Noţiuni introductive

2013-2014

Marina Gorunescu

Spaţiu liniar real

Un grup comutativ $(E,+)$ se numeşte *spaţiu liniar* (*vectorial*) *real* dacă există o lege de compoziţie externă „ $\cdot$ ", care asociază fiecărei perechi $(\alpha, x), \alpha \in \mathbf{R}, x \in E$ elementul $\alpha \cdot x \in E$, lege ce verifică următoarele axiome

(V_1) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \ \forall x, y \in E$

(V_2) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \ \forall \alpha, \ \beta \in \mathbf{R}, \forall x \in E$

(V_3) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \ \forall x \in E$

(V_4) $1 \cdot x = x, \ \forall x \in E$, unde 1 este elementul unitate din $\mathbf{R}$.

Elementele spaţiului liniar E se numesc *vectori*.

1. Exemplu

- *Spațiul n-dimensional real* este mulțimea $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\quad x_i \in \mathbf{R}\}$

Definim adunarea a două elemente din $\mathbf{R}^n$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

respectiv înmulțirea cu scalar a unui element din $\mathbf{R}^n$:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)\ ,\ \alpha \in \mathbf{R}$$

Elementul neutru fața de adunare este $\theta = (0, 0, \dots, 0)$.

$\mathbf{R}^n$ înzestrat cu cele două operații este un spațiu liniar real.

În modelarea matematică a situaţiilor din viaţa reală, identificăm atributele (caracteristicile) numerice ale unui obiect cu componentele unui vector.

2. Exemplu

- Există 3 tipuri de flori de Iris: *Iris Setosa*, *Virginica* şi *Versicolor*, fiecare exemplar fiind caracterizat de lungimea şi lăţimea sepalelor, respectiv a petalelor. Prezentăm atributele a trei irişi din clase diferite:

clasa	PW	PL	SW	SL
Setosa (S)	2	14	33	50
Virginica (V)	23	51	31	69
Versicolor (v)	16	47	33	63

Fiecare floare va fi identificată cu un vector din $\mathbf{R}^4$:

S=(2,14,33,50); V=(23,51,31,69), v=(16, 47,33,63)

In algoritmul de modelare vom lucra cu aceşti vectori.

3. Exemplu

- Pentru a decide dacă un pacient are sau nu cancer hepatic, studiile clinice arată că se iau în considerare anumite enzime serice cele mai importante din punct de vedereclinic fiind: alkaline phosphatase (FA), g-glutamyl transferase (gGT), leucine aminopeptidase (LAP) şi colesterol (C).

Tabelul următor prezintă valorile acestor enzime în cazul a 2 pacienţi:

	FA	gCT	LAP	C
P1	162	255	74	258
P2	422	488	183	292

Astfel celor doi pacienţi li se asociază vectorii:

$P_1 = (162, 255, 74, 258)$ şi $P_2 = (422, 488, 183, 292)$

şi în problema de modelare vom lucra cu aceşti vectori.

4. Exemplu

- Pentru a decide ce risc bancar prezintă un eventual client, se studiază baza de date existentă luându-se în considerare pentru început doar două caracteristici numerice: venitul lunar şi rata la un credit deja existent. De exemplu:

client	Venit lunar	Rata la credit deja existent	risc
C1	2800	300	scăzut
C2	1900	0	scăzut
C3	2000	700	înalt
C4	800	100	înalt

în problema de modelare aceşti clienţi vor fi identificaţi cu vectorii bidimensionali:

C1 (2800,300)

C2(1900,0)

C3(2000,700)

C4(800,100)

Vectori in Matlab

Vectorii *linie* sunt matrici cu o linie şi *n* coloane.

```
»x=[1 -2  7 15]
```

Prin instrucţiunea a:b:c unde $a < c$, $b > 0$ obţinem un vector de forma:

a a+b a+2b a+3b ...a+mb

Operaţiile cu vectori sunt cele cunoscute din $\mathbf{R}^n$: adunarea şi înmulţirea cu scalari.

```
»x=[1 -2  7 15]; y=0:2:6; x+y
» 0.2*x
```

Vectorii *coloană* sunt matrici cu *n* linii şi o coloană. In Matlab elementele sunt separate de punct şi virgulă.

```
» u=[-2;3;1;4]
```

Adunarea a doi vectori de aceeaşi dimensiune şi respectiv înmulţirea cu scalar se definesc ca în cazul vectorilor linie.

```
» u=[3;2;1;-10];u+v
» (-3)*u
```

Putem transforma un vector linie într-un vector coloană prin procedeul numit *transpunere*, notat „ ' ”:

```
» x=[2 -1 4 19]; x'
```

- *Matricele cu m linii şi n coloane* $M_{m,n}$ **(R)** formează un spaţiu vectorial real.

În acelaşi context al modelării, considerând *n* obiecte cu *p* caracteristici, putem reprezenta aceste date sub forma unei matrice **X**, cu *n* linii şi *p* coloane.

Notaţia x_i^k utilizată *se referă* la a *i*-a caracteristică observată a obiectului numărul *k* din baza de date.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_i^1 & \dots & x_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^k & \dots & x_i^k & \dots & x_p^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_i^n & \dots & x_p^n \end{pmatrix}$$

Astfel datele despre irişi sunt reprezentate de matricea

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 33 & 50 \\ 2 & 13 & 45 & 28 \\ 24 & 56 & 31 & 67 \end{pmatrix}$$

în timp datele cu pacienţii de la gastroenterologie sunt reprezentate de

$$G = \begin{pmatrix} 162 & 255 & 74 & 258 \\ 422 & 488 & 183 & 292 \end{pmatrix}$$

Datele despre clienţii băncii sunt reprezentate de matricea::

$$C_B = \begin{pmatrix} 2500 & 300 \\ 1900 & 0 \\ 2000 & 700 \\ 800 & 100 \end{pmatrix}$$

Matrice in Matlab

Pentru a scrie o matrice în Matlab folosim următoarea sintaxă:

- fiecare linie a matricei poate fi considerată a fi o listă de numere, separate între ele de virgulă sau spaţiu liber;
- fiecare linie a matricei este despărţită de următoarea prin punct şi virgulă;
- elementele matricei se scriu între paranteze drepte.

```
» M=[1 -2 3 -4;2 1 5 2;-2 3 1 0; 3 1 2 -5]
» M1=[2 1 -1 3; 1 3 2 -5]
```

5. Exemplu

În teoria economică se interpretează spaţiul $\mathbf{R}^n$, ca fiind *spaţiul complexelor de bunuri deconsum*.. Dacă fiecare *bun de consum* este caracterizat de un anumit indice $k = 1,2,..n$, atunci un *complex de bunuri* este un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, unde componenta x_k reprezintă cantitatea în care se găseşte *bunul de consum k*.

Cantitatea *unitate* a *bunului de consum k* este $e_k = (0,\ldots,1,\ldots,0)$

Produs scalar

Fie E un spaţiu vectorial real. Se numeşte *produs scalar* pe E o aplicaţie $\langle\, ,\rangle : E\times E \to \mathbf{R}$, $(x, y)\mapsto \langle x, y\rangle$ care satisface următoarele proprietăţi:

(S_1) $\langle\, ,\rangle$ este biliniară:

$$\langle \alpha\cdot x+\beta\cdot y, z\rangle = \alpha\cdot\langle x, z\rangle + \beta\cdot\langle y, z\rangle \text{ şi}$$

$$\langle x, \alpha\cdot y+\beta\cdot z\rangle = \alpha\cdot\langle x, y\rangle + \beta\cdot\langle x, z\rangle,\ \forall x, y, z\in E,\ \forall \alpha, \beta\in \mathbf{R}$$

(S_2) $\langle\, ,\rangle$ este pozitiv definită: $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x\in E$ şi $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=\theta_E$

(S_3) $\langle\, ,\rangle$ este simetrică: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \forall x, y\in E$.

6-7. Exemple

- Pe **R**, considerat ca spațiu vectorial real, produsul scalar va fi definit ca produsul uzual.

- Pe **R**^{n}, considerând elementele $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ definim *produsul scalar euclidian* $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$.

8.Exemplu

- Calculaţi produsul scalar al vectorilor $x = (1, 3, -2, \sqrt{3})$ şi $y = (-4, 1, 2, 0)$

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot 0 = -5$$

9. Exemplu

- În teoria economică un *sistem de prețuri* este vectorul $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, unde p_k este prețul unitar al *bunului de consum k*

Prețul *complexului de bunuri* $x \in \mathbf{R}^n$, în raport cu sistemul de prețuri *p*, este dat de formula

$$\langle p, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k \,.$$

10. Exemplu

- În compoziţia chimică a unui medicament avem 4 substanţe A, B, C, D în cantităţile x_A, x_B, x_C, x_D şi astfel medicamentul poate fi reprezentat de vectorul $x = (x_A, x_B, x_C, x_D)$.

Preţul unitar pentru fiecare substanţă în parte fiind p_A, p_B, p_C, p_D, putem introducesistemul de preţuri $p = (p_A, p_B, p_C, p_D)$ care reprezintă valoarea materiilor prime din medicamentul considerat.

Preţul medicamentului va fi:

$$\langle p, x \rangle = p_A \cdot x_A + p_B \cdot x_B + p_C \cdot x_C + p_D \cdot x_D$$

Produs scalar in Matlab

Produsul scalar pe $\mathbf{R}^n$ poate fi considerat a fi produsul dintre un vector linie şi un vector coloană, amândoi având aceeaşi dimensiune:

dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, atunci se defineşte: $\langle x, y \rangle = x * y = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$

```
»x=[3 2 1 -7]; u=[4;-1;2;13]; x*u
```

Dacă avem:

```
» x=[3 2 1 -7]; y=[4 2 -2 12];x*y
    ??? Error using ==> mtimes
    Inner matrix dimensions must agree.
```

Calculăm produsul scalar a doi vectori linie sau doi vectori coloană.

(Comentariile sunt precedate de %)

```
»x=[3 2 1];y=[2 4 5];x*y'  % x si y sunt vectori linie
»x=[3 2 1];x*x'  % x este vector linie
» u=[2;0;-3];v=[-1;2;3];u'*v   % u si v sunt vectori coloana
```

Norma.
Spaţiu liniar normat

Aplicația reală $\| \ \|$ definită pe un spațiu liniar real E se numeşte *normă* dacă verifică următoarele axiome:

(N_1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$; $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = \theta_E$

(N_2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Perechea $(E, \| \ \|)$ este un *spațiu liniar normat*.

11-12. Exemple

- Norma definită pe **R** este $\|x\| = |x|,\ x \in \mathbf{R}$;

- Pe **R**^{n} se pot defini mai multe norme şi anume:

  - $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (norma euclidiană);
  - $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
  - $\|x\|_\infty = \max\{|x_k|, 1 \le k \le n\}$.

Norme in Matlab

Cele trei norme definite pe $\mathbf{R}^n$, $\|x\|$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ unde $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$,
se calculează în Matlab folosind instrucțiunile:

norm(x) = $\|x\|$; norm(x,1) = $\|x\|_1$; norm(x,inf) = $\|x\|_\infty$

```
» x=[-1 3 14 -11 2]; norm(x)
» norm(x,1)
» norm(x,inf)
```

Un spațiu liniar real cu produs scalar este un spațiu liniar normat deoarece:

- Dacă $\langle \, , \, \rangle$ este un produs scalar pe spațiul liniar real E, atunci expresia $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ definește o normă pe E.

În $\mathbf{R}^n$, norma corespunzătoare produsului scalar euclidian este dată de:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \text{, unde } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Spaţiu metric

Spațiul metric este o pereche formată dintr-o mulțime oarecare, nevidă, X și o aplicație $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ numită *metrică* sau *distanță*, aplicație ce verifică următoarele axiome:

(d_1) $\forall x, y \in X$ avem $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$

(d_2) $\forall x, y \in X$ avem $d(x, y) = d(y, x)$

(d_3) $\forall x, y, z \in X$ avem *inegalitatea triunghiului:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

13-14-15. Exemple

- Considerând o mulțime oarecare nevidă X, definim aplicația

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

Se verifică imediat că perechea (X,d) este un spațiu metric.

- Pe $\mathbf{R}$ se definește aplicația $d: \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$, $d(x,y)=|x-y|$, care este o metrică.

- $(\mathbf{R}^2,d)$, unde $d: \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}_+$, $d((x,y),(a,b))=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ este un spațiu metric.

Spațiile liniare normate sunt un caz particular de spații metrice:

- Un spațiu liniar normat $(E, \| \|)$ este un spațiu metric, aplicația $d : E \times E \to \mathbf{R}_+$ definită de $d(x, y) = \|x - y\|$ fiind o metrică.

16. Exemple

Folosind acest rezultat se pot defini următoarele metrici pe **R**^{n}:

- $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ (distanța euclidiană);
- $d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} | x_k - y_k |$ (distanța Manhattan);
- $d_\infty(x, y) = \max_{1 \le k \le n} | x_k - y_k |$ (distanța Cebâșev).

Distante (metrici) in Matlab

Pentru a calcula distanţele definite anterior, dintre doi vectori din R^n, folosim rezultatul din teorema prezentată

$$d(x,y) = \|x - y\| :$$

```
» x=[-1 3 14 -11 2];y=[2 -5 21 1 -10];norm(x-y)
»  norm(x-y,1)
»  norm(x-y,inf)
```

Bila deschisă

Într-un spațiu metric (X, d) *bila deschisă* de centru $x_0 \in X$ şi rază r este mulțimea:

$$B(x_0, r) = \{x \in X,\ d(x, x_0) < r\}$$

17. Exemple

- În spațiul (X,d), prezentat anterior avem:

$$B(x_0,1)=\{\, x\in X, d(x,x_0)<1\}=\{x_0\}$$
$$B(x_0,2)=\{\, x\in X, d(x,x_0)<2\}=X\,.$$

- În (**R**, *d*) bila deschisă este

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R},\ |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)\ ,$$

în timp ce în ($\mathbf{R}^2$, *d*) avem:

$$B((a, b), r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ d((x, y), (a, b)) < r\} =$$
$$= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}\ ,$$

adică discul deschis de centru (a, b) şi rază *r*.

- Într-un spațiu liniar normat $\left(E,\|\ \|\right)$ *bila deschisă* de centru $x_0 \in E$ şi rază r este mulțimea $B(x_0,r)=\left\{x\in E,\ \|x-x_0\|<r\right\}$.

Clustering

În *Data Mining* **clusterizarea** este un proces de organizarea a obiectelor, care sunt asemănătoare (similare) dintr-un anumit punct de vedere. *Cluster-ul* este o mulţime de obiecte asemănătoare între ele şi diferite de obiectele aparţinând altui cluster.

Simplificând, în cazul datelor de la gastroenterologie putem spune că vectorii corespunzători pacienţilor cu cancer hepatic se afla în bila deschisă de centru $C_1(356,\ 350,\ 134,\ 228)$ în timp ce vectorii corespunzători pacienţilor ce nu au cancer hepatic sunt în bila deschisă de centru $C_2(184,\ 203,\ 95,\ 189)$.

Nu se specifică raza bilelor!

Pentru a decide ce diagnostic au cei doi pacienţi prezentaţi anterior calculăm $d(P_i, C_j), i, j \in \{1,2\}$:

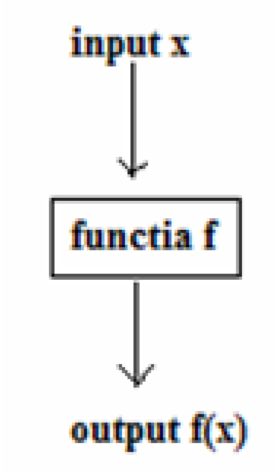
$$d(P_1, C_1) = \sqrt{(165-356)^2 + (255-350)^2 + (74-134)^2 + (258-228)^2} = 223,62$$

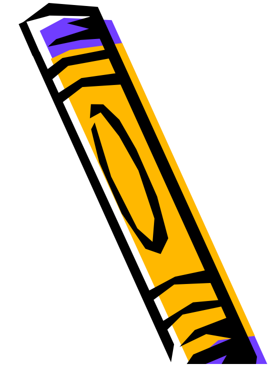
$$d(P_1, C_2) = \sqrt{(165-184)^2 + (255-203)^2 + (74-95)^2 + (258-189)^2} = 90,92$$

Deoarece $d(P_1, C_2) < d(P_1, C_1)$ pacientul P_1 va aparţine bilei de centru C_2.

Funcţii

Funcțiile joacă un rol fundamental în matematica, ştiințe, inginerie, economie. Funcția este caracterizată de faptul că asociază un unic „output" fiecărui „input" admisibil și o putem descrie metaforic ca o maşină sau o „black box" care transformă input-ul in output





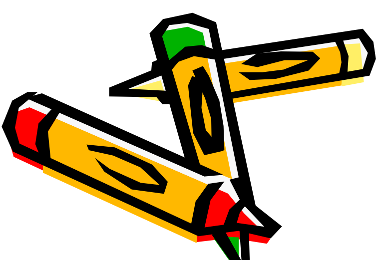
Matematic, a defini o *funcție* (*aplicație*) f de la mulțimea A la mulțimea B înseamnă a asocia fiecărui element $x \in A$ un element unic determinat din B, notat $f(x)$, numit valoarea funcției f în x. (G.L.Dirichlet şi N.I Lobacevski).

Se scrie $f : A \to B, \quad x \mapsto f(x)$.

Mulțimea A este domeniul de definiție, iar B domeniul de valori ale lui f.

Graficul unei funcții $f : A \to B$, este mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$

Două funcții $f : A \to B$, $f_1 : A_1 \to B_1$ sunt *egale* dacă: $A = A_1$, $B = B_1$ şi $\forall x \in A$ avem $f(x) = f_1(x)$



18. Exemplu

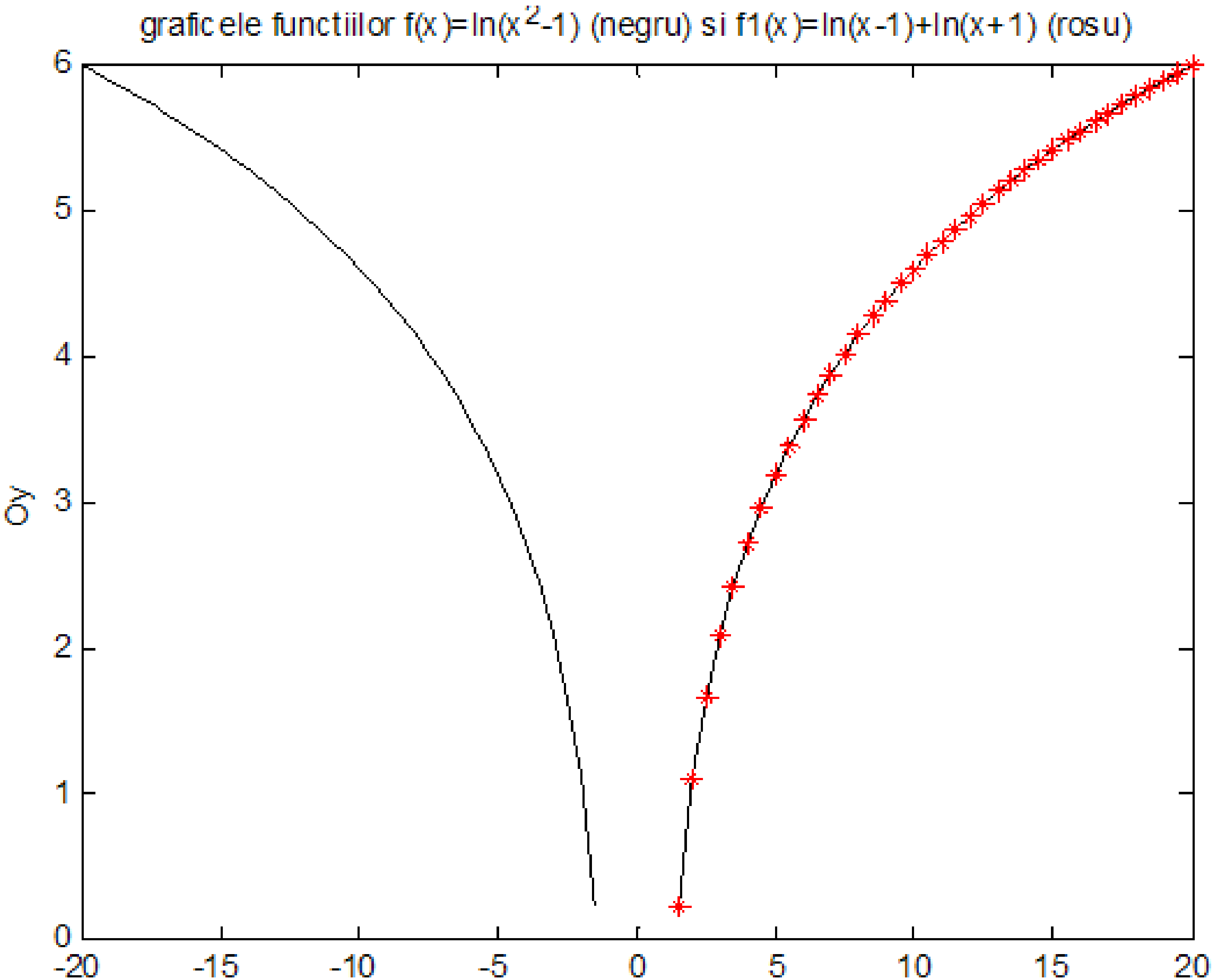
Funcțiile

$f:(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\to\mathbf{R},\ \ f(x)=\ln(x^2-1)$

şi

$f_1:(1,+\infty)\to\mathbf{R}, f_1(x)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$

nu sunt egale, având domenii de definiție diferite, fapt ilustrat și de graficele lor


graficele functiilor f(x)=ln(x2-1) (negru) si f1(x)=ln(x-1)+ln(x+1) (rosu)
Oy
6
5
4
3
2
1
0
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

Pe parcursul acestui curs vom întâlni următoarele tipuri de funcţii:

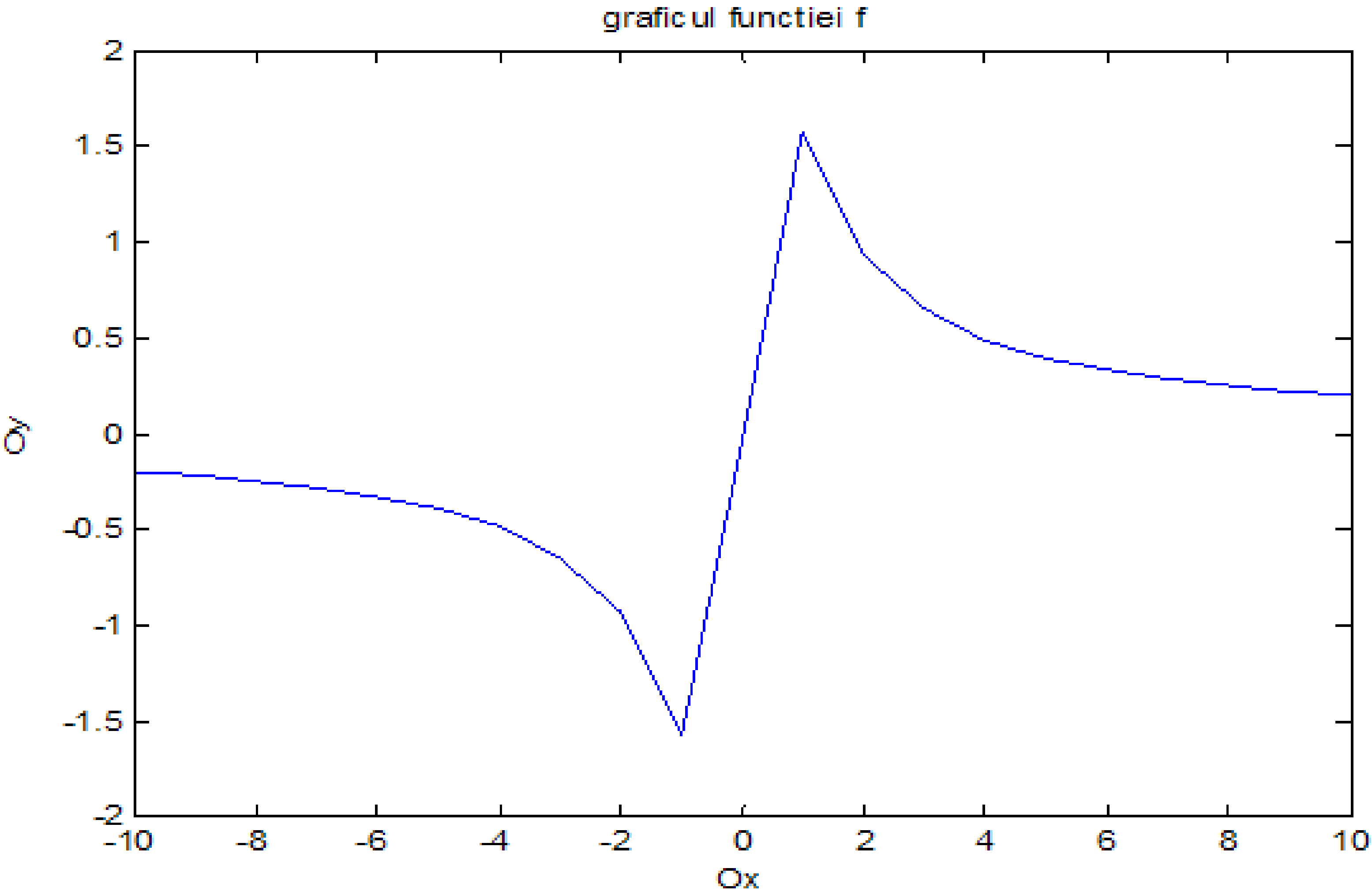
- funcţii reale de variabilă reală
- funcţii reale de mai multe variabile reale
- funcţii vectoriale de variabilă reală
- funcţii vectoriale de mai multe variabile reale

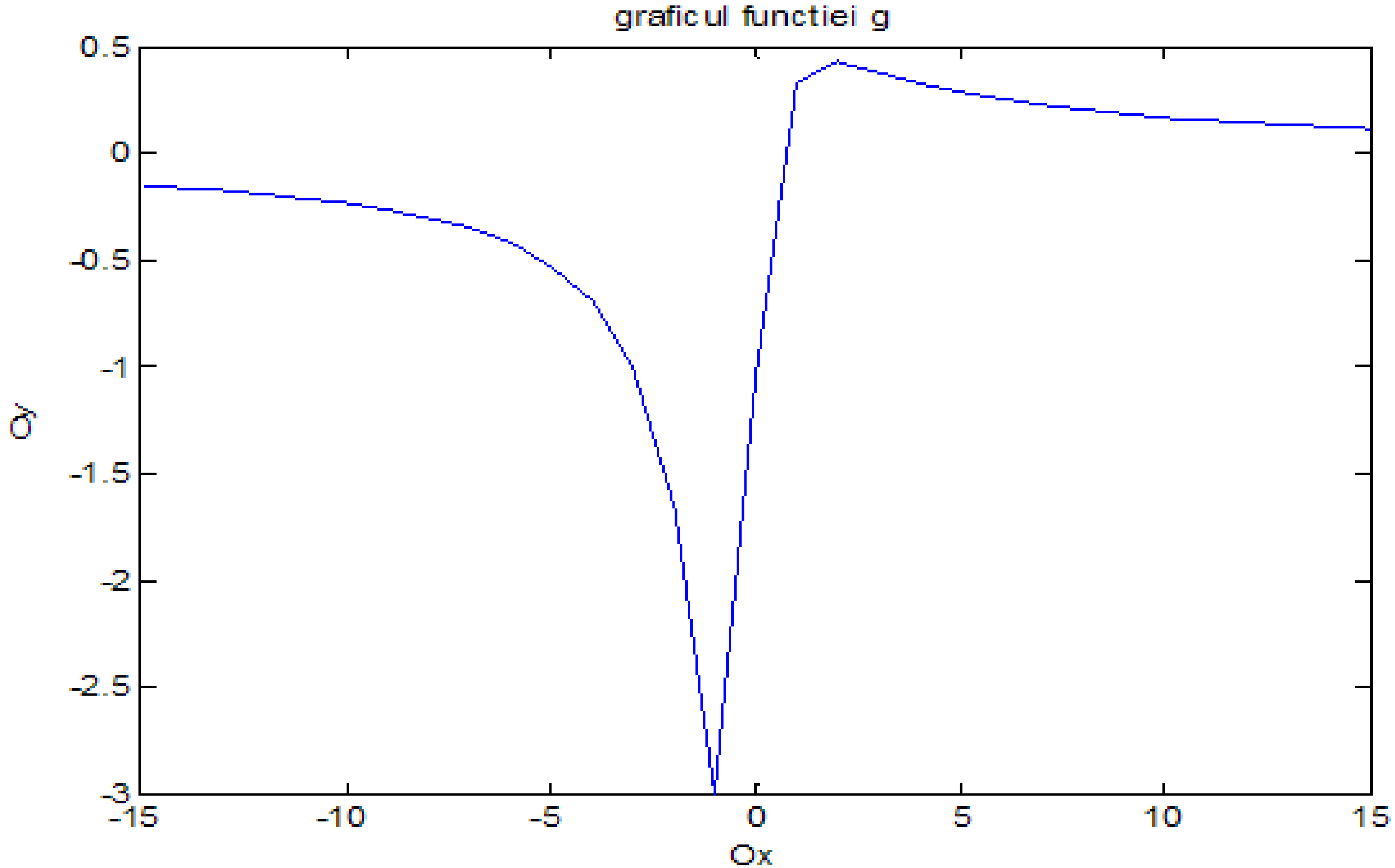
19. Exemple de funcţii reale de variabilă reală

exemple

$$f:[-10,10]\to \mathbf{R},\ f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

$$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$


graficul functiei f
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
Oy
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
Ox

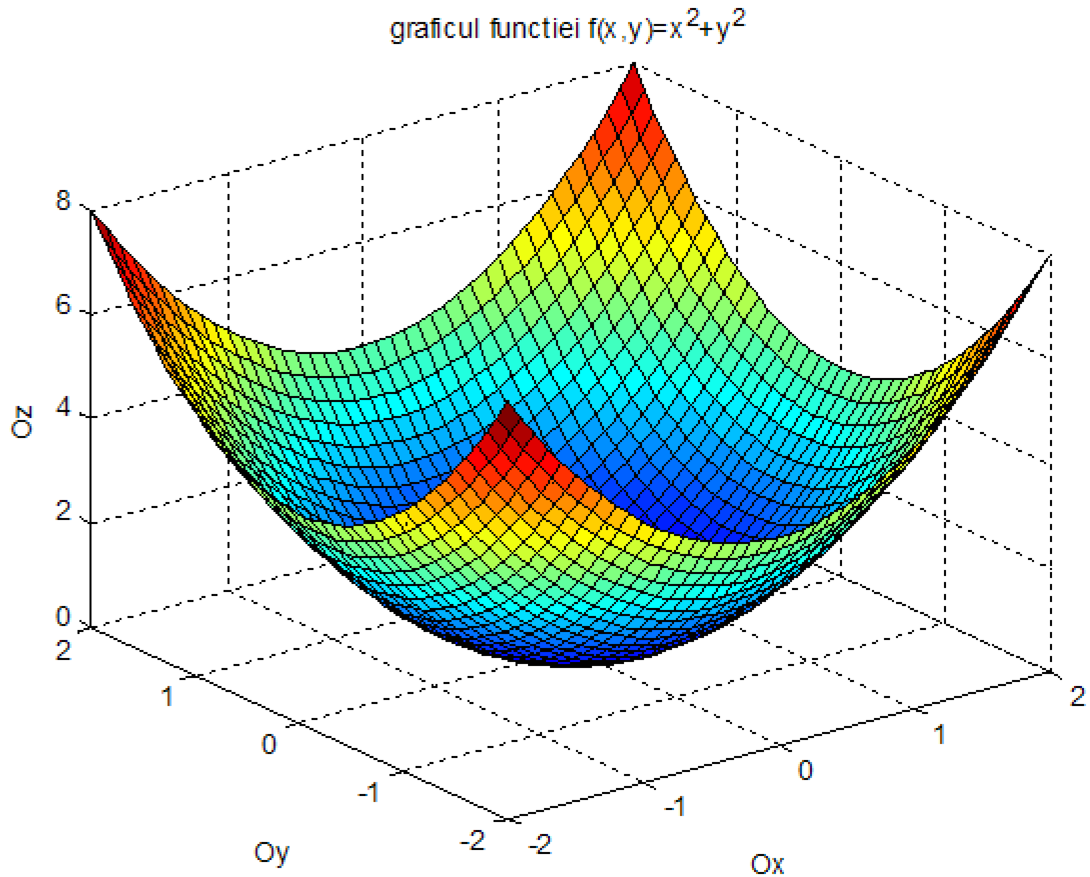

graficul functiei g
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
Oy
-15
-10
-5
0
5
10
15
Ox

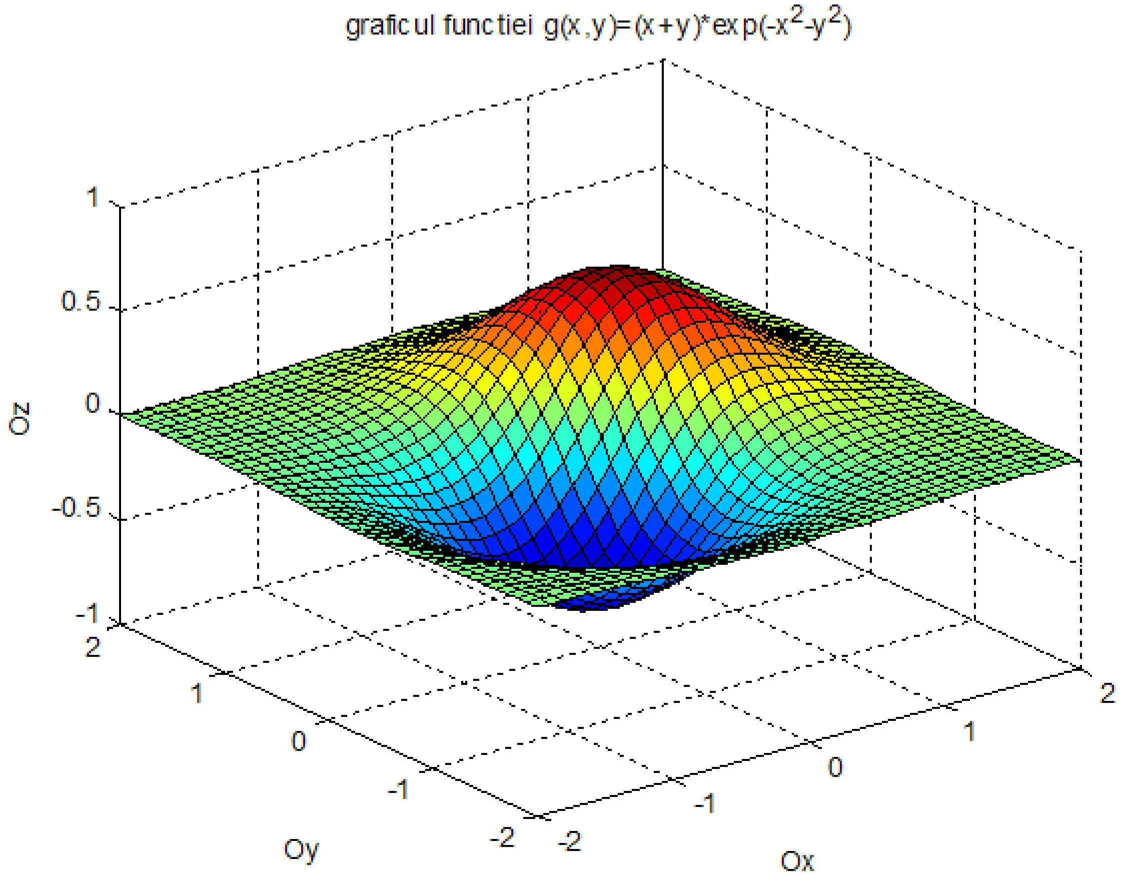
20. Exemple de funcţii reale de mai multe variabile reale

$f : A \to \mathbf{R}$, unde $A \subset \mathbf{R}^n$

Exemple

- $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \; f(x, y) = x^2 + y^2$
- $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \; g(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - y^2}$


graficul functiei f(x,y)=x^2+y^2
Oz
8
6
4
2
0
Oy
2
1
0
-1
-2
Ox
-2
-1
0
1
2


graficul functiei g(x,y)=(x+y)*exp(-x^2-y^2)
1
0.5
0
-0.5
-1
Oz
2
1
0
-1
-2
Oy
-2
-1
0
1
2
Ox

- $f(x,y,z)=\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$,

funcție definită pe $A=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\neq 0\}=\ \mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$;

- $g(x,y,z)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

funcție definită pe $A=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x^2+y^2+z^2<1\}$.

Funcţii vectoriale de variabilă reală

-

$f : A \to \mathbf{R}^m$, unde $A \subset \mathbf{R}$, dată de

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in A$$

unde $f_k : A \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le m$;

funcțiile f_k se numesc *componentele* lui f.

O funcție ce ia valori în $\mathbf{R}^m$ este de fapt un *m-uplu* de funcții reale de variabilă reală. $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

21. Exemple de funcţii vectoriale de variabilă reală

- $f:[0.2\pi]\to$ $\mathbf{R}^2$ definită de $f(t)=\left((1+\cos t)\cdot\cos t,(1+\cos t)\cdot\sin t\right)$
- $g:[0,10\pi]\to$ $\mathbf{R}^3$ definită prin $g(t)=(\cos t,\sin t,t)$;

Funcţii vectoriale de mai multe variabile reale

$f : A \to \mathbf{R}^m$, unde $A \subset \mathbf{R}^n$, date de

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in A,$$

unde $f_k : A \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le m$.

22. Exemple de funcţii vectoriale de mai multe variabile reale

- $f(x,y)=(x+y, x\cdot y, x^2+y^2)$ este o funcție cu valori în $\mathbf{R}^3$ şi al cărei domeniu de definiție este $\mathbf{R}^2$
- $g(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ este o funcție

ce ia valori în $\mathbf{R}^3$ şi al cărei domeniu de definiție este

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\neq 0\}=\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}.$$

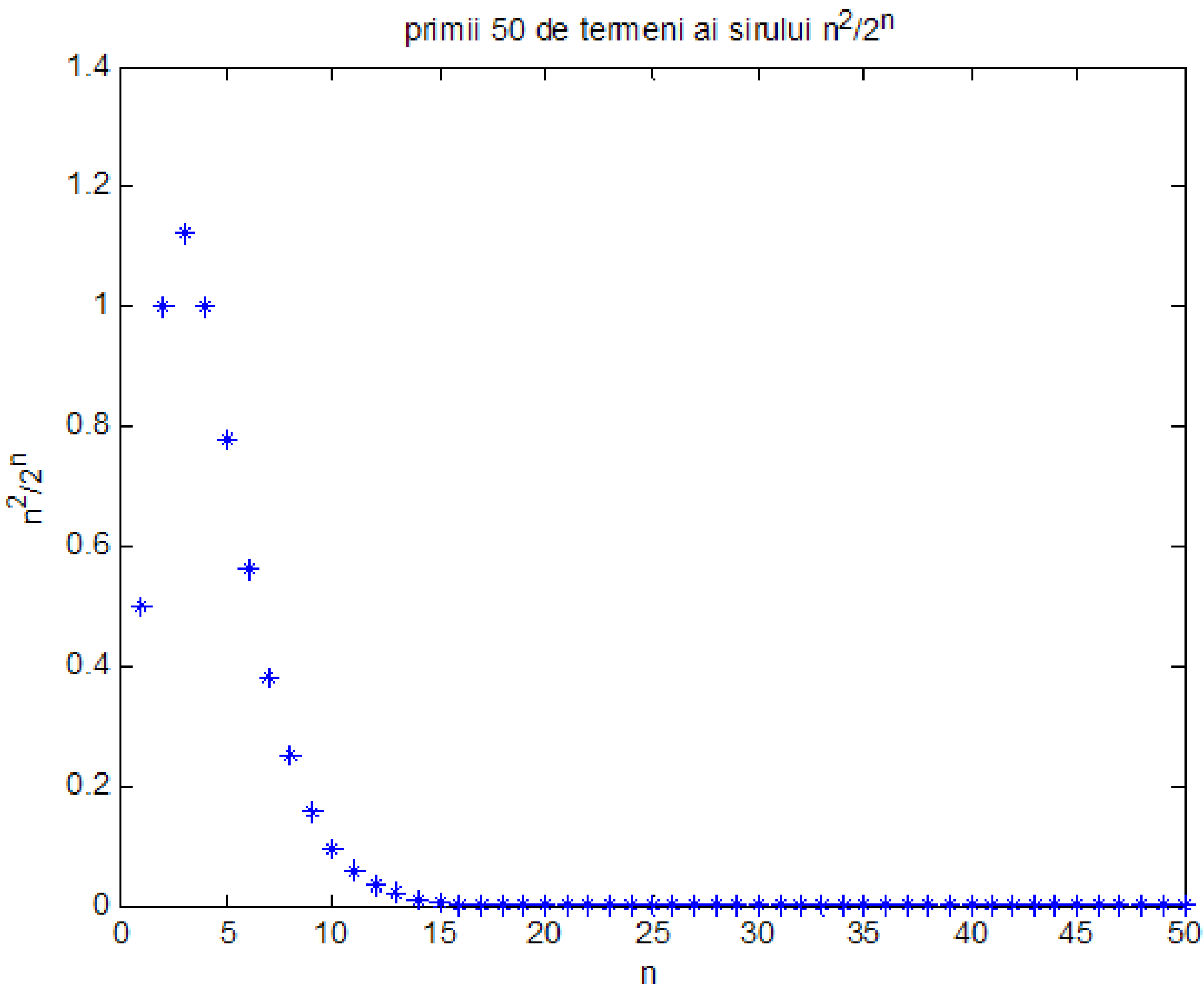
Şir de elemente

Un *şir de elemente* într-o mulţime *E* este o funcţie $f : \mathbf{N} \to E$; termenul general al şirului este $a_n = f(n)$.

Exemple

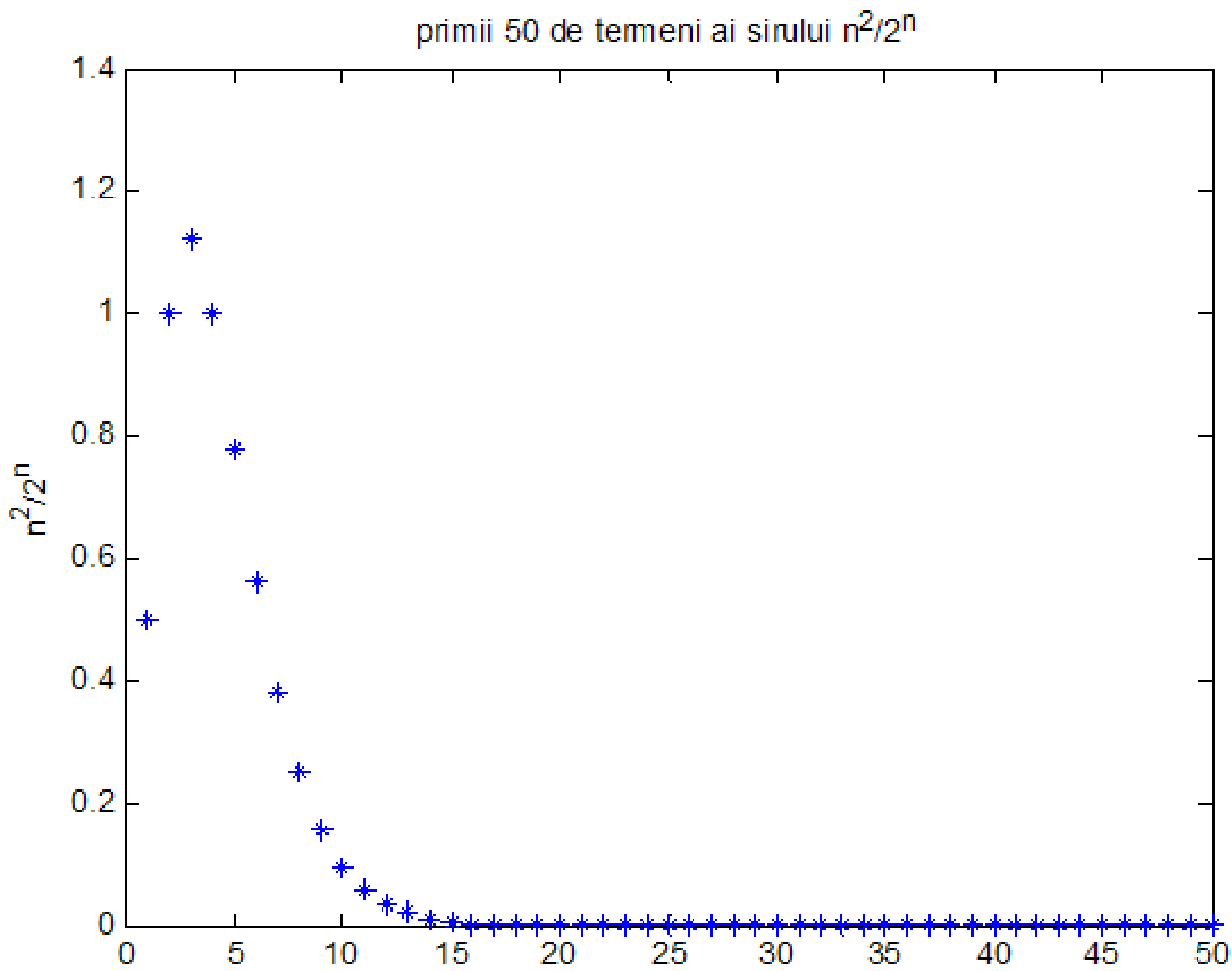
- $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}, \; n \geq 2$
- $(x_n, y_n) = \left(n \cdot (\sqrt[n]{5} - 1), \dfrac{n+1}{3^n} \right), \; n \geq 1$

23 Exemplu



primii 50 de termeni ai sirului n^2/2^n
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
n^2/2^n
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
n

24. Exemplu



primii 50 de temeni ai sirului n^2/2^n
n^2/2^n
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Şir de funcţii

A şi B fiind două mulţimi fixate, notăm cu $Hom(A,B)$ familia tuturor funcţiilor $f : A \to B$.

O aplicaţie $f : \mathbf{N} \to Hom(A,B)$, $f(n) = f_n$ se numeşte *şir de funcţii.*

Exemple

$A = (-1,1]$, $B = \mathbf{R}$, $\quad f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$;

$A = B = \mathbf{R}$, $\quad g_n(x) = \dfrac{e^{nx} - 10}{x^2 \cdot e^{nx} + 1}$, $n \geq 1$.

25. Exemplu

Prezentăm graficele primilor 35 de termeni ai şirului de funcţii

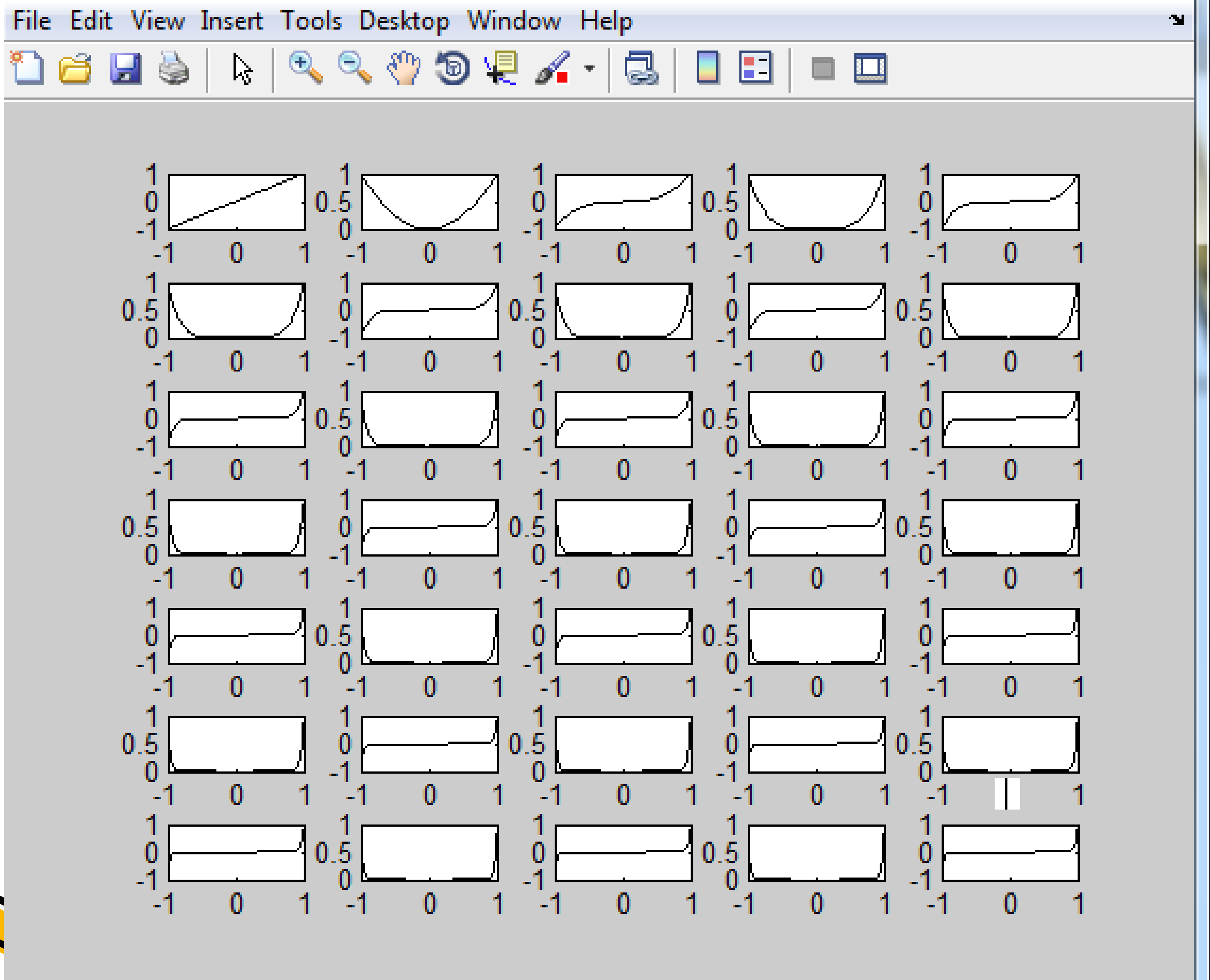
$$f_n(x) = x^n, x \in (-1.1]$$

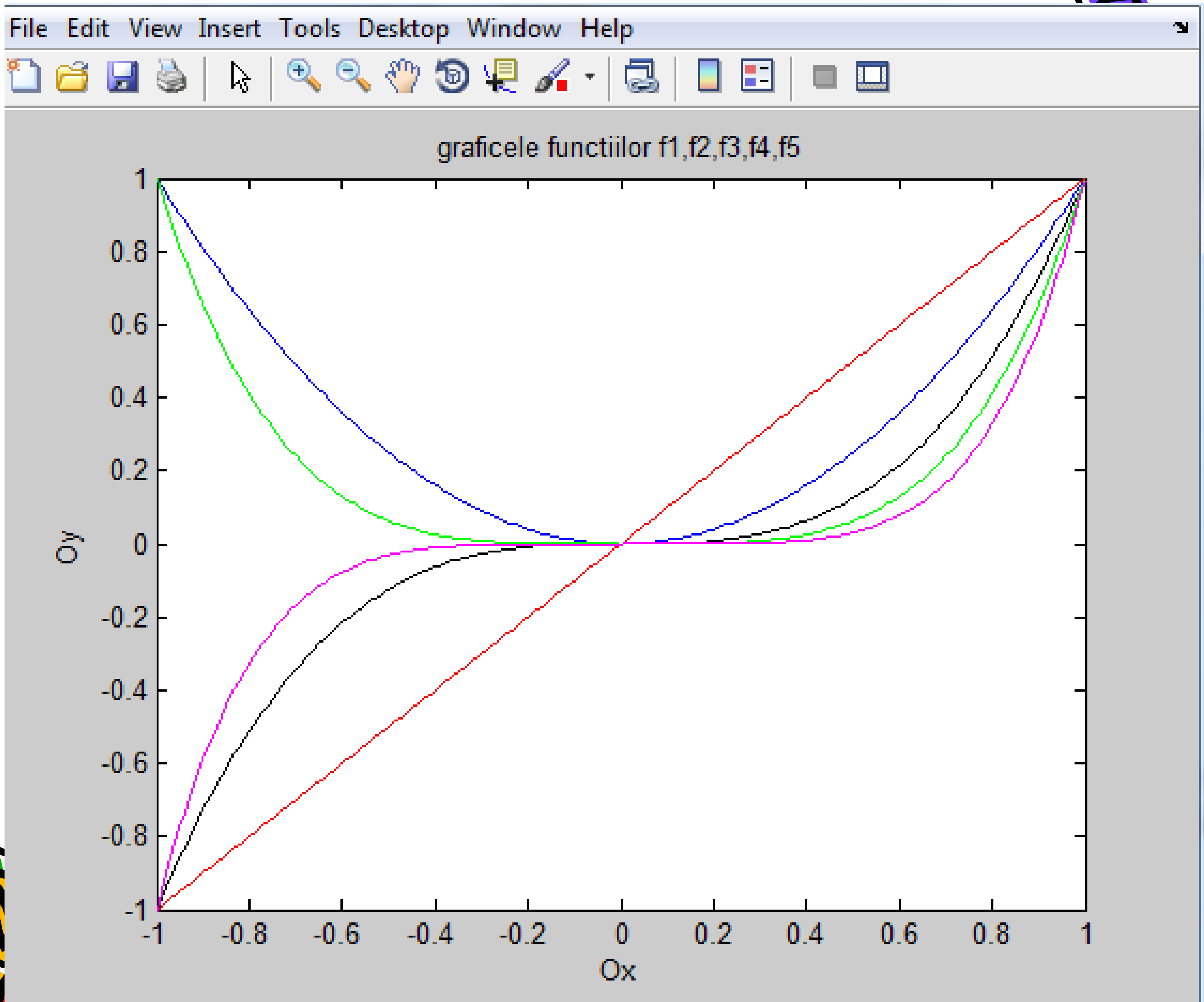
(Matlab):

```
>> x=-1:.01:1; for n=1:35 subplot(7,5,n),plot(x,x.^n,'k'); end
```

şi graficele primilor cinci termeni, desenate în acelaşp sistem de axe:

```
>> x=-1:.01:1; plot( x,x,'r',x,x.^2,'b', x,x.^3,'k', x,x.^4, 'g', x,x.^5,'m')
```


File Edit View Insert Tools Desktop Window Help


File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
graficele functiilor f1,f2,f3,f4,f5
Oy
Ox
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Funcţie compusă

Considerând $f : A \to B_1$ şi $g : B \to C$ cu $B_1 \subset B$, definim *funcţia compusă* $g \circ f : A \to C$ prin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in A$$

Funcţie surjectivă

Funcția $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă pentru oricare $y \in B$ există $x \in A$, astfel încât $y = f(x)$.

- Pentru A şi B două mulțimi nevide, definim *prima* şi respectiv *a doua proiecție a mulțimii* $A \times B$, ca fiind funcțiile:

$$pr_1 : A \times B \to A,\ pr_1(a, b) = a$$
$$pr_2 : A \times B \to B,\ pr_2(a, b) = b$$

Astfel pentru un $a \in A$, arbitrar ales există elementele $(a, b) \in A \times B$, $b \in B$ pentru care $pr_1(a, b) = a$, deci prima proiecție a mulțimii $A \times B$ este o funcție surjectivă.

Funcţie injectivă

O funcție $f : A \to B$ este *injectivă* dacă pentru $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, arbitrar aleşi, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Pe baza echivalenței logice $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$, putem justifica injectivitatea lui f verificând dacă pentru $x_1, x_2 \in A$, oarecare, cu proprietatea $f(x_1) = f(x_2)$, avem $x_1 = x_2$.

- *Considerând o funcție oarecare* $f : A \to B$, construim funcția injectivă $g : A \to A \times B$ definită de $g(x) = (x, f(x))$.

Funcţie bijectivă

Funcția $f: A \to B$ este *bijectivă* (*bijecție*) dacă este simultan injectivă şi surjectivă (se spune că f stabileşte o *corespondență biunivocă* de la A la B).

Dacă A este o mulțime nevidă şi $B = \{b\}$, definim funcția $f: A \to A \times B$ prin $f(x) = (x, b)$, funcție ce este bijectivă.

Inversa unei funcţii

Dacă funcția f este bijectivă, atunci putem defini *inversa* f^{-1} a lui f, ca fiind funcția

$$f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x,$$

x fiind unicul element din A, astfel încât $y = f(x)$.

Imaginea directă a unei mulţimi printr-o funcţie

Fie $f : A \to B$; oricare ar fi submulțimea $A_1 \subset A$, submulțimea lui B

$$f(A_1) = \{y \in B \mid \exists x \in A_1 \ \text{ astfel încât } \ y = f(x)\}$$

se numeşte *imaginea directă* a lui A_1 prin f.

26. Exemplu

- Calculați $f(\mathbf{R})$ în cazul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vom construi tabelul de variație al funcției date:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{(-x)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-2$$

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{2-x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

x	$-\infty$			2			$+\infty$
$f'(x)$		+	+	0	-	-	
$f(x)$	-2	↗	↗	$\sqrt{5}$	↘	↘	2

Se observă că $f(\mathbf{R})=[-2,\sqrt{5})$

27. Exemplu

- Determinați $f((0, e^4])$ pentru funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\cdot\sqrt{x}}$$, din $f'(x)=0$ obținem $x=e^2$.

x	0			e^2			e^4
$f'(x)$		+	+	0	-	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{4}{e^2}$

Astfel $f((0,e^4]\ )=(-\infty,\frac{2}{e}]$

În cazul unei funcții reale de variabila reală, $f(A_1)$ reprezintă proiecția pe axa Oy a graficului restricției funcției f la A_1.

Putem spune că funcția $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă $f(A) = B$

De reţinut

- Definiţia funcţiei
- Funcţii reale - de variabilă reală,
  - de mai multe variabile reale
- Funcţii vectoriale - de variabilă reală,
  - de mai multe variabile reale
- Funcţie bijectivă, inversa unei funcţii
- Imaginea unei mulţimi printr-o funcţie
- Graficul unei funcţii