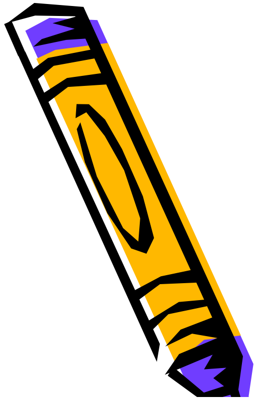
Funcţii continue

2013-2014

Marina Gorunescu

Limite de funcţii

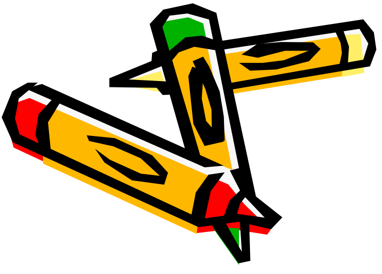


Limite de funcţii

Într-un spațiu metric (X,d), un punct $x_0 \in X$ este punct de acumulare al mulțimii $A \subset X$ dacă există un şir $(x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$; se notează $x_0 \in A'$.

Considerăm două spații metrice (X,d) şi (X_1,d_1), o funcție $f: A \to X_1$, unde $A \subset X$ şi x_0 un punct de acumulare al mulțimii A

Spunem că există $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $d(x,x_0) < \delta$ să avem $d_1(f(x),l) < \varepsilon$.



În cazul spațiilor liniare normate $(E, \| \ \|)$, $(E_1, \| \ \|_1)$ și a funcției $f : A \to E_1$, $A \subset E$, vom spune că există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $x_0 \in A'$, dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $\|x - x_0\| < \delta$,

avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.

În cazul $X = X_1 = \mathbf{R}$ și a funcției $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, vom spune că

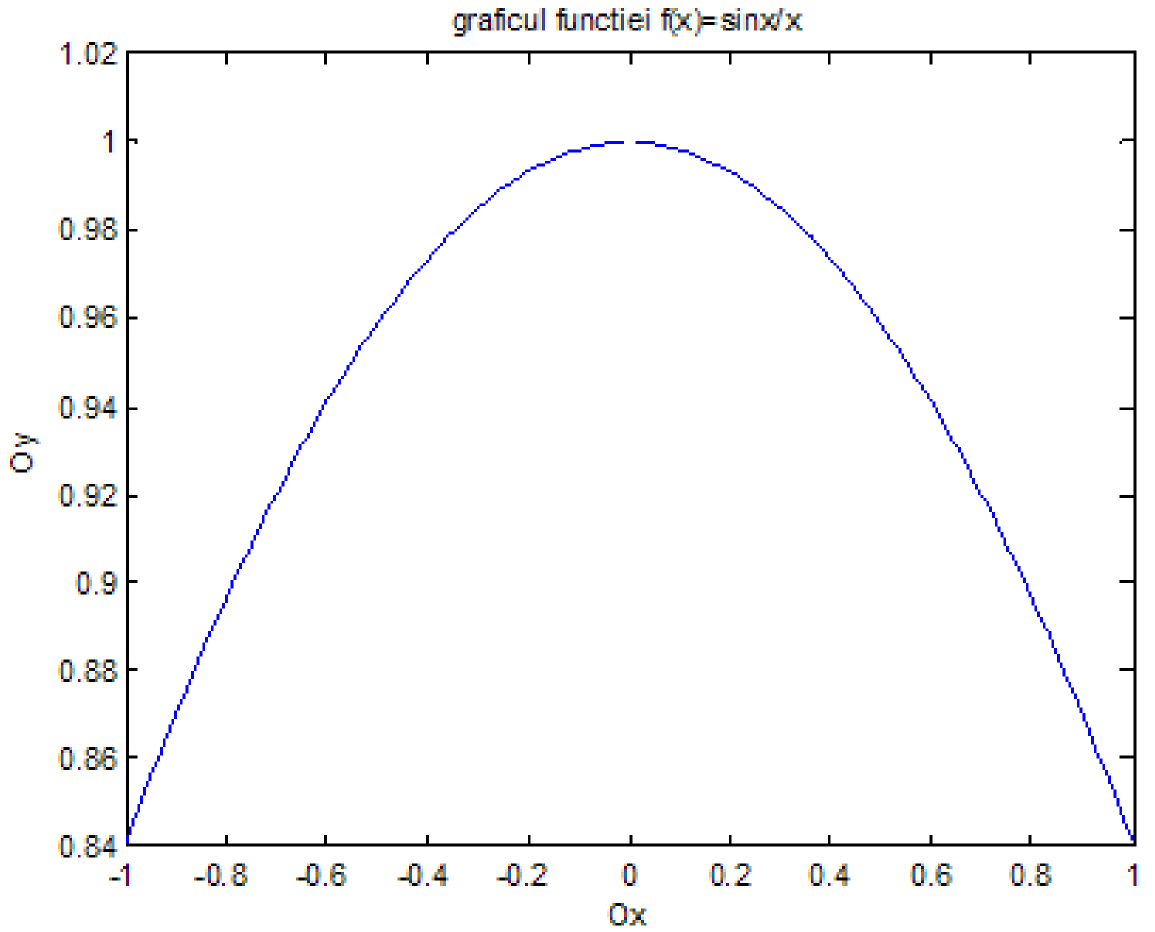
există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $x_0 \in A'$, dacă

oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

1. Exemplu

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

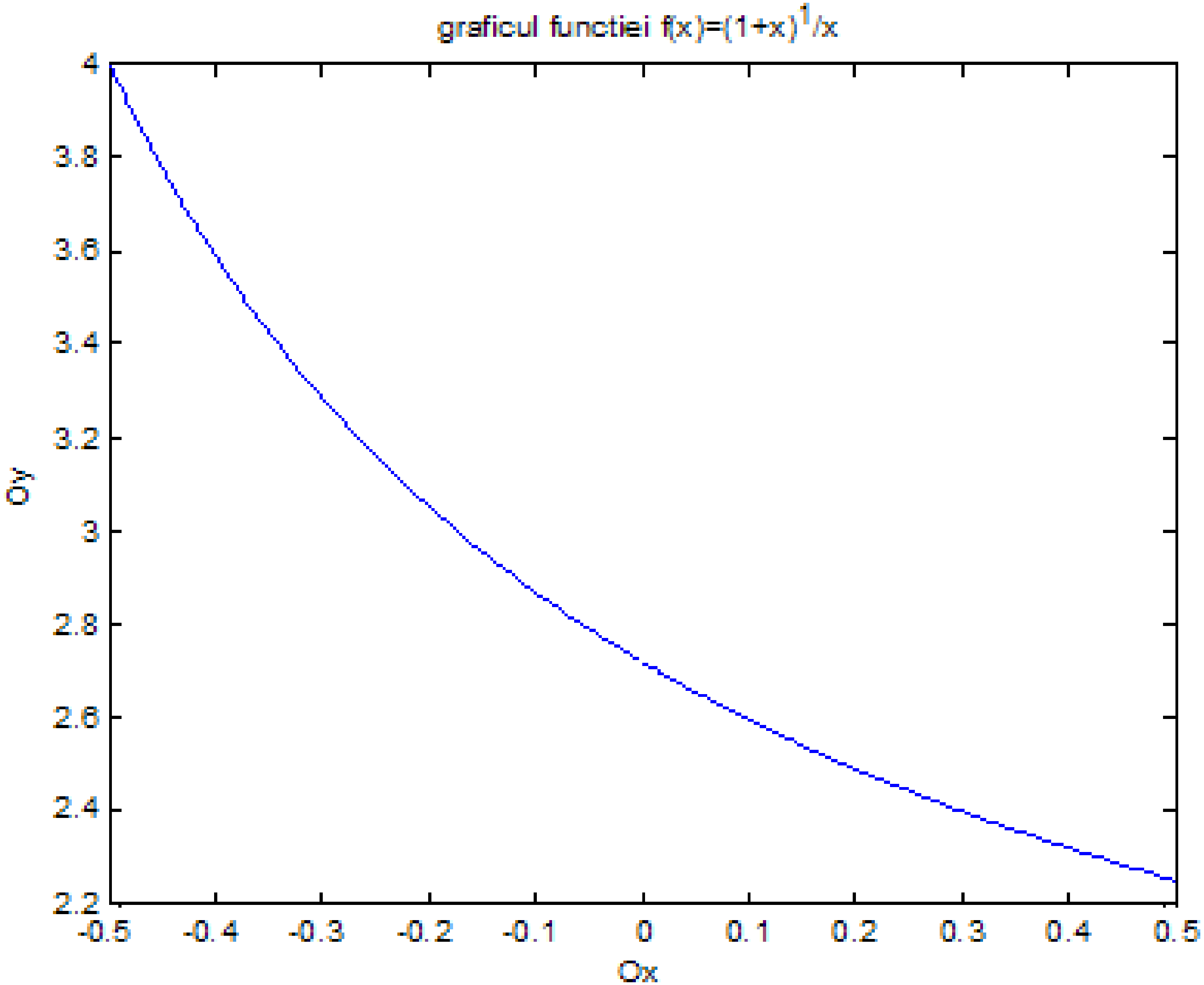
x	$\frac{\sin x}{x}$
-0.1	0.9983
-0.01	1.0000
-0.001	1.0000
0.001	1.0000
0.01	1.0000
0.1	0.9983


graficul functiei f(x)=sinx/x
1.02
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
0.88
0.86
0.84
Oy
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Ox

2. Exemplu

- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

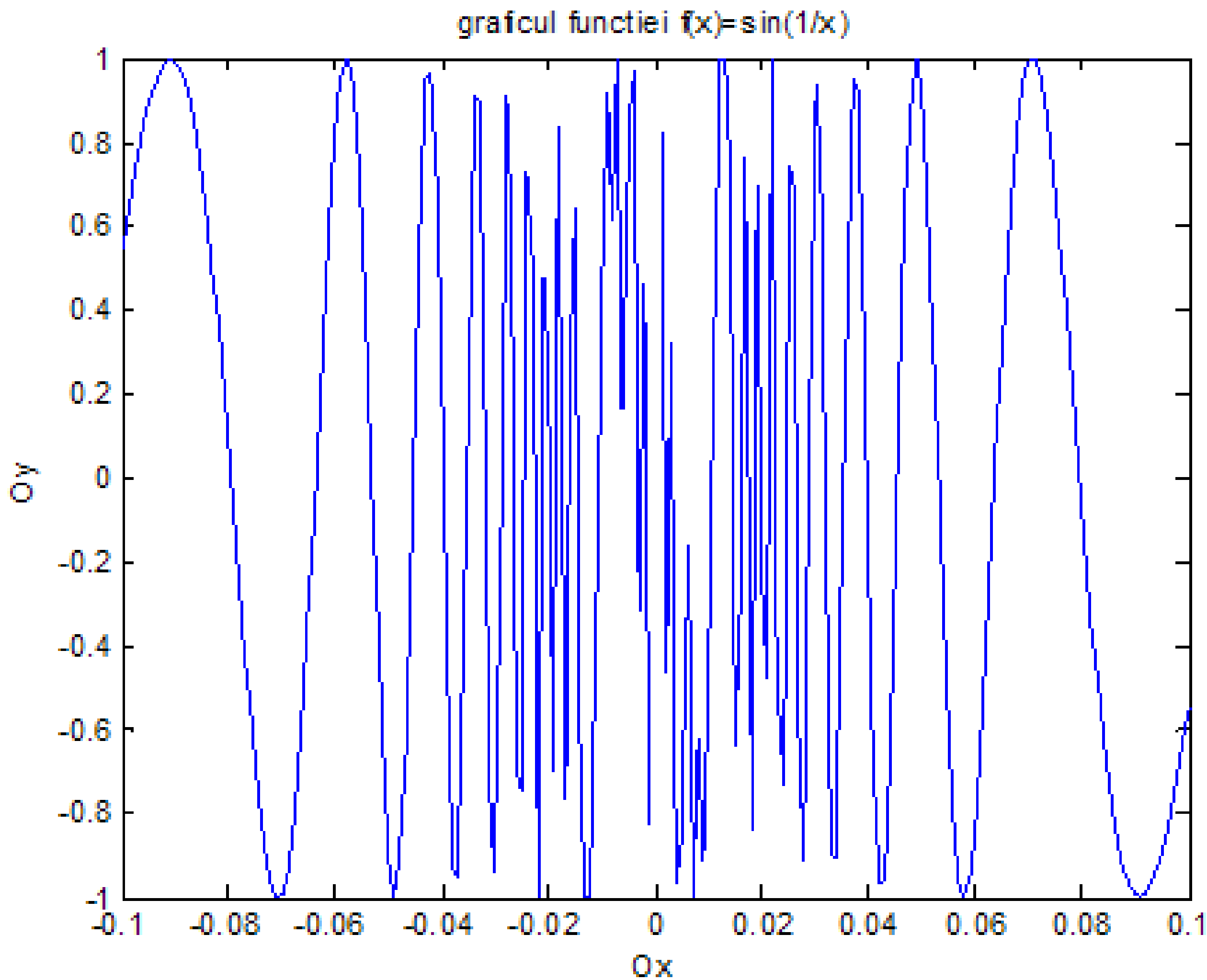
x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
-0.1	2.8680
-0.01	2.7320
-0.001	2.7196
-0.0001	2.7184
-0.00001	2.7183
0.00001	2.7183
0.0001	2.7181
0.001	2.7169
0.01	2.7048
0.1	2.5937


graficul functiei f(x)=(1+x)1/x
Oy
Ox
4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

3. Exemplu

- Nu există $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

x	$\sin \frac{1}{x}$
-0.1	0.5440
-0.01	0.5064
-0.001	-0.8269
-0.0001	0.3056
-0.00001	-0.3057
0.00001	0.3057
0.0001	-0.3056
0.001	0.8269
0.01	-0.5064
0.1	-0.5440


grafcul functiei f(x)=sin(1/x)
Oy
Ox
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.1
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1

Calculul limitelor din exemplele 1-3 in Matlab

```
» syms x
» limit(sin(x)/x, x,0)
ans =
          1

» limit((1+x)^(1/x),x,0)
ans =
          exp(1)

» limit(sin(1/x),x,0)
ans =
limit(sin(1/x), x = 0)
```

Criteriul lui Heine

- Considerând două spații metrice (X, d) şi (X_1, d_1), o funcție $f : A \to X_1$, unde $A \subset X$ şi $x_0 \in A'$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
2. oricare ar fi şirul $(x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}$ convergent la x_0, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$

(*criteriul lui Heine*).

4. Exemplu

- Nu există $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$, deoarece considerând şirurile convergente la zero

$x_n = \frac{1}{2n\pi}$ şi $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathrm{N}$ avem:

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin 2n\pi = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$$

$$f(y_n) = \sin \frac{1}{y_n} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(y_n) = 1.$$

5. Exemplu

- Nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$:

vom restricționa funcția $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ la mulțimea

$\{(x,y) \mid y = m\cdot x\},\ m\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$

$$f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

Considerând șirurile convergente la $(0,0)$,

$(x_n,y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ și $(x_n',y_n')=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right)$, $n\in\mathbf{N}^*$ avem

$f((x_n,y_n))=\dfrac{1}{2}$, $f((x_n',y_n'))=\dfrac{2}{5}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$, ceea ce implică

$\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n,y_n))=\dfrac{1}{2}$, respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n',y_n'))=\dfrac{2}{5}$.

Calculul limitelor unor funcţii

- Fie $f : A \to$ **R**^{m}, $A \subset$ **R** o funcție vectorială de o variabilă reală dată de $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, unde $f_k : A \to$ **R**, $1 \le k \le m$.

Dacă $x_0 \in A'$ avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in$ **R**^{m} dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f_k(x) = l_k, 1 \le k \le m$.

Demonstrația se bazează pe inegalitatea:

$$|a_k - b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2} \le \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|, \quad a_k, b_k \in \mathbf{R},\ 1 \le k \le m$$

- Pentru funcțiile $f, g : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ ce au următoarele proprietăți:

  - $\left|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| \le g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$
  - $\lim\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \to x_0} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in A'$

avem $\lim\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \to x_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

6-7-8.Exemple

- $$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)} \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sin\frac{1}{x_1^2+\ldots+x_n^2}=0$$ deoarece:

$$\left|\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sin\frac{1}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right|\le\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

şi $$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)} \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}=0 .$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} = 0$, deoarece folosind inegalitatea $\dfrac{|a \cdot b|}{a^2 + b^2} \le \dfrac{1}{2}$

avem:

$$\frac{|x^2 \cdot y|}{x^2 + y^2} = \frac{|x \cdot y|}{x^2 + y^2} \cdot |x| \le \frac{1}{2} \cdot |x| \text{ și } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \cdot |x| = 0 .$$

- Pentru a calcula $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^4+y^4+x^4\cdot y^4)}{x^4+y^4}$, folosim faptul că

$\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ şi astfel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4+x^4\cdot y^4)}{x^4+y^4} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4+x^4\cdot y^4)}{x^4+y^4+x^4\cdot y^4} \cdot \frac{x^4+y^4+x^4\cdot y^4}{x^4+y^4} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{x^4\cdot y^4}{x^4+y^4}\right) = 1$$

deoarece:

$$\frac{x^4\cdot y^4}{x^4+y^4} = \frac{x^2\cdot y^2}{x^4+y^4}\cdot x^2\cdot y^2 \le \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot y^2 \quad \text{şi} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot y^2 = 0 .$$

De reţinut

- Definiţia limitei unei funcţii într-un punct
- Criteriul lui Heine
- Calculul limitei unei funcţii vectoriale
- Calculul limitei unei funcţii reale de mai multe variabile reale

Funcţii continue

Funcţii continue

Să considerăm două spații metrice (X, d) şi (X_1, d_1),

o funcție $f : A \to X_1$, unde $A \subset X$ şi un punct $x_0 \in A \cap A'$.

Spunem că f este *continuă* în x_0 dacă

oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $d(x, x_0) < \delta$,

să avem $d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

De reținut: f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi este egală cu $f(x_0)$.

Dacă funcția $f : A \to X_1$ este continuă în fiecare punct din A, spunem că f *este continuă pe* A.

În cazul spațiilor liniare normate $(E, \| \ \|)$, $(E_1, \| \ \|_1)$ și a funcției $f : A \to E_1$, $A \subset E$ vom spune că f este continuă în $x_0 \in A \cap A'$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încât $\forall x \in A$ cu $\|x - x_0\| < \delta$, avem $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

9. Exemplu

- Considerând spațiul liniar normat $(E, \| \ \|)$, vom arăta că norma $\| \ \| : E \to \mathbf{R}$

este o funcție continuă pe E:

luând $\varepsilon > 0$, determinăm un $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta$

să avem $\left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \varepsilon$.

Ținând seama de inegalitatea $\left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \|x - x_0\|$, obținem $\delta = \varepsilon$.

Prelungirea prin continuitate

În cazul în care $f : A \to X_1$, unde $A \subset X$ şi $x_0 \in A' \setminus A$,

dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, se poate construi funcția $g : A \cup \{x_0\} \to X_1$,

continuă în x_0, dată de formula $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$,

funcție ce se numeşte *prelungirea prin continuitate* a lui f în x_0.

10. Exemple

- Funcția $f_1 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to [-1,1]$ definită prin $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nu poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 0$, deoarece nu există $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$.
- Funcția $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 0$, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ şi anume:

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Criteriul lui Heine

- Considerând două spații metrice (X, d) şi (X_1, d_1),

o funcție $f : A \to X_1$ unde $A \subset X$ şi $x_0 \in A' \cap A$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f este continuă în x_0;
2. oricare ar fi şirul $(x_n)_n \subset A$, convergent la x_0, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

Funcția vectorială reală $f:[a,b]\to\mathbf{R}^m$, $f(t)=(f_1(t),\dots,f_m(t))$ este continuă în $t_0\in[a,b]$ dacă și numai dacă cele m funcții componente sunt continue în $t_0\in[a,b]$

În demonstrația acestei afirmații folosim criteriul lui Heine și modul de calcul al limitei unui șir din $\mathbf{R}^m$

In concluzie:

Funcția vectorială reală $f:[a,b]\to\mathbf{R}^m$, $f(t)=(f_1(t),\dots,f_m(t))$ este continuă pe $[a,b]$ dacă și numai dacă cele m funcții componente sunt continue pe $[a,b]$

Operaţii cu funcţii continue

Să considerăm un spațiu metric (X,d), un spațiu liniar normat $(E,\| \|)$ funcțiile $f,g:A\to E$, unde $A\subset X$ şi $x_0\in A\cap A'$.

- Dacă funcțiile f şi g sunt continue în x_0, atunci funcția $f+g$ este continuă în x_0;
- Dacă funcția f şi funcția $\alpha:A\to \mathbf{R}$ sunt continue în x_0, atunci funcția $\alpha\cdot f$ este continuă în x_0.

$C(A)$

Notăm $C(A) = \{f : A \to \mathbf{R},\ f \text{ continuă pe } A\}$,

Mulțimea $C(A)$, înzestrată cu operațiile de adunare şi înmulțire cu scalar, este un spațiu vectorial real.

- Fie spațiile metrice (X,d), (X_1,d_1), (X_2,d_2), funcțiile $f: A \to X_1$, și $g: B \to X_2$, unde $A \subset X$, $B \subset X_1$, $f(A) \subset B$ și $x_0 \in A \cap A'$;

dacă f este continuă în x_0 și g este continuă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este continuă în x_0.

Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.

Mulţime compactă

Într-un spaţiu metric (X, d), mulţimea K este *compactă* dacă orice şir din K conţine un subşir convergent. în K.

11. Exemple

- Orice interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$ este o mulțime compactă, deoarece considerând şirul $(x_n)_n \subset [a,b]$, acesta este mărginit şi conform lemei lui *Cesaro* conține un subşir convergent în mulțimea închisă $[a,b]$.

- În $\mathbf{R}^n$ o mulțime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.

- Fie spațiile metrice $(X,d),(X_1,d_1)$;

dacă funcția $f : A \to X_1$, $A \subset X$ este continuă,

atunci imaginea prin f a unei mulțimi compacte $K \subset A$,

este o mulțime compactă.

Exemplu

- Pentru a arăta că graficul unei funcții continue $f:[a,b]\to\mathbf{R}$,

$$G_f=\{(x,f(x))\,|\,x\in[a,b]\}$$

este o mulțime compactă, construim funcția vectorială $h:[a,b]\to\mathbf{R}^2$, $h(x)=(x,f(x))$, funcție ce este continuă, având componentele continue. Graficul funcției f este imaginea prin h a compactului $[a,b]$, deci este o mulțime compactă.

- Dacă o funcție reală, definită pe o mulțime compactă K , dintr-un spațiu spațiu metric (X,d) este continuă pe K , atunci este mărginită pe K şi îşi atinge marginile.

Funcţie uniform continuă

Considerând două spații metrice (X,d) şi (X_1,d_1), spunem că o funcție $f: X \to X_1$ este *uniform continuă* pe $A \subset X$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât:

$\forall x_1, x_2 \in A$ cu $d(x_1,x_2) < \delta$ să avem $d_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Se observă că o funcție uniform continuă pe A este continuă în orice punct din A, reciproca nefiind adevărată.

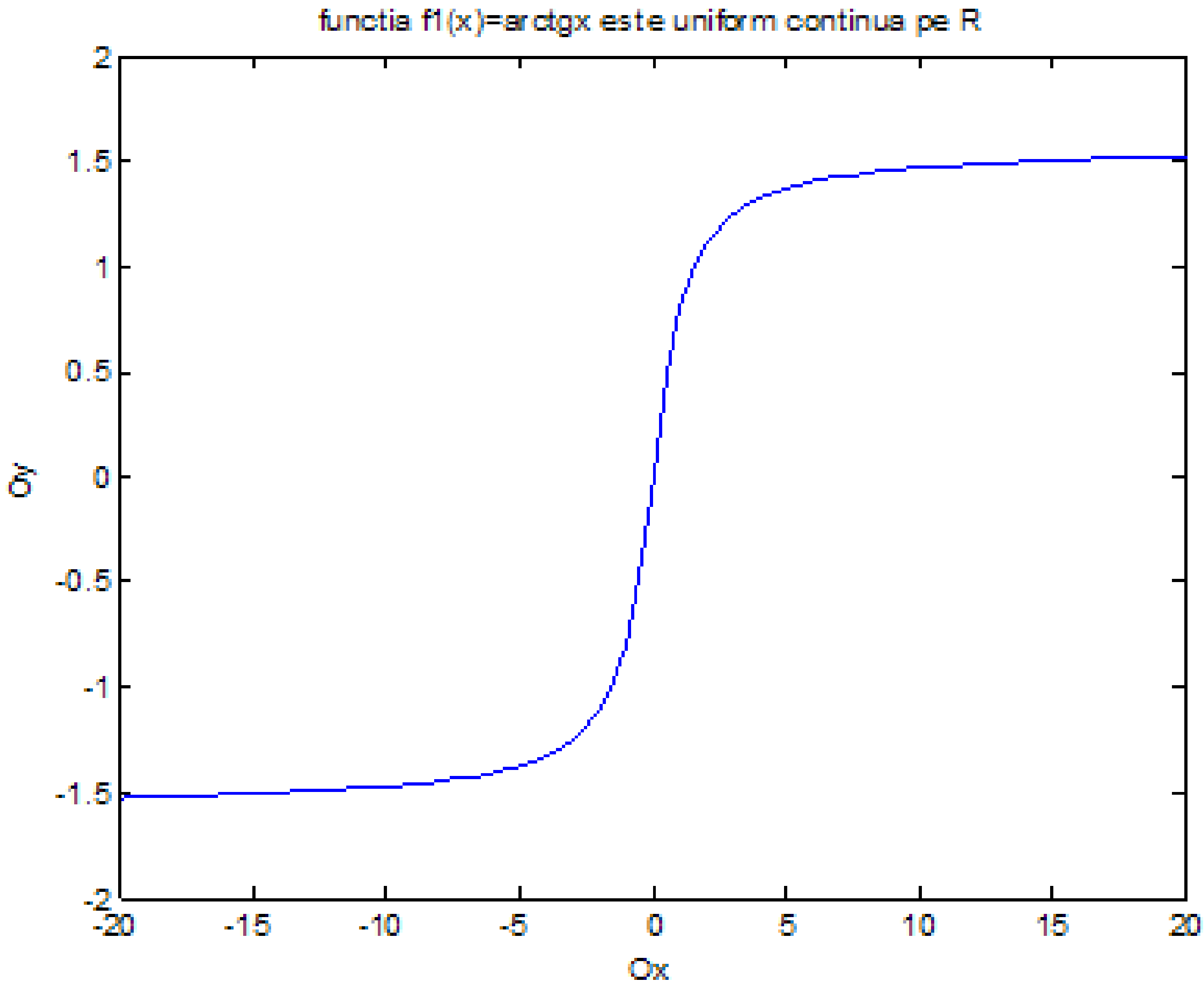
Considerând două spații metrice (X, d) și (X_1, d_1), spunem că o funcție $f : A \to X_1$, este funcție *lipschitziană* dacă există $L > 0$ astfel încât $d_1(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$.

- O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă, cu derivata mărginită pe $A \subset \mathbf{R}$ este lipschitziană pe A.

- O funcție lipschitziană este uniform continuă

12-13. Exemple

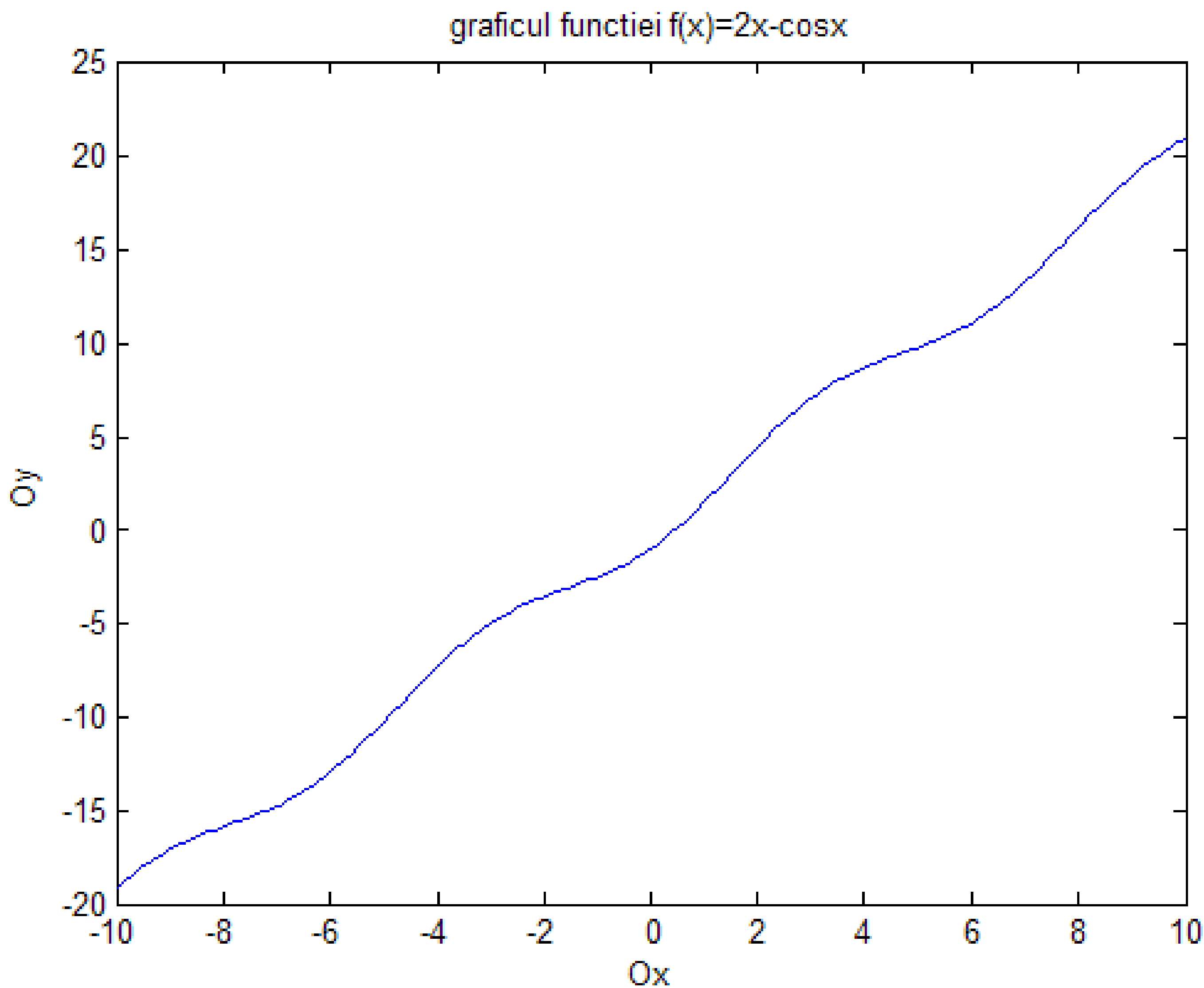
- Funcția $f_1 : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definită de $f_1(x) = arctgx$ este uniform continuă deoarece $f_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, ceea ce înseamnă că derivata este mărginită pe **R**, adică f_1 este lipschitziană


functia f1(x)=arctgx este uniform continua pe R
Oy
Ox
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

- Funcția $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită de $f_2(x) = 2x - \cos x$ este uniform continuă deoarece

$$|f_2'(x)| = |2 + \sin x| \leq 2 + |\sin x| \leq 3$$

și astfel funcția este lipschitziană, deci uniform continuă.


graficul functiei f(x)=2x-cosx
Oy
Ox
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

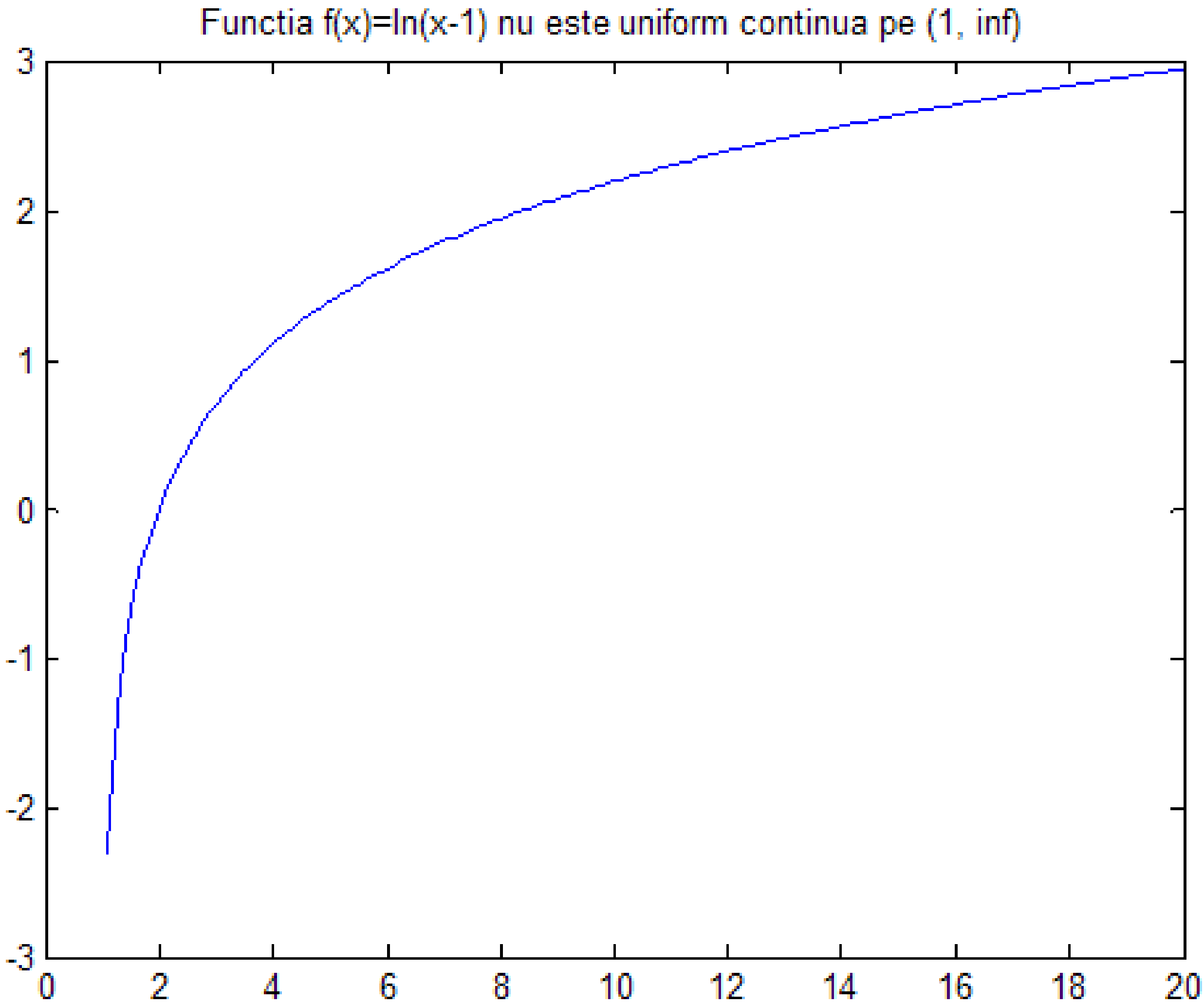
De reținut: dacă funcția $f: A \to X_1$, $A \subset X$ este uniform continuă pe A, atunci este uniform continuă pe orice submulțime $A_1 \subset A$.

- Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f_2(x) = 2x - \cos x$ este uniform continuă pe $(-10\pi, 10\pi) \subset \mathbf{R}$.

- O funcţie $f:(a,b)\to \mathbf{R}$, $(a,b)\subset \mathbf{R}$, continuă pe (a,b) care admite asimptotă verticală $x=a$ sau $x=b$ nu este uniform continuă pe (a,b).

14.Exemplu

- Funcţia $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$ nu este uniform continuă pe $(1,+\infty)$ deoarece $x=1$ este asimptotă verticală ($\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$).



Functia f(x)=ln(x-1) nu este uniform continua pe (1, inf)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

- O funcţie continuă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, al cărei grafic admite asimptote la $-\infty$ şi la $+\infty$, este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

15. Exemplu

- Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}$ este continuă pe **R**

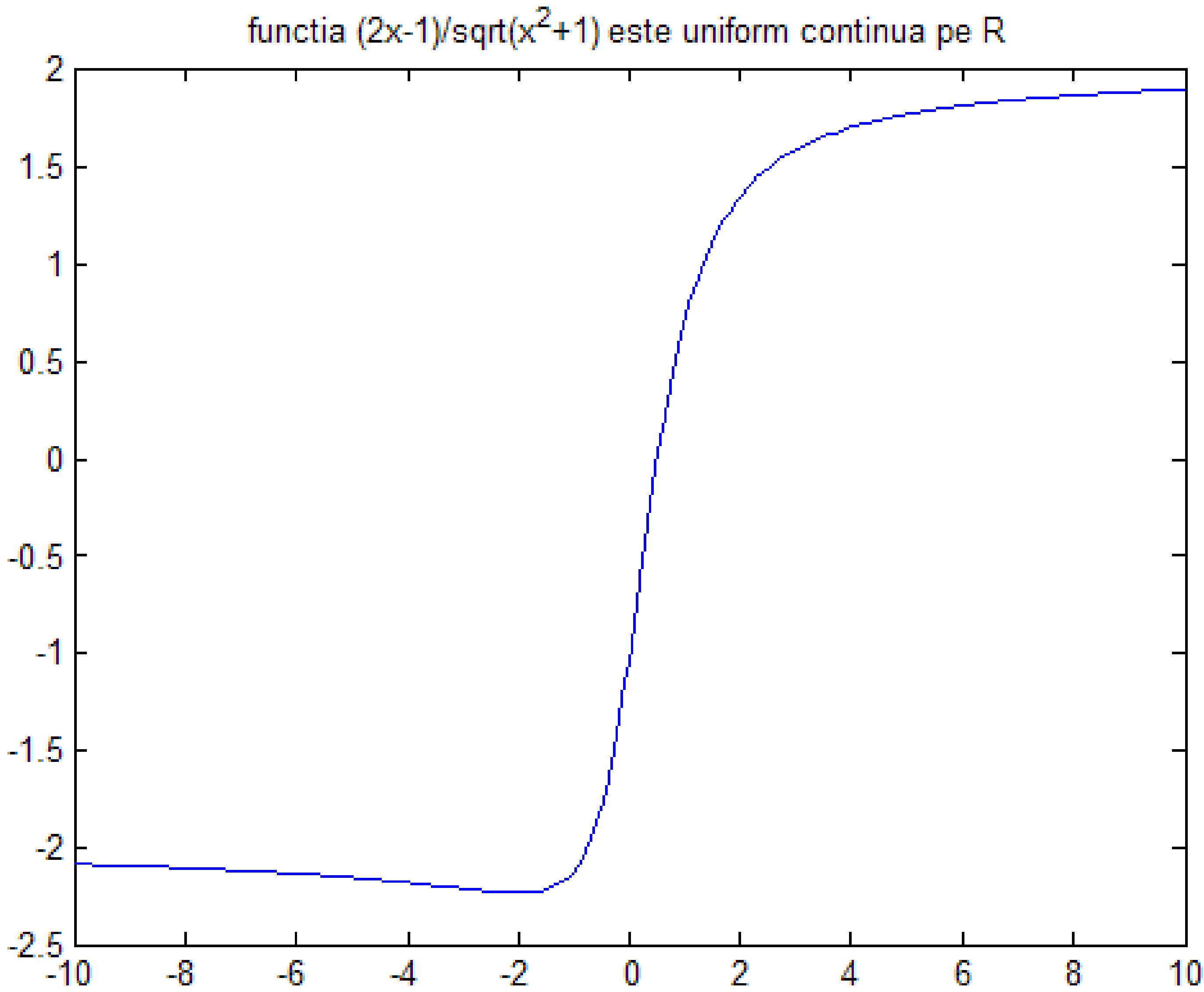
şi în plus:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{-x \cdot \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = -2\ ,$$

adică funcţia admite asimptote orizontale $y = 2$ la $+\infty$ şi $y = -2$ la $-\infty$.

În concluzie f este uniform continuă pe **R**.


functia (2x-1)/sqrt(x^2+1) este uniform continua pe R
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

16. Exemplu

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ este continuă pe $\mathbf{R}$ şi admite asimptote oblice:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

$y=x-\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

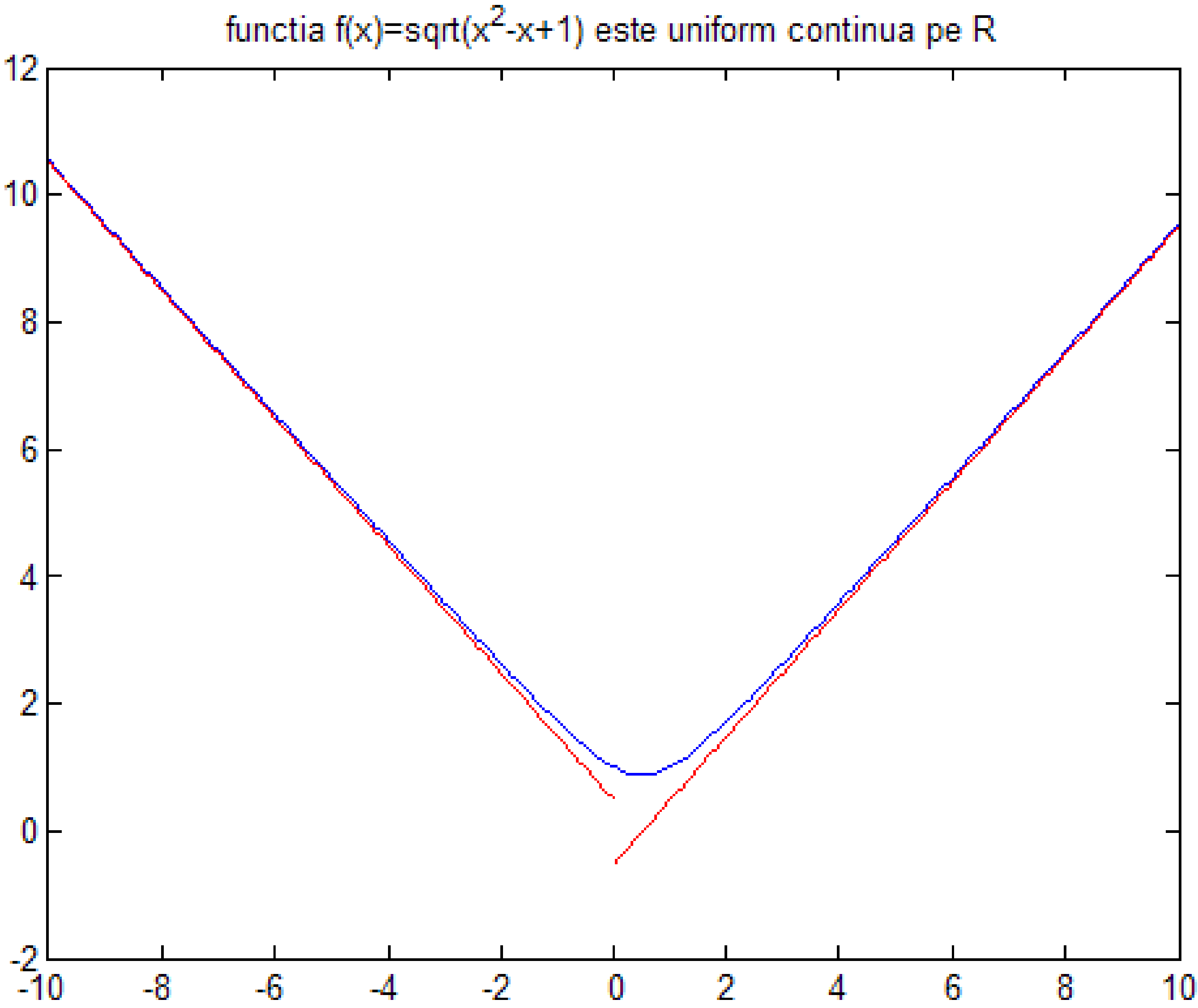
$$m_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$$

$$n_1=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)}=\frac{1}{2}$$

$y=-x+\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $-\infty$

Aşadar funcţia este uniform continuă pe **R**.


functia f(x)=sqrt(x2-x+1) este uniform continua pe R
12
10
8
6
4
2
0
-2
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

- Fie spațiile metrice (X,d), (X_1,d_1) şi $K\subset X$ o mulțime compactă; dacă funcția $f:K\to X_1$ este continuă pe K, atunci este uniform continuă pe K.

17. Exemple

- Funcția $f:(2,\infty)\to \mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\ln(x-2)$ este uniform continuă pe $[3,10]$, fiind continuă pe acest compact.

- Este funcția $f:(1,\infty)\to \mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$ uniform continuă pe $(3,4)$?

Știm că f este continuă pe $[3,4]$, deci va fi uniform continuă pe această mulțime compactă, și pe orice submulțime a sa, adică și pe $(3,4)$.

Transfer de continuitate

- Dacă $(f_n)_n \subset C(A)$ este un şir de funcții uniform convergent pe A, atunci funcția sa limită este continuă pe A. ($\lim_{n \to \infty} f_n = f \in C(A)$)

Altfel spus:: limita uniformă a unui şir de funcții continue este o funcție continuă.

18. Exemplu

- Funcția limită a șirului de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **este** definită de

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} - x + 1}{x^{2n} + \sqrt{1+x^2}} \text{ este } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}, & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}, & x = 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}+1}, & x = -1 \\ x, & |x| > 1 \end{cases}$$

Acest șir nu este uniform convergent pe $[-3,3]$, deoarece funcțiile f_n sunt continue pe $[-3,3]$, dar funcția limită nu este.

- Dacă seria $\sum_{n\geq 1} f_n$, unde $(f_n)_n \subset C(A)$, este uniform convergentă pe A, atunci suma sa, $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, este o funcție continuă pe A.

19. Exemplu

- Am demonstrat cu criteriul lui Weierstrass convergența uniformă pe **R** a seriei de funcții $\sum_{n\geq 0} arctg\frac{2x}{x^2+n^6}$; funcțiile $f_n(x) = arctg\frac{2x}{x^2+n^6}$ sunt continue pe **R** şi astfel putem afirma că suma seriei este o funcție continuă pe **R.**

Referitor la convergență uniformă a seriilor de puteri, avem următorul rezultat:

- Considerăm seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n$, având raza de convergență R

1. Dacă $R < +\infty$, seria converge uniform pe $[x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon], \forall \varepsilon > 0$.
2. Dacă $R = +\infty$, seria converge uniform pe $[x_0 - R_0, x_0 + R_0]$, $\forall R_0 > 0$.

Astfel seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n$ definește o funcție continuă

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n, \text{ dacă } R < +\infty$$

şi respectiv

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n, \text{ dacă } R = +\infty.$$

De reţinut

- Funcţie continuă într-un punct, funcţie continuă pe o mulţime
- Criteriul lui Heine
- Prelungire prin continuitate
- Funcţie uniform continuă pe o mulţime
- Condiţii suficiente ca o funcţie reală de variabilă reală să fie uniform continuă.
- Transfer de continuitate în cazul şirurilor de funcţii, seriilor de funcţii, seriilor de puteri.

Curbe

Curbe

Funcția vectorială $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ $\gamma(t)=(f(t),g(t))$, continuă pe $[a,b]$,

(f şi g sunt continue pe acest interval) se numeşte *curbă* parametrizată în $\mathbf{R}^2$,

în timp ce funcția vectorială continuă $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^3$

$\gamma(t)=(f(t),g(t),h(t))$ este o *curbă* în $\mathbf{R}^3$

Definim o *reprezentare parametrică* (o *parametrizare*) a curbei prin:

$$\gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}\quad t\in[a,b]\quad \text{respectiv}\quad \gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases}\quad t\in t\in[a,b]$$

(*ecuațiile parametrice ale curbei*).

Imaginea $\gamma([a,b]) = (\gamma) \subset \mathbf{R}^2$ se numeşte *urma* (*traiectoria*) curbei γ ,

$\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc *capetele curbei*; dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ este o *curbă închisă*.

20. Exemple

- Identificând $\mathbf{R}^2$ cu planul xOy , urma curbei $\gamma:[0,\frac{\pi}{2}]\to$ $\mathbf{R}^2$, definită prin $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ este sfertul de cerc unitate (cu centru în origine, de raza 1) situat în primul cadran $\{(x,y)\in$ $\mathbf{R}^2$, $x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0\}$. Capetele curbei sunt punctele $(1,0),(0,1)$.

- Curba $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$, definită de $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ este închisă deoarece $\gamma(0)=\gamma(2\pi)=(1,0)$; urma curbei este cercul unitate, parcurs în sens trigonometric $\{(x,y)\in$ $\mathbf{R}^2$, $x^2+y^2=1\}$.

- Curba $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^3$, definită de $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,3)$ are ca urmă cercul $\{(x,y,z)\in$ $\mathbf{R}^3$, $x^2+y^2=1, z=3\}$.

Pentru $\gamma:[a,b]\to \mathbf{R}^n$, $n\in\{2,3\}$, curbă parametrizată fixată, putem defini $\gamma^-:[a,b]\to \mathbf{R}^n$, prin $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$, curbă numită *opusa* curbei γ.
Remarcăm că urmele curbelor γ şi γ^- coincid.

Dacă $\gamma_1:[a,b]\to \mathbf{R}^m$ şi $\gamma_2:[b,c]\to \mathbf{R}^m$ sunt două curbe parametrizate în $\mathbf{R}^m$, $m\in\{2,3\}$, cu proprietatea că $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ putem defini curba:

$$\gamma_1\cup\gamma_2:[a,c]\to \mathbf{R}^m,\ \text{dată de: } (\gamma_1\cup\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(t),\ t\in[a,b]\\ \gamma_2(t),\ t\in[b,c]\end{cases}$$

numită *juxtapunerea* curbelor γ_1 şi γ_2.
Urma lui $\gamma_1\cup\gamma_2$ este reuniunea $(\gamma_1)\cup(\gamma_2)$.

Dacă $F : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ este o funcție continuă, mulțimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

este urma unei curbe în $\mathbf{R}^2$, $F(x, y) = 0$ se numește ecuația carteziană a curbei.

Obţinerea ecuaţiilor parametrice ale unei curbe definite prin ecuaţia carteziană

Reamintim ecuațiile ce leagă coordonatele carteziene (x, y) de coordonatele polare (r, t):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],\ r \geq 0 \qquad (*)$$

Scriem într-o primă etapă ecuația curbei în coordonate polare $r = \varphi(t)$,

apoi înlocuim pe r cu $\varphi(t)$ în formulele (*).

21-22-23. Exemple

- Mulţimea $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=a^2\}$ este cercul cu centrul în origine, de rază a. Ecuaţia acestui cerc în coordonate polare este $r=a$ şi astfel ecuaţiile parametrice ale cercului sunt:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = a\cdot\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]:$$

- *Să scriem ecuatiile parametrice ale* ***lemniscatei lui Bernoulli*** *ştiind că ecuaţia carteziană a lemniscatei este* $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Inlocuind coordonatele carteziene cu cele polare obţinem:

$r^2 = \cos^2 t - \sin^2 t$

adică $r = \sqrt{\cos 2t}$; din condiţia $\cos 2t > 0$ obţinem: $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ şi astfel ecuaţiile parametrice ale lemniscatei sunt:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos 2t} \cdot \cos t \\ y = \sqrt{\cos 2t} \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

Pentru a desena, utilizând Matlab, urma unei curbe γ din $\mathbf{R}^2$, de ecuaţii parametrice

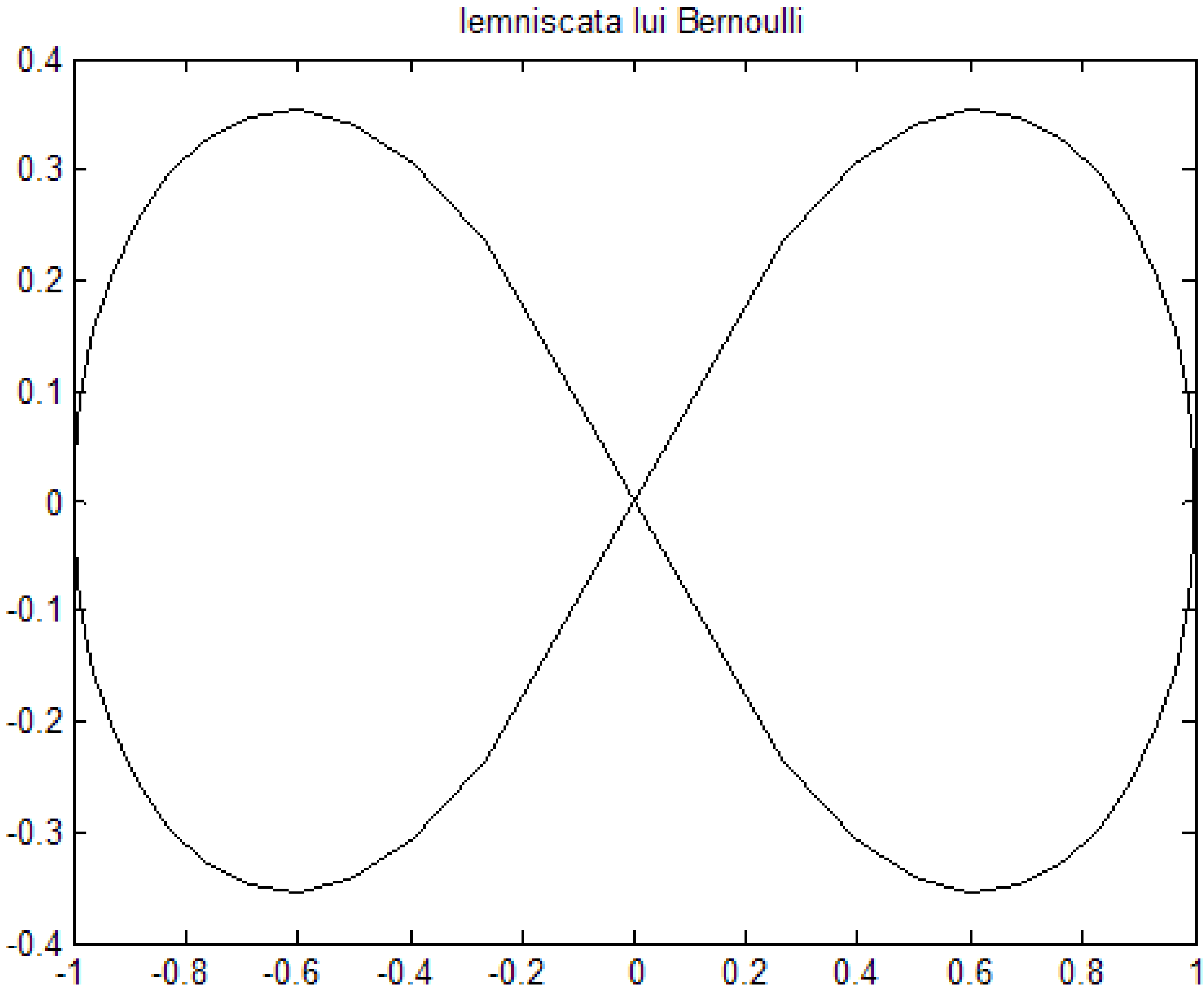
$$\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

folosim următoarea sintaxă:

```
»t=a:h:b; plot(f(t),g(t))
```

Desenăm urma lemniscatei lui Bernoulli:

```
»t1=pi./4:pi/50:pi./4;t2=3*pi./4:pi/50:5*pi./4;
plot((sqrt(cos(2*t1))).*cos(t1),(sqrt(cos(2*t1))).*sin(t1),'k',
(sqrt(cos(2*t2))).*cos(t2),(sqrt(cos(2*t2))).*sin(t2),'k')
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored
```


lemniscata lui Bernoulli
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

- Pentru a scrie ecuațiile parametrice ale elipsei $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \}$ folosim

coordonate polare generalizate:

$$\begin{cases} x = a \cdot r \cdot \cos t \\ y = b \cdot r \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ecuația elipsei în coordonate polare generalizate este $r = 1$ şi ecuațiile parametrice sunt:

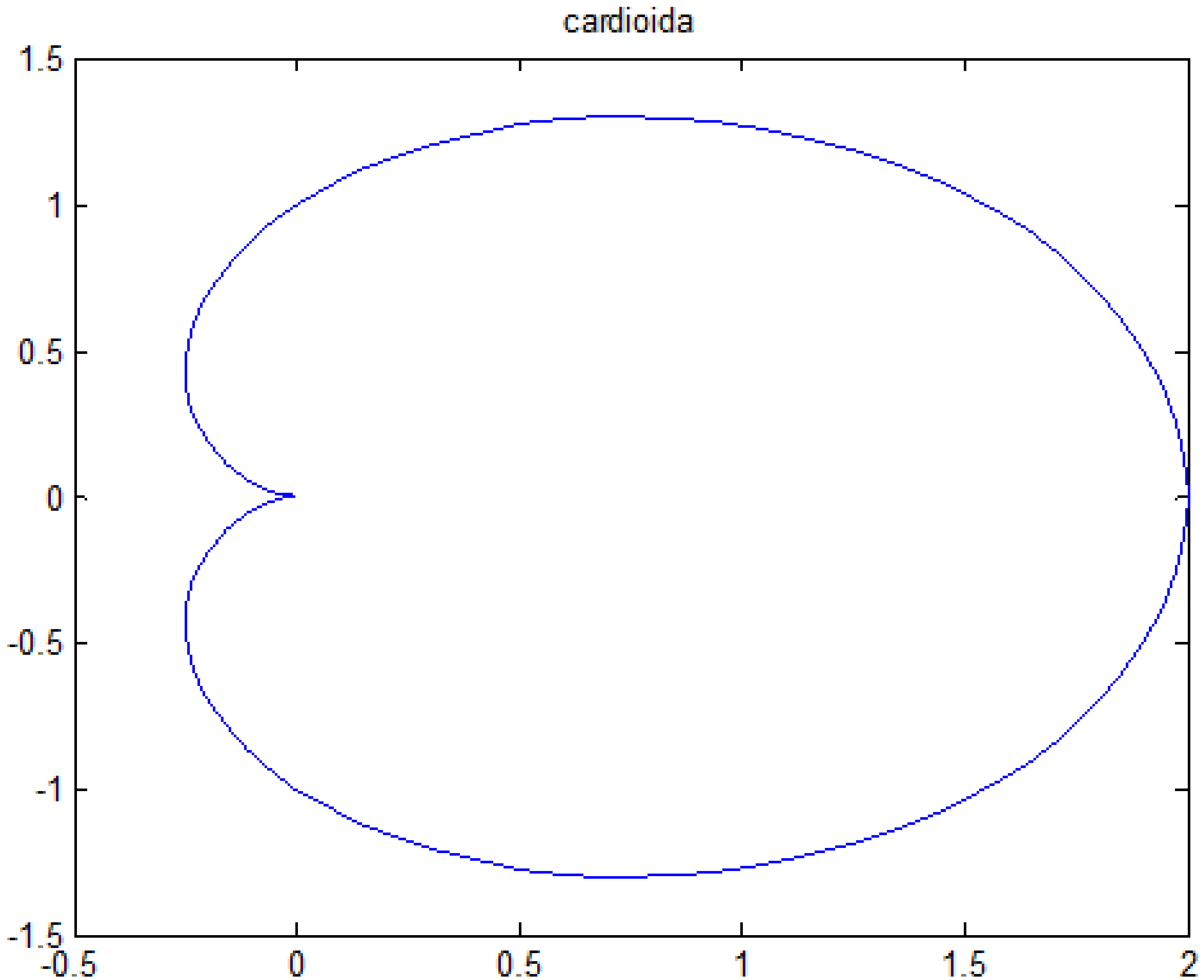
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

În cazul în care este dată ecuația curbei în coordonate polare $r = \varphi(t)$ este mai simplu de a scrie ecuațiile parametrice ale curbei, având doar de inlocuit în ecuațiile (*) r cu $\varphi(t)$.

- Ecuația *cardioidei* în coordonate polare este $r = 1 + \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$ şi astfel

ecuațiile parametrice vor fi $\begin{cases} x = (1+\cos t)\cdot\cos t \\ y = (1+\cos t)\cdot\sin t \end{cases}$ $t \in [-\pi, \pi]$.

```
»t=-pi:pi./50:pi;plot((1+cos(t)).*cos(t),(1+cos(t)).*sin(t))
```



De reţinut

- Ecuaţiile parametrice ale curbelor
- Urma unei curbe
- Ecuaţia carteziană a unei curbe
- Obţinerea ecuaţiilor parametrice ale unei curbe definite prin ecuaţia carteziană

Aplicaţii liniare şi continue

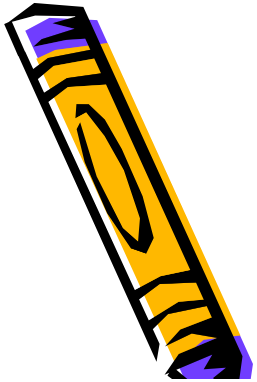
Aplicaţii liniare şi continue

O aplicație $T: V \to V_1$ între două spații vectoriale reale V, V_1 este *liniară* dacă satisface relația $T(\alpha \cdot x + \beta \cdot x') = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(x')$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\forall x, x' \in V$.

De obicei, în cazul unei aplicații liniare T scriem Tx în loc de $T(x)$.

Să reținem că putem discuta despre liniaritatea aplicației $T: U \to V_1$, $U \subset V$, numai dacă U este un subspațiu liniar al lui V.

24. Exemplu



Considerăm sistemul liniar de m ecuații cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

şi definim o aplicație liniară $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, dată de:

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n, \ldots, a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n)$$

şi astfel putem interpreta problema rezolvării acestui sistem de ecuații în modul următor:

fiind dat vectorul $(b_1, \ldots, b_m)$, să găsim acei vectori $(x_1, \ldots, x_n)$ care verifică relația $T(x_1, \ldots, x_n) = (b_1, \ldots, b_m)$

Vom nota (V, V_1) mulțimea tuturor aplicațiilor liniare ce aplică pe V în V_1, mulțime ce formează un spațiu liniar față de corpul **R**, definind:

$(T_1 + T_2)(x) = T_1 x + T_2 x, \forall x \in V$ şi $(\alpha \cdot T)(x) = \alpha \cdot Tx, \forall x \in V, \forall \alpha \in$ **R**.

Elementul nul al acestui spațiu, notat O, se numeşte *aplicația nulă*, şi este dat de formula: $O\,x = \theta_{V_1}, \forall x \in V$

Unei aplicaţii liniare T : $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ i se asociază matricea

$$M_T = (Te_1, Te_2, \dots, Te_n),$$

unde $e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)$,
($\{e_1, \dots, e_n\}$ este baza uzuală din $\mathbf{R}^n$),
adică vectorii Te_i formează coloanele lui M_T).

Aplicaţie liniară şi continuă

Dacă $(E, \| \ \|)$ şi $(E_1, \| \ \|_1)$ sunt spaţii liniare normate, aplicaţia liniară $T : E \to E_1$ este *continuă* în $x_0 \in E$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $\|x - x_0\| < \delta$ implică $\|Tx - Tx_0\|_1 < \varepsilon$.

- Aplicația liniară $T : E \to E_1$ este continuă pe E dacă și numai dacă este continuă într-un singur punct.

Aplicația liniară $T : E \to E_1$ este *mărginită* dacă există un număr pozitiv M astfel încât $\|Tx\|_1 \leq M \cdot \|x\|, \forall x \in E$.

- Condiția necesară și suficientă ca aplicația liniară $T : E \to E_1$ să fie continuă este să fie *mărginită.*

- Orice aplicație liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este continuă.

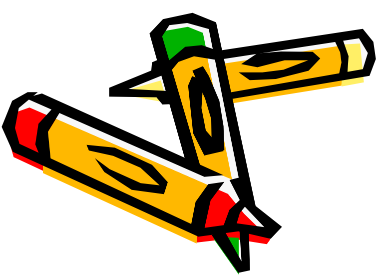
Vectori si valori proprii

Un număr real λ se numeşte *valoare proprie* a unei aplicaţii liniare $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ dacă există un vector $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{\theta\}$ astfel încât

$$Tx = \lambda x\,.$$

Vectorul x se numeşte *vector propriu* al aplicaţiei *T*, corespunzător valorii proprii λ.

Ecuaţia $Tx = \lambda x$ poate fi scrisă sub forma $(T - \lambda I)x = \theta$, unde I este operatorul identitate.



Dacă matricea asociată aplicaţiei liniare T este $M_T = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$,

atunci avem:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) \cdot x_n = 0 \end{cases};$$

Vectorii proprii fiind nenuli, suntem interesaţi de soluţiile nebanale ale sistemului,condiţia necesară şi suficientă de existenţă a acestora fiind ca determinantul matricei sistemului să se anuleze.

Acest determinant, $|M_T - \lambda I|$, unde I este matricea unitate de ordin *n* este un polinom de grad n , numit *polinomul caracteristic* al aplicatiei liniare $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

25. Exemplu

- Să considerăm o aplicaţie liniară $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, a cărei matrice asociat

este $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Valorile proprii sunt rădăcinile ecuaţiei $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Calculul valorilor proprii in Matlab

Pentru a calcula valorile proprii ale unei matrice A, folosim funcţia eig(A). :

```
» A=[2 3 ; -1 -2]; eig(A)
ans =
     1
    -1
```

De reţinut

- Aplicaţie liniară; matricea asociată unei aplicaţii liniare
- Aplicaţie liniară şi continuă
- Condiţie necesară şi suficientă ca o aplicaţie liniară să fie continuă.
- Vectori si valori proprii