Şiruri si serii

2013-2014

Marina Gorunescu

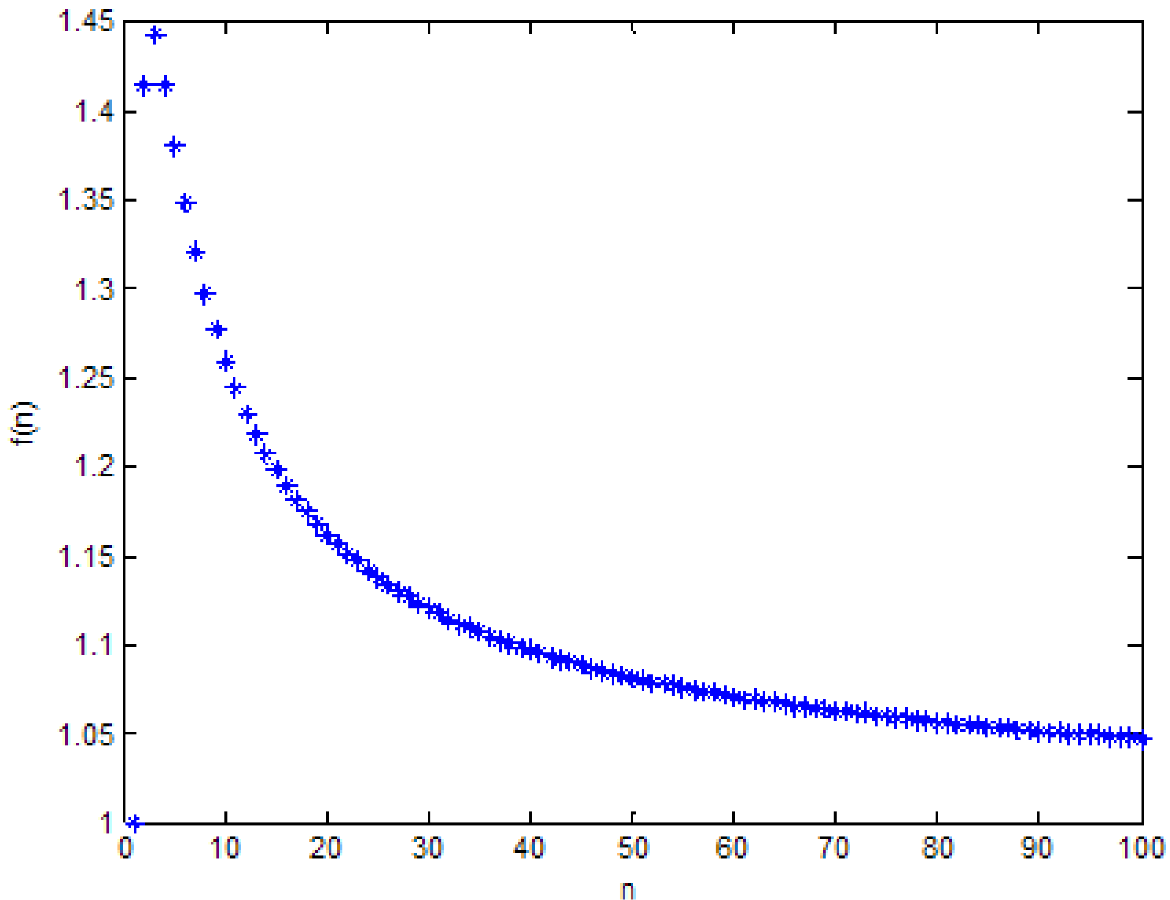
Siruri

Şir de elemente

Un *şir de elemente* în X , unde (X,d) este spatiu metric, este o funcție $f:\mathbf{N}\to X$; termenul general al şirului este $x_n = f(n)$.

1. Exemplu

- Prezentăm primii 100 de termeni ai şirului $x_n = \sqrt[n]{n},\ n \geq 1$



Şir convergent

În spațiul metric (X,d), un şir $(x_n)_n$ este *convergent* dacă există $x \in X$ cu proprietatea:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \ \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon \ \text{ avem } d(x_n, x) < \varepsilon .$$

Definiția șirului convergent poate fi scrisă cu ajutorul bilelor, și anume:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \ \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon \ \text{ avem } x_n \in B(x, \varepsilon).$$

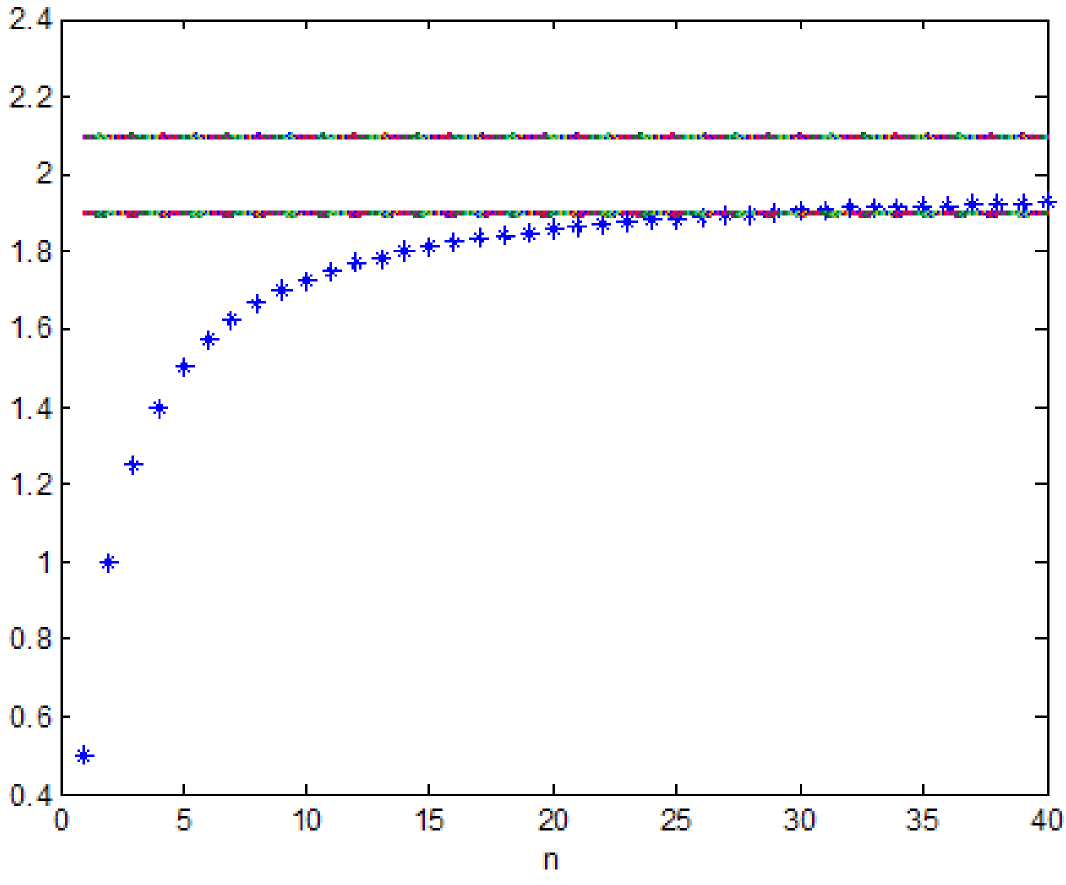
Astfel, oricât de mică ar fi raza unei bile deschise cu centru în $x \in X$, există un rang (care depinde de mărimea razei), începând de la care toți termenii șirului se află în bila respectivă.

2. Exemplu

- Să calculăm câți termeni ai șirului $x_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$, $n \geq 1$ se află în afara intervalului $(1.9, 2.1)$. Reamintim că acest interval este bila de centru 2 și rază 0.1 din **R**. Având $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$ putem utiliza definiția șirului de numere reale convergent în cazul $\varepsilon = 0.1$. Determinăm rangul începând de la care avem inegalitatea $\left| \dfrac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \dfrac{1}{10}$ și anume:

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow n > 27$$

ceea ce înseamnă că în afara intervalului considerat avem 27 termeni ai șirului.



2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0
5
10
15
20
25
30
35
40
n

3. Exemplu _rezolvat in Matlab

- Să calculăm cu Symbolic Math limita şirului $(x_n)_n$, definit de $x_n = \sqrt[n]{n}$

Să găsim al câtelea termen al şirului aproximează limita cu două zecimale exacte şi să determinăm efectiv acest termen:

```
»syms n
»limit(n^(1/n),n, inf)
ans =
       1
```

A scrie un program pentru a determina limita acestui şir cu cu două zecimale exacte înseamnă a găsi rangul termenului începând de la care $\left|\sqrt[n]{n}-1\right| < \varepsilon$ unde, respectiv $\varepsilon = 0.001$. Vom utiliza instrucţiunea while.

```
»n=2;x=abs(n.^(1./n)-1); while x>.001 n=n+1; x=abs(n.^(1./n)-1);end
» n
ans =
          9124
```

Calculăm al 9124-lea termen al şirului:

```
» n=9124; y=n.^(1./n)
y =
          1.0010
```

4. Exemplu

- Să calculăm câți termeni ai șirului $\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)_n \subset \mathbf{R}^2$ se află în afara bilei cu centru

în origine și de rază $\frac{1}{100}$.

Deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=(0,0)$, folosind definiția limitei unui șir pentru $\varepsilon=\frac{1}{100}$,

determinăm rangul începând de la care termenii șirului se află în interiorul bilei.

Rezolvăm inegalitatea $d\left(\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right),(0,0)\right)=\sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}}<\frac{1}{100}$ și obținem

$n>100\cdot\sqrt{5}\simeq 223.6$,

ceea ce înseamnă că începând cu al 224-lea termen toți termenii șirului se află în bila cu centru în origine și de rază 1; în afara se află 223 termeni.

Rezolvarea exemplului nr 4, utilizand Matlab

```
» syms n
» f=[2/n 1/n];syms n; limit(f,n,inf)
ans =
         [ 0, 0]
```

Limita şirului fiind centrul bilei din enunţ, aplicăm definiţia limitei unui şir şi astfel vom scrie un program care să calculeze care este rangul termenului începând de la care distanţa euclidiană de la acest termen la limita şirului este mai mică decât 1/101.

```
» n=1; x=norm([2/n 1/n]-[0 0 ]);
» hile x>1/100 n=n+1; x=norm([2/n 1/n]-[0 0 ]);
end
» n
n =
         224
```

Deci 223 de termeni ai şirului nu aparţin bilei, pentru termenul al 224-lea inegalitatea nemaifiind adevărată.

Proprietăţile şirurilor convergente în spaţii metrice

Dacă şirul $(x_n)_n$ *converge* către limita $x \in X$, această este unică şi scriem $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Un şir din spaţiul metric (X,d) este *mărginit* dacă toţi termenii săi sunt conţinuţi într-o bilă deschisă din X.

- Orice şir convergent este mărginit.

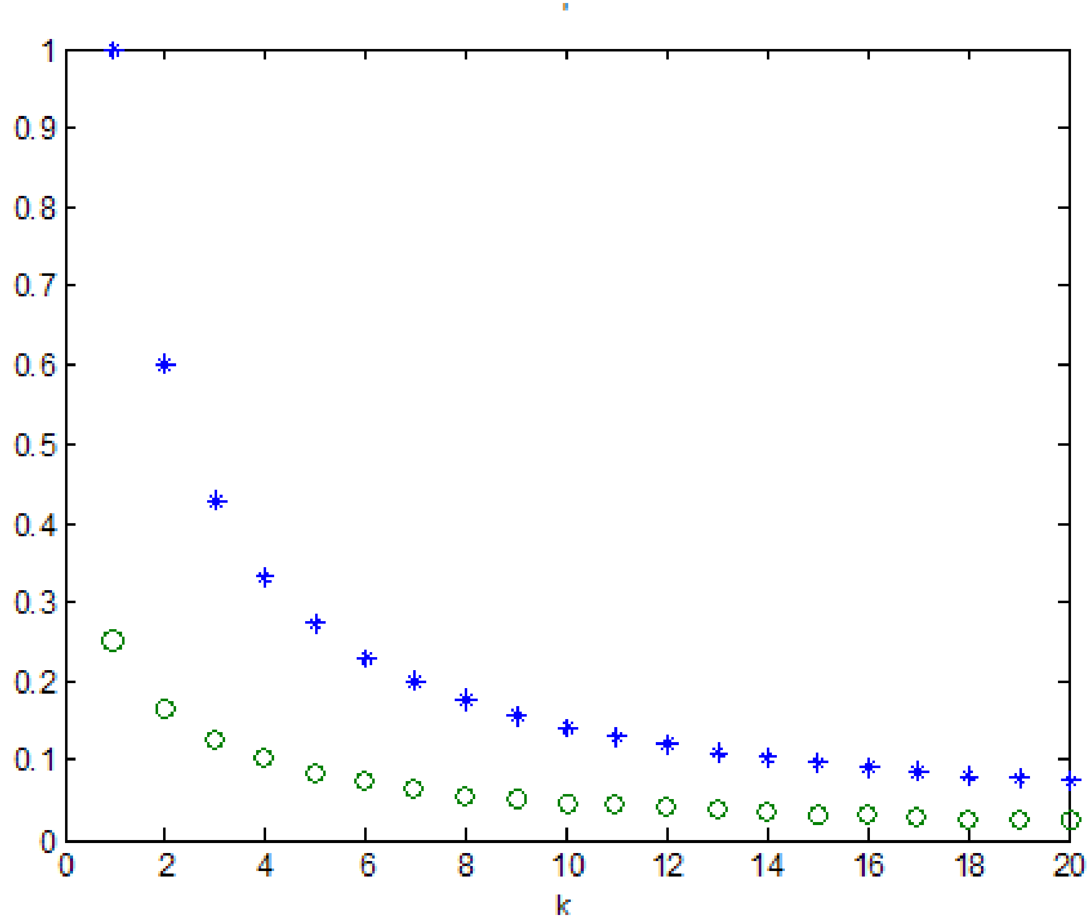
Pentru un şir $(x_n)_n \subset X$, fixând un şir crescător de numere naturale $k_0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ şi considerând şirul $(x_{k_n})_n$, definim astfel un *subşir* al şirului $(x_n)_n$, adică o selecţie „ordonată" a termenilor şirului $(x_n)_n$.

- Subşirul termenilor pari ai şirului $(x_n)_n$ este $(x_{2n})_n$ unde $k_n = 2n$.
- În cazul şirului $x_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{n+1}$, avem subşirul termenilor pari $x_{2k} = \dfrac{3}{2k+1}$, $k \in \mathbf{N}$

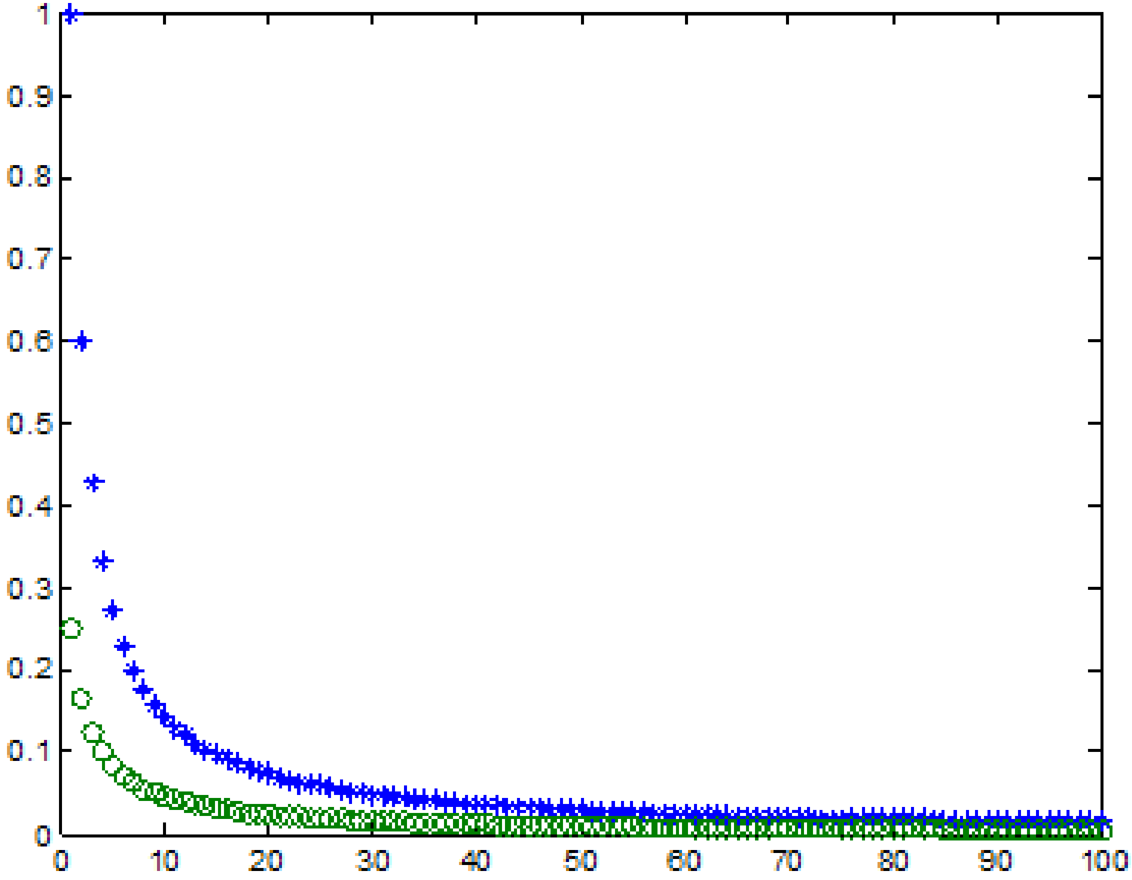
şi subşirul termenilor impari $x_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+2}$, $k \in \mathbf{N}$.

5. Exemplu

»k=1:20;plot(k,3./(2*k+1),'*',k,1./(2*k+2),'o')



»k=1:100;plot(k,3./(2*k+1),'*',k,1./(2*k+2),'o')



În general se observă că $n \le k_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Bazându-ne pe această observație se poate demonstra că:

- Orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită.

Şiruri convergente in spaţii normate

Un caz particular de spații metrice sunt spațiile liniare normate.
Într-un spațiu liniar normat $(E, \| \ \|)$ un şir $(x_n)_n$ este *convergent* dacă există $x \in E$ cu proprietatea:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \ \text{ astfel } \ \text{încât } \forall n \geq n_\varepsilon \ \text{ avem } \|x_n - x\| < \varepsilon .$$

Proprietățile şirurilor convergente prezentate anterior rămân valabile într-un spațiu liniar normat $(E, \| \ \|)$.

În plus şirurile convergente au şi alte proprietăți referitoare la operațiile definite pe E şi respectiv la normă:

- Suma a două şiruri convergente $(x_n)_n, (y_n)_n \subset E$, adică şirul $(x_n + y_n)_n \subset E$ este convergent; dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ atunci $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

- Înmulțind un şir convergent $(x_n)_n \subset E$ cu un număr real α, obținem un şir convergent $(\alpha \cdot x_n)_n \subset E$ şi avem: $\lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \cdot x$

- Înmulțind un şir convergent $(x_n)_n \subset E$ cu un şir convergent de numere reale $(\alpha_n)_n \subset$ **R**, obținem un şir convergent $(\alpha_n \cdot x_n)_n \subset E$ şi în plus $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \cdot x$.

- Dacă $(x_n)_n \subset E$ este un şir convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ atunci $(\|x_n\|)_n \subset$ **R** este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\| = \|x\|.$$

Şir Cauchy

Într-un spaţiu metric (X, d) un şir $(x_n)_n$ se numeşte şir Cauchy dacă:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall p \in \mathbf{N}$ avem $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$

adică, de la un anumit rang încolo, orice doi termeni sunt suficient de "apropiaţi", în sensul distanţei *d*.

6-7. Exemple

- Şirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2^k}{2^k}$ este un şir Cauchy; pentru a argumenta această afirmație este suficient să majorăm $\left|x_{n+p} - x_n\right|$ cu un şir $(a_n)_n$ ce nu depinde de p, şir ce converge la zero; rangul n_ε, începând de la care termenii şirului sunt suficient de apropiați, este acel n_ε cu proprietatea $a_n < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$. Aşadar:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin 2^k}{2^k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}$$

şi astfel $a_n = \frac{1}{2^n}$

- Şirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg} k!}{k!}$ este un şir Cauchy deoarece:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\operatorname{arctg} k!}{k!}\right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k \cdot (k-1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right) < \frac{\pi}{2n}$$

Proprietăţile şirurilor Cauchy

- Orice şir convergent din X este şir Cauchy.

Menţionăm că reciproca nu este în general adevărată., dar:

- În **R**, orice şir Cauchy este convergent.
- Intr-un spaţiu metric orice şir Cauchy este mărginit.

Şiruri în spaţiul real p-dimensional

Considerăm spaţiul $\mathbf{R}^p$, $p > 1$, cu metrica euclidiană.

Un şir din $\mathbf{R}^p$ este o funcţie vectorială de variabilă reală $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^p$, $f(n) = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$

şi astfel şirul $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)_n$ are p şiruri componente $(x_n^k)_n \subset \mathbf{R}$, $1 \leq k \leq p$.

Studiul convergenței unui șir din $\mathbf{R}^p$ se reduce la studiul componentelor sale:

- Un șir $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)_n \subset$ $\mathbf{R}^p$ *este mărginit, respectiv Cauchy respectiv* convergent, dacă și numai dacă cele p șiruri componente sunt mărginite, respectiv *Cauchy*, respectiv convergente.

Demonstrația acestei afirmații se bazează pe inegalitatea:

$$|x_k - y_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x_k - y_k)^2} \le \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|, \quad x_k, y_k \in \mathbf{R},\ 1 \le k \le p.$$

8-9. Exemple

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n},\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2},n\cdot\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\right)=\left(1,\dfrac{1}{e},\ln 3\right)$

- Să calculăm distanța de la $A(1,-1,0)$ la $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+2}{2^n},\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n,\dfrac{1}{n^2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$

  Avem: $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+2}{2^n},\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n,\dfrac{1}{n^2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}\right)=\left(0,e,0\right)$ şi astfel:

  $d(A,L)=\sqrt{(1-0)^2+\left(-1-e\right)^2+(0-0)^2}=\sqrt{e^2+2e+2}$

Spaţii metrice complete

O clasă importantă de spații metrice o constituie spațiile metrice complete.
Un spațiu metric în care orice şir *Cauchy* este convergent se numeşte *spațiu metric complet*.

Un spațiu liniar normat care privit ca spațiu metric este spatiu metric complet se numeşte spațiu *Banach*.

10. Exemple

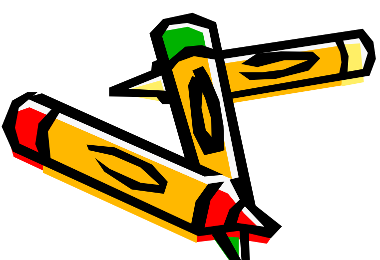
- **R** este spațiu metric complet.

- Fiind dat $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)_n$ un şir *Cauchy* din **R**^{p}, cele *p* şiruri componente sunt şiruri *Cauchy* în **R**, deci convergente, rezultând astfel convergența şirului $(x_n)_n$ şi putem afirma că **R**^{p} este un spațiu complet.

Proprietăţi specifice şirurilor de numere reale

- Dacă şirurile de numere reale $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente şi în plus $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (*trecerea la limită în inegalităţi*).

- Un şir de numere reale $(x_n)_n$ monoton crescător $(x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N})$ şi mărginit superior (există $M \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_n \le M$, $\forall n \in \mathbf{N}$) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n, n \in \mathbf{N}\}$.

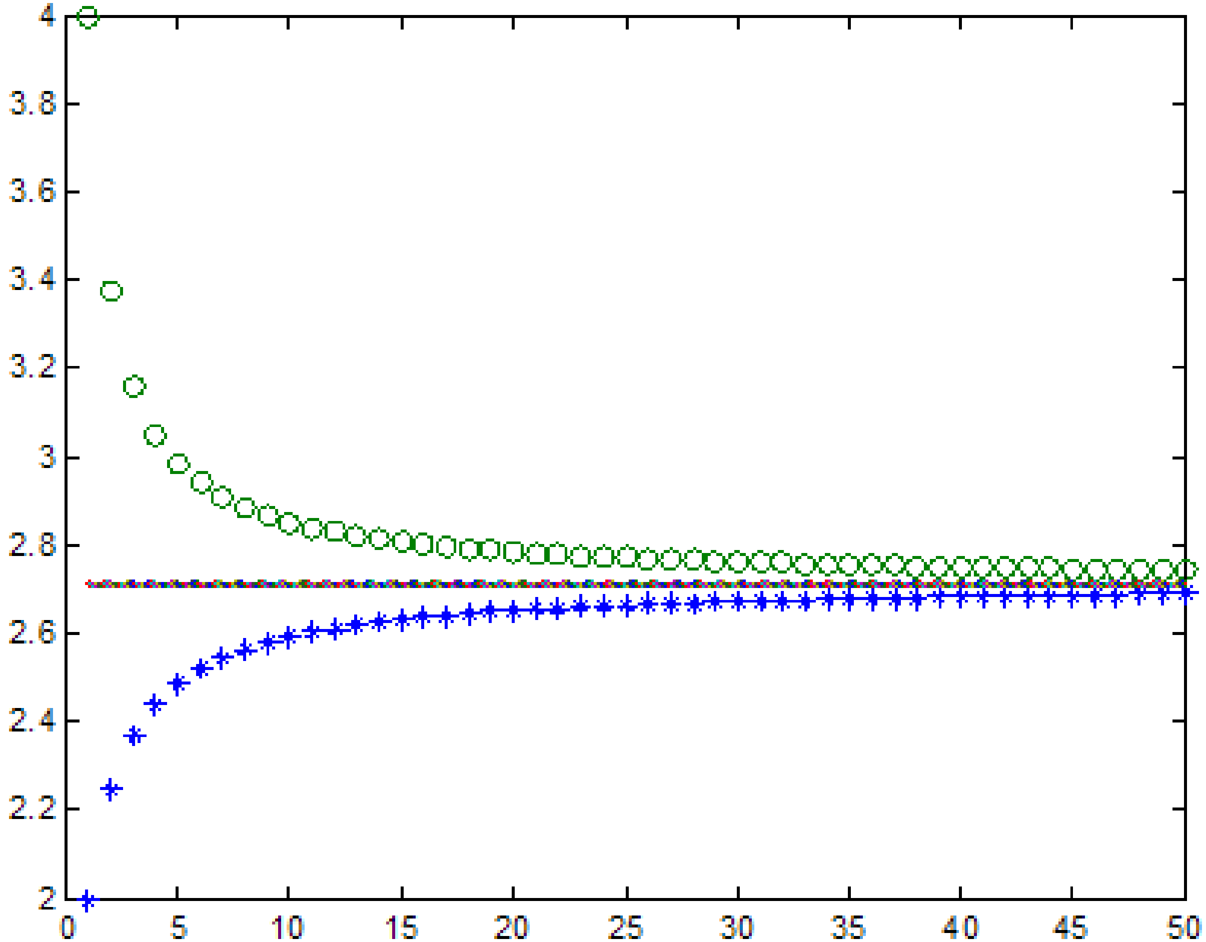


11-12-13. Exemple

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[na]}{n}=a,\ a\in\mathbf{R}$, pe baza trecerii la limită în inegalitatea $\frac{na-1}{n}<\frac{[na]}{n}\leq\frac{na}{n}$.

- Şirul $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este crescător şi mărginit superior de 3, deci este convergent şi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$.

- Şirul $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este descrescător şi pozitiv deci convergent şi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$



4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Şir de funcţii

Considerând două spații metrice (X, d) şi (X_1, d_1) definim *şirul de funcții* ca fiind orice aplicație $f : \mathbf{N} \rightarrow Hom(A, X_1)$, unde $A \subset X$.

Notația consacrată pentru termenul general este $f(n) = f_n$ unde $f_n : A \rightarrow X_1$, iar pentru şirul de funcții este $(f_n)_n$.

Fixând $x_0 \in A$, obținem $(f_n(x_0))_n$ un şir de puncte din X_1 .

Spunem că $(f_n)_n$ este *convergent* în $x_0 \in A$ dacă şirul $(f_n(x_0))_n$ este convergent în X_1 .

Mulțimea punctelor $x \in A_1 \subset A$ pentru care şirul $(f_n(x))_n$ este convergent se numeşte *mulțime de convergență*.

Dacă $(f_n)_n$ este convergent pe $A_1 \subset A$ atunci putem defini pe A_1 o funcție, numită *funcția limită*, dată de $x \mapsto f(x)$, unde $f(x)$ este limita şirului $(f_n(x))_n$.

Acest tip de convergență se numeşte *convergență punctuală*.

Convergenţă punctuală

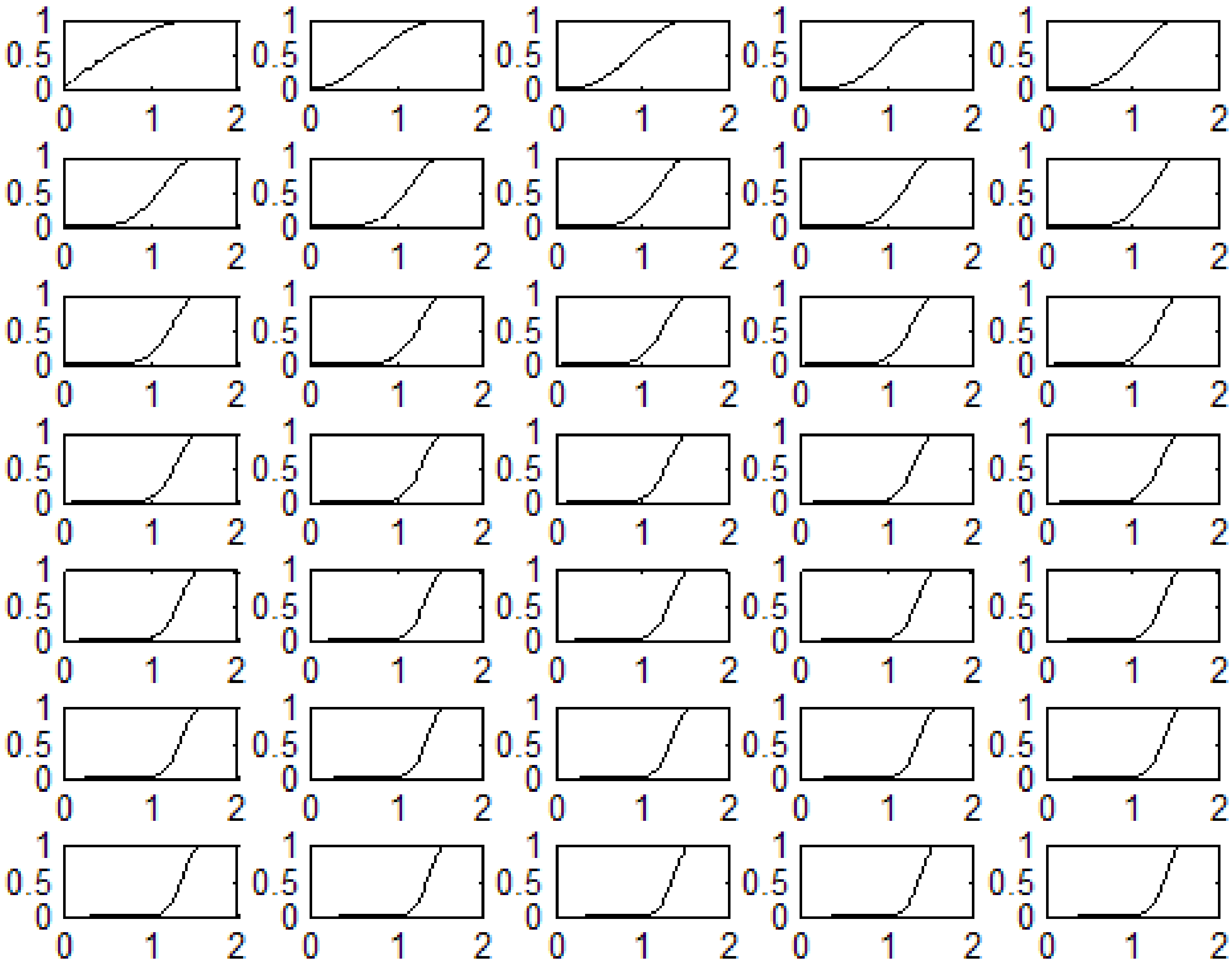
Spunem că $(f_n)_n$ converge *punctual* la f pe A_1 dacă:

$\forall x \in A_1, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(x, \varepsilon)$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ avem $d_1(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

15. Exemplu

- Şirul de funcţii $(f_n)_n$ unde $f_n : [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, $f_n(x) = \sin^n x$ are ca funcţie limită funcţia $f : [0,\frac{\pi}{2}] \to \{0,1\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,\frac{\pi}{2}) \\ 1, \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

»x=0:.01:pi/2; for n=1:35 subplot(7,5,n),plot(x,sin(x).^n,'k'); end



16. Exemplu

- Să calculăm funcția limita a șirului de funcții $(f_n)_n$ unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

este definită de $f_n(x) = \dfrac{2x^{2n} - x^2 + 1}{x^{2n+1} + \sqrt{1+x^2}}$:

Reamintindu-ne că $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1 \end{cases}$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x^{2n} - x^2 + 1}{x^{2n+1} + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-x^2 + 1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ pentru } |x| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x^{2n} - x^2 + 1}{x^{2n+1} + \sqrt{1+x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} \cdot \left(2 - \dfrac{x^2 - 1}{x^{2n}}\right)}{x^{2n} \cdot \left(x + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^{2n}}\right)} = \frac{2}{x} \text{ pentru } |x| > 1$$

funcția limită este:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}, & |x|<1\\[2mm] \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}, & x=1\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}, & x=-1\\[2mm] \dfrac{2}{x}, & |x|>1\end{cases}$$

16. Exemplu

- Funcţia limită a şirului de funcţii $(f_n)_n$ unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este definită de $f_n(x) = \dfrac{x \cdot e^{nx} - x^2}{e^{nx+1} + \sqrt{1+x^2}}$:

Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \infty, & x>0 \end{cases}$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x \cdot e^{nx} - x^2}{e^{nx+1} + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}},\ x<0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x \cdot e^{nx} - x^2}{e^{nx+1} + \sqrt{1+x^2}} = \frac{e^{nx} \cdot (x - \frac{x^2}{e^{nx}})}{e^{nx} \cdot (e + \frac{\sqrt{1+x^2}}{e^{nx}})} = \frac{x}{e},\ x>0 .$$

Funcția limită este $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{x}{e}, & x>0 \end{cases}$.

Convergenţa uniformă

Remarcăm că în cazul convergenței punctuale rangul n_0 depinde atât de ε cât şi de x.

Cazul în care n_0 depinde doar de ε, caz în care şirul $(f_n(x))_n$ converge "la fel de repede" pentru toți $x \in A_1$, este cazul *convergenței uniforme.*

Astfel, şirul $(f_n)_n$ converge *uniform* la f pe A_1, dacă:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0 \text{ avem } d_1(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \ \forall x \in A_1$$

17. Exemplu

- Pentru şirul $f_n:[0,1]\to[1,2]$ definit prin $f_n(x)=x^n+1$, $n\in\mathbf{N}$, funcţia limită este $f:[0,1]\to\{1,2\}$, definită de $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 2, & x=1\end{cases}$

Să presupunem că şirul converge uniform pe $[0,1)$ la f.

Pentru $\varepsilon>0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n\geq n_0$ să avem

$|x^n+1-f(x)|=x^n<\varepsilon,\ \forall x\in[0,1)$,

inegalitate din care rezultă că:

$$n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{x}},\quad \forall x\in[0,1)\quad \text{adică}\quad n>\sup_{[0,1)}\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{x}}=+\infty$$

şi astfel $n_0(\varepsilon) = +\infty$, ceea ce înseamnă că şirul nu este uniform convergent pe $[0,1)$.

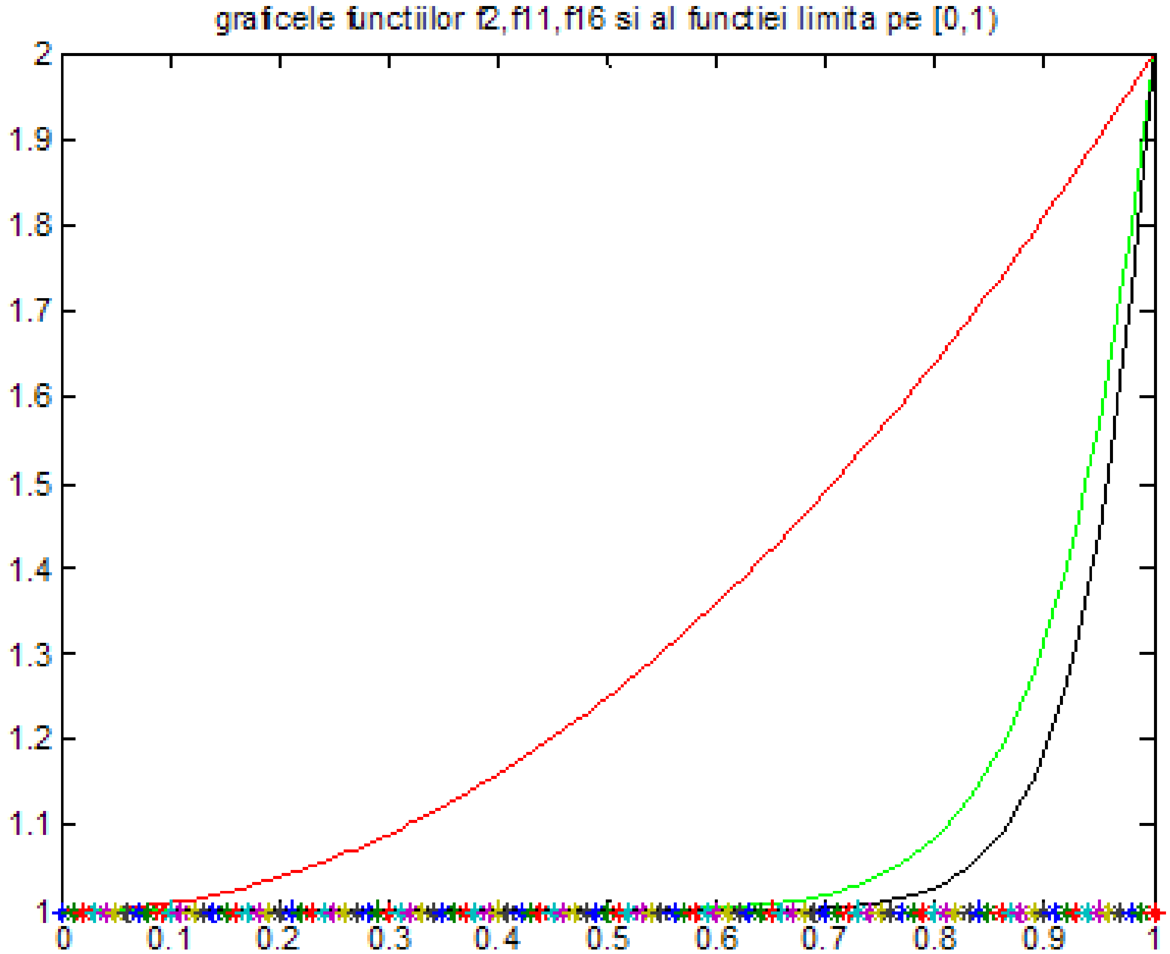
O mulţime de convergenţă uniformă este $[0,\alpha)$, unde $\alpha \in (0,1)$, caz în care

obţinem:

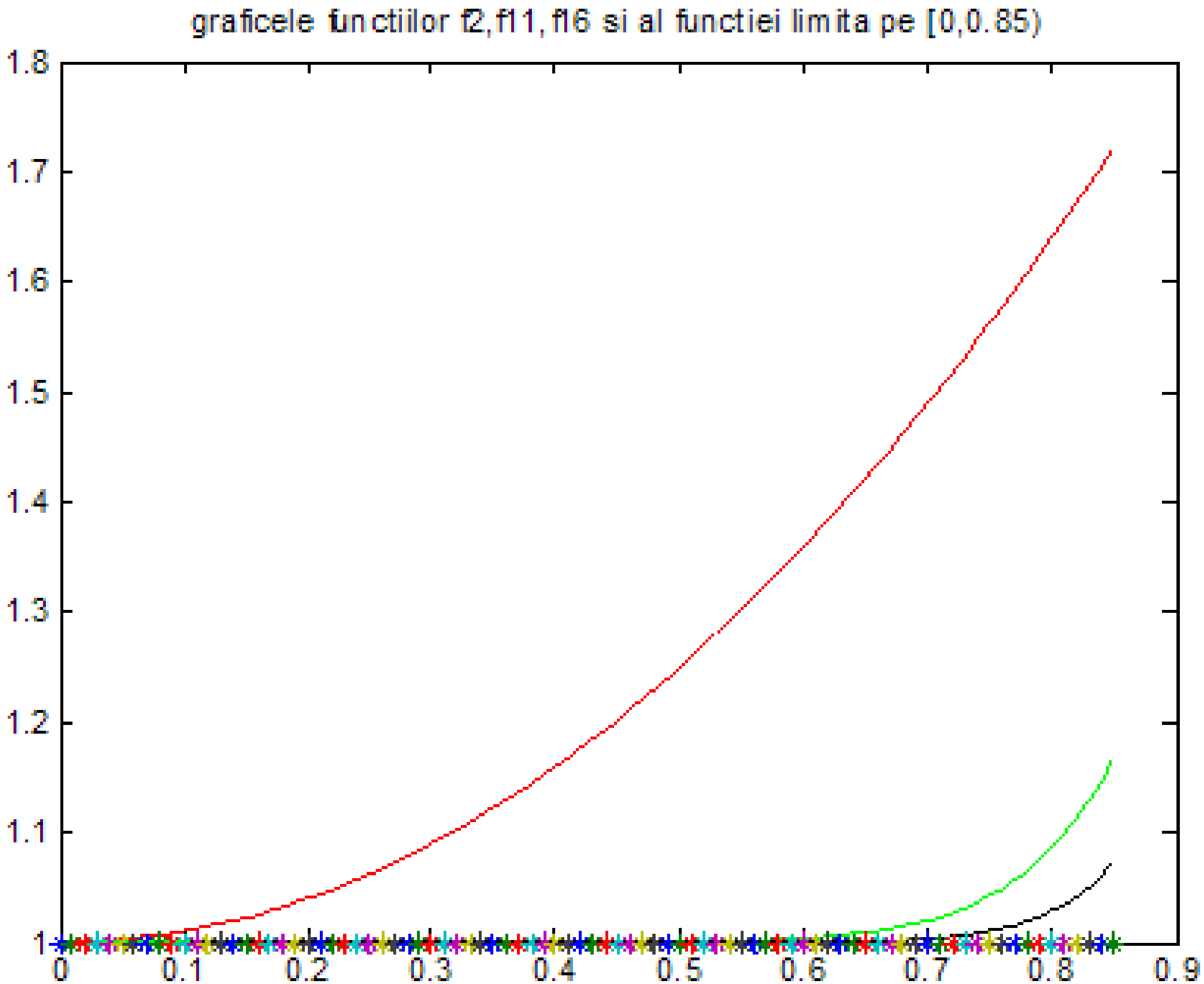
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\alpha}} \right] + 1 \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0 \text{ avem } x^n < \varepsilon, \ \forall x \in [0,\alpha).$$

Vom desena în acelaşi sistem de axe graficele funcţiilor f_2, f_{11}, f_{16} şi al funcţiei limită a şirului $f_n(x) = x^n + 1$, pe [0,1], respectiv pe [0,0.85].

»x=0:.01:1;plot(x,x.^2+1,'r',x,x.^11+1,'g', x,x.^16+1,'k',x,1,'*')



```
»x=0:.01:0.85;plot(x,x.^2+1,'r',x,x.^11+1,'g', x,x.^16+1,'k',x,1,'*')
```



Vom nota convergența punctuală cu $f_n \xrightarrow{p} f$,

iar cea uniformă $f_n \xrightarrow{u} f$.

Convergența uniformă este o noțiune globală, având multe aplicații.

De exemplu în aproximații, dacă $f_n \xrightarrow{u} f$, funcția f este aproximată de şirul $(f_n)_n$.

De reţinut

- Definiţia şirului
- Definiţia şirului convergent
- Proprietăţile şirurilor convergente în spaţii metrice, în spaţii normate.
- Definiţia şirului Cauchy
- În **R** orice şir Cauchy este convergent.

- Spaţiu metric complet
- Şiruri în R
- Şiruri în spaţiul real p-dimensional
- Şiruri de funcţii
- Convergenţa punctuală
- Convergenţa uniformă

Serii

Un spațiu liniar normat care privit ca spațiu metric este spatiu metric complet se numeşte spațiu *Banach*.

Spațiile Banach constituie cadrul natural pentru definirea şi studiul conceptului de serie.

Serie de numere reale

Fie $(x_n)_n \subset R$ un şir; considerăm şirul *sumelor parţiale* asociat şirului iniţial:

$$s_0 = x_0, \; s_1 = x_0 + x_1, \dots, s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

Perechea formată din şirurile $(x_n)_n$ şi $(s_n)_n$ se numeşte *serie* cu *termenul general* x_n şi se notează $\sum_{n \geq 0} x_n$.

Serie convergentă

O serie $\sum_{n\geq 0} x_n$ se numeşte *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale

este convergent în **R.**

O serie care nu este convergentă se numeşte *divergentă.*

În cazul în care seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă, se defineşte *suma seriei*

ca fiind $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ (în **R**), notaţia folosită fiind: $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

19. Exemplu

- natura seriei $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2} =$$

$$= \ln \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2} = \ln\frac{n+1}{2n}$$

şi astfel $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = -\ln 2$.

Seria este convergentă şi $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$

19. Exemplu_ Matlab

- Să scriem un program pentru a determina rangul începând de la care termenul şirului sumelor parţiale $s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ aproximează suma seriei $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ cu o eroare mai mică decât $\varepsilon = 0{,}01$.

Suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$

```
»n=2;S=log(3/4);  while abs(S+log(2))>0.01  n=n+1;
S=S+log(1-1./n.^2);end
» [n,S]
     ans =
              100.0      -0.6832.
```

20. Exemplu

- Pentru $r \in \mathbf{R}$ fixat, seria $\sum_{n\geq 0} r^n$ se numeşte *seria geometrică de raţie r.*

Şirul sumelor parţiale va fi

$$s_0 = 1,\ s_1 = 1 + r, \ldots, s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}, & r \neq 1 \\ n+1, & r = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-r}$ dacă $|r| < 1$, caz în care seria geometrică este convergentă.

21. Exemplu_ Matlab

- Fie seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$; să scriem un program pentru a determina rangul începând de la care distanța dintre termenul general al șirului sumelor parțiale s_n și suma seriei este mai mică decât $\varepsilon = 0{,}0005$.

```
»n=1;S=1;  while abs(S-2)>0.0005  n=n+1; S=S+1./(2.^(n-1));end
» [n,S]
      ans =
       12.0        1.9995
```

22. Exemplu

- Pentru a studia natura seriei $\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ calculăm termenul general al şirului sumelor parțiale:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, seria $\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă

Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$; pentru calculul lui $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ în Matlab folosim deseori (dacă nu apar factoriale) funcţia sum($a_{(1:n)}$)

- Am stabilit cu definiţia că seria $\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă. Să calculăm următorii termeni ai şirului sumelor parţiale: s_{1002}, s_{5000}, s_{9999}, pentru a ilustra acest lucru:

Putem calcula fiecare s_n în parte:

```
» s(1002)=sum(log((2:1003)./(1:1002)));
    ans =
            6.9108
» s(5000)=sum(log((2:5001)./(1:5000)));
    ans =
            8.5174
» s(9999)=sum(log((2:10000)./(1:9999)));
    ans =
            9.2103
```

Se observă că şirul sumelor parţiale este nemărginit superior, dar că avem o creştere destul de lentă.

Operaţii cu serii

Suma, termen cu termen, a două serii de aceeaşi natură (convergente sau nu) este o serie de aceeaşi natură.

Înmulțind cu un număr real o serie, nu este afectată natura seriei.

Eliminând sau adăugând un număr finit de termeni unei serii, nu se modifică natura seriei (evident pentru seriile convergente, suma se modifică).

Criteriul lui Cauchy

- *O serie de numere reale* $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă

  $\forall \varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$ avem: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| < \varepsilon$.

Dacă, în particular, $p=1$ atunci:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ există } n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_{n+1}| < \varepsilon$$

Aşadar, dacă $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, condiție ce nu este suficientă pentru a asigura convergența unei serii.

Seria $\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă, cu toate că $\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$.

Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă,

23. Exemple

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este o serie divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)}$ este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)} = \frac{2}{\ln 2}$

Serie absolut convergentă

O serie $\sum_{n\geq 0} x_n$ este *absolut convergentă* dacă seria de numere reale nenegative $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ este convergentă.

Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

- *O serie cu termeni pozitivi* $\sum_{n\geq 0} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale este mărginit superior.

Seria armonică generalizată

Natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este funcție de parametrul real α:

- pentru $\alpha > 1$ seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este convergentă,
- pentru $\alpha \leq 1$ seria este divergentă.

Seria armonică $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Criteriul de comparaţie cu inegalităţi

- Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} a_n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n$ au proprietatea că există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$ atunci:

  1. Convergența seriei $\sum_{n\geq 0} b_n$ implică convergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
  2. Divergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$ implică divergența seriei $\sum_{n\geq 0} b_n$.

23-24. Exemple

- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n + \sqrt{n}}$ este convergentă deoarece $\frac{1}{3^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbf{N}$ şi

seria $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ este convergentă.

- $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{\pi}{4^n}$ este convergentă deoarece pe baza inegalității:

  $\sin x < x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

  avem $\sin \frac{\pi}{4^n} < \frac{\pi}{4^n}, \forall n \in \mathbf{N}$ şi seria $\pi \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4^n}$ este convergentă.

Calculul cu aproximatie_ in Matlab, a seriilor din exemplele 23-24

Am stabilit convergenţa seriilor din exemplele anterioare. Termenii s_{10000}, s_{10000} vor aproxima suma seriei:

- $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n+\sqrt{n}}$

```
»sum(1./(3.^(0:10000)+sqrt(0:10000)))
    ans =
            1.3990
»sum(1./(3.^(0:100000)+sqrt(0:100000)))
```

- $$\sum_{n\geq 1} \sin \frac{\pi}{4^n}$$

```
»sum(sin(pi./(4.^(1:10000))))
      ans =
                  0.9676
»sum(sin(pi./(4.^(1:100000))))
      ans =
                  0.9676
```

Criteriu de comparaţie cu trecere la limită

- Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} a_n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n$ au proprietatea că există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, atunci seriile $\sum_{n\geq 0} a_n$ şi $\sum_{n\geq 0} b_n$ au aceeaşi natură.

25-26. Exemple

- $\sum_{n\geq 0}\frac{2n-5}{n^2+4}$ este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-5}{n^2+4}}{\frac{1}{n}}=2$ şi

  seria armonică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă.

- $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\right)$ este convergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}}=1$

  şi seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}$ este convergentă

Calculul cu aproximatie_ in Matlab, a seriei din exemplul 26

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\right)$$

```
» sum(log(1+1./((1:10000).^(3/2))))
     ans =
                  2.1993
»sum(log(1+1./((1:1000000).^(3/2))))
     ans =
                 2.2173.
```

Remarcaţi că această serie converge destul de lent.

Criteriul raportului

- Fie seria de numere reale pozitive $\sum_{n\geq 0} a_n$ cu proprietatea

că există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci:

1. dacă $l < 1$ rezultă convergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
2. dacă $l > 1$ rezultă divergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
3. dacă $l = 1$ nu putem afirma nimic despre natura seriei.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

- în cazul seriei divergente $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

(notație: dublu factorialele $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$ și $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n$)

- în cazul seriei convergente $1+\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$

27-28. Exemple

- Seria $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{3^n}$ este convergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\frac{1}{3}$.

- Seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ este convergentă, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\ .$$

În cazul în care termenul general al seriei conţine factoriale, nu se mai poate folosi funcţia sum, pentru calculul unui termen al şirului sumelor parţiale, fiind necesară scrierea unui mic program:

```
»  n=1; x=1;s=1;
»  while n<1001 n=n+1; x=x./(1+1/n).^n; s=s+x;
end
»  s
s =
    1.7597

»  n=1; x=1;s=1;
» while n<10001 n=n+1; x=x./(1+1/n).^n; s=s+x;
end
»  s
s =
    1.7597
```

sau

```
» n=1; x=1;s=1;
» for  n=2:10000  x=x./(1+1/n).^n; s=s+x;
end
» n=1000; s
s =
    1.7597
» n=10000;s
s =
    1.7597
```

Corolar (criteriul raportului)

Considerăm seria $\sum_{n \geq 0} x_n$, pentru care există $\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l$.

- pentru $l < 1$, seria este absolut convergentă;
- pentru $l > 1$, şirul de numere reale pozitive $(|x_n|)_n$ este crescător,

deci $\lim_{n \to \infty} |x_n| \neq 0$, rezultând că $\lim_{n \to \infty} x_n \neq 0$, ceea ce înseamnă divergența seriei .

Evaluarea erorii (criteriul raportului)

Considerăm o serie absolut convergentă $\sum_{n\geq 0} a_n$ de numere reale,

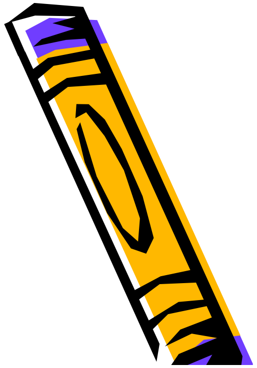
cu suma s şi cu proprietatea că există $n_0 \in \mathbf{N}$ şi $k \in (0,1)$ astfel încât

pentru $n \geq n_0$ avem $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq k < 1$.

Evaluare a erorii absolute $|s - s_n| = R_n$, comisă în formula de aproximare $s \approx s_n$.

$$|R_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \frac{k}{1-k} \cdot a_n .$$

29. Exemplu



- Să stabilim câţi termeni (n) trebuie însumaţi pentru a obţine o eroare mai mică de 0.001, în aproximarea sumei seriei $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n}$ cu termenul şirului sumelor parţiale s_n.

  Am demonstrat anterior convergenţa seriei şi avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

şi astfel avem de rezolvat inecuaţia

$$\left|R_n\right| < a_n = \frac{n}{3^n} < 0.001 .$$

```
»  n=1;x=1/3;
» while x>0.001 n=n+1; x=n./(3.^n);
end
» n
n =
     9
» sum((1:9)./3.^(1:9))
ans =
    0.7497
```

Criteriul rădăcinii

- Fie seria de numere reale pozitive $\sum_{n\geq 0} a_n$ cu propietatea că există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, atunci:

1. dacă $l < 1$ rezultă convergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
2. dacă $l > 1$ rezultă divergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
3. dacă $l = 1$ nu putem afirma nimic despre natura seriei.

30. Exemplu

- seria $\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ este convergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3} = \frac{e}{3} < 1 \,;$$

Să calculăm s_{1000} dând astefl o aproximare a sumei seriei:

```
» sum (((((1:1000)+1)./(1:1000)).^(1:1000).^2)./3.^(1:1000))
ans =
   2.2162
```

31. Exemplu

- seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$ este divergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{2}=\frac{e}{2}>1.$$

Considerăm seria $\sum_{n\geq 0} x_n$, pentru care există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l$.

Pentru $l < 1$, seria este absolut convergentă;

pentru $l > 1$ există $n_1 \in \mathbf{N}$, astfel încât $\sqrt[n]{|x_n|} > 1,\ \forall n \geq n_1$,

deci $\lim_{n\to\infty} |x_n| \neq 0$, rezultând divergența seriei .

Serii alternante. Criteriul lui Leibniz

Seriile *alternante* sunt seriile de forma $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot a_n$ unde $(a_n)_n \subset \mathbf{R}_+$.

criteriu de convergență _*criteriul lui Leibniz*.

- Dacă $(a_n)_n \subset \mathbf{R}_+$ este un şir monoton descrescător, convergent la zero, atunci seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot a_n$ este convergentă.

32. Exemplu

- *Seria armonică alternată* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ este convergentă,

dar nu este absolut convergentă.

Aproximarea erorii

In cazul seriei alternate convergente $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot a_n$, eroarea comisă prin înlocuirea sumei s a seriei cu suma parțială s_n este mai mică în modul decât primul termen neglijat a_{n+1} , adică:

$$|s - s_n| < a_{n+1}$$

33. Exemplu

- Suma seriei armonice alternate este $\ln 2$

Pentru a obține suma seriei cu două zecimale exacte, evaluăm

$$\left|R_n\right| < \frac{1}{n+1} < 0.001 \text{ , rezultă } n > 999 \text{ ,}$$

şi astfel trebuie însumați cel puțin 1000 termeni

Serie de funcţii

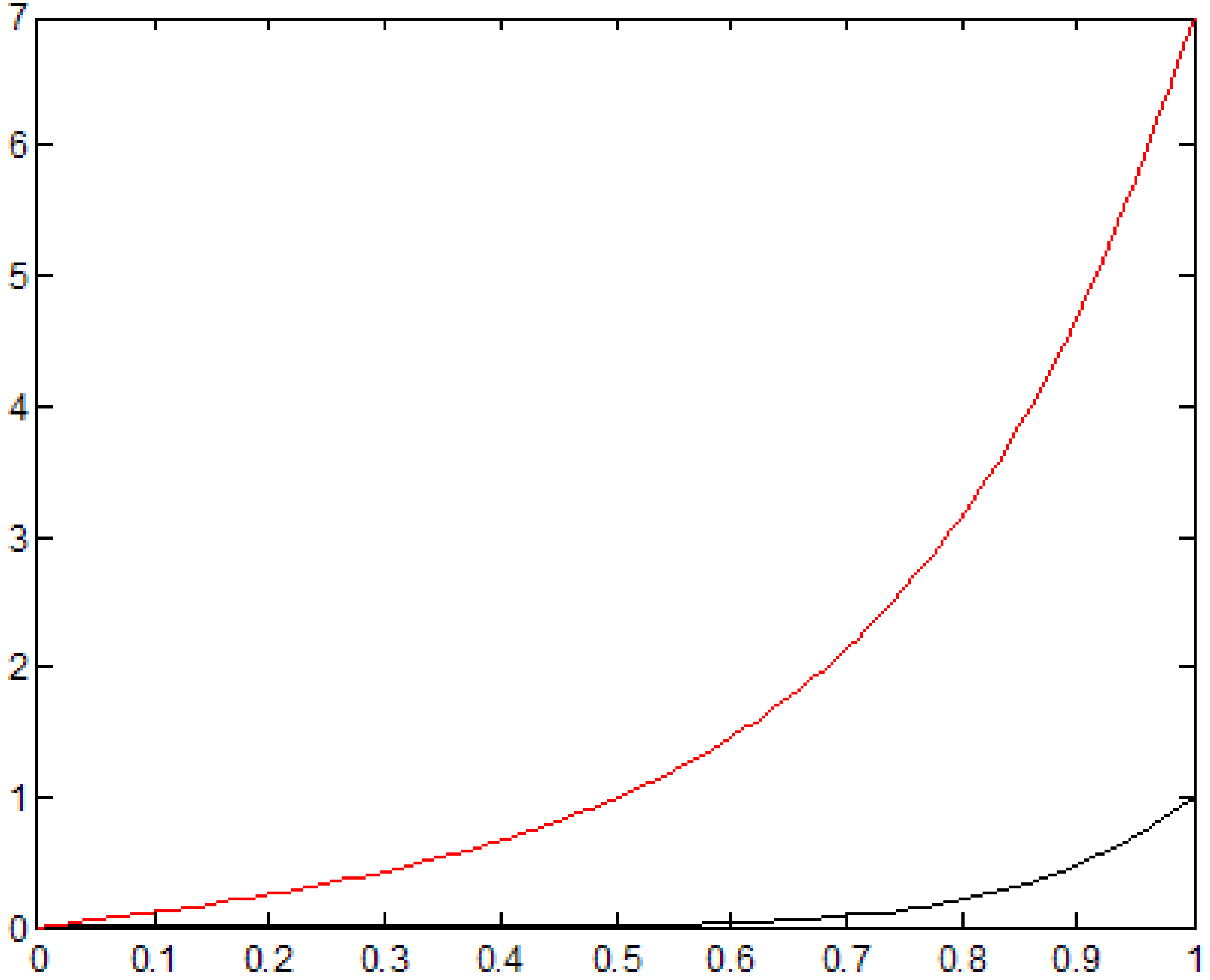
Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii $f_n : A \to \mathbf{R}$ unde $A \subset \mathbf{R}$.

Considerând şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$ unde $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$,

perechea formată din şirurile $(f_n)_n$ şi $(s_n)_n$ se numeşte *serie de funcţii* şi se notează $\sum_{n\geq 1} f_n$.

34. Exemplu

In cazul seriei de funcţii $\sum_{n\geq 1} x^n$, definită pe $[0,1]$, să desenăm în acelaşi sistem de axe termenul general al seriei, $f_7(x) = x^7$ (negru) şi termenul $s_7(x) = \sum_{k=1}^{7} f_k(x)$ (roşu) din şirul sumelor parţiale x=0:.01:1;plot(x,x.^7,'k',x,x+x.^2+x.^3+x.^4+x.^5+x.^6+x.^7,'r')



Convergenta punctuală

Seria de funcții $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge punctual* către funcția f dacă şirul sumelor parțiale converge punctual la f.

Pentru stabilirea mulțimii de convergență a unei serii de funcții aplicăm seriei modulelor criteriile studiate.

35.Exemplu

- mulțimea de convergență pentru seria de funcții:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)^n\cdot\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n$$

Aplicăm criteriul rădăcinii seriei $\sum_{n\geq 1}\left|f_n(x)\right|$ şi anume:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|f_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{n^2}\cdot\left|\frac{x+2}{x-2}\right|=\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$$

Rezolvând inecuația $\left|\frac{x+2}{x-2}\right|<1\Leftrightarrow -1<\frac{x+2}{x-2}<1$ obținem că pentru $x\in(-\infty,0)$ seria este absolut convergentă.

Pentru $x \in (0,+\infty)$ seria modulelor este divergentă, rezultatul fiind obținut pe baza criteriuluic rădăcinii, seria de funcții este divergentă pe $(0,+\infty)$.

În $x=0$, seria devine $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)^n \cdot (-1)^n$, serie divergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

În concluzie mulțimea de convergență este $(-\infty,0)$

Criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă

O serie de funcții este *uniform convergentă* pe $A_1 \subset A$ dacă şirul sumelor parțiale converge uniform pe A_1..

- Considerăm un şir de funcții $f_n : A \to \mathbf{R}$, , $n \in \mathbf{N}$, unde $A \subset \mathbf{R}$; dacă există o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n \geq 0} a_n$, convergentă, cu proprietatea că:

  $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, astfel încât $\forall n \geq n_0$ avem $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in A$,

  atunci seria de funcții $\sum_{n \geq 0} f_n$ este absolut şi uniform convergentă.

36. Exemplu

- $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\cdot x^2}{x^4+n^6}$ este absolut şi uniform convergentă pe **R**:

  pe baza inegalității : $\frac{|a\cdot b|}{a^2+b^2}\leq\frac{1}{2}$ avem:

  $$\frac{\left|(-1)^n\cdot x^2\right|}{x^4+n^6}=\frac{n^3\cdot x^2}{x^4+n^6}\cdot\frac{1}{n^3}\leq\frac{1}{2n^3},\ \forall n\in \mathbf{N},\ \forall x\in\mathbf{R}$$

  iar seria $\frac{1}{2}\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ este convergentă.

37. Exemplu

- seria de funcții $\sum_{n\geq 0} arctg\frac{2x}{x^2+n^6}$ este absolut și uniform convergentă pe **R**,

vom studia variația funcțiilor f_n pentru a găsi termenii $a_n = \sup\{f_n(x) | x \in \mathbf{R}\}$.

Calculăm $f_n'(x) = \frac{n^6 - x^2}{(x^2+n^6)^2+4x^2}$, punctele de extrem sunt $x = \pm n^3$ și

$$\lim_{x\to\pm\infty} arctg\frac{2x}{x^2+n^6} = 0 .$$

x	$-\infty$		$-n^3$		n^3		∞
$f'(x)$	-	-	0	+ +	0	- -	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-arctg\frac{1}{n^3}$	$\nearrow$	$arctg\frac{1}{n^3}$	$\searrow$	0

Avem $f(\mathbf{R}) \subset [-arctg\frac{1}{n^3}, arctg\frac{1}{n^3}]$, aşadar

$$|f_n(x)| \le arctg\frac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Seria $\sum_{n\ge1} arctg\frac{1}{n^3}$ fiind convergentă (conform criteriului de comparație cu trecere la limită) sunt îndeplinite condițiile din criteriul Weierstrass.

Serie de puteri

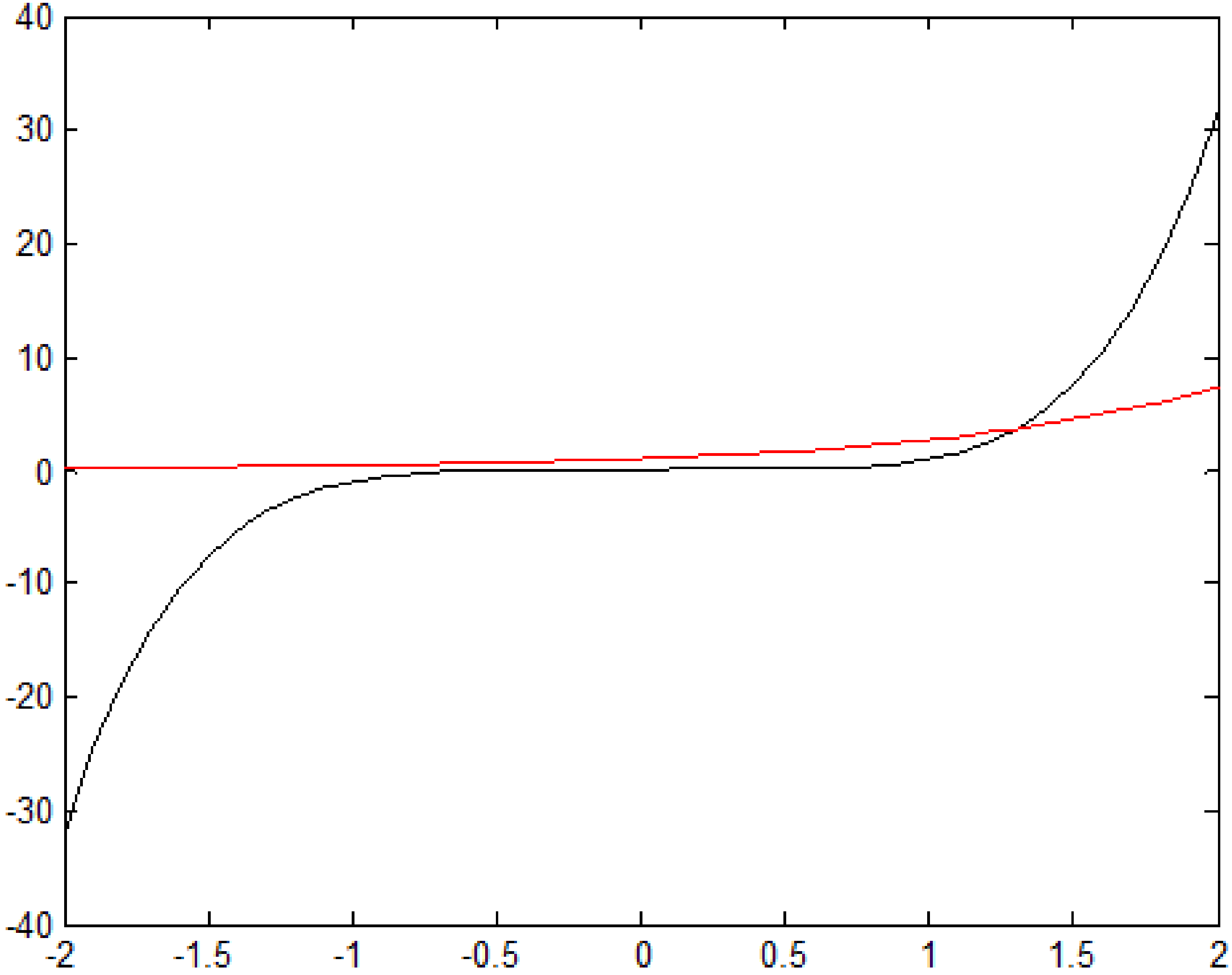
Dacă $(a_n)_n$ este un şir de numere reale şi $x_0 \in \mathbf{R}$, considerăm funcţiile $f_n(x) = a_n \cdot (x - x_0)^n$, definite pe **R**;

seria de funcţii $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n$, se numeşte *serie de puteri.*

38. Exemplu

In cazul seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$, definită pe [-2,2], să desenăm în acelaşi sistem de axe termenul general al seriei, $f_5(x)=\frac{1}{5!}x^5$ (negru) şi termenul $s_5(x)=\sum_{k=1}^{5} f_k(x)$ (roşu) din şirul sumelor parţiale.

```
x=-2:.1:2; plot(x, x.^5, 'k', x, 1+x+x.^2/2+x.^3/6+x.^4/24+x.^5/120,'r')
```



Raza de convergenţă a seriei de puteri

O serie de puteri este absolut convergentă în interiorul unui interval deschis de centru x_0 şi cu o anumită rază R, şi anume $(x_0 - R, x_0 + R)$

(R se numeşte *raza de convergenţă* a seriei)

şi este divergentă pe mulţimea $(-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty)$

- Pentru seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$ considerăm $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ şi

$R = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, \alpha > 0 \\ \infty, \alpha = 0 \\ 0, \alpha = \infty \end{cases}$. Atunci seria este absolut convergentă pe $(x_0 - R, x_0 + R)$

şi divergentă pe $(-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty)$.

- Pentru seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$, cu propietatea că $a_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathrm{N}$,

dacă $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \beta$ atunci raza de convergență este $R = \frac{1}{\beta}$

De reţinut

- Serie de numere reale, serie convergentă
- Seria geometrică, seria armonică generalizată
- Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi
- Serie alternantă, criteriul lui Leibniz
- Serie de funcţii; convergenţă punctuală, convergenţă uniformă
- Serie de puteri, rază de convergenţă