_3 = 0 \\ -8a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_1 - a_2 - 5a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_2 = -2\alpha \\ a_3 = \alpha \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

O bază pentru Ker(f) este $B_2 = \{a\}$ cu a = (1, -2, 1).

(iii). $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, deci $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - \beta \end{cases}$

şi o bază pentru V este $\{b_1, b_2\}$ cu $b_1 = (1, 0, -1)$, $b_2 = (0, 1, -1)$. Cum $f(b_1) = (6, 2, -10, 8)$ şi $f(b_2) = (3, 1, -5, 4)$ deducem că $f(V) = <\{f(b_1), f(b_2)\}>$ are dimensiunea 1 iar o bază pentru f(V) este formată de exemplu din $f(b_1)$.

3.11. (i). Avem

$$\begin{matrix} f(e_1)+f(e_2) = (1, 1, -1, -1) & & f(e_1) = (0, 0, 0, 0) \\ f(e_1)-f(e_2) = (-1, -1, 1, 1) & & f(e_2) = (1, 1, -1, -1) \\ f(e_3)+f(e_4) = (-1, 1, -1, 1) & \Leftrightarrow & f(e_3) = (0, 0, 0, 0) \\ f(e_3)-f(e_4) = (1, -1, 1, -1) & & f(e_4) = (-1, 1, -1, 1) \end{matrix}$$

deci A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii). Ecuația lui f în baza canonică este:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_2 - x_4 \\ y_2 = x_2 + x_4 \\ y_3 = -x_2 - x_4 \\ y_4 = -x_2 + x_4 \end{cases}.$$

Pentru determinarea nucleului în ecuațiile date considerăm $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ şi obținem sistemul omogen:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = x_4 = 0.$$

Avem rang(A) = 2, deci dim Ker(f) = 4-2 = 2 şi deci vectorii din bază sunt $a_1 = (1, 0, 0, 0)$ şi $a_2 = (0, 0, 1, 0)$.

Pentru determinarea imaginii se alege o bază conținând imaginile vectorilor din bază.

Avem Im(f) = <{$f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$}>. Coeficienții nu sunt proporționali, deci $f(e_2)$ şi $f(e_4)$ sunt liniar independenți.

Avem dim Im(f) = 2 şi o bază a sa este $\{f(e_2), f(e_4)\}$.

3.12. (i). Dacă $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in V_1$, $x_2, y_2 \in V_2$, $\alpha, \beta \in K$ avem:

$p_i(\alpha x+\beta y) = p_i((\alpha x_1 + \beta y_1)+(\alpha x_2 + \beta y_2)) = \alpha x_i + \beta y_i = \alpha p_i(x) + \beta p_i(y)$, $i = 1, 2$, deci $p_i \in End(V)$.

(ii). Demonstrăm că $Im(p_1) = V_1$ prin dublă incluziune.

„⊆”. Fie $y \in Im(p_1)$; există $x \in V$ a.î. $y = p_1(x) = x_1 \in V_1$, deci $Im(p_1) \subseteq V_1$.

„⊇”. Fie $x \in V_1$ deci $x = p_1(x) \in Im(p_1)$, adică $V_1 \subseteq Im(p_1)$.

Deci $Im(p_1) = V_1$.

Demonstrăm $Ker(p_1) = V_2$ prin dublă incluziune.

„⊆”. Fie $x \in Ker(p_1)$, deci $p_1(x) = 0$. Dacă $x = x_1 + x_2$, cu $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ avem $x_1 = p_1(x) = 0$, deci $x = x_2 \in V_2$ şi $Ker(p_1) \subseteq V_2$.

„⊇”. Dacă $x_2 \in V_2$ avem $p_1(x_2) = 0$, adică $x_2 \in Ker(p_1)$.

(iii). Fie $x \in V$, $x = x_1 + x_2$, cu $x_1 \in V_1$ şi $x_2 \in V_2$.

$(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x)) = p_1(x_2) = 0$, deci $p_1 \circ p_2 = 0$.

Analog $p_2 \circ p_1 = 0$.

(iv). Fie $x \in V$. Avem $p_1^2(x) = p_1(p_1(x)) = p_1(x_1) = x_1 = p_1(x)$, deci $p_1^2 = p_1$.

(v). $(p_1+p_2)(x) = p_1(x)+p_2(x) = x_1+x_2 = x = 1_V(x)$, $x \in V$, deci $p_1 + p_2 = 1_V$.

3.13. Faptul că $f \in End(\mathbb{C})$ este imediat. Cum $f(1) = a+bi$ şi $f(i) = -b+ai$ deducem că matricea căutată este $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

3.14. Dacă $\alpha, \beta \in K$ şi $g, h \in V'$ (adică $f \circ g = f \circ h = 0$), atunci cum $f \circ (\alpha g + \beta h) = \alpha(f \circ g) + \beta(f \circ h) = 0$, deducem că $\alpha g + \beta h \in V'$, adică V' este subspaţiu vectorial al lui End(V).

3.15. Trebuie să demonstrăm că

$$\mathbb{R}^4 = V_1 + V_2 \text{ iar } V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

Dacă $x \in V_1 \cap V_2$ atunci $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = (\beta_1, \beta_2, 0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$ de unde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ şi implicit $\beta_1 = \beta_2 = 0$, adică $x = 0$.

Pentru a demonstra că $\mathbb{R}^4 = V_1 + V_2$ va trebui să demonstrăm că pentru orice $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$, există $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ a.î.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = y \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = y_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 = y_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = y_3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = y_4 \end{cases}.$$

Găsim imediat $\alpha_1 = \frac{1}{4}(y_3+y_4)$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}(y_3-y_4)$ iar $\beta_1 = y_1 - \alpha_1$ şi $\beta_2 = y_2 - \alpha_2$.

3.16. „$\Rightarrow$”. Cum $\mathrm{Im}(f \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ mai trebuie să demonstrăm că $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f \circ f)$ iar pentru aceasta fie $y = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ cu $x \in V$.

Însă $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ şi $x_2 \in \mathrm{Im}(f)$, astfel că $y = f(x_1 + x_2) = f(x_2) \in \mathrm{Im}(f \circ f)$.

„$\Leftarrow$”. Să presupunem că $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ f)$ şi să demonstrăm că $V = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Dacă $x \in V$ atunci $f(x) = f(f(z)) \Leftrightarrow t = x - f(z) \in \mathrm{Ker}(f)$, de unde concluzia că $x = t + f(z)$, adică $V = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

3.17. (i). Fie $B = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}$ o bază pentru V iar $f \in End(V)$ a.î. $f(a_i) = a_{n+i}$, pentru $i = 1, \ldots, n$, $f(a_j) = 0$, pentru $j = n+1, \ldots, 2n$.

Atunci, oricare ar fi $x = \sum_{i=1}^{2n} x_i a_i \in V$ avem $f(x) = \sum_{i=1}^{2n} x_i f(a_i) =$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i a_{n+i} \in <\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}>$, adică $Im(f) \subseteq <\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}>$.

Dacă $y \in <\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}>$ există $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_{2n} \in K$, a.î.
$y = \beta_{n+1}a_{n+1} + \ldots + \beta_{2n}a_{2n} = \beta_{n+1}f(a_1) + \ldots + \beta_{2n}f(a_n) =$

$= f(\beta_{n+1}a_1 + \ldots + \beta_{2n}a_n) \in Im(f)$, adică $<\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}> \subseteq Im(f)$.

Deci $<\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}> = Im(f)$ şi, deci,

$$\dim Im(f) = \dim <\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}> = n.$$

Cum $\dim Ker(f) = \dim V - \dim Im(f) = 2n-n = n$ şi $a_{n+1}, \ldots, a_{2n} \in Ker(f)$, liniar independenți, rezultă că $\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}$ este o bază pentru $Ker(f)$.

Astfel, $Ker(f) = <\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}>$.

Deci $Im(f) = Ker(f) = <\{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}>$.

(ii). Nu, deoarece $\dim V = \dim Im(f) + \dim Ker(f)$ iar dacă $Im(f) = Ker(f)$ ar rezulta $\dim V = 2\dim Im(f)$, absurd.

3.18. Fie $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ o bază pentru V. Alegem $f \in End(V)$ a.î. $f(a_i) = a_i$, pentru $i = 1, \ldots, n-2$, $f(a_{n-1}) = a_n$, $f(a_n) = 0$.

Evident $a_n \in Ker(f) \cap Im(f)$, deci $Ker(f) \cap Im(f) \neq \{0\}$, adică $V \neq Ker(f) \oplus Im(f)$.

3.19. Fie $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ bază în V. Alegem $f, g \in End(V)$ a.î. $f(a_i) = a_i$, pentru $i = 1, \ldots, n-1$ şi $f(a_n) = 0$ iar $g(a_i) = \alpha a_i$, pentru $i = 1, \ldots, n-1$, cu $\alpha \in K \setminus \{0, 1\}$ şi $g(a_n) = 0$.

Evident, $Im(f) = Im(g) = <\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}>$ iar $Ker(f) = Ker(g) =$
$= <\{a_n\}>$.

3.20. Pentru orice $y \in Im(f+g)$, există $x \in V$ a.î.

$$y = (f+g)(x) = f(x)+g(x) \in Im(f)+Im(g).$$

Deci $Im(f+g) \subseteq Im(f) + Im(g)$, adică avem:

$$\dim Im(f+g) \leq \dim (Im(f) + Im(g)) =$$

$$= \dim Im(f)+\dim Im(g)-\dim(Im(f)\cap Im(g)) \leq \dim Im(f)+\dim Im(g).$$

3.21. Cum pentru orice $x, y \in V$ şi $\alpha, \beta \in K$, $(f+g)(\alpha x+\beta y) =$
$= f(\alpha x+\beta y)+g(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)+\alpha g(x)+\beta g(y)$
$= \alpha(f(x)+g(x))+\beta(f(y)+g(y)) = \alpha(f+g)(x)+\beta(f+g)(y)$ şi $(f\circ g)(\alpha x+\beta y) = f(g(\alpha x+\beta y)) = f(\alpha g(x)+\beta g(y)) = \alpha f(g(x))+\beta f(g(y)) =$
$= \alpha(f\circ g)(x)+\beta(f\circ g)(y)$, deducem că $f+g$, $f\circ g \in End(V)$.

Restul axiomelor inelului se verifică acum direct prin calcul (elementul unitate este $1_V : V \rightarrow V$).

3.22. Cum pentru orice $x, y \in V$ şi $a, \alpha, \beta \in K$ avem $(f+g)(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)+\alpha g(x)+\beta g(y) = \alpha(f+g)(x)+\beta(f+g)(y)$ şi $(af)(\alpha x+\beta y) =$
$= af(\alpha x+\beta y) = a[\alpha f(x)+\beta f(y)] = a\alpha f(x)+a\beta f(y) = \alpha[af(x)]+\beta[af(y)]$, (căci corpul K este comutativ) deducem că $f+g$, $af \in Hom_K(V, W)$.

În mod evident $(Hom_K(V, W), +)$ devine grup abelian.

Verificarea restului de axiome pentru a proba că $Hom_K(V, W)$ devine în mod canonic K-spaţiu vectorial se face prin calcul direct.

3.23. (i). Deoarece pentru oricare $\alpha, \beta \in h^N(X)$ şi $a \in K$

$$h^N(f)(\alpha+\beta)=f\circ(\alpha+\beta)=f\circ\alpha+f\circ\beta=h^N(f)(\alpha)+h^N(f)(\beta)$$

$$h^N(f)(a\alpha)=f\circ(a\alpha)=a(f\circ\alpha)=ah^N(f)(\alpha),$$

deducem că $h^N(f)$ este aplicaţie liniară.

Analog pentru $h_N(f)$.

(ii). Fie $f\in Hom_K(X, Y)$ un monomorfism în V(K) şi $h^N(f):h^N(X)\to h^N(Y)$. Să alegem $\alpha\in h^N(X)$ a.î. $h^N(f)(\alpha)=0$ şi să probăm că $\alpha=0$. Avem că $f\circ\alpha=0$, adică $f(\alpha(x))=0$, oricare ar fi $x\in N$. Cum f este monomorfism deducem că $\alpha(x)=0$, oricare ar fi $x\in N$, adică $\alpha=0$, deci $h^N(f)$ este monomorfism în V(K).

Fie acum $f\in Hom_K(X, Y)$ un epimorfism în V(K) şi să probăm că $h_N(f):h_N(Y)\to h_N(X)$ este monomorfism în V(K).

Pentru aceasta fie $\alpha\in h_N(Y)$ a.î. $h_N(f)(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha\circ f=0$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[dl, "\alpha"] & 0 \\ N & & \end{tikzcd}$$

Dacă $y\in Y$, cum am presupus că f este epimorfism în V(K), există $x\in X$ a.î. $y=f(x)$. Atunci $\alpha(y)=\alpha(f(x))=(\alpha\circ f)(x)$ şi cum y este oarecare deducem că $\alpha=0$, adică $h_N(f)$ este monomorfism în V(K).

(iii). Deoarece f este monomorfism în V(K), conform cu (ii), $h^N(f)$ este monomorfism în V(K), astfel că şirul (1) este exact în $h^N(M')$. Pentru a proba că şirul (1) este exact mai avem de probat exactitatea sa în $h^N(M)$ şi anume că $Ker(h^N(g))=Im(h^N(f))$. Deoarece $g\circ f=0$ deducem că $h^N(g)\circ h^N(f)=0$, adică $Im(h^N(f))\subseteq Ker(h^N(g))$. Pentru cealaltă incluziune fie $\alpha\in Ker(h^N(g))$ adică $h^N(g)(\alpha)=0\Leftrightarrow g\circ\alpha=0$. Trebuie să construim $\beta\in h^N(M')$ a.î. $\alpha=h^N(f)(\beta)\Leftrightarrow\alpha=f\circ\beta$.

Fie $x\in N$; atunci $g(\alpha(x))=0$, de unde $\alpha(x)\in Ker(g)=Im(f)$, deci există un unic $x'\in M'$ a.î. $\alpha(x)=f(x')$ (căci f este monomorfism în V(K)). Definim atunci $\beta:N\to M'$ prin $\beta(x)=x'$ şi se probează imediat că β este aplicaţia liniară căutată. Avem deci egalitatea $Ker(h^N(g))=Im(h^N(f))$, adică şirul (1) este exact.

Analog se probează că şirul (2) este exact.

3.24. Pentru prima parte, dacă $y\in Im(f+g)$, există $x\in V$ a.î. $y = (f+g)(x) = f(x)+g(x)\in Im(f)+Im(g)$.

Astfel, $Im(f+g) \subseteq Im(f)+Im(g)$. (1)

Dacă $y \in Im(f)+Im(g)$, există $y_1 \in Im(f)$, $y_2 \in Im(g)$ pentru care $y = y_1+y_2$. Dar $y_1 \in Im(f)$, $y_2 \in Im(g)$ implică existența vectorilor x_1, $x_2 \in V$, a.î. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$. Atunci $y = f(x_1)+g(x_2) = (f+g)(f(x_1)+g(x_2))$ (ultima egalitate are loc datorită ipotezei că f+g este proiecție, adică echivalent $f \circ g = g \circ f = 0$). Deci $y \in Im(f+g)$.

Rezultă $Im(f)+Im(g) \subseteq Im(f+g)$. (2)

Din (1) şi (2) se deduce că $Im(f+g) = Im(f)+Im(g)$.

Fie $y \in Im(f) \cap Im(g)$. Atunci, există t_1, $t_2 \in V$ a.î. $y = f(t_1)$ şi $y = g(t_2)$. Aplicând în ambii membri ai egalității $f(t_1) = g(t_2)$ pe f şi ținând seama că $f \circ g = 0$ obținem $f(f(t_1)) = 0$, adică $f(t_1) = 0$, deci $y = 0$. În concluzie, $Im(f+g) = Im(f) \oplus Im(g)$.

Pentru partea a doua, oricare ar fi $x \in Ker(f+g)$ avem $f(x)+g(x) = 0$. Aplicând aici f şi folosind egalitatea $f \circ g = 0$, obținem $f(f(x)) = 0$, adică $f(x) = 0$. Deci $x \in Ker(f)$. Analog se arată că $x \in Ker(g)$. Rezultă $Ker(f+g) \subseteq Ker(f) \cap Ker(g)$.

Dacă $x \in Ker(f) \cap Ker(g)$ avem $f(x) = g(x) = 0$, adică $0 = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$. Deci $x \in Ker(f+g)$.

În concluzie, $Ker(f+g) = Ker(f) \cap Ker(g)$.

3.25. Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bază în V. Pentru $x \in V$ există şi sunt unice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ a.î. $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Se verifică imediat că $f: V \to K^n$, $f(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ este izomorfism de spații vectoriale.

Observație. Analog se demonstrează că dacă două K-spații vectoriale au baze echipotente atunci ele sunt izomorfe (vezi [11, pg 258]).

3.26. Cum k are caracteristica $p > 0$, putem presupune că avem extensia de corpuri $\mathbb{Z}_p \subseteq k$ (de fapt subcorpul prim al lui k este izomorf cu $\mathbb{Z}_p$). Atunci k devine în mod canonic $\mathbb{Z}_p$ – spațiu vectorial (conform problemei **2.4.**) şi deci $|k| = p^n$, unde prin n am notat n este dimensiunea lui k peste $\mathbb{Z}_p$ (conform problemei **3.25.**).

3.27. Considerând pe $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ ca spaţii vectoriale peste $\mathbb{Q}$, atunci $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C},+)$ sunt grupurile aditive ale acestor spaţii vectoriale. Dacă B este o bază a lui $\mathbb{R}$ peste $\mathbb{Q}$, atunci $| B | = c$ iar $\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ va avea o bază de cardinal $c\cdot c = c$, deci $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ au baze echipotente, rezultând că $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ sunt $\mathbb{Q}$-spaţii vectoriale izomorfe (vezi soluţia de la problema **3.25.**), adică $(\mathbb{R},+) \approx (\mathbb{C},+)$.

§4. Sisteme de ecuații liniare. Vectori şi valori proprii.

4.1. Considerând egalitățile:

$$a_0 + a_1x_1 + ... + a_n x_1^n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_0 + a_1x_{n+1} + ... + a_n x_{n+1}^n = 0$$

ca un sistem omogen în $a_0, a_1, \dots, a_n$, cum determinantul său este diferit de zero (fiind un determinant de tip Vandermonde în $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$) deducem că acest sistem admite numai soluția banală, adică

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0.$$

4.2. Obținem că $\int_0^1 \widetilde{P}(x)^2\,dx = \int_0^1 \widetilde{P}(x)\cdot\widetilde{P}(x)dx =$

$$= \int_0^1 (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)\widetilde{P}(x)dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 x^k\widetilde{P}(x)dx = 0\,,$$

de unde $\widetilde{P}(x) = 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, adică $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ (conform problemei **4.1.**).

Pe de altă parte egalitățile $\int_0^1 x^k\widetilde{P}(x)dx = 0$, $0 \le k \le n$, devin:

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + ... + \frac{1}{n+1}a_n = 0 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + ... + \frac{1}{n+2}a_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n+1}a_0 + \frac{1}{n+2}a_1 + \frac{1}{n+3}a_2 + ... + \frac{1}{2n+1}a_n = 0 \end{cases}$$

care pot fi interpretate ca un sistem omogen în $a_0, a_1, \dots, a_n$ ce admite numai soluția banală, de unde concluzia că determinantul din enunț este nenul.

4.3. Fie A = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha+1 & \beta+1 & 2 \\ 1 & 2\beta & 1 \end{pmatrix}$ şi b = $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Avem că det(A) = (1-α)β. Astfel:

i) Dacă α ≠ 1 şi β ≠ 0 sistemul este compatibil determinat (Cramerian) şi se rezolvă cu formulele lui Cramer.

ii) Dacă α = 1 şi β ≠ 0 atunci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \beta+1 & 2 \\ 1 & 2\beta & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Considerând $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \beta+1 \end{vmatrix}$ = β-1 avem subcazurile:

1) β ≠ 1. Atunci rang(A) = 2 şi cum $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & \beta+1 & 7 \\ 1 & 2\beta & 4 \end{vmatrix}$ = 2β-1 deducem că pentru β ≠ $\frac{1}{2}$ sistemul este incompatibil iar pentru β = $\frac{1}{2}$ sistemul este compatibil 1-nedeterminat cu soluţia $x_3 = \lambda$, $x_1 = 2-\lambda$ şi $x_2 = 2$ (cu $\lambda\in\mathbb{R}$).

2) β = 1. Atunci A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi cum $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 2 deducem că rang(A) = 2.

Cum $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 1 ≠ 0 deducem că în acest caz sistemul este incompatibil.

iii) Dacă $\alpha \neq 1$ şi $\beta = 0$ atunci $A = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha+1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ şi cum $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ deducem că rang(A) = 2. x_1 este necunoscută secundară iar x_2 şi x_3 principale.

Avem $\Delta_{car} = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ \hline 0 & 1 & 4 \end{array}\right| = 1 \neq 0$, deci sistemul este incompatibil.

iv) Dacă $\alpha = 1$ şi β=0. Atunci $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ şi cum $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ deducem că rang(A) = 2.

Cum $\Delta_{car} = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 4 \end{array}\right| = -1 \neq 0$ deducem că în acest caz sistemul este incompatibil.

4.4. Dacă sistemul are soluţii reale strict pozitive, atunci:

$| a | + | b | = | x_1 - x_2 | + | x_3 - x_4 | < | x_1 | + | x_2 | + | x_3 | + | x_4 |$
$= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$

Pentru suficienţă, observăm că soluţia generală a sistemului este

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1 + a - b - 2\alpha}{2} \\ x_2 = \dfrac{1 - a - b - 2\alpha}{2} \\ x_3 = b + \alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases}.$$

A arăta că sistemul are o soluție strict pozitivă, revine la a demonstra că în ipoteza | a | + | b | < 1, sistemul de inecuații în α:

$$\begin{cases} 1+a-b-2\alpha>0 \\ 1-a-b-2\alpha>0 \\ b+\alpha>0 \\ \alpha>0 \end{cases}$$

are cel puțin o soluție, sau echivalent cu faptul că intervalul (c, d) ≠ Ø, unde c = max {0, -b} iar d = $\min\left\{\frac{1+a-b}{2},\frac{1-a-b}{2}\right\}$.

Într-adevăr, din 0 < 1 - | a | - | b | ≤ 1 + a - b ⇒ 0 < d, iar din -2b ≤ | b | - b < 1 - | a | - b ≤ 1 + a – b ⇒ -b > d şi deci c < d, adică (c, d) ≠ Ø.

4.5. Scriem sistemul sub forma:

$$\begin{cases} (a-\frac{1}{2})x+by+cz=0 \\ cx+(a-\frac{1}{2})y+bz=0 \\ bx+cy+(a-\frac{1}{2})z=0 \end{cases}.$$

Prin calcul, deducem imediat că:

$$D=\begin{vmatrix} a-\frac{1}{2} & b & c \\ c & a-\frac{1}{2} & b \\ b & c & a-\frac{1}{2} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(a+b+c-\frac{1}{2}\right)\left[\left(a-b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-c-\frac{1}{2}\right)^2+(b-c)^2\right]$$

şi cum a, b, c∈ℤ, iar $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$, deducem că D ≠ 0, adică sistemul considerat admite numai soluția banală x = y = z = 0.

4.6. Fie A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cum ultima linie este suma primelor două deducem că rang(A) = 2 (căci $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$).

Sistemul va fi echivalent cu

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}.$$

Facem $x_3 = 1$ şi $x_4 = 0$ iar apoi $x_3 = 0$ şi $x_4 = 1$ obţinând sistemele crameriene :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

cu soluţiile (-1/7, 10/7) şi respectiv (-3/7, -5/7).

Deci soluţiile de bază sunt a_1 = (-1/7, 10/7, 1, 0) şi respectiv a_2 = (-3/7, -5/7, 0, 1), astfel că soluţia generală a sistemului omogen va fi $x = \alpha a_1 + \beta a_2$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4.7. Dacă notăm prin A matricea coeficienţilor sistemului şi $\alpha = a^2+b^2+c^2+d^2$ atunci din $AA^t = \alpha I_4$ deducem că

$$[\det(A)]^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2,$$

de unde concluzia că dacă cel puţin unul din cele patru numere este nenul, atunci $\det(A) \neq 0$ şi deci x = y = z = t = 0.

4.8. În ambele cazuri o condiţie necesară şi suficientă este ca sistemul să fie omogen.

4.9. O condiţie necesară şi suficientă este că suma coeficienţilor combinaţiei liniare date să fie egală cu 1.

4.10. (i). $rang\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

(ii). $rang\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

4.11. Condiții analoage celor din problema precedentă.

4.12. Dacă notăm prin A matricea coeficienților sistemului omogen echivalent cu cel din enunț, după ce adunăm toate coloanele la prima în det(A) iar apoi scoatem factor comun pe a+b+c+d-1 pe prima coloană, păstrăm prima linie pe care o scădem din fiecare linie, obținând în final că det(A) = (a+b+c+d-1)(a+1)(b+1)(c+1)(d+1), astfel că sistemul va avea soluții nenule dacă a+b+c+d = 1 sau cel puțin unul din numerele a, b, c, d este egal cu –1.

4.13. Dacă notăm prin A matricea sistemului atunci prin calcul se deduce că det(A) = - $[\lambda^2+(\text{ be + cf + ad})^2]^2$ de unde concluzia că det(A) = 0, adică λ = be+cf+ad = 0.

4.14. Se ştie că

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le k<l\le n}(a_l - a_k) \text{ (Vandermonde)}$$

şi să considerăm sistemul de ecuații în necunoscutele $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} a_k^{i-1} x_i = -a_k^n \text{, k = 1, 2, ..., n.}$$

Dacă vom considera ecuația de gradul n

$$(2) \quad x^n + \sum_{i=1}^{n} x_i x^{i-1} = 0$$

cu coeficienții $x_1, x_2, \dots, x_n$, relațiile (1) ne arată tocmai faptul că ecuația (2) are rădăcinile $a_1, a_2, \dots, a_n$. Scriind relațiile lui Viète obținem:

$$\sum a_1 a_2 \dots a_i = (-1)^i x_{n-i+1} \text{, i = 1, 2, ..., n,}$$

de unde $x_{n-i+1} = (-1)^i \sum a_1 a_2 ... a_i$, adică $x_i = (-1)^{n-i+1} \sum a_1 a_2 ... a_{n-i+1}$, i = 1, 2, ..., n.

Pe de altă parte, cu ajutorul regulii lui Cramer putem scrie $x_i = \frac{D_i}{D}$ deci

$$D_i = x_i D = (-1)^{n-i+1} \sum a_1 a_2 ... a_{n-i+1} D,$$

pentru orice i = 1, ..., n.

Cum $\det(A_j) = (-1)^{n-j+1} D_{j+1}$, j = 1, .., n-1, deducem că

$$\det(A_j) = \sum a_1 a_2 ... a_{n-j} \cdot D = (\sum a_1 a_2 ... a_{n-j}) \cdot \prod_{1 \le k < l \le n} (a_l - a_k), \ 0 \le j \le n.$$

4.15. Scăzând egalitățile din ipoteză, rezultă uşor egalitățile:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)\lambda^2 + (b_1 - b_2)\lambda = c_2 - c_1 \\ (a_1 - a_3)\lambda^2 + (b_1 - b_3)\lambda = c_3 - c_1 \end{cases}.$$

Aceasta înseamnă că sistemul liniar:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y = c_2 - c_1 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y = c_3 - c_1 \end{cases}$$

admite soluția $(x, y) = (\lambda^2, \lambda)$.

Determinanții care apar în regula lui Cramer sunt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_2 - c_1 & b_1 - b_2 \\ c_3 - c_1 & b_1 - b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & c_2 - c_1 \\ a_1 - a_3 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Conform regulii lui Cramer avem $\lambda^2 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $\lambda = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

De aici deducem că $\frac{\Delta_x}{\Delta} = \left(\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)^2$, adică, $\Delta_y^2 = \Delta_x \cdot \Delta$, care este tocmai egalitatea de demonstrat.

4.16. (i). Dacă $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, atunci matricea AA^t are pe diagonala principală elemente de forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$, unde i = 1, ..., n. Deoarece $AA^t = O_n$ şi $a_{ij}\in\mathbb{R}$, rezultă $a_{ij} = 0$, pentru orice i, j = 1, ..., n, deci $A = O_n$.

(ii). Conform cu (i) este suficient să arătăm că

$$(BA-CA)(BA-CA)^t = O_n.$$

Dar $(BA-CA)(BA-CA)^t = (BA-CA)(A^tB^t-A^tC^t) =$

$$= BAA^tB^t - CAA^tB^t - BAA^tC^t + CAA^tC^t = O_n.$$

(iii). Suficiența condiției. Dacă $AA'B = B$, atunci $X = A'B$ este soluție a sistemului, deci acesta este compatibil.

Necesitatea condiției.Presupunem că există o soluție $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ a sistemului. Atunci $B = AX = (AA'A)X = AA'(AX) = AA'B$. Să arătăm acum că în cazul când sistemul este compatibil, mulțimea soluțiilor sale este $S = \{A'B+Y-A'AY \mid Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})\}$.

Într-adevăr, pentru orice $Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ avem:

$$A(A'B+Y-A'AY) = AA'B+AY-AA'AY = B+AY-AY = B,$$

deci orice matrice din S este soluție a sistemului.

Reciproc, să demonstrăm că orice soluție a sistemului aparține lui S.

Fie X_0 o soluție, deci $AX_0 = B$ sau $A(X_0-A'B) = O_n$, ceea ce arată că $X_0-A'B$ este soluție a sistemului omogen $AX = O_n$. Deci dacă Y este o soluție oarecare a sistemului omogen, avem $Y = Y-A'AY$ (căci $AY = O_n$). Deci $X_0-A'B = Y-A'AY$, unde $Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Rezultă că $X_0 = A'B+Y-A'AY\in S$.

4.17. (i). Deoarece A este singulară, sistemul omogen $AX = O_n$ admite o soluție nebanală $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Analog sistemul omogen $A^tY = O_n$ admite o soluție nebanală $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Fie $B = XY^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = (x_iy_j)$; Evident $B \neq O_n$.

Pe de altă parte, $AB = A(XY^t) = (AX)Y^t = O_n$ şi $BA = (XY^t)A = X(A^tY)^t = O_n$.

(ii). Presupunem că A este singulară. Fie B o matrice nenulă cu $AB = BA = O_n$.

Vom demonstra prin inducție că $(A+B)^p = A^p + B^p$, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$.

Pentru p = 1 se verifică. Dacă $(A+B)^p = A^p + B^p$, atunci

$$(A+B)^{p+1} = (A+B)^p(A+B) = A^{p+1} + A^pB + B^pA + B^{p+1} =$$
$$= A^{p+1} + A^{p-1}(AB) + B^{p-1}(BA) + B^{p+1} = A^{p+1} + A^{p-1} \cdot O_n + B^{p-1} \cdot O_n + B^{p+1}$$
$$= A^{p+1} + B^{p+1}$$

şi demonstrația prin inducție este încheiată.

Presupunem acum că există B nenulă a.î. $(A+B)^p = A^p + B^p$, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$.

Pentru p = 2 se obține relația (1) $AB + BA = O_n$.

Pentru p = 3 avem (2) $A^3 + B^3 = (A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = (A^2+B^2)(A+B) = A^3 + A^2B + B^2A + B^3 \Rightarrow A^2B + B^2A = O_n$. Din relațiile (1) şi (2) deducem că $B^2A = -A^2B = A(-AB) = ABA$.

Presupunem prin absurd că A este nesingulară şi atunci din ultima relație prin înmulțire la dreapta cu A^{-1}, obținem: (3) $B^2 = AB$.

În continuare vom obține $A^2B = A(AB) = -ABA$ şi deci $A^2B^2 =$

$= -ABAB = -AB(-BA) = AB^2A$, de unde prin simplificare la stânga cu A, deducem: (4) $AB^2 = B^2A$.

Din relația (3) rezultă : (5) $AB^2 = A(AB) = A^2B$. Pe de altă parte, folosind (3), deducem (6) $B^2A = (AB)A = -A^2B$. Din relațiile (4), (5) şi (6) rezultă $A^2B = -A^2B$, adică $A^2B = O_n$. Deoarece A este presupusă nesingulară, din ultima relație obținem $B = O_n$, contradicție cu ipoteza. Deci matricea A este neapărat singulară.

4.18. Pentru o valoare proprie $\lambda\in\mathbb{C}$ vom nota prin X_λ spațiul vectorilor proprii.

(i). $\lambda_1 = 1$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, -1) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$ iar

$\lambda_2 = 3$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(1, 1) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$.

(ii). $\lambda_1 = 7$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, 1) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$ iar

$\lambda_2 = -2$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(4, -5) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$.

(iii). $\lambda_1 = ai$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, -i) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$ iar

$\lambda_2 = -ai$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(1, i) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$.

(iv). $\lambda_1 = 1$ cu $X_{\lambda_1} = \{\alpha(1, 1, 1) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$ iar

$\lambda_2 = \varepsilon$ cu $X_{\lambda_2} = \{\alpha(3+2\varepsilon, 2+3\varepsilon, 3+3\varepsilon) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$ şi

$\lambda_3 = \varepsilon^2$ cu $X_{\lambda_3} = \{\alpha(3+2\varepsilon^2, 2+3\varepsilon^2, 3+3\varepsilon^2) \mid \alpha\in\mathbb{C}\}$,

cu $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(v). Polinomul caracteristic al lui A este

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4.$$

Deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Dacă $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathbb{R}^4$ este vectorul propriu corespunzător valorii proprii 1 atunci sistemul omogen ce îl verifică x este:

$$(A-I_3)\ \widetilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Matricea acestui sistem omogen este $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi are rangul 2, căci $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Alegând pe x_3 şi x_4 necunoscute principale iar pe x_1, x_2 necunoscute secundare, făcând pe $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ iar apoi $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ obținem pentru x_3, x_4 sistemele Crameriene $\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ cu $x_3 = -2$, $x_4 = -4$ şi respectiv $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, astfel că $x = \alpha(1, 0, -2, -4) + \beta(0, 1, 1, 2)$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $x \neq 0$.

4.19. Fie $P_A(\lambda) = |A-\lambda I_n| = (\lambda_1-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$ şi $f = b(X-x_1)\ldots(X-x_n)$ descompunerile polinomului caracteristic al lui A şi a lui f în $\mathbb{C}$.

Astfel, $\det(f(A)) = b^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(\lambda_i - x_i) = f(\lambda_1)\ldots f(\lambda_n)$.

4.20. (i). Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A, din $\det(A-\lambda I_n) = 0$ deducem imediat că $\det(A^{-1} - \frac{1}{\lambda} I_n) = 0$ de unde concluzia că valorile proprii ale lui A^{-1} sunt $\frac{1}{\lambda_1},\ldots,\frac{1}{\lambda_n}$.

(ii). Vom demonstra că valorile proprii ale lui A^2 sunt $\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2$.

Într-adevăr, dacă $\det(A-\lambda I_n) = (\lambda_1-\lambda) \ldots (\lambda_n-\lambda)$, atunci $\det(A + \lambda I_n) = (\lambda_1 + \lambda) \ldots (\lambda_n + \lambda)$ şi astfel că înmulțind cele două egalități şi substituind pe λ^2 cu λ obținem

$$\det(A^2 - \lambda I_n) = (\lambda_1^2 - \lambda) \ldots (\lambda_n^2 - \lambda)$$

de unde concluzia.

(iii). Să demonstrăm că valorile proprii ale matricei A^k ($k\in\mathbb{N}^*$) sunt $\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k$. Într-adevăr, în ecuația

$$\det(A-\lambda I_n) = (\lambda_1-\lambda)\ \ldots\ (\lambda_n-\lambda)$$

înlocuind pe λ cu $\lambda\varepsilon$, $\lambda\varepsilon^2$, …, $\lambda\varepsilon^{n-1}$ (unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}$), multiplicând aceste n egalități şi înlocuind pe λ^n cu λ obținem că:

$$\det(A^k-\lambda I_n) = (\lambda_1^k-\lambda)\ \ldots\ (\lambda_n^k-\lambda)$$

de unde concluzia.

(iv). Fie $f = a_0X^k + a_1X^{k-1} + \ldots + a_{k-1}X + a_k \in\mathbb{C}[X]$. Vom demonstra că valorile proprii ale lui $f(A)$ sunt $f(\lambda_1)$, …, $f(\lambda_n)$ ($\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ fiind valorile proprii ale lui A).

Într-adevăr, procedând ca la soluția problemei **4.19.** avem:

$$\det(f(A) - \lambda I_n) = (f(\lambda_1) - \lambda)\ \ldots\ (f(\lambda_n) - \lambda)$$

de unde concluzia.

4.21. Fie $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ valorile proprii ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pentru $i \neq j$). Dacă notăm prin B baza formată din vectorii proprii corespunzători iar prin C matricea formată din coordonatele vectorilor din B, avem că:

$$A = C^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ . & . & \ldots & .\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}C,\ \text{de unde}\ A^k = C^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0\\ . & . & \ldots & .\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k\end{pmatrix}C.$$

Pentru cazurile particulare din enunț ținem cont de problema **4.18.** (i) şi (iv).

În primul caz $C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ iar în al doilea caz $C = \begin{pmatrix}1 & 3+2\varepsilon & 3+2\varepsilon^2\\ 1 & 2+3\varepsilon & 2+3\varepsilon^2\\ 1 & 3+3\varepsilon & 3+3\varepsilon^2\end{pmatrix}$ cu $\varepsilon = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (vezi soluția problemei **4.18.** (i) şi (iv)).

4.22. $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 3$, deci conform teoremei Cayley-Hamilton avem $-A^3 + 2A^2 + 4A + 3I_3 = O_3 \Leftrightarrow A(\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A - \frac{4}{3}I_3) = I_3$,

de unde concluzia că $A^{-1} = \frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A - \frac{4}{3}I_3 = \begin{pmatrix} -4/3 & -5/3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4/3 & 4/3 & -1 \end{pmatrix}$.

4.23. Din $g \circ f = 1_V$ deducem că g şi f sunt inversabile. Atunci, dacă A, B, C sunt matricele endomorfismelor f, h şi respectiv g avem $CA = I_n$ şi atunci

$$\begin{aligned} P_{g\circ h\circ f}(\lambda) &= \det(CBA - \lambda I_n) = \det(CBA - \lambda CC^{-1}A^{-1}A) = \\ &= \det[C(B - \lambda C^{-1}A^{-1})A] = \det(C)\det[B - \lambda(AC)^{-1}]\det(A) = \\ &= \det(CA)\det(B - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n) = P_h(\lambda), \end{aligned}$$

de unde concluzia că $P_{g\circ h\circ f}(\lambda) = P_h(\lambda)$, adică $P_{g\circ h\circ f} = P_h$.

4.24. (i). Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie pentru f iar

$$V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$$

subspaţiul propriu corespunzător. Pentru orice $x \in V_\lambda$ avem $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$, adică $g(x) \in V_\lambda$.

(ii). Dacă $x \in Ker(f)$, $f(x) = 0$ şi atunci $0 = g(0) = g(f(x)) = f(g(x))$, adică $g(x) \in Ker(f)$.

Oricare ar fi $y \in Im(f)$ există $x \in V$ a.î. $y = f(x)$.

Atunci $g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in Im(f)$.

4.25. Fie $A = \sum_{i=1}^{m} A_i^t \cdot A_i$ şi $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Să presupunem prin absurd că $\det(A) < 0$, deci $P(0) < 0$. Cum $\lim_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = \infty$, rezultă că ecuaţia $P(\lambda) = 0$ are cel puţin o rădăcină λ_0 strict negativă. Atunci sistemul omogen $(A - \lambda_0 I_n)X = O_n$ are şi soluţii nenule.

Fie $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ o astfel de soluție. Atunci $AX = \lambda_0 X$, deci $X^t AX = \lambda_0 X^t X$, de unde $\sum_{i=1}^{m} (A_i X)^t \cdot (A_i X) = \lambda_0 X^t X$.

Dar pentru $V = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & ..., & v_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, $V^t \cdot V = \sum_{j=1}^{n} v_j^2 \geq 0$.

Atunci $(A_i X)^t (A_i X)^t \geq 0$ pentru $i \in \{1, ..., m\}$ şi $X^t X \geq 0$, deci $\lambda_0 \geq 0$, contradicție. În concluzie, $\det(A) \geq 0$.

Dacă $A_1, A_2, \dots, A_m$ sunt simetrice, atunci $A_i^t = A_i$ $(1 \leq i \leq m)$ şi atunci obținem că $\det(A_1^2 + ... + A_m^2) \geq 0$.

4.26. „⇒”. $B = A \Rightarrow \det(2A) = 2\det(A) \Rightarrow (2^n - 2)\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$ (căci $n \geq 2$).

$B = -X \cdot I_n \Rightarrow \det(A - X \cdot I_n) = (-1)^n X^n + \det(A) \Rightarrow \det(A(A - X \cdot I_n)) = (-1)^n X^n$, deci polinomul caracteristic al lui A este $P_A(X) = (-1)^n X^n$.

Conform teoremei Cayley-Hamilton, avem: $P_A(A) = O_n$, de unde $A^n = O_n$.

„⇐”. Cum $A^n = O_n$ şi $P_A(A) = O_n$, cu $P_A(X)$ polinom de gradul n, obținem $P_A(X) = X^n$, deci $P_A(-1) = (-1)^n = \det(-A - I_n) = (-1)^n \det(A + I_n) \Rightarrow \det(A + I_n) = 1$. (1)

Cazul 1. $\det(B) \neq 0$. Atunci B este inversabilă, cu inversa B^{-1} şi $B^{-1}A = AB^{-1} \Rightarrow (B^{-1}A)^n = B^{-n}A^n = O_n$. Dar $\det(A+B) = \det(B(B^{-1}A + I_n)) = \det(B) \cdot \det(B^{-1}A + I_n) = \det(B) \cdot 1 = \det(B)$ (am folosit (1) pentru $A \rightarrow B^{-1}A$).

Deci, $\det(A+B) = \det(B) = 0 + \det(B) = \det(A) + \det(B)$. (2)

Cazul 2. $\det(B) = 0$. Fie $f(X) = \det(I_n X + B)$ şi $g(X) = \det(I_n X + A + B)$.

Evident, $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{grad}(f) = \mathrm{grad}(g) = n$ şi f, g monice.

Cum $A(\lambda I_n+B) = (\lambda I_n+B)A$, pentru orice $\lambda\in\mathbb{C}$ şi cum $f(\lambda) = \det(\lambda I_n+B) \neq 0$, pentru o infinitate de valori $\lambda\in\mathbb{C}$, conform cazului 1, avem $\det(\lambda I_n+A+B) = \det(A)+\det(\lambda I_n+B) = \det(\lambda I_n+B)$, pentru o infinitate de valori $\lambda\in\mathbb{C}$, altfel spus $f(\lambda) = g(\lambda)$ pentru o infinitate de valori (distincte) $\lambda\in\mathbb{C}$ (cel puțin n), de unde $f(X) = g(X)$.

În particular, obținem: $\det(B) = f(0) = g(0) = \det(A+B)$, deci $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. (3)

Din (2) şi (3) problema este complet rezolvată.

4.27. „$\Leftarrow$". Evident.

„$\Rightarrow$". $2x^2-90x+13 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{45\pm\sqrt{1999}}{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow$ $\det(2A^2-90A+13I_2) = \det(2(A-x_1I_2)(A-x_2I_2)) = 0$. Coeficienții ecuației $\det(A-xI_2) = 0$ sunt raționali, deci dacă x_1 este rădăcină rezultă că şi x_2 este rădăcină şi reciproc $\Rightarrow$ $a+d=45$ şi $ad-bc = \dfrac{13}{2}$ $\Rightarrow$ (conform teoremei Cayley-Hamilton) $\Rightarrow$ $O_2 = A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 = A^2-45A+\dfrac{13}{2}I_2$.

Dacă $A\in M_2(\mathbb{R})$ afirmația nu mai este adevărată; de exemplu, $A = \begin{pmatrix} \dfrac{45+\sqrt{1999}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.28. Ecuația $AX = aX$ este echivalentă cu $(A-aI_n)X = O_n$. Deoarece matricea A are elemente întregi, polinomul caracteristic $P(\lambda) = \det(A-\lambda I_n) = (-1)^n\lambda^n+\ldots+\det(A)$ este un polinom cu coeficienți întregi în nedeterminata λ, cu coeficientul dominant ±1.

Atunci o eventuală rădăcină rațională a lui P va fi în mod necesar întreagă. Cum $a\in\mathbb{Q}$ şi $a\in(0, 1) \Rightarrow a\notin\mathbb{Z} \Rightarrow P(a) \neq 0 \Rightarrow$ $\det(A-aI_n) \neq 0 \Rightarrow$ matricea $A-aI_n$ este inversabilă $\Rightarrow X = O_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.29. Fie A, B$\in\Gamma$. Atunci $(-I_n)B = -B\in\Gamma$ şi $A+(-B) = A-B\in\Gamma$.

De asemenea $kA\in\Gamma$, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$ şi $A^n\in\Gamma$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Conform teoremei Caley-Hamilton există $\alpha_1, ..., \alpha_n\in\mathbb{Z}$ a.î. $A^n+\alpha_1A^{n-1}+...+\alpha_{n-1}A+\alpha_nI_n = O_n$.

Dacă $\det(A) = \pm1$, atunci $\alpha_n = \pm1$, deoarece $\alpha_n = \det(A)$.

Fie $U\in\Gamma$.

(i). $\det(U) = \pm1 \Rightarrow U^n+\alpha_1U^{n-1}+...+\alpha_{n-1}U\pm I_n = O_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow U(U^{n-1}+\alpha_1U^{n-2}+...+\alpha_{n-1}I_n) = \pm I_n$$

deci $U^{-1} = \pm (U^{n-1} + \alpha_1U^{n-2} + ... + \alpha_{n-1}I_n)\in\Gamma$.

(ii). $\det(U) = 0$. Fie $k\in\mathbb{N}$, $k \le n$, k minim cu proprietatea că

$$U^k+a_1U^{k-1}+...+a_{k-1}U+a_kI_n = O_n.$$

Din $\det(U) = 0$, rezultă $a_k = 0$, deci $U^k+a_1U^{k-1}+...+a_{k-1}U = O_n$.

Luând $V = U^{k-1}+a_1U^{k-2}+...+a_{k-1}I_n$, rezultă $UV = VU = O_n$ şi $V \neq O_n$ (altfel se contrazice minimalitatea lui k).

În cazul $U = O_n$, luăm $V \neq O_n$ arbitrară.

4.30. Se ştie că $\text{tr}(AB-BA) = 0$, pentru orice A, $B\in M_n(\mathbb{C})$. Dacă λ este o valoare proprie a matricei AB-BA (adică ecuația $(AB-BA)X = \lambda X$ are soluție nenulă $X\in M_{n,1}(\mathbb{C})$), atunci dacă $(AB - BA)^2 = I_n$, avem $(AB - BA)^2X = \lambda^2X = X$, deci $\lambda\in\{-1, +1\}$, aşadar AB-BA are valorile proprii ±1. Cum $0 = \text{tr}(AB-BA)$ este suma celor n valori proprii rezultă că dacă există A, B ca în enunț atunci n este număr par.

Pentru $n = 2$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisfac $(A_2B_2 - B_2A_2)^2 = I_2$, iar pentru $n = 2m$ ($m\in\mathbb{N}^*$), $A = \begin{pmatrix} A_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_2 \end{pmatrix}$ şi

$B = \begin{pmatrix} B_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_2 \end{pmatrix}$ sunt matrice care satisfac $(AB - BA)^2 = I_n$, deci numerele $n\in\mathbb{N}^*$ căutate sunt cele pare.

4.31. Fie $A_i = \{ z\in\mathbb{C} \mid z^{a_i} = 1, i = 1, ..., n \}$.

Avem $|A_i| = a_i = d_{ii}$, $|A_i\cap A_j| = d_{ij}$.

Dacă $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ z_1, z_2, ..., z_n \}$, ataşăm fiecărei mulţimi A un vector $V_i\in\mathbb{R}^N$, $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{iN})$, unde $v_{ik} = \begin{cases} 0, & dacă\ z_k \notin A_i \\ 1, & dacă\ z_k \in A_i \end{cases}$.

Avem $d_{ij} = |A_i\cap A_j| = (V_i)\cdot(V_j)^t$, deci considerând matricea $M\in M_{n,N}(\{0, 1\})$, $M = (v_{ik})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,N}}}$, avem $D = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = M\cdot M^t$.

Arătăm că, în general, $\det(M\cdot M^t) \geq 0$, pentru orice matrice M (nu neapărat pătratică). Considerăm polinomul $P(\lambda) = \det(M\cdot M^t + \lambda I_n)$ care nu are rădăcini pozitive (dacă ar exista $\lambda > 0$ a.î. $\det(M\cdot M^t + \lambda I_n) = 0$ sistemul omogen $(M\cdot M^t + \lambda I_n)X = O_n$ ar avea o soluţie nebanală X_0, deci $M\cdot M^t\cdot X_0 = -\lambda X_0$, $X_0\in M_{n,1}(\mathbb{R}) \Rightarrow (X_0)^t\cdot M\cdot M^t\cdot X_0 = -\lambda\cdot(X_0)^t\cdot X_0 < 0 \Leftrightarrow [(X_0)^t\cdot M]\cdot[(X_0)^t\cdot M]^t < 0 \Leftrightarrow W^t\cdot W < 0$, care este falsă).

Deci $P(\lambda) \geq 0$ pentru $\lambda \geq 0$ şi punând $\lambda = 0$ obţinem

$$\det(D) = \det(M\cdot M^t) \geq 0.$$

4.32. Fie matricele $I_n, A, A^2, ..., A^{n^2}$. Sistemul omogen cu n^2+1 necunoscute şi n^2 ecuaţii: $x_0 I_n + x_1 A + x_2 A^2 + ...+ x_{n^2} A^{n^2} = 0$ admite şi soluţii nebanale, deci există un polinom nenul $f\in\mathbb{C}[X]$ a.î. $f(A) = O_n$.

Fie f şi g polinoamele de grad minim cu proprietatea că $f(A) = g(C) = O_n$. Atunci $f(0), g(0) \neq 0$. Într-adevăr, dacă $f(0) = 0$, atunci $f(X) = Xf_1(X)$ şi deci $Af_1(A) = O_n$. Cum $\det(A) \neq 0 \Rightarrow f_1(A) = O_n$, ceea ce contrazice minimalitatea gradului lui f. Fie $h\in\mathbb{C}[X]$, $h = fg$,

$h = \sum_{k=0}^{t} a_k X^k$. Cum h(A) = h(C) = O_n ⇒ h(A)B = h(C)D ⇒ $(\sum_{k=0}^{t} a_k A^k)$B = $(\sum_{k=0}^{t} a_k C^k)$D. Cum $A^kB = C^kD$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, obținem $a_0B = a_0D$. Dar $a_0 = h(0) = f(0)g(0) \neq 0$, deci B = D.

4.33. Fie $B = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq V$ şi $B' = \{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq W$ baze, A, B matricele lui f şi respectiv g în raport cu bazele (B, B′) şi respectiv (B′, B). Egalitatea

$$(-1)^n \lambda^n P_{f\circ g}(\lambda) = (-1)^m \lambda^m P_{g\circ f}(\lambda)$$

este echivalentă cu

$$(-1)^n \lambda^n \det(AB-\lambda I_m) = (-1)^m \lambda^m \det(BA-\lambda I_n)$$

şi rezultă imediat din egalitatea matriceală

$$\begin{pmatrix} AB-\lambda I_m & -A \\ O_{n,m} & -\lambda I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & O_{m,n} \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O_{m,n} \\ B & I_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda I_m & -A \\ O_{n,m} & BA-\lambda I_n \end{pmatrix}$$

trecând la determinant în ambii membri (ținând cont de problemele **1.12.** şi **1.13.**).

Considerând acum V = W deducem că

$$(-1)^n \lambda^n P_{f\circ g}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n P_{g\circ f}(\lambda),$$

de unde $P_{f\circ g}(\lambda) = P_{g\circ f}(\lambda)$ pentru orice λ, adică $P_{f\circ g} = P_{g\circ f}$.

4.34. Considerăm sistemul:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Cum rang(A) = 2 < n, sistemul admite soluții nenule, depinzând de n-2 parametri.

Putem presupune (după o eventuală renumerotare) că $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Alegând d minor principal, soluțiile sistemului sunt de forma: $x_1 = \sum_{j=3}^{n} c_{1j}x_j$, $x_2 = \sum_{j=3}^{n} c_{2j}x_j$, $x_j \in \mathbb{C}$, j=3, …, n. Înlocuind în ecuația $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = 0$ din (S), obținem:

$$a_{i1}\sum_{j=3}^{n} c_{1j}x_j + a_{i2}\sum_{j=3}^{n} c_{2j}x_j + \sum_{j=3}^{n} a_{ij}x_j = 0$$

sau $$\sum_{j=3}^{n}(a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + a_{ij})x_j = 0\text{, oricare } x_3, \dots, x_n.$$

De aici, $a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+a_{ij} = 0$, pentru orice i = 1, …, n şi j =3, …, n. Prin urmare putem lua $p_i = a_{i1}$, $r_i = a_{i2}$, pentru i = 1, …, n, $q_j = -c_{1j}$, $s_j = -c_{2j}$, pentru j = 3, …, n iar $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$.

Cu aceste notații, $a_{ij} = p_iq_j + r_is_j$, pentru orice i, j∈{1, 2, …, n}.

§ 5. Programare liniară.

5.1. Prima restricție satisface condiția cerută. Cea de a doua restricție poate fi scrisă sub forma: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 10 \end{cases}$, ceea ce face ca sistemul dat să devină acum

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 10 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \ge 12 \end{cases}$$

şi înmulțind ultimele două restricții cu (-1) găsim reprezentarea cerută şi anume:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 \le -10 \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 \le -12 \end{cases}.$$

5.2. Pentru a face ca toate variabilele să fie pozitive, vom face următoarea schimbare de variabile:

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \;\; y_1 \geq 0 \\ x_2 = y_2 - y_3, \;\; y_2, y_3 \geq 0 \\ x_3 = -y_4, \;\; y_4 \geq 0 \\ x_4 = y_5, \;\; y_5 \geq 0 \end{cases},$$

astfel că, restricțiile din problema **5.1.**, vor deveni:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + y_4 - 4y_5 \leq 6 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 - y_4 + 5y_5 \leq 10 \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 + y_4 - 5y_5 \leq -10 \\ -3y_1 - y_2 + y_3 - 4y_4 - 3y_5 \leq -12 \\ y_j \geq 0, \;\; 1 \leq j \leq 5 \end{cases}.$$

Observație. Când spunem că variabila x_2 are un semn oarecare, înseamnă că putem avea $x_2 < 0$, $x_2 = 0$, sau $x_2 > 0$. Scriind $x_2 = y_2 - y_3$ cu $y_2, y_3 \geq 0$, este evident că dacă: $y_2 < y_3 \Rightarrow x_2 < 0$

$$y_2 = y_3 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$y_2 > y_3 \Rightarrow x_2 > 0.$$

5.3. A demonstra că X_p este convexă înseamnă a arăta că pentru orice două soluții posibile x_1 şi x_2, combinația liniară convexă $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ este de asemenea soluție posibilă a problemei date (cu $0 \leq \lambda \leq 1$).

Fie deci x_1 şi x_2 soluții posibile ale problemei de programare liniară:

$$[\text{opt}]\ f = cx$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Atunci $\begin{cases} Ax_1 = b \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} Ax_2 = b \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$.

Dacă $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, este o combinație liniară convexă a celor două soluții, atunci

$$Ax = A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

şi cum $0 \le \lambda \le 1$, rezultă $x \ge 0$.

Deci combinaţia liniară convexă a soluţiilor posibile x_1 şi x_2 este de asemenea o soluţie posibilă a problemei date, ceea ce înseamnă că X_p este convexă.

Consecinţă. Orice combinaţie liniară convexă a două puncte ale lui X_p este de asemenea un punct din X_p, adică $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X_p$, pentru orice $x_1, x_2 \in X_p$ şi orice $\lambda \in [0, 1]$. Cum pentru $\lambda \in [0, 1]$ există o infinitate de valori, deducem că, o dată cu două soluţii diferite x_1 şi $x_2 \in X_p$, mulţimea X_p conţine o infinitate de soluţii posibile.

5.4. Reamintim că a scrie o PPL sub *formă canonică* înseamnă a scrie condiţiile cerute sub forma:

a) $\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$ pentru [max]f = cx şi

b) $\begin{cases} Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{cases}$ pentru [min]f = cx.

(i). Vom schimba mai întâi variabilele problemei pentru a le avea pe toate de acelaşi semn. Vom scrie astfel că:

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \ \ y_1 \ge 0 \\ x_2 = y_2 - y_3, \ \ y_2, y_3 \ge 0 \\ x_3 = -y_4, \ \ y_4 \ge 0 \\ x_4 = y_5, \ \ y_5 \ge 0 \end{cases},$$

ceea ce face ca problema să devină:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 + 3y_4 + 2y_5 \le 10 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 + 5y_5 = 12 \\ -y_1 + 3y_2 - 3y_3 - y_4 - 2y_5 \ge 6 \\ y_j \ge 0, \ 1 \le j \le 5 \\ [\max] f = 3y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 2y_5 \end{cases}.$$

Deoarece prima restricţie este în concordanţă cu cerinţa de maximalizare, vom desface restricţia a doua în două inegalităţi, una în concordanţă cu scopul problemei, iar cealaltă nu, făcând-o însă concordantă prin înmulțire cu (-1), cum de altfel vom proceda şi cu cea de a treia restricție a problemei. Vom avea deci:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 + 3y_4 + 2y_5 \le 10 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 + 5y_5 \le 12 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 + 5y_5 \ge 12 \; \big| \cdot (-1) \\ -y_1 + 3y_2 - 3y_3 - y_4 - 2y_5 \ge 6 \; \big| \cdot (-1) \\ y_j \ge 0,\; 1 \le j \le 5 \\ [\max] f = 3y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 2y_5 \end{cases},$$

ceea ce devine: $$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 + 3y_4 + 2y_5 \le 10 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 + 5y_5 \le 12 \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 + 2y_4 - 5y_5 \le -12 \\ y_1 - 3y_2 + 3y_3 + y_4 + 2y_5 \le -6 \\ y_j \ge 0,\; 1 \le j \le 5 \\ [\max] f = 3y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 2y_5 \end{cases}.$$

(ii). Facem schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} x_1 = -y_1,\;\; y_1 \ge 0 \\ x_2 = y_2,\;\; y_2 \ge 0 \\ x_3 = y_3 - y_4,\;\; y_3, y_4 \ge 0 \\ x_4 = y_5,\;\; y_5 \ge 0 \end{cases}$$

şi aducem restricțiile la forma concordantă cu scopul problemei:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 + y_5 \ge -4 \\ -2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 5y_5 \ge 6 \\ -3y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 - y_5 \ge 10 \\ 3y_1 - y_2 - 2y_3 + 2y_4 + y_5 \ge -10 \\ y_j \ge 0,\; 1 \le j \le 5 \\ [\min] f = -y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 3y_4 + 2y_5 \end{cases}.$$

5.5. Reamintim că a scrie o PPL sub *formă standard* înseamnă a scrie PPL sub forma matriceală: $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ [opt]f = cx \end{cases}$

(i). Pentru a ajunge la forma dorită, vom face mai întâi o schimbare de variabilă care să ne conducă numai la variabile pozitive şi anume:

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \;\; y_1 \geq 0 \\ x_2 = -y_2, \;\; y_2 \geq 0 \\ x_3 = y_3 - y_4, \;\; y_3, y_4 \geq 0 \\ x_4 = -y_5, \;\; y_5 \geq 0 \\ x_5 = y_6, \;\; y_6 \geq 0 \end{cases}.$$

Introducem variabilele $y_7 \geq 0$ şi $y_8 \geq 0$ prin adunare şi respectiv scădere în prima şi respectiv în ultima restricţie pentru a le face egalităţi. Aceste ultime două variabile nu afectează funcţia obiectiv şi nici soluţia problemei, având însă unele semnificaţii în interpretarea soluţiei problemei. Pentru a nu fi omise în calcule în timpul soluţionării problemei, le vom scrie şi în funcţia obiectiv cu coeficienţii zero.

În aceste condiţii, problema considerată devine:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + 2y_6 + y_7 = 10 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - 3y_5 - y_6 = 8 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 2y_4 - 5y_5 - y_6 - y_8 = 14 \\ y_j \geq 0, \; 1 \leq j \leq 8 \\ [opt]f = 2y_1 - 3y_2 - 4y_3 + 4y_4 - 2y_5 + y_6 + 0 \cdot y_7 + 0 \cdot y_8 \end{cases}.$$

(ii). Problema este pusă sub formă canonică. Vom avea forma standard:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + y_2 = 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + y_3 = 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\ [\max] f = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \end{cases}.$$

(iii). Problema este pusă sub formă canonică. Vom avea forma standard:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - y_1 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - y_2 = 12 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - y_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\ [\min] f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 \end{cases}.$$

(iv). Pentru a pune problema sub formă standard vom avea în urma schimbării de variabile:

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \ \ y_1 \geq 0 \\ x_2 = y_2, \ \ y_2 \geq 0 \\ x_3 = y_3 - y_4, \ \ y_3, y_4 \geq 0 \\ x_4 = y_5, \ \ y_5 \geq 0 \\ x_5 = -y_6, \ \ y_6 \geq 0 \end{cases},$$

problema:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + y_6 + z_1 = 10 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - y_6 = 12 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 3y_5 - y_6 - z_2 = -15 \ \ \Big| \cdot (-1) \\ y_j \geq 0, \ 1 \leq j \leq 6 \\ z_k \geq 0, \ 1 \leq k \leq 2 \\ [\max] f = 2y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - 2y_6 + 0z_1 + 0z_2 \end{cases}.$$

Forma standard la care s-a ajuns nu îndeplineşte condiția de a avea termenii liberi pozitivi, astfel că înmulțim a treia restricție cu (-1).

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + y_6 + z_1 = 10 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - y_6 = 12 \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - 3y_5 + y_6 + z_2 = 15 \\ y_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq 6 \\ z_k \geq 0,\ 1 \leq k \leq 2 \\ [\max] f = 2y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - 2y_6 + 0z_1 + 0z_2 \end{cases}.$$

Căutăm o matrice unitate de ordinul trei şi observăm că în cadrul matricei coeficienților coloana lui z_1 şi coloana lui z_2 sunt două dintre coloanele matricei unitate căutate E_3 având deci coloanele unu (z_1) şi trei (z_2). Vom adăuga la membrul stâng al restricției a doua o variabilă artificială u_1 care va intra în funcția obiectiv cu coeficientul –M (M > 0) (astfel de coeficienți sunt denumiți *coeficienți de penalizare*). Dacă scopul problemei era de minimalizare, variabila se introducea cu coeficientul +M (M>0), metodologia de lucru rămânând nemodificată.

Deci forma standard de lucru a problemei considerate va fi:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + y_6 + z_1 = 10 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - y_6 + u_1 = 12 \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - 3y_5 + y_6 + z_2 = 15 \\ y_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq 6 \\ z_k \geq 0,\ 1 \leq k \leq 2 \\ u_1 \geq 0 \\ [\max] f = 2y_1 + 3y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - 2y_6 + 0z_1 - Mu_1 + 0z_2 \end{cases}.$$

(v). Procedând ca la punctual (iv), facem schimbarea de variabilă:

$$\begin{cases} x_1 = -y_1,\ \ y_1 \geq 0 \\ x_2 = y_2 - y_3,\ \ y_2, y_3 \geq 0 \\ x_3 = y_4,\ \ y_4 \geq 0 \end{cases},$$

şi problema devine:

$$\begin{cases} -y_1+2y_2-2y_3+3y_4 \ge 6 \\ -2y_1-3y_2+3y_3+y_4=2 \\ -y_1-3y_2+3y_3+5y_4 \le 4 \\ -2y_1-y_2+y_3+4y_4 \ge 5 \\ y_j \ge 0,\ 1 \le j \le 4 \\ [\min]f=-4y_1-5y_2+5y_3+3y_4 \end{cases}.$$

şi prin introducerea *variabilelor de ecart* z_1, z_2 şi z_3 la restricțiile unu, trei şi patru şi a *variabilelor artificiale* u_1, u_2 şi u_3 la restricțiile unu, doi şi patru, problema, adusă acum la forma standard de lucru, este:

$$\begin{cases} -y_1+2y_2-2y_3+3y_4-z_1+u_1=6 \\ -2y_1-3y_2+3y_3+y_4+u_2=2 \\ -y_1-3y_2+3y_3+5y_4+z_2=4 \\ -2y_1-y_2+y_3+4y_4-z_3+u_3=5 \\ y_j \ge 0,\ 1 \le j \le 4 \\ z_k \ge 0,\ 1 \le k \le 3 \\ u_l \ge 0,\ 1 \le l \le 3 \\ [\min]f=-4y_1-5y_2+5y_3+3y_4+0z_1+Mu_1+Mu_2+0z_2+0z_3+Mu_3 \end{cases}$$

5.6. (i). Matricea A este A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ şi se observă imediat că are rangul 2. Să notăm cu C_{ij}, $i < j$, $1 \le i, j \le 5$ toate matricele pătratice de ordin doi ce pot fi formate cu coloanele lui A:

$$C_{12}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C_{13}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C_{14}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C_{15}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C_{24}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C_{25}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C_{34}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_{35}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ C_{45}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observăm că toate matricele C_{ij}, $i<j$, $1 \le i, j \le 5$ sunt nesingulare. Vom avea deci zece baze pe care le vom nota cu C_k, $1 \le k \le 10$.

Fixându-ne una din baze, fixăm celelalte variabile ca fiind nule şi avem de rezolvat un sistem de forma Cx = b, cu soluția x = C^{-1}b.

Deci $$x^{C_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_2} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_3} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_4} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 6/7 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_5} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_6} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_7} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_8} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_9} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$x^{C_{10}} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Remarcăm că numai şase din cele zece soluții sunt de bază, celelalte trei având componente negative. Din cele şase soluții de bază două sunt nedegenerate, iar celelalte patru sunt degenerate.

Soluțiile de bază ale problemei date sunt:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_2 = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6/7 \end{pmatrix};\ x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

din care observăm că x_1, x_3, x_4 şi x_5 coincid ca formă, diferenţa dintre ele constând în poziţia diferită pe care o ocupă zeroul care indică perechea cu care componenta nenulă formează baza (coloanele corespunzătoare din matricea A), coincidenţa ca formă a soluţiilor datorându-se degenerării.

Deci, $X_B = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \} = \{x_k\}_{k=\overline{1,7}}$.

(ii). Matricea sistemului de restricţii A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ are rangul 2, ceea ce înseamnă că vom găsi cel puţin două coloane ale sale liniar independente.

Cu notaţiile de la (i) avem:

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ C_{34} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

şi se constată imediat că avem şase perechi de vectori liniar independenţi.

Deducem

$$x_1 = C_{12}^{-1} \cdot b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 16/3 \end{pmatrix};$$

$$x_2 = C_{13}^{-1} \cdot b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/5 \\ 16/5 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = C_{14}^{-1} \cdot b = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$x_4 = C_{23}^{-1} \cdot b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$x_5 = C_{24}^{-1} \cdot b = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32/5 \\ 4/5 \end{pmatrix};$$

$$x_6 = C_{34}^{-1} \cdot b = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32/3 \\ 28/3 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că problema admite patru soluții de bază şi anume:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 16/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_2 = \begin{pmatrix} 28/5 \\ 0 \\ 16/5 \\ 0 \end{pmatrix};\ x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 32/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix};\ x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 32/3 \\ 28/3 \end{pmatrix},$$

soluții care sunt şi nedegenerate.

(iii). Matricea sistemului de restricții A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ are rangul 2. Avem:

$$C_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ C_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deducem $\quad x_1 = C_{12}^{-1} \cdot b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix};$

$$x_2 = C_{13}^{-1} \cdot b = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

de unde deducem că avem două soluții de bază (degenerate) şi anume:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ şi } x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vectorul $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ are două componente strict pozitive, fiind soluție posibilă, dar nu soluție de bază deoarece coloanele matricei A, care corespund celor două componente strict pozitive sunt liniar dependente.

5.7. Reamintim că pentru o PPL scrisă matriceal sub forma standard Ax = b, x $\geq$ 0 şi [opt] f = cx, se notează prin

X = mulțimea soluțiilor sistemului Ax = b,

X_p = mulțimea soluțiilor posibile = {x | Ax = b şi x $\geq$ 0},

X_B = mulțimea soluțiilor de bază (adică acele soluții posibile cu proprietatea că vectorii coloană ai matricei A corespunzători componentelor strict pozitive ai acelei soluții sunt liniar independenți şi deci formează o bază),

X_0 = mulțimea soluțiilor optime.

Avem următorul şir de incluziuni: $X_0 \subseteq X_B \subseteq X_P \subseteq X$.

În cazul rezolvării grafice (pentru cazul a două variabile) vom determina mai întâi poligonul convex X_p. Conform teoriei generale în cazul în care o PPL are optim finit rezultă că soluția optimă a problemei este este constituită din unul din vârfurile poligonului. Astfel:

(i). Avem că $X_p = \varnothing$, deci problema nu are soluție.

(ii). Se găseşte X_p = {(2/3, 2/3)}. Având o singură soluție posibilă, ea este şi optimă deci f_{max} = f(2/3, 2/3) = 10/3.

(iii). Găsim că X_p este determinat de următoarele vârfuri:

A(0, 3), B(0, 2), C(1/3, 2/3), D(1, 0), E(3/2, 0) şi F(48/17, 15/17).

Deci X_B = { (0, 3), (0, 2), (1/3, 2/3), (1, 0), (3/2, 0), (48/17, 15/17) }.

Pentru a vedea care sunt punctele de extrem calculăm valoarea lui f în fiecare din soluțiile din bază. Avem:

f(A) = f((0, 3)) = 2·0+5·3 = 15;

f(B) = f((0, 2)) = 2·0+5·2 = 10;

$f(C) = f((1/3, 2/3)) = 2\cdot(1/3)+5\cdot(2/3) = 4;$

$f(D) = f((1, 0)) = 2\cdot 1+5\cdot 0 = 2;$

$f(E) = f((3/2, 0)) = 2\cdot(3/2)+5\cdot 0 = 3;$

$f(F) = f((48/17, 15/17)) = 2\cdot(48/17)+5\cdot(15/17) = 171/17.$

Se observă imediat că f_{max} = [max] f = f(A) = 15, deci soluția optimă este $x_0 = (0, 3)$.

(iv). Se deduce imediat că poligonul convex X_p are vârfurile: A(0, 1), B(1, 0), C(16/7, 9/7) şi D(8/5, 9/5).

Deducem că:

$$f(A) = 4;\ \ f(B) = 3;\ \ f(C) = 12;\ \ f(D) = 12$$

şi se observă că avem două puncte de maxim şi anume C şi D.

Conform teoriei generale a unei PPL o dată cu două puncte C şi D, întregul segment ce le uneşte cuprinde soluțiile optime ale problemei.

Avem deci optim multiplu.

(v). Deoarece dreptele $-x_1+x_2 = 2$ şi $x_1-x_2 = 2$ sunt paralele (deci nu se pot intersecta) deducem că X_p este nemărginită. În acest caz avem optim infinit (adică funcția liniară $f(x_1, x_2) = 3x_1+5x_2$ cu $(x_1, x_2)\in X_p$ ia valori oricât de mari „tinzând” la infinit).

5.8. (i). Facem tabelul simplex:

c		2	3	1	4	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	b
2	C_1^A	1	0	1	2	8
3	C_2^A	0	1	2	1	10
	z	2	3	8	7	46
	Δ=z-c	0	0	7	3	

Se observă că $\{C_1^A,\ C_2^A\}$ este o bază unitară (primal admisibilă).

Cum toate diferențele Δ sunt pozitive deducem că PPL, (i) are optim finit, [max] f = 46 şi se obține pentru $\widetilde{x}_0$ = (8, 10, 0, 0).

(ii). Facem tabelul simplex:

c		1	2	3	4	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	b
1	C_1^A	1	0	1	2	8
2	C_2^A	0	1	1	3	12
	z	1	2	3	8	32
	Δ=z-c	0	0	0	4	

Analog ca la (i), $\{C_1^A,\ C_2^A\}$ este o bază unitară (primal admisibilă) şi cum toate diferenţele Δ sunt pozitive deducem că PPL, (ii) are optim finit, [max] f = 32 şi se obţine pentru $\widetilde{x}_0$ = (8, 12, 0, 0).

(iii). Facem tabelul simplex:

c		1	2	3	4	5	10	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	C_6^A	b
1	C_1^A	1	1	0	1	2	1	12
3	C_3^A	0	1	1	2	1	3	18
	z	1	4	3	7	5	10	66
	Δ=z-c	0	2	0	3	0	0	

Se observă că $\{C_1^A,\ C_3^A\}$ este bază unitară (primal admisibilă) şi cum toate diferenţele Δ sunt pozitive deducem că PPL, (iii) are optim finit, [max] f = 66 şi se obţine pentru $\widetilde{x}_0$ = (12, 0, 18, 0, 0, 0).

(iv). Se observă că PPL-max nu este pusă sub formă standard. Pentru a o aduce la forma standard introducem aşa zisele *variabile fictive* (sau *ecart*) x_5, $x_6 \geq 0$, scriind PPL-max sub forma standard:

$$\text{PPL-max: } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 + x_6 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ [\max] f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 \end{cases}$$

Facem acum tabelul simplex (observând că baza primal admisibilă este { C_2^A , C_5^A, C_6^A }).

c		2	1	5	-1	0	0	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	C_6^A	b
1	C_2^A	-1	1	-2	-2	0	0	2
0	C_5^A	3	0	-1	1	1	0	5
0	C_6^A	2	0	-3	5	0	1	3
	z	-1	1	-2	-2	0	0	2
	Δ	-3	0	-7*	-1	0	0	

Observăm că Δ_3=-7<0 şi toate elementele coloanei C_3^A sunt negative, deci PPL-max de mai sus nu are optim finit.

(v). Aducem PPL-max la forma standard prin introducerea variabilelor fictive: x_4, x_5, $x_6 \geq 0$, obținând forma standard:

$$\text{PPL-max: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ [\max] f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \end{cases}$$

Observăm că B={ C_4^A , C_5^A, C_6^A } este bază primal admisibilă corespunzătoare soluției de bază $\widetilde{x}_0$= (0, 0, 0, 15, 20, 5).

Facem acum tabelul simplex:

c		2	1	3	0	0	0	
	Baza	C_1^A	C_2^A	C_3^A	C_4^A	C_5^A	C_6^A	b
0	C_4^A	1	2	3	1	0	0	15
0	C_5^A	2	1	5	0	1	0	20
0	C_6^A	1	2	1	0	0	1	5
	z	0	0	0	0	0	0	0
	Δ	-2	-1	-3 *	0	0	0	
0	C_4^A	-1/5	7/5	0	1	-3/5	0	3
3	C_3^A	2/5	1/5	1	0	1/5	0	4
0	C_6^A	3/5	9/5	0	0	-1/5	1	1
	z	6/5	3/5	3	0	3/5	0	12
	Δ	-4/5 *	-2/5	0	0	3/5	0	
0	C_4^A	0	2	0	1	-2/3	1/3	10/3
3	C_3^A	0	-1	1	0	1/3	-2/3	10/3
2	C_1^A	1	3	0	0	-1/3	5/3	5/3
	z	2	3	3	0	1/3	4/3	40/3
	Δ	0	2	0	0	1/3	4/3	

După o primă iterație am aplicat teorema de îmbunătățire de la PPL, constatând că şi la a doua iterație trebuie să aplicăm aceeaşi teoremă.

Obținem în final că soluția optimă (degenerată) este $\tilde{x}_0$=(5/3, 0, 10/3, 10/3, 0, 0) iar maximul funcției obiectiv este egal cu 40/3.

§6. Forme biliniare. Forme pătratice.

6.1. Presupunem că există f, g:V→K a.î. b(x, y) = f(x)g(y), oricare ar fi x,y∈V. Fie B = {a_1, a_2,…, a_n} o bază a lui V. Notăm $\alpha_i = f(a_i)$, $\beta_i = g(a_i)$, i = 1, 2, …, n. Atunci, matricea lui b în raport cu baza B este A = $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Deoarece rang A = 1 (deoarece b este nenulă) rezultă că rangul lui b este cu 1.

Reciproc, presupunem că rangul formei biliniare b este egal cu 1. Atunci, dacă B′ = {b_1, b_2,…, b_n} este o bază a lui V, matricea A′ a lui b în raport cu această bază va avea rangul egal cu 1. Rezultă că există $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in K$, a.î. $A' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ (vezi problema **1.70.**).

Deci, $b(x, y) = (x_1, \ldots, x_n)A'(y_1, \ldots, y_n)^t = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)(\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i)$,

oricare ar fi $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i \in V$.

Astfel, b(x, y) = f(x)g(y), unde f, g : V → K sunt definite prin

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,,\ g(y) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i \,.$$

6.2. (i). Se verifică axiomele spațiului vectorial.

(ii). Se arată imediat că dacă b_1,b_2 sunt din $B_s(V)$ sau $B_{as}(V)$ iar $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha b_1+\beta b_2 \in B_s(V)$, respectiv $B_{as}(V)$.

(iii). Dacă $b \in B_s(V) \cap B_{as}(V)$ atunci b(x, y) = b(y, x) şi b(x, y) = = - b(y, x), de unde deducem că b(x, y) = 0 pentru orice (x, y)∈V × V, adică $B_s(V) \cap B_{as}(V) = \{0\}$.

Pentru b∈B(V) notăm $b_1(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y)+b(y, x))$ şi $b_2(x, y) =$ $= \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x))$. Se verifică imediat că $b_1 \in B_s(V)$ şi $b_2 \in B_{as}(V)$ iar $b = b_1 + b_2$, de unde concluzia că $B(V) = B_s(V) \oplus B_{as}(V)$.

6.3. Dacă $b \in B_{as}(V)$ atunci în particular pentru x = y avem b(x, x) = -b(x, x) de unde b(x, x) = 0.

Reciproc, fie b∈B(V) a.î. b(x, x) = 0 pentru orice x∈V. Atunci pentru orice x, y∈V avem:

$0 = b(x+y, x+y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = b(x, y) +$ $+ b(y, x)$, de unde deducem că $b(y, x) = - b(x, y)$, adică $b \in B_{as}(V)$.

6.4. Dacă f este pozitiv definită atunci A admite exact n valori proprii strict pozitive $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Cum valorile proprii ale lui g sunt $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n > 0$ (vezi problema **4.20.**) deducem că g este pozitiv definită.

6.5. (i). Ştim că matricea lui f în raport cu B este $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ cu $a_{ij} = b(e_i, e_j)$, $1 \le i, j \le 3$. Din condiţiile din enunţ deducem că numerele a_{ij} verifică egalităţile: $a_{11} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 2$, $a_{12} - a_{22} = 2$, $a_{21} + 2a_{22} = 5$, $a_{31} - a_{11} = 4$, $2a_{13} + a_{23} = 7$, $a_{12} + a_{32} = 4$, $a_{13} - 2a_{23} = 1$.

Deducem imediat că $a_{12} = a_{21} = 3$, $a_{13} = a_{31} = 3$, $a_{23} = a_{32} = 1$, astfel că:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii). Cum A este simetrică, deducem că şi b este simetrică.

(iii). În general, dacă A este simetrică avem că:

$$f(x) = b(x, x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

În cazul nostru avem :

$$f(x) = -x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(iv). Avem $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10$ şi $\Delta_3 = \det(A) = -10$.

Cum $\Delta_i \neq 0$ $(0 \le i \le 3)$ putem aplica metoda lui Jacobi de aducere a lui f la forma canonică. Astfel, va exista o bază $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ a.î. dacă $y_{B'} = (y_1, y_2, y_3)$, atunci $f(y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 = -y_1^2 + \frac{1}{10} y_2^2 + y_3^2$.

Alegem $e_1' = \alpha_{11}e_1$

$e_2' = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2$

$e_3' = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3,$

iar dacă notăm cu $b : V \times V \to \mathbb{R}$ polara lui f, impunem condiţiile $b(e_i', e_j) = 0$ pentru orice $1 \le j \le i-1$ şi $b(e_i', e_i) = 1$ pentru orice $1 \le i \le 3$.

Din $b(e_1', e_1) = 1 \Rightarrow \alpha_{11}a_{11} = 1 \Rightarrow \alpha_{11} = -1 \Rightarrow e_1' = -e_1 = (-1,0,0)$.

Din $\begin{cases} b(e_2', e_1) = 0 \\ b(e_2', e_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{21}a_{11} + \alpha_{22}a_{21} = 0 \\ \alpha_{21}a_{12} + \alpha_{22}a_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_{21} + 3\alpha_{22} = 0 \\ 3\alpha_{21} + \alpha_{22} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{21} = \frac{3}{10} \\ \alpha_{22} = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow$ $e_2' = \frac{3}{10}e_1 + \frac{1}{10}e_2 = (\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, 0)$.

Din $\begin{cases} b(e_3', e_1) = 0 \\ b(e_3', e_2) = 0 \\ b(e_3', e_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{31}a_{11} + \alpha_{32}a_{21} + \alpha_{33}a_{31} = 0 \\ \alpha_{31}a_{12} + \alpha_{32}a_{22} + \alpha_{33}a_{32} = 0 \\ \alpha_{31}a_{13} + \alpha_{32}a_{23} + \alpha_{33}a_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_{31} + 3\alpha_{32} + 3\alpha_{33} = 0 \\ 3\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = 0 \\ 3\alpha_{31} + \alpha_{32} + 2\alpha_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{32} = \frac{10}{-10} = -1 \\ \alpha_{33} = \frac{-10}{-10} = 1 \end{cases} \Rightarrow$ $e_3' = -e_2 + e_3 = (0,-1,1)$.

Deci baza B′ = $\{e_1', e_2', e_3'\}$ în raport cu care f are forma canonică este formată din vectorii e_1'= (-1, 0, 0), e_2'= ($\frac{3}{10}$, $\frac{1}{10}$, 0) şi e_3'= (0, -1, 1).

6.6. 1). Faptul că b este formă biliniară (simetrică) rezultă din proprietățile “ urmei “ (vezi problema **1.9.**).

De exemplu: b(A+A′,B) = 2tr[(A+A′)B] – tr(A+A′)tr(B) = =2tr(AB+A′B) – (tr(A)+tr(A′))tr(B) = 2tr(AB)+2tr(A′B) – tr(A)tr(B) – -tr(A′)tr(B) = [2tr(AB) – tr(A)tr(B)] + [2tr(A′B)– tr(A′)tr(B)] = b(A,B) + + b(A′,B) şi analog celelalte condiții. În mod evident b este simetrică.

2). (i). Reamintim că baza canonică a lui $M_2(\mathbb{R})$ este B = {$E_1 = E_{11}$, $E_2 = E_{12}$, $E_3 = E_{21}$, $E_4 = E_{22}$} unde $E_1 = E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trebuie să punem în evidență matricea $(a_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ a lui b, unde $a_{ij} = b(E_i, E_j)$, $1\le i,j\le 4$.

Avem: $a_{11} = b(E_1, E_1) = 2tr(E_1^2) - tr^2(E_1) = 2-1=1$;

$a_{12} = b(E_1, E_2) = 2tr(E_1E_2) - tr(E_1)tr(E_2) = 0-0 = 0$;

$a_{13} = b(E_1, E_3) = 2tr(E_1E_3) - tr(E_1)tr(E_3) = 0-0 = 0$;

$a_{14} = b(E_1, E_4) = 2tr(E_1E_4) - tr(E_1)tr(E_4) = 0-1 = -1$;

$a_{22} = b(E_2, E_2) = 2tr(E_2^2) - tr^2(E_2) = 0-0 = 0$;

$a_{23} = b(E_2, E_3) = 2tr(E_2E_3) – tr(E_2)tr(E_3) = 2\text{-}0 = 2;$
$a_{24} = b(E_2, E_4) = 2tr(E_2E_4) – tr(E_2)tr(E_4) = 0\text{-}0 = 0;$
$a_{33} = b(E_3, E_3) = 2tr(E_3^2) – tr^2(E_3) = 0\text{-}0 = 0;$
$a_{34} = b(E_3, E_4) = 2tr(E_3E_4) – tr(E_3)tr(E_4) = 0\text{-}0 = 0;$
$a_{44} = b(E_4, E_4) = 2tr(E_4^2) – tr^2(E_4) = 2\text{-}1 = 1.$

Astfel, matricea lui b în raport cu B este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iar expresia analitică a lui b, pentru două elemente $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, va fi :

$$b(A,B) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} – 2a_{11}b_{22} + 4a_{12}b_{21}.$$

(iii). Pentru $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ avem:

$$f(A) = a_{11}^2 + a_{22}^2 – 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21.}$$

Dacă notăm $x_1 = a_{11}$, $x_2 = a_{12}$, $x_3 = a_{21}$ şi $x_4 = a_{22}$, atunci $A = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$ iar $f(A) = x_1^2 + x_2^2 –2x_1x_4 + 4x_2x_3$.

În vederea aplicării metodei lui Gauss-Lagrange grupăm termenii ce conţin pe x_1:

$$x_1^2 –2x_1x_4 = (x_1 – x_4)^2 - x_4^2 = y_1^2 - x_4^2 \text{ cu } y_1 = x_1 – x_4.$$

Atunci $f(A) = y_1^2 + 4x_2x_3 + x_2^2 - x_4^2$.

Scriind $x_2 = y_2 – y_3$ iar $x_3 = y_2 + y_3$ obţinem $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$, $y_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$ astfel că $f(A) = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2 + 0\cdot y_4^2$ cu $y_1 = x_1–x_4$, $y_2= \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3$, $y_3= -\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3$, $y_4 = x_4$.

Notăm cu B′ baza căutată, B′ = $\{E_1', E_2', E_3', E_4'\}$ şi $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cum $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea de trecere de la B la B′, atunci:

$E_1' = E_1 + E_4$, $E_2' = E_2 - E_4$, $E_3' = E_2 + E_3$, $E_4' = E_4$.

(iv). Signatura lui f este (2, 1).

6.7. (i). Se ştie că dacă $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ este matricea lui b căutată, atunci $a_{ij} = b(e_i, e_j)$. Astfel:

$a_{11} = b(e_1,e_1) = 1$, $a_{12} = b(e_1,e_2) = 0$, $a_{13} = b(e_1,e_3) = 0$, $a_{14} = b(e_1,e_4) = 1$,
$a_{21} = b(e_2,e_1) = -1$, $a_{22} = b(e_2,e_2) = 1$, $a_{23} = b(e_2,e_3) = 0$, $a_{24} = b(e_2,e_4) = 0$,
$a_{31} = b(e_3,e_1) = 1$, $a_{32} = b(e_3,e_2) = 2$, $a_{33} = b(e_3,e_3) = 1$, $a_{34} = b(e_3,e_4) = 4$,
$a_{41} = b(e_4,e_1) = 0$, $a_{42} = b(e_4,e_2) = 0$, $a_{43} = b(e_4,e_3) = 1$, $a_{44} = b(e_4,e_4) = 1$.

Deci $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii). Fie M matricea de trecere de la B la B′, adică $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Atunci matricea lui b în raport cu B′ va fi :

$$M^tAM = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & -3 \\ -1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

6.8. (i). Rezultă imediat ţinând cont de proprietăţile integralei.

(ii). Trebuie să calculăm $a_{ij} = b(x^{i-1}, x^{j-1})$, $1 \le i, j \le 3$.

Astfel:

$a_{11} = b(1, 1) = \int_0^1 dt = 1$, $a_{12} = a_{21} = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$, $a_{22} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$,

$a_{13} = a_{31} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, $a_{23} = a_{32} = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$, $a_{33} = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$.

Deci matricea căutată este $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

(iii). Se calculează $a'_{ij} = \int_0^1 (1-t^{i-1})(1-t^{j-1})dt$ cu $1 \le i,j \le 3$ şi obținem $A' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{12} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}$.

(iv). Dacă $p = a_1 + a_2X + a_3X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ avem:

$$f(p) = a_1^2 + \frac{1}{3}a_2^2 + \frac{1}{5}a_3^2 + a_1a_2 + \frac{2}{3}a_1a_3 + \frac{1}{2}a_2a_3.$$

(v). Avem $a_1^2 + a_1a_2 + \frac{2}{3}a_1a_3 = (a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3)^2 - \frac{1}{4}a_2^2 - \frac{1}{9}a_3^2 - \frac{1}{3}a_2a_3$ şi notăm $b_1 = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3$.

Atunci $f(p) = b_1^2 + \frac{1}{3}a_2^2 + \frac{1}{5}a_3^2 + \frac{1}{2}a_2a_3 - \frac{1}{4}a_2^2 - \frac{1}{9}a_3^2 - \frac{1}{3}a_2a_3 = b_1^2 + \frac{1}{12}a_2^2 + \frac{1}{6}a_2a_3 + \frac{4}{45}a_3^2$.

Continuăm:

$$\frac{1}{12}a_2^2 + \frac{1}{6}a_2a_3 = \frac{1}{12}(a_2^2 + 2a_2a_3) = \frac{1}{12}[(a_2+a_3)^2 - a_3^2] = \frac{1}{12}(a_2+a_3)^2 - \frac{1}{12}a_3^2.$$

Notăm cu $b_2 = a_2 + a_3$ şi obținem:

$$(*)\quad f(p) = b_1^2 + \frac{1}{12}b_2^2 - \frac{1}{12}a_3^2 + \frac{4}{45}a_3^2 = b_1^2 + \frac{1}{12}b_2^2 + \frac{1}{180}b_3^2 \text{ cu } b_3 = a_3.$$

Astfel avem formulele de schimbare a coordonatelor:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + \tfrac{1}{2}a_2 + \tfrac{1}{3}a_3 \\ b_2 &= \phantom{a_1 + \tfrac{1}{2}} a_2 + a_3 \\ b_3 &= \phantom{a_1 + \tfrac{1}{2}a_2 + } a_3. \end{aligned}$$

Dacă $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi notăm cu $B' = \{ e_1', e_2', e_3' \}$ baza față de care f are forma canonică dată de (∗), atunci:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_1' = e_1 - \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{6} e_3 \\ e_2' = e_2 + e_3 \\ e_3' = e_3 \end{cases}.$$

6.9. Fie $B = \{a_1, a_2, a_3\}$. Matricea lui f în raport cu baza B este :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

Avem $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1-\alpha^2$, $\Delta_3 = \det(A) = 1- 5\alpha^2$.

Forma pătratică f este pozitiv definită $\Leftrightarrow$ $\Delta_i > 0$, oricare ar fi $1 \le i \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\alpha^2 > 0 \\ 1-5\alpha^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

6.10. Grupăm la început termenii ce conțin pe x_1 :

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 = 2\left(x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3\right) =$$

$$= 2\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2 - x_2x_3\right] = 2y_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

cu (1) $y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$.

Continuând avem :

$$\begin{aligned} f &= (2y_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_2x_3) + (3x_2^2 - x_3^2 + 3x_2x_3) = \\ &= 2y_1^2 + (\frac{5}{2}x_2^2 - 3x_3^2 + x_2x_3) \end{aligned} \quad . \quad (2)$$

Considerăm acum doar termenii din (2) ce conțin pe x_2 :

$$\frac{5}{2}x_2^2+x_2x_3=\frac{5}{2}(x_2^2+\frac{2}{5}x_2x_3)=\frac{5}{2}[(x_2+\frac{1}{5}x_3)^2-\frac{1}{25}x_3^2]=\frac{5}{2}y_2^2-\frac{1}{10}x_3^2,$$

cu (3) $y_2=x_2+\frac{1}{5}x_3$ astfel că din (2) deducem:

$$f=2y_1^2+((\frac{5}{2}y_2^2-\frac{1}{10}x_3^2)-3x_3^2)=2y_1^2+\frac{5}{2}y_2^2-\frac{31}{10}x_3^2. \quad (4)$$

Notând (5) $y_3=x_3$ din (4) deducem că

$$f(y)=2y_1^2+\frac{5}{2}y_2^2-\frac{31}{10}y_3^2. (6)$$

Din (1), (3) şi (5) deducem că $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Dacă notăm cu C matricea de trecere de la B la B′ atunci

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -9/10 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel $\begin{cases} e_1'=e_1=(1,0,0) \\ e_2'=-\frac{1}{2}e_1+e_2=(-\frac{1}{2},1,0) \\ e_3'=-\frac{9}{10}e_1-\frac{1}{5}e_2+e_3=(-\frac{9}{10},-\frac{1}{5},1) \end{cases}$.

Deci noua bază din $\mathbb{R}^3$ în raport cu care f are forma canonică (6) este B′={e′₁, e′₂, e′₃} cu $e_1'=(1,0,0)$, $e_2'=(-\frac{1}{2},1,0)$, $e_3'=(-\frac{9}{10},-\frac{1}{5},1)$.

6.11. Matricea ataşată formei pătratice f este:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avem $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$,

$\Delta_4 = \det(A) = 12$. Cum $\Delta_i \neq 0$ ($0 \le i \le 4$) putem aplica metoda lui Jacobi de aducere a lui f la forma canonică. Astfel, va exista o bază $B' = \{ e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 \}$ a.î. dacă $y_{B'} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, atunci :

$$f(y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_4} y_4^2 = y_1^2 - y_2^2 + \frac{1}{3} y_3^2 - \frac{1}{4} y_4^2$$

iar vectorii bazei B′ se vor determina scriind :

$e'_1 = \alpha_{11} e_1$

$e'_2 = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2$

$e'_3 = \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 + \alpha_{33} e_3$

$e'_4 = \alpha_{41} e_1 + \alpha_{42} e_2 + \alpha_{43} e_3 + \alpha_{44} e_4$

şi dacă $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ este polara lui f, atunci $b(e'_i, e_j) = 0$ pentru orice $1 \le j \le i-1$ şi $b(e'_i, e_i) = 1$ pentru orice $1 \le i \le 4$.

Astfel, $b(e'_1, e_1) = 1 \Rightarrow \alpha_{11} = 1$.

Din $\begin{cases} b(e'_2, e_1) = 0 \\ b(e'_2, e_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{21} + 2\alpha_{22} = 0 \\ 2\alpha_{21} + 3\alpha_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{21} = 2 \\ \alpha_{22} = -1 \end{cases}$.

Din $\begin{cases} b(e'_3, e_1) = 0 \\ b(e'_3, e_2) = 0 \\ b(e'_3, e_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{31} + 2\alpha_{32} = 0 \\ 2\alpha_{31} + 3\alpha_{32} - \alpha_{33} = 0 \\ -\alpha_{32} + 2\alpha_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{31} = \frac{2}{3} \\ \alpha_{32} = -\frac{1}{3} \\ \alpha_{33} = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Din $\begin{cases} b(e'_4, e_1) = 0 \\ b(e'_4, e_2) = 0 \\ b(e'_4, e_3) = 0 \\ b(e'_4, e_4) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{41} + 2\alpha_{42} + \alpha_{44} = 0 \\ 2\alpha_{41} + 3\alpha_{42} - \alpha_{43} + \alpha_{44} = 0 \\ -\alpha_{42} + 2\alpha_{43} + 2\alpha_{44} = 0 \\ \alpha_{41} + \alpha_{42} + 2\alpha_{43} - \alpha_{44} = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{41} = \frac{1}{4} \\ \alpha_{42} = 0 \\ \alpha_{43} = \frac{1}{4} \\ \alpha_{44} = -\frac{1}{4} \end{cases}$.

Deci $e_1' = e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2' = 2e_1 - e_2 = (2, -1, 0, 0)$, $e_3' = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $e_4' = \frac{1}{4}a_1 + 0a_2 + \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{4}a_4 = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ sunt vectorii bazei B′ în raport cu care f are forma canonică. f nu este pozitiv definită.

6.12. Matricea lui f în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\Delta_1=1$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1$ şi $\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=3$ sunt nenuli, putem aplica metoda lui Jacobi. Deducem că forma canonică în raport cu baza $B'=\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ va fi $f(y) = y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{3}y_3^2$, unde $\widetilde{y}_{B'} = (y_1, y_2, y_3)$. Se observă că f este pozitiv definită.

Alegând $e'_1=\alpha_{11}e_1$ şi notând cu b polara lui f, din condiția $b(e'_1, e_1) = 1$ deducem că $\alpha_{11}=1$ deci $e'_1=e_1=(1, 0, 0)$.

Căutăm pe e'_2 sub forma $e'_2=\alpha_{21}e_1 +\alpha_{22}e_2$ iar din condițiile $b(e'_2, e_1) = 0$ şi $b(e'_2, e_2) = 1$ rezultă sistemul $\begin{cases} \alpha_{21} - \alpha_{22} = 0 \\ -\alpha_{21} + 2\alpha_{22} = 1 \end{cases}$, de unde $\alpha_{21}=\alpha_{22}=1$, adică $e'_2=e_1 +e_2 =(1, 1, 0)$.

În sfârşit căutăm pe e'_3 pe sub forma $e'_3=\alpha_{31}e_1 +\alpha_{32}e_2 +\alpha_{33}e_3$ iar din condițiile $b(e'_3, e_1) = b(e'_3, e_2) = 0$ şi $b(e'_3, e_3) = 1$ găsim sistemul $\begin{cases} \alpha_{31} - \alpha_{32} = 0 \\ -\alpha_{31} + 2\alpha_{32} = 0 \\ 3\alpha_{33} = 1 \end{cases}$, ce are soluția $\alpha_{31}=\alpha_{32}=0$ şi $\alpha_{33} = \frac{1}{3}$.

Deducem că $e'_3 = \frac{1}{3}e_3 = (0, 0, \frac{1}{3})$.

Deci baza B´ în raport cu care f are forma canonică este B´={e´$_1$, e´$_2$, e´$_3$} cu e´$_1$=e$_1$=(1, 0, 0), e´$_2$=e$_1$+e$_2$ =(1, 1, 0) şi e´$_3$=$\frac{1}{3}$e$_3$= =(0, 0, $\frac{1}{3}$).

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Andrei, C. Caragea, V. Ene : *Algebră* : *Culegere de probleme pentru examenele de admitere şi olimpiade şcolare*, Ed. Scorpion 7, Bucureşti, 1995.

2. D. Buşneag, I. V. Maftei : *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Ed. Scrisul Românesc, Craiova, 1983.

3. D. Buşneag şi alții: *Concursul de matematică „Gh. Țițeica"1979-1998*, Ed. Gil, Zalău, 1999.

4. D. Buşneag, D. Piciu: *Algebră liniară*, Ed. Universitaria, Craiova, 2001.

5. D. Buşneag, D. Piciu:*Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

6. D. Buşneag, F. Chirteş, D. Piciu: *Probleme de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

7. A. Dincă: *Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 1999.

8. A. Fadeev, I. Sominsky: *Problems in Higher algebra*, Mir Publishers Moscow, 1968.

9. I. D. Ion, C. Niță, N. Radu, D. Popescu : *Probleme de algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

10. I. D. Ion, N. Radu : *Algebra*, Ed Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

11. C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu : *Bazele algebrei* (vol 1), Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.

12. C. Năstăsescu, M. Țena, G. Andrei, I. Otărăşeanu : *Probleme de structuri algebrice*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1988.

13. C. Năstăsescu, C. Niță, M. Brandiburu, D. Joița : *Exerciții de algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1992.

14. I. V. Proscuryakov : *Problems in linear algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1985.

15. I. Purcaru : *Elemente de algebră şi programare liniară*, Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1982.

16. I. Tomescu (coordonator) : *Probleme date la olimpiadele de matematică pentru liceu*, (1950 – 1990), Ed.Ştiințifică, Bucureşti, 1992.

17. I. Vladimirescu : *Matematici speciale*, Reprografia Universității din Craiova, 1987.

18. I. Vladimirescu, M. Popescu : *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Ed. Universitaria, Craiova, 1994.

19. *Gazeta Matematică* (1980 – 2002).

Ne face plăcere să amintim aici numele autorilor mai multor probleme cuprinse în această lucrare (împreună cu soluțiile corespunzătoare) : Gheorghe Andrei, Titu Andreescu, Mihai Bencze, Mircea Becheanu, Marius Cavachi, Constantin Cocea, Marius Dădârlat, Gheorghe Eckstein, Marius Ghergu, Ion D. Ion, Daniel Jinga, Valentin Matrosenco, Dorel Miheț, Cristinel Mortici, Nicolae Negoescu, Ovidiu Munteanu, Liliana Niculescu, Constantin P. Niculescu, Laurențiu Panaitopol, Mihai Piticari, Vasile Pop, Eugen Popa, Dan Radu, Ion Savu, Maria S. Rus, Ioan Tomescu, Marcel Țena.