Diferenţiabilitate

2013-2014

Marina Gorunescu

1. Diferenţiabilitatea funcţiilor de variabilă reală

Punct interior unei mulţimi

Într-un spaţiu metric (X,d) un punct x_0 este punct *interior* mulţimii $A \subset X$, dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(x_0,\varepsilon) \subset A$.

In particular dacă $X = \mathbf{R}$ avem:
$x_0 \in \mathrm{int}(A)$ dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$.

Funcţie derivabilă

Spunem că funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbf{R}$.

Valoarea acestei limite se notează $f'(x_0)$ şi se numeşte *derivata* lui f în x_0.

Dacă f este derivabilă în fiecare punct din $A_1 \subset \operatorname{int}(A)$, vom spune că f este *derivabilă* pe A_1, iar funcția $f : A_1 \to \mathbf{R}$ definită prin $x \mapsto f'(x)$ se numeşte *derivata* lui f pe A_1.

Aplicaţii în economie: Rata de schimb

- *Rata de schimb* instantanee a funcției $y = f(x)$ în raport cu x este

$$y_{x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

De exemplu expresia $P(t) = \sqrt{at + b}$ cu $a = 920$ şi $b = 1359$ dă o bună aproximare a populatiei P (în milioane) a SUA în perioada 1950-2000, unde $t = 0$ corespunde anului 1950.

Rata de schimb instantanee pentru un timp oarecare t este $P'(t) = \dfrac{a}{2\sqrt{at + b}}$;

$P'(39) = 1.897$, ceea ce înseamnă că în 1989 populația SUA a crescut cu aproximativ 1.9 milioane.

Derivarea functiilor reale de variabila reala in Matlab

Pentru a deriva funcţia reală de variabilă reală f , folosim în Symbolic Math, funcţia diff şi anume f1=diff(f).

Pentru a calcula $f'(a)$ vom scrie subs(f1,x,a).

1. Exemplu

- Să calculăm $f'(1)$ în cazul funcției $f(x) = \dfrac{arctgx}{x^2}$

```
»syms x
» f=atan(x)/x^2; f1=diff(f,x)
f1 =
            1/(x^2*(x^2 + 1)) - (2*atan(x))/x^3
» a=subs(f1,x,1)
a =
            -1.0708
```

Funcţie diferenţiabilă

Funcția $f: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ este *diferențiabilă* în punctul $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ dacă există o aplicație liniară $T: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

cu alte cuvinte $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \alpha(x) \cdot |x - x_0|$, unde $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

- Funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ este *diferențiabilă* în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă și numai dacă este derivabilă în x_0; aplicația liniară $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este dată de $Ts = f'(x_0) \cdot s, s \in \mathbf{R}$.

Aplicația liniară $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se numește *diferențiala* lui f în x_0 și se notează $df(x_0)$.
Să reținem așadar că $df(x_0) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o aplicație liniară.

- Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$, atunci ea este continuă în x_0.

Reciproca nu este adevărată:

- Funcția $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă în $x = 0$.

Derivata funcţiei vectoriale de variabilă reală

În cazul funcției vectoriale de variabilă reală $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$, raportul $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, unde $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ este un element din $\mathbf{R}^m$ şi astfel $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se calculează pe componente.

- Funcția $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ este derivabilă în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt derivabile în punctul x_0 şi avem $f'(x_0) = (f_1'x_0), \dots, f_m'(x_0))$

Derivarea functiilor vectoriale de variabila reala in Matlab

Pentru a deriva în Symbolic Math funcţia vectorială de variabilă reală $f = (f_1, \ldots, f_m)$, vom scrie:

»syms x
» f=[$f_1, \ldots, f_m$]; f1=diff(f)

unde am notat derivata f' cu f1.

Daca avem de calculat $a = f'(x_0)$ vom scrie în continuare:

»a=subs(f1,x,x_0]

2. Exemplu

Calculăm $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ în cazul funcției $f:[0,10\pi]\to \mathbf{R}^3$, definită prin $f(x)=(\cos x, \sin\, x, x)$.

```
syms x
» syms x
»f=[cos(x), sin(x),x];
»f1=diff(f)
f1 =
        [ -sin(x), cos(x), 1]
»a=subs(f1,x,pi/4)
a =
   -0.7071    0.7071    1.0000
```

Curbă parametrizată. Vector tangent

Funcția $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in [a, b]$, unde $f, g, h : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt derivabile, este o curbă parametrizată.

Derivata funcției vectoriale $r(t)$, $r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$, ce îndeplineşte condiția ca $\left\|\vec{r}'(t)\right\| \neq 0$, este *vectorul tangent* la această curbă.

O curbă $r(t)$, $t \in [a, b]$ este *netedă* dacă $r'(t) \neq (0,0,0)$, $t \in [a, b]$.

Analog se definesc aceste noțiuni in $\mathbf{R}^2$.

3. Exemple

- Elicea $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ este o curbă netedă deoarece
  $(-\sin t, \cos t, 1) \neq (0,0,0)$, $t \in [0, 2\pi]$,
  vectorul tangent fiind $r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$;

- Elipsa definită de $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ este o curbă netedă deoarece $(-a \sin t, b \cos t) \neq (0,0)$, $t \in [0, 2\pi]$.
  Vectorul tangent este $r'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$

Considerăm o curbă parametrizată $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ simplă, neînchisă,

de ecuații parametrice $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \ t \in [a,b] \\ z = h(t) \end{cases}$ și diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$:

$\Delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$

Pentru punctele $P_k(f(t_k), g(t_k), h(t_k)),\ 0 \le k \le n$ definim suma:

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^{n} d(P_{k-1}, P_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f(t_k) - f(t_{k-1}))^2 + (g(t_k) - g(t_{k-1}))^2 + (h(t_k) - h(t_{k-1}))^2}$$

care reprezintă lungimea liniei poligonale cu vârfurile P_k.

Curbă rectificabilă

Dacă mulțimea $\{L_\Delta,\ \Delta \in \mathcal{D}[a,b]\}$ *este mărginită*, curba γ este *rectificabilă* şi are *lungimea* $L = \sup\{L_\Delta,\ \Delta \in \mathcal{D}[a,b]\}$.

Considerând $\gamma:[a,b] \to \mathbf{R}^3$ o curbă rectificabilă, putem defini funcția $s:[a,b] \to \mathbf{R}$, astfel încât $s(t)$ reprezintă lungimea arcului de curbă dat de:

$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u),\ u \in [a,t],\ t \le b \\ z = h(u) \end{cases}$$

- Dacă γ şi derivata sa γ' sunt continue (adică γ este de clasă C^1), atunci γ este rectificabilă şi s este derivabilă, cu derivata continuă şi în plus

$$s'(t) = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}$$

Calculul lungimii unei curbe:

$$L_\gamma = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt\,.$$

4.Exemplu

- Să calculăm lungimea elicei $\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t\,,\ t \in [0,2\pi] \\ z = 2t \end{cases}$:

$$L_{\gamma} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 2^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,dt = 2\sqrt{5}\pi\,.$$

5. Exemplu

- Să calculăm vectorul tangent şi lungimea curbei în cazul cardioidei,

curbă de ecuaţii parametrice:

$$x = (1+\cos t)\cdot \cos t,\ y = (1+\cos t)\cdot \sin\ t, t\in[0,2\pi].$$

```
» syms t
» cardioida=[(1+cos(t))*cos(t), (1+cos(t))*sin(t)];
» tgcardioida=diff(cardioida)
tgcardioida =
         [ - cos(t)*sin(t) - sin(t)*(cos(t) + 1), cos(t)*(cos(t) + 1) - sin(t)^2]
»normacard=sqrt(tgcardioida(1)^2+tgcardioida(2)^2)
normacard =
         ((cos(t)*sin(t) + sin(t)*(cos(t) + 1))^2 + (sin(t)^2 - cos(t)*(cos(t) + 1))^2)^(1/2)
» lungcard=int(normacard, t,0,2*pi)
lungcard =
         8
```

```
syms t
» cardioida=[(1+cos(t))*cos(t), (1+cos(t))*sin(t)];
» tgcardioida=diff(cardioida);
```

Definim funcţia ce calculează norma unei funcţii vectoriale, de variabilă reală:

```
» norma=inline('sqrt(v*transpose(v))')
norma =

     Inline function:
     norma(v) = sqrt(v*transpose(v))
»L= int(norma(tgcardioida),0,2*pi)
L =
          8
```

Funcția $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$, este *diferențiabilă* în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă există o aplicație liniară $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, astfel încât:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = (0,\ldots 0) = \theta_{R^m}$$

Aplicația liniară $T:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$ dacă există, este unică şi se notează $df(x_0)$.

Se demonstrează că dacă $f=(f_1,\dots,f_m)$ este diferențiabilă în $x_0\in\operatorname{int}(A)$ atunci fiecare componentă a sa este diferențiabilă în x_0 şi avem

$$df(x_0)=(df_1(x_0),\dots,df_m(x_0))$$

adică

$$df(x_0)s=(df_1(x_0)s,\dots,df_m(x_0)s)=(s\cdot f_1'(x_0)s,\dots,s\cdot f_m'(x_0))$$

Dacă f este diferențiabilă în x_0, atunci ea este continuă în x_0

Derivate de ordin superior

Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, este derivabilă în orice punct al unui interval $(x_0 - r, x_0 + r)$, $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ şi în plus $f' : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbf{R}$ este derivabilă în x_0, spunem că f este de *două ori derivabilă* în x_0 şi scriem $(f')'(x_0) = f''(x_0)$.

Dacă $f' : (x_0 - r_1, x_0 + r_1) \to \mathbf{R}$, $r_1 \le r$, este derivabilă pe $(x_0 - r_2, x_0 + r_2)$, $r_2 \le r_1$ vom defini funcția

$f'' : (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \to \mathbf{R}$, prin $x \mapsto f''(x)$

funcție numită *derivata de ordinul* II a funcției f.

In general, dacă $f^{(n-1)}:(x_0-r_{n-1},x_0+r_{n-1})\to\mathbf{R}$, este derivabilă în x_0, spunem că f este de *n ori derivabilă* în x_0 şi scriem

$(f^{(n-1)})'(x_0)=f^{(n)}(x_0)$.

Analog, putem defini, $(f^{(n-1)})'=f^{(n)}:(x_0-r_n,x_0+r_n)\to\mathbf{R}$, funcția $f^{(n)}$ numindu-se *derivata de ordin n* a funcției f.

6-7. Exemple

- Să calculăm derivata de ordin n a funcției $f(x) = \dfrac{1}{x-a}, x \neq a$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x-a)^3} \Rightarrow f'''(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x-a)^4}$$

presupunând că $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x-a)^{n+1}}$, calculăm

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-(-1)^n \cdot n! (n+1)}{(x-a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(x-a)^{n+2}}$$

şi astfel conform principiului inducției matematice avem

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-a)^{n+1}}.$$

- Folosind rezultatul obținut anterior, să calculăm derivata de ordin n

a funcției $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}},\ x\in(-1,1)$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x}-\frac{(-1)}{1-x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}\right) \text{ şi astfel:}$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{3}\cdot\left(\frac{1}{(1+x)^{n}}-\frac{1}{(x-1)^{n}}\right).$$

Calculul derivatelor de ordin superior in Matlab

In Symbolic Math putem calcula derivate de ordin superior, dar numai pentru un ordin dat, nu în general. De exemplu, notând cu fi, derivata de ordin i, i >1, vom scrie:

```
»fi=diff(f,x,i-1)
```

Altă variantă de lucru este scrierea unui program care să calculeze primele j>i derivate.

8. Exemplu

Calculăm derivata de ordinul 10 a funcției $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbf{R}$

```
» syms x
» f=sqrt(x^2+x+1);
» f10=diff(f,x,9)
f10 =
        (883575*(2*x + 1)^5)/(8*(x^2 + x + 1)^(13/2)) - (123795*(2*x + 1)^3)/(x^2 + x + 1)^(11/2) -
        (2297295*(2*x + 1)^7)/(64*(x^2 + x + 1)^(15/2)) - (945*(8*x + 4)^3)/(64*(x^2 + x +
        1)^(11/2)) + (2027025*(2*x + 1)^9)/(512*(x^2 + x + 1)^(17/2)) + (20265*(2*x + 1))/(2*(x^2
        + x + 1)^(9/2)) + (8715*(8*x + 4))/(x^2 + x + 1)^(9/2) + (1155*(128*x + 64))/(16*(x^2 + x +
        1)^(9/2)) - (8505*(2*x + 1)*(8*x + 4)^2)/(32*(x^2 + x + 1)^(11/2)) - (8505*(2*x + 1)^2*(8*x
        + 4))/(2*(x^2 + x + 1)^(11/2)) + (176715*(2*x + 1)^4*(8*x + 4))/(64*(x^2 + x + 1)^(13/2)) -
        (135135*(2*x + 1)^6*(8*x + 4))/(256*(x^2 + x + 1)^(15/2)) - (2835*(2*x + 1)^2*(128*x +
        64))/(64*(x^2 + x + 1)^(11/2)) + (10395*(2*x + 1)^3*(8*x + 4)^2)/(128*(x^2 + x + 1)^(13/2))
```

Este absolut necesară simplificarea expresiei derivatei de ordin 10. Merită folosită instrucțiunea:

```
»  f10=simple(f10)
f10 =
        -(8505*(2*x + 1)*(4096*x^6 + 12288*x^5 - 768*x^4 - 22016*x^3 - 10272*x^2 + 2784*x +
        631))/(512*(x^2 + x + 1)^(17/2))
```

Vom scrie un program care ne va calcula primele 50 derivate:

```
» f(1)=sqrt(x^2+x+1); i=2; while i<50 f(i)=diff(f(i-1),x);i=i+1;end
» f(10);
» f10=simple(f(10))
f10 =
        -(8505*(2*x + 1)*(4096*x^6 + 12288*x^5 - 768*x^4 - 22016*x^3 - 10272*x^2 + 2784*x +
631))/(512*(x^2 + x + 1)^(17/2))
```

Vom spune că f este *de clasă* C^n şi vom scrie $f \in C^n(A)$ unde $A \subset \mathbf{R}$ este o mulțime deschisă, dacă există $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)}$ şi $f^{(n)}$ este continuă pe A.

Vom spune că f este *de clasă* C^∞ sau *indefinit derivabilă* şi vom scrie $f \in C^\infty(A)$ dacă există $f^{(n)}, \forall n \in \mathbf{N}$.

Teorema creşterilor finite

- Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$ are următoarele proprietăți:

  1. f este continuă pe $[a,b]$,
  2. f este derivabilă pe (a,b),

  atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Polinomul lui Taylor

Formula lui Taylor este generalizarea naturală a teoremei creşterilor finite, în cazul în care f este de clasă C^{n+1}, permițând aproximarea acestei funcții printr-un polinom.

Pentru $f : I \to \mathbf{R}$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval deschis, funcție de clasă C^n şi $x_0 \in I$, polinomul

$$T_n(x, x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0),\ x \in I$$

se numeşte *polinomul lui Taylor* de grad n asociat funcției f în x_0.

Formula lui Taylor

- Pentru $f: I \to \mathbf{R}$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval deschis, funcție de clasă C^{n+1} şi $x_0 \in I$ avem:

$$f(x) = T_n(x, x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,,\ \xi \text{ cuprins între } x \text{ şi } x_0.$$

(*formula Taylor*).

Termenul $R_n(x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ se numeşte *restul de ordin n al formulei Taylor* (*restul Lagrange*).

9.Exemplu

- Pentru a scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x)=\sqrt{x+3}, x \geq -3$, în punctul $x_0=1$, calculăm derivata de ordin n a funcției.:

$$f'(x)=\left((x+3)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(x+3)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{2^2}\cdot(x+3)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$f'''(x)=\frac{3}{2^3}\cdot(x+3)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^{(4)}(x)=-\frac{3\cdot 5}{2^4}\cdot(x+3)^{-\frac{7}{2}}.$$

Se demonstrează prin inducție că

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot(x+3)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

Avem

$$f(x)=f(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-1)^{k}}{k!}\cdot f^{(k)}(1)+\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)=$$

$$=2+\frac{x-1}{1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(x-1)^{k}}{k!}\cdot\frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!}{2^{k}}\cdot 2^{-\frac{2k-1}{2}}+$$

$$+\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(-1)^{n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\cdot(\xi+3)^{-\frac{2n+1}{2}}$$ cu ξ cuprins între x şi 1.

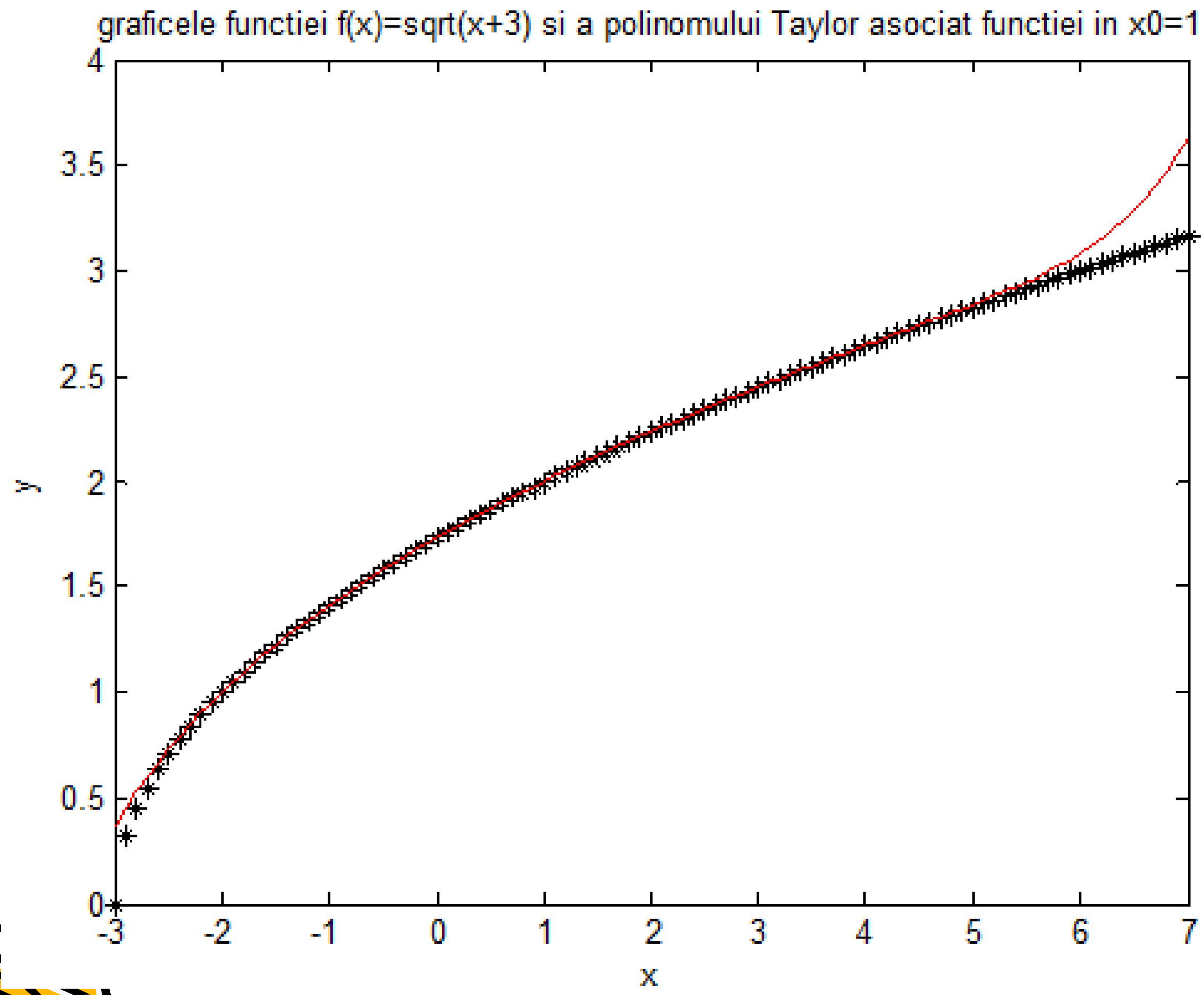
Polinomul Taylor in Matlab

- Să scriem polinomul Taylor de grad 10, asociat funcției $f:[-3,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x+3}$ în punctul $x_0=1$, să desenăm în același sistem de axe funcția și polinomul Taylor asociat.

Polinomul lui Taylor pentru o expresie simbolică se obține direct, cu instrucțiunea taylor(f,n,x_0), unde n este gradul polinomului.

```
»syms x
» f=sqrt (x+3); g=taylor(f,10,1)
g =
x/4 - (x - 1)^2/64 + (x - 1)^3/512 - (5*(x - 1)^4)/16384 + (7*(x - 1)^5)/131072 - (21*(x -
1)^6)/2097152 + (33*(x - 1)^7)/16777216 - (429*(x - 1)^8)/1073741824 + (715*(x -
1)^9)/8589934592 + 7/4
```

```
» fin=inline(vectorize(f))
fin =
Inline function:
fin(x) = (x + 3).^(1./2)
» gin=inline(vectorize(g))
gin =
 Inline function:
gin(x) = x./4 - (x - 1).^2./64 + (x - 1).^3./512 - (5.*(x - 1).^4)./16384 + (7.*(x -
1).^5)./131072 - (21.*(x - 1).^6)./2097152 + (33.*(x - 1).^7)./16777216 - (429.*(x -
1).^8)./1073741824 + (715.*(x - 1).^9)./8589934592 + 7./4
»  x=-3:.1:7;plot(x,fin(x),'k*',x,gin(x),'r')
```


graficele functiei f(x)=sqrt(x+3) si a polinomului Taylor asociat functiei in x0=1
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
y
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x

Formula Mac-Laurin

Caz particular al formulei Taylor, cazul în care $x_0 = 0$ *este formula Mac-Laurin.*

- Dacă funcția $f : I \to \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$ interval deschis, este de clasă C^{n+1} şi $0 \in I$, atunci oricare ar fi $x \in I$ există un punct ξ cuprins între 0 şi x astfel încât $f(x) = T_n(x,0) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$.

Este evident orice număr cuprins între 0 şi x se poate scrie $\theta \cdot x, \theta \in (0,1)$ şi astfel formula *Mac-Laurin* poate fi scrisă sub forma:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta \cdot x), \theta \in (0,1)$$

unde θ depinde de n şi x.

10. Exemplu

- Să scriem formula Mac-Laurin de ordinul n pentru funcția

  $f(x)=\sqrt{3x+2},\ x\in[-\frac{2}{3},+\infty)$, calculăm

$$f'(x)=\left((3x+2)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3x+2)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{3^2}{2^2}\cdot(3x+2)^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow$$

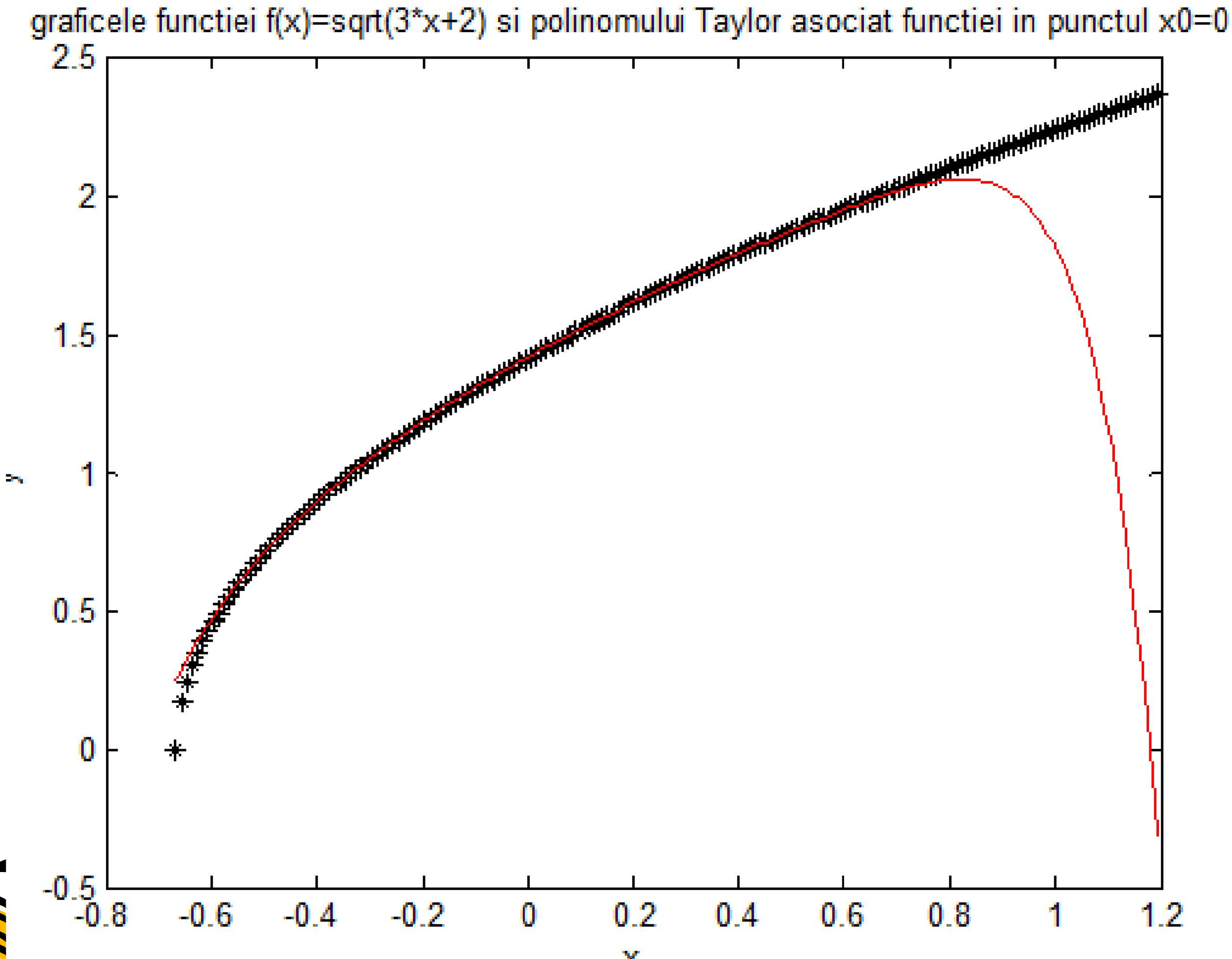
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot 3^n\cdot(3x+2)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$f(x)=\sqrt{2}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!}{2^k}\cdot 3^k\cdot 2^{-\frac{2k-1}{2}}+$$

$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\cdot 3^{n+1}\cdot(3\xi+2)^{-\frac{2n+1}{2}}$$ cu ξ cuprins între x şi 0.

- In Symbolic Math, să scriem polinomul Taylor de grad 11 asociat funcției $f:[-\frac{2}{3},+\infty)\to R$, definită prin $f(x)=\sqrt{3x+2}$ în punctul $x_0=0$ și să desenăm în același sistem de axe funcția și polinomul Taylor asociat.

```
» f=sqrt(3*x+2);g=taylor(f,11,0)
g =
- (143548119*2^(1/2)*x^10)/268435456 + (14073345*2^(1/2)*x^9)/33554432 -
(2814669*2^(1/2)*x^8)/8388608 + (72171*2^(1/2)*x^7)/262144 - (15309*2^(1/2)*x^6)/65536 +
(1701*2^(1/2)*x^5)/8192 - (405*2^(1/2)*x^4)/2048 + (27*2^(1/2)*x^3)/128 - (9*2^(1/2)*x^2)/32 +
(3*2^(1/2)*x)/4 + 2^(1/2)
» fin=inline(vectorize(f));gin=inline(vectorize(g));
» x=-2/3:.01:1.2;plot(x,fin(x),'k*',x,gin(x),'r')
```



graficele functiei f(x)=sqrt(3*x+2) si polinomului Taylor asociat functiei in punctul x0=0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
y
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
x

Formula Taylor cu restul Lagrange poate fi astfel scrisă ca:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x + \theta \cdot h), \theta \in (0,1)$$

Probleme de aproximare

- Fiind date h şi n, să se determine eroarea care se face înlocuind $f(x)$ cu $T_n(x)$;

- Cerându-se inițial o anume eroare ε, n fiind dat, să determinăm h, cu alte cuvinte să determinăm intervalul $(x-h, x+h)$ pe care înlocuind $f(x)$ cu $T_n(x)$ obținem o eroare mai mică decât ε;

- Fiind dat h şi cerându-se ca eroarea să fie mai mică decât ε, determinăm gradul lui $T_n(x)$, astfel încât înlocuind $f(x)$ cu $T_n(x)$ în intervalul $(x-h, x+h)$, să se obțină o eroare mai mică decât ε.

11-12-13. Exemple

- Pentru a calcula eroarea comisă prin aproximarea funcției $f:(-1,1)\to\mathbf{R},\ f(x)=e^x$ prin polinomul $T_{11}(x)=1+\sum_{k=1}^{11}\frac{x^k}{k!}$, evaluăm restul sub forma Lagrange: $R_{11}(x)=\frac{x^{12}}{12!}\cdot e^{\xi}$, cu ξ între 0 şi x. Astfel:

$$\mathit{eroarea}\le\left|\frac{x^{12}}{12!}\right|\cdot e<\frac{e}{12!}=5.67\cdot10^{-9}$$

- Pentru a găsi intervalul pe care funcția $f:(-h,h)\to\mathbf{R},\ f(x)=e^x$ este aproximată de polinomul $T_{11}(x)=1+\sum_{k=1}^{11}\frac{x^k}{k!}$ cu trei zecimale exacte, rezolvând inegalitatea $|R_{11}(x)|=\left|\frac{h^{12}}{12!}\cdot e^{\xi}\right|<\left|\frac{h^{12}}{12!}\cdot e^{h}\right|<10^{-4}$ obținem $h=2.0665$.

- Pentru a stabili gradul polinomului Taylor ce aproximează funcția $f:(-1,1)\to \mathbf{R}$, $f(x)=e^x$ cu trei zecimale exacte, rezolvăm inecuația $\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{1}{n!}\cdot e^{\xi}\right| < \frac{1}{n!}\cdot e < 10^{-4}$,

cu ajutorul următorului program în Matlab:

```
»n=1; fact=n;x=exp(1)*(10^4);while fact<x n=n+1;
fact =fact*n;x=exp(1)*(10^4);end
» [n]
     ans =
               8
```

Aşadar polinomul $T_8(x) = 1 + \sum_{k=1}^{8} \frac{x^k}{k!}$ este cel căutat.

Transfer de derivabilitate

- Dacă $(f_n)_n \subset Hom(I, \mathbf{R})$, $I \subset \mathbf{R}$ este un şir de funcţii de clasă C^1, punctual convergent la f pe I, cu proprietatea că şirul derivatelor $(f_n')_n$ converge uniform pe I la funcţia g, atunci funcţia limită f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

14. Exemplu

- Să studiem dacă se poate aplica teorema transferului de derivabilitate şirului de funcţii $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2 \cdot x^2}$ pe $[-1,1]$

Funcţia limită este $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0, \forall x \in [-1,1]$; şirul derivatelor

$f_n'(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, x \in (-1,1), n \in \mathbf{N}$, are ca funcţie limită o funcţie discontinuă

şi anume $g:[-1,1] \to \{0,1\}$ $g(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$.

Derivatele f_n' sunt funcţii continue pe $(-1,1)$, funcţia limită nu este, deci şirul derivatelor nu converge uniform şi astfel nu se poate aplica transferul de derivabilitate.

Transferul de derivabilitate este valabil şi în cazul seriilor de funcţii:
dacă $(f_n)_n \subset Hom(I, \mathbf{R})$, $I \subset \mathbf{R}$ interval, este un şir de funcţii de clasă C^1 pe I, astfel încât $\sum_{n\geq 0} f_n$ este punctual convergentă cu suma f, iar seria derivatelor $\sum_{n\geq 0} f_n'$ este uniform convergentă cu suma g, atunci f este derivabilă şi $f' = g$,

adică $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$

- Dacă $(a_n)_n$ este un şir de numere reale, seriile de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$ şi $\sum_{n\geq 0} n a_n \cdot x^{n-1}$ au aceeaşi rază de convergență.

Dacă $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență $R > 0$,

construim funcția $f:(-R,R)\to \mathbf{R}$, dată de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

- Funcția $f:(-R,R)\to \mathbf{R}$, definită de $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ este de clasă C^{∞} şi, în plus, relația $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ poate fi derivată termen cu termen ori de câte ori în $(-R,R)$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}, \forall x\in(-1,1)$, deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}, \forall x\in(-1,1)$, şi derivând obținem relația de mai sus.

- Dacă $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, x \in (-R,R)$, coeficienții a_n sunt unic determinați

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n \in \mathbf{N}$$

Dacă avem $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n, x \in (x_0-R, x_0+R)$, atunci:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n \in \mathbf{N}$$

Funcţie dezvoltabilă in serie de puteri

Spunem că o funcție reală $f:(x_0-r,x_0+r)\to \mathbf{R}$, $x_0\in\mathbf{R}, r>0$ este *dezvoltabilă* în serie de puteri centrată în x_0 dacă există $0<a<r$ şi un şir $(a_n)_n\subset\mathbf{R}$, astfel încât seria $\sum\limits_{n\ge 0} a_n\cdot(x-x_0)^n$ să fie convergentă pe (x_0-a,x_0+a), având suma $f(x)$.

Dezvoltarea $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$ este unică.

Nu orice funcție de clasă C^∞ pe (x_0-a,x_0+a) este dezvoltabilă în serie puteri.

- Funcția $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x\in(0,a)\\ 0, \quad x\in(-a,0)\end{cases}$ este de clasă C^∞ pe $\mathbf{R}$, nu este dezvoltabilă în serie de puteri în jurul originii , $f^{(n)}(0)=0$

Seria Taylor

Seria de puteri centrată în $x_0 \in (a,b) \subset \mathbf{R}$, asociată funcției $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ de clasă C^∞, dată de formula $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot (x-x_0)^n$ se numeşte *seria Taylor* a lui f în jurul punctului x_0.

- Dacă funcția $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ de clasă C^∞, are proprietatea că există $M>0$, astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, \forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in (a,b)$, seria Taylor a lui f în jurul lui $x_0 \in (a,b)$ este uniform convergentă pe (a,b) iar suma sa este $f(x)$

15. Exemplu

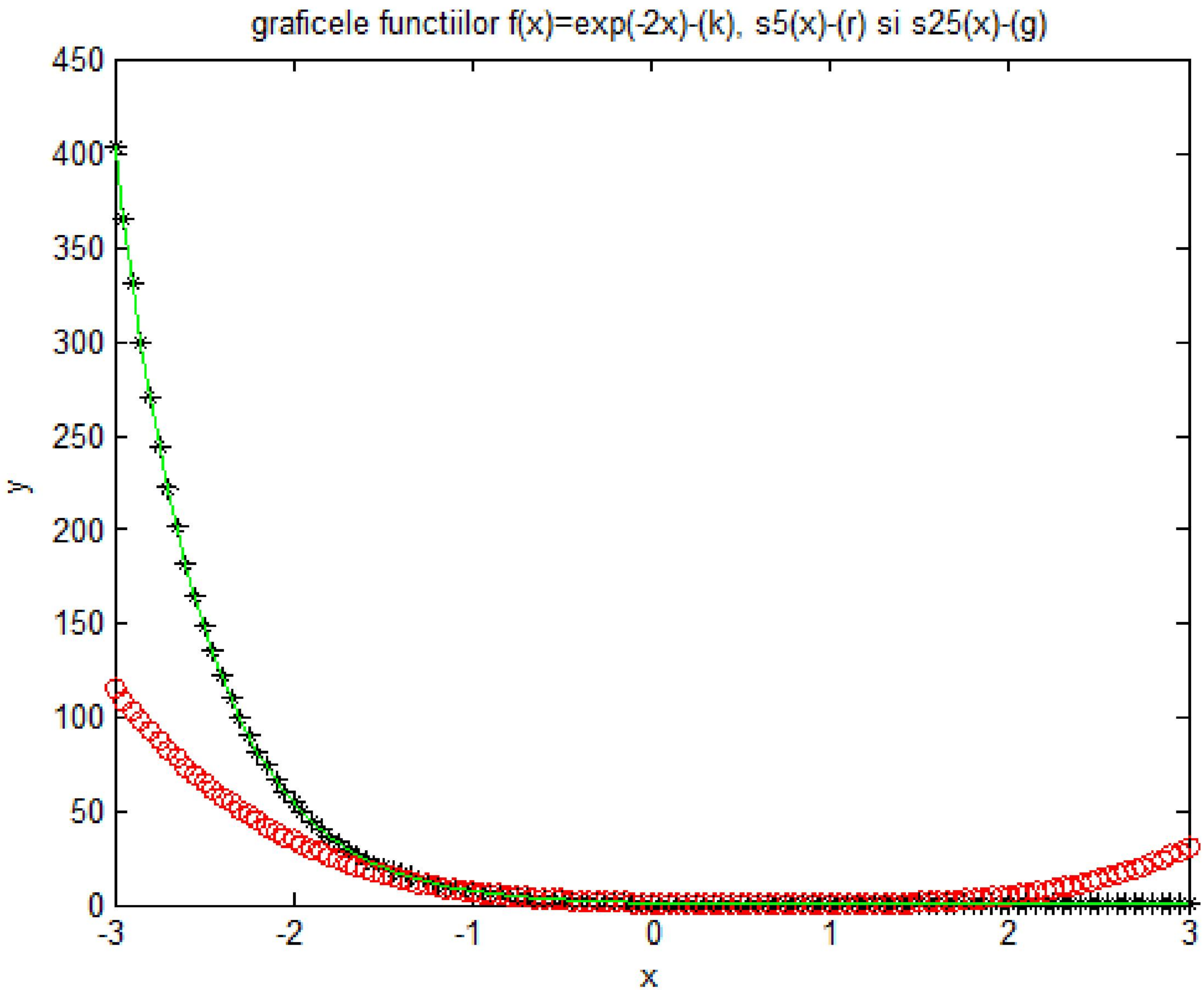
- $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbf{R};$

  să găsim dezvoltarea în serie a funcţiei $f(x) = e^{-3x}$:

  $$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!} \cdot x^n, x \in \mathbf{R}.$$

Să desenăm termenii s_5, s_{25} ($s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$), din dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = e^{-2x}$ și funcția în același sistem de axe.

```
»  syms x
» f=exp(-2*x);
» ft5=taylor(f,5,0);
»  ft25=taylor(f,25,0);
» fin=inline(vectorize(f));ft5in=inline(vectorize(ft5)); ft25in=inline(vectorize(ft25));
» x=-3:.05:3; plot(x,fin(x),'k*',x,ft5in(x),'ro',x,ft25in(x),'g')
```



graficele functiilor f(x)=exp(-2x)-(k), s5(x)-(r) si s25(x)-(g)
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
y
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

16. Exemplu

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1;$

Pentru a determina dezvoltarea în serie a funcției $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-6x+8}$ $x \notin \{2,4\}$,

specificând intervalul pe care este valabilă, ținem seama că $\dfrac{x+1}{x^2-6x+8} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x-2}$

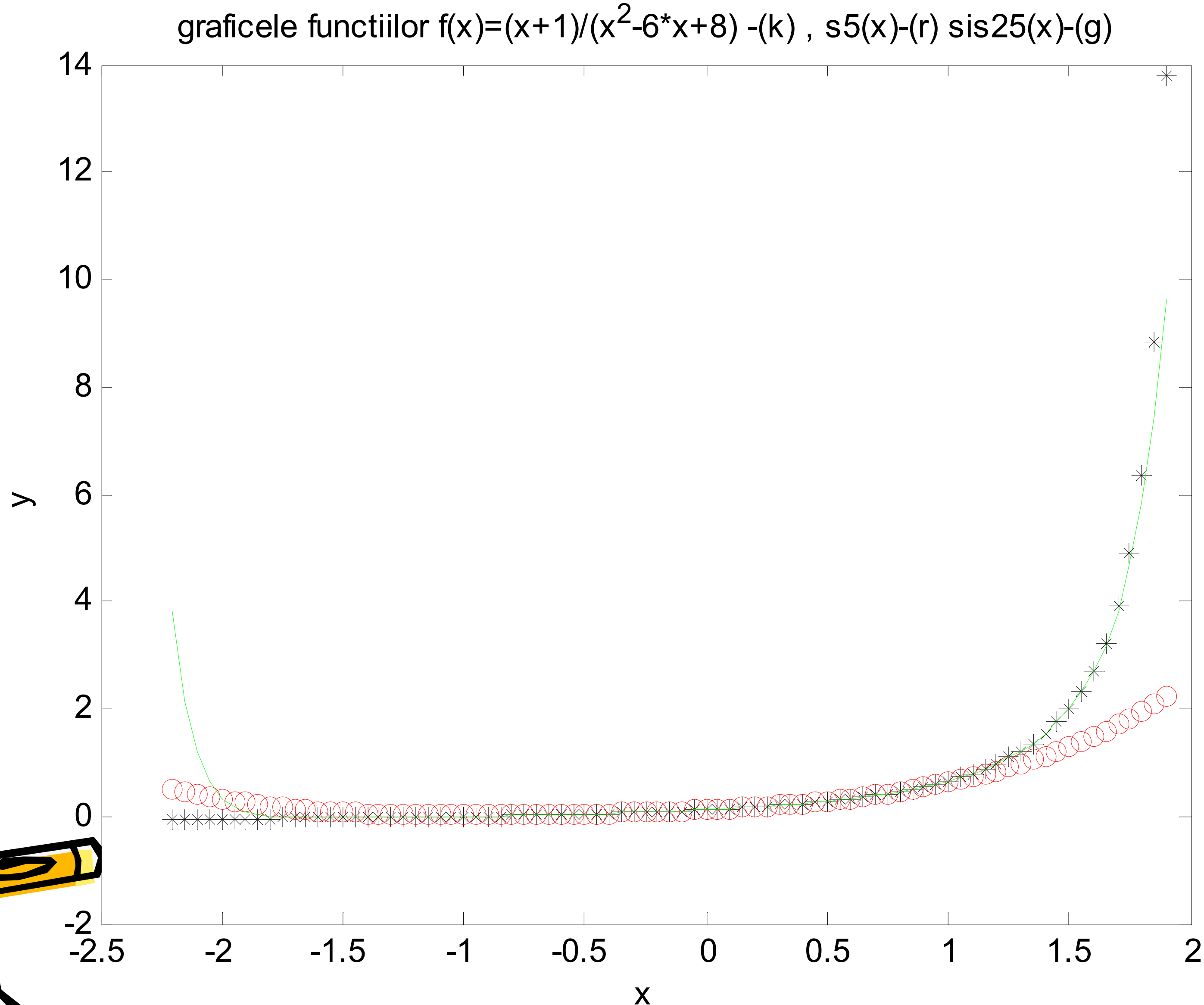
şi astfel:

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{5}{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(3 - \frac{5}{2^{n+1}}\right) \cdot x^n .$$

Să desenăm termenii s_5, s_{25} ($s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$), din dezvoltarea în serie

Taylor a funcţiei $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 6x + 8}$ şi funcţia în acelaşi sistem de axe.

```
syms x
» f=(x+1)/(x^2-6*x+8);
»  ft5=taylor(f,5,0); ft25=taylor(f,25,0);
»  fin=inline(vectorize(f));ft5in=inline(vectorize(ft5)); ft25in=inline(vectorize(ft25));
»  x=-2.2:.05:1.9; plot(x,fin(x),'k*',x,ft5in(x),'ro',x,ft25in(x),'g')
```


graficele functiilor f(x)=(x+1)/(x2-6*x+8) -(k) , s5(x)-(r) sis25(x)-(g)
y
x
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

17. Exemplu

- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, x \in \mathbf{R}$

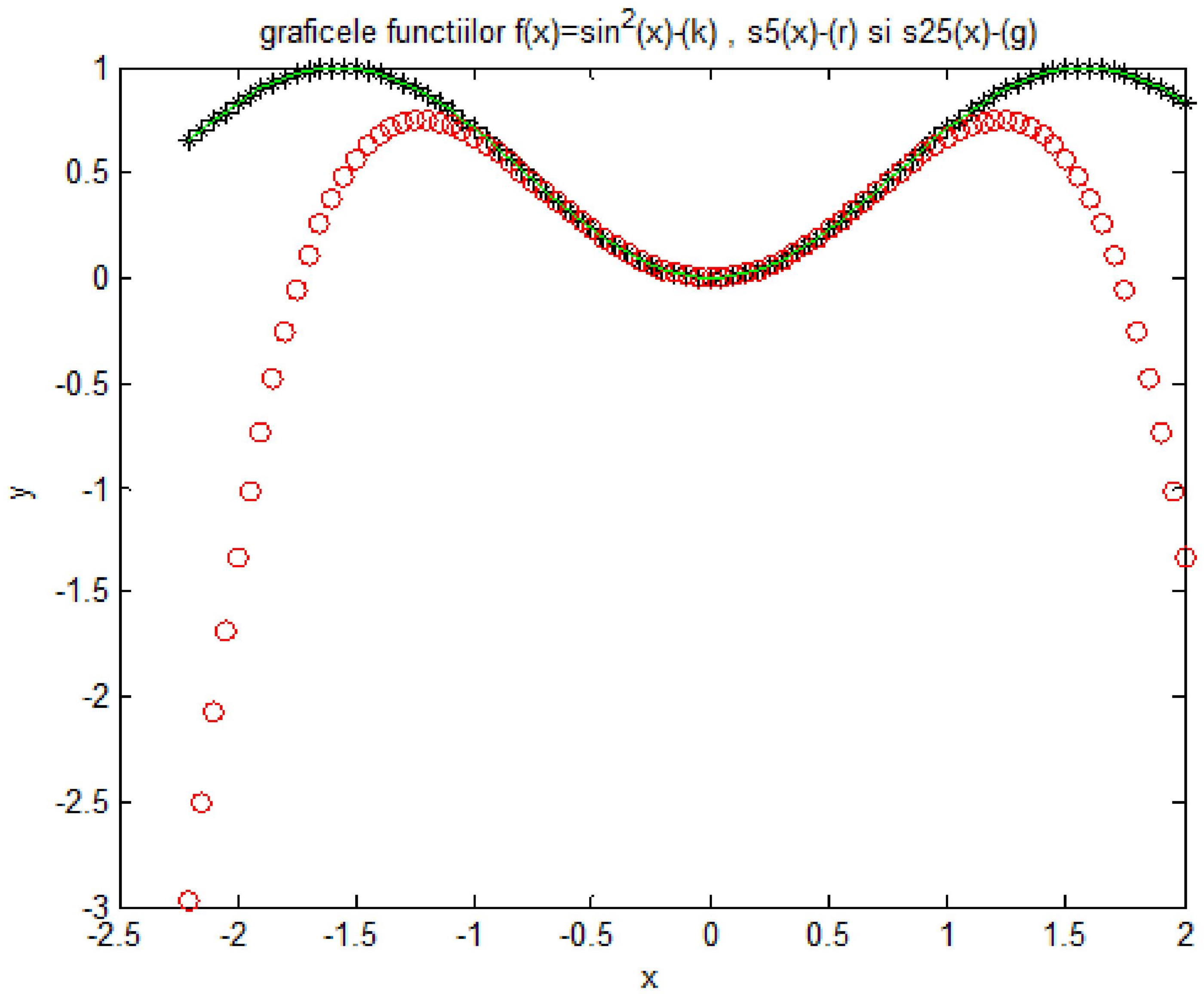
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}, x \in \mathbf{R}$

Pentru a găsi dezvoltarea în serie de puteri a funcției $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$, vom ține seama de formula trigonometrică $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (2x)^n = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{(2n)!} \cdot (x)^n, x \in \mathbf{R}.$$

Să desenăm termenii s_5, s_{25} ($s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$), din dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = \sin^2 x$ și funcția în același sistem de axe.

```
»f=(sin(x))^2;
» ft5=taylor(f,5,0);
»ft25=taylor(f,25,0);
» fin=inline(vectorize(f));ft5in=inline(vectorize(ft5)); ft25in=inline(vectorize(ft25));
» x=-2.2:.05:2; plot(x,fin(x),'k*',x,ft5in(x),'ro',x,ft25in(x),'g')
```



graficele functiilor f(x)=sin2(x)-(k) , s5(x)-(r) si s25(x)-(g)
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
y
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

18.Exemplu

- $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} \cdot x^{n}, x > -1, \alpha \in \mathbf{R}$

Pentru a determina dezvoltarea în serie a funcției $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbf{R}$

folosim dezvoltarea prezentată anterior şi anume:

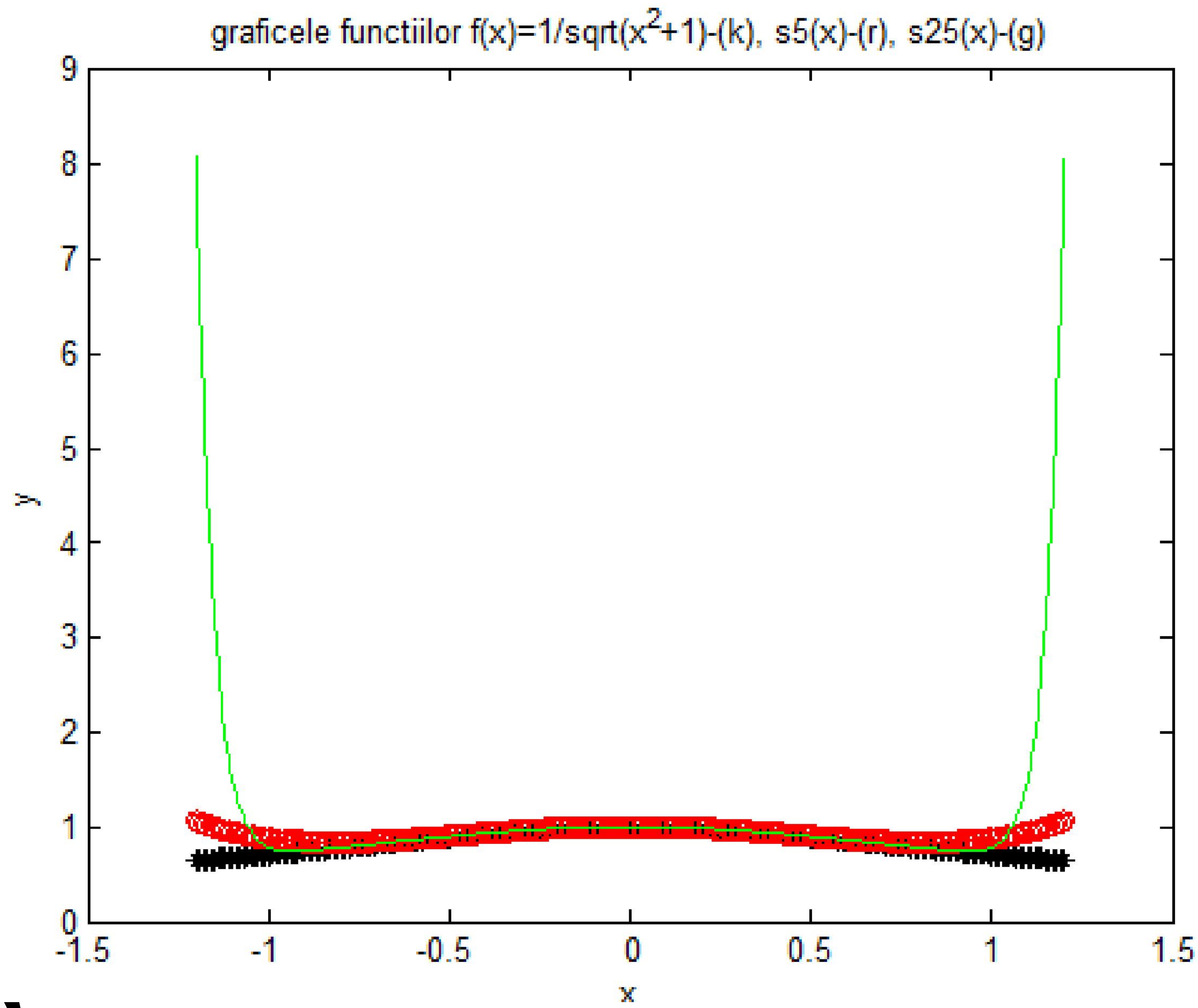
$$f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \cdot \left(x^2\right)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n}, x \in \mathbf{R}$$

Să desenăm termenii s_5, s_{25} ($s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$), din dezvoltarea în serie

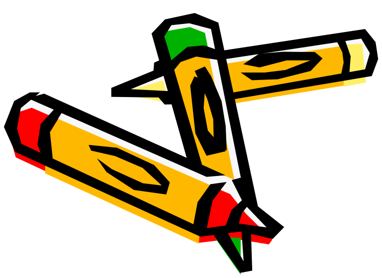
Taylor a funcţiei $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ şi funcţia în acelaşi sistem de axe.

```
» syms x
»  f=1/sqrt(x^2+1);
» ft5=taylor(f,5,0);
» t25=taylor(f,25,0);
»  fin=inline(vectorize(f));ft5in=inline(vectorize(ft5)); ft25in=inline(vectorize(ft25));
»  x=-1.2:.01:1.2; plot(x,fin(x),'k*',x,ft5in(x),'ro',x,ft25in(x),'g')
```


graficele functiilor f(x)=1/sqrt(x2+1)-(k), s5(x)-(r), s25(x)-(g)
y
x
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

De reţinut

- **Funcţii reale de variabilă reală**
- Funcţie derivabilă într-un punct, funcţie diferenţiabilă într-un punct, echivalenţa celor două noţiuni în acest caz.
- Derivate de ordin superior
- Formula Taylor
- Transfer de derivabilitate
- Funcţii dezvoltabilă în serie de puteri; seria Taylor



- **Funcţii vectoriale de variabilă reală**
- Funcţie derivabilă într-un punct, funcţie diferenţiabilă într-un punct
- Curbe parametrizate: vector tangent, lungimea unei curbe.

2. Diferenţiabilitatea funcţiilor de mai multe variabile reale

Funcţie derivabilă după un versor într-un punct

Considerând un versor $s \in \mathbf{R}^n$, $(\|s\|=1)$ vom că f este *derivabilă după versorul* (*direcţia*) s *în* a, dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+ts)-f(a)}{t}$

a cărei valoare se notează $\dfrac{df}{ds}(a)$ şi se numeşte *derivata lui* f *după versorul* s *în* a.

19. Exemplu

- Să considerăm un versor oarecare $s=(s_1,s_2)\in \mathbf{R}^2$ şi să calculăm pentru

funcţia $f:\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

derivata $\dfrac{df}{ds}(0,0)$:

$$\frac{df}{ds}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ts_1,ts_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4s_1^2s_2^2}{t\cdot(t^2s_1^2+t^2s_2^2)}=0$$

Derivate parţiale

Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este baza uzuală în $\mathbf{R}^n$, fiecare e_i, $1 \le i \le n$ este versor şi derivata lui f după versorul $s = e_i$ în a se numeşte *derivata lui* f *în raport cu* x_i *în* a şi se noteaza $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Spunem deci că f este derivabilă parțial în raport cu x_i în a, dacă:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{t}$$

20. Exemplu

- Să calculăm cu definiția, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ pentru $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+1)-\ln 2}{x-1};$$

aceasta limită este derivata în $x=1$ a funcției $g(x)=\ln(x^2+1)$ și astfel $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=1$.

Calculul derivatelor in Symbolic Math.

Pentru a calcula derivatele parţiale ale unei expresii simbolice $f(x, y)$ declarăm syms x y şi apoi declarăm funcţia,

Pentru a determina $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ vom cere fx=diff(f,x), iar pentru a calcula $m = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ vom scrie în continuare subs(fx,[x,y],[a,b]).

```
syms x y
»  f=log(x^2+y^2+1);
» fx=diff(f,x)
fx =
(2*x)/(x^2 + y^2 + 1)
» m=subs(fx,[x,y], [1,0])
m =
     1
```

21. Exemplu

- Să calculăm $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$ pentru:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(x^2+y^2+z^2)\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(0,0,z)-f(0,0,0)}{z}\lim_{z\to 0}\frac{z^2\cdot\cos\dfrac{1}{z^2}}{z}=\lim_{z\to 0}z\cdot\cos\frac{1}{z^2}=0\,.$$

Se observă ca derivata parrțială a lui f în raport cu x_i în a este de fapt derivata în a_i a unei funcții de o singură variabilă:

$$x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

şi astfel calculul unei derivate parrțiale se reduce la calculul derivatei unei funcții de o singură variabilă.

22. Exemplu

- Pentru a calcula $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ pentru $f(x,y)=\frac{x^2 y}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)$, calculăm pentru

început $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ (derivata parțială în punctul curent) considerând y ca variabilă

(x este constantă):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot x^2 y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

şi astfel $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=-\frac{3}{25}$;

```
» syms x y
»f=(x^2*y)/(x^2+y^2); fy=diff(f,y)
fy =
x^2/(x^2 + y^2) - (2*x^2*y^2)/(x^2 + y^2)^2
» a=subs(fy,[x,y],[1,2])
a =
   -0.1200
```

23. Exemplu

- Pentru a calcula $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)$ pentru $f(x,y,z)=\frac{x}{yz}+x^2z^2+xyz$, calculăm pentru început $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ considerând y ca variabilă (x şi z sunt constante):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{x}{z}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+xz \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)=\frac{3}{2}.$$

```
» syms x y z
» f=x/(y*z)+x^2*z^2+x*y*z; fy=diff(f,y)
fy =
x*z - x/(y^2*z)
» b=subs(fy,[x,y,z],[1,1,2])
b =
    1.5000
```

Noțiunile de derivată după un versor, respectiv derivată parțială, se extind natural în cazul funcțiilor vectoriale: pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, considerând un versor $s \in \mathbf{R}^n$, vom defini

$$\frac{df}{ds}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+ts) - f(a)}{t}$$

studiul acestei limite din $\mathbf{R}^m$ reducându-se la studiul limitelor în $\mathbf{R}$ pentru cele m componente.

Astfel:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right)$$

Matricea jacobiană

Definim o matrice remarcabilă, cu m linii şi n coloane:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

numită *matricea jacobiană* a lui f în a.

Dacă $m = n$ determinantul matricii jacobiene $J_f(a)$ se numeşte *jacobianul* lui f în a şi se notează:

$$\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(a) = \det J_f(a)$$

Calculul matricei jacobiene in Matlab

Pentru a determina matricea jacobiană a funcției: $f(x_1,\dots,x_k) = (f_1(x_1,\dots,x_k),\dots,f_m(x_1,\dots,x_k))$ vom scrie:

»syms $x_1,\dots,x_k$

»f=[$f_1(x_1,\dots,x_k),\dots,f_m(x_1,\dots,x_k)$];w=[$x_1,\dots,x_k$]; J=jacobian(f,w)

Dacă dorim să calculăm jacobianul în punctul $(a_1,\dots,a_k)$, vom scrie:

»J1=subs(J, [$x_1,\dots,x_k$], [$a_1,\dots,a_k$])

24. Exemple

- Să explicităm matricea jacobiană J_f în punctul curent pentru fiecare din funcţiile următoare:

Pentru $f(x,y,z) = (xy + yz + zx, xyz)$, avem $J_f = \begin{pmatrix} y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$;

Pentru $g(x,y) = \left(x^2 + y^2, x \cdot y, \dfrac{x}{y^2+1}\right)$, avem $J_g = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \\ \dfrac{1}{y^2+1} & \dfrac{-2xy}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix}$

```
» syms x y z
» f=[x*y+y*z+z*x,x*y*z];
» Jf=jacobian(f,[x,y,z])
Jf =
[ y + z, x + z, x + y]
[   y*z,   x*z,   x*y]

»  g=[x^2+y^2,x*y, x/(y^2+1)];
»  Jg=jacobian(g,[x,y])
Jg =
[        2*x,                       2*y]
[          y,                         x]
[ 1/(y^2 + 1), -(2*x*y)/(y^2 + 1)^2]
```

25. Exemplu

- Să calculăm jacobianul funcției $f:[0,+\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ definită prin $f(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ în punctul curent

$$J_f=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

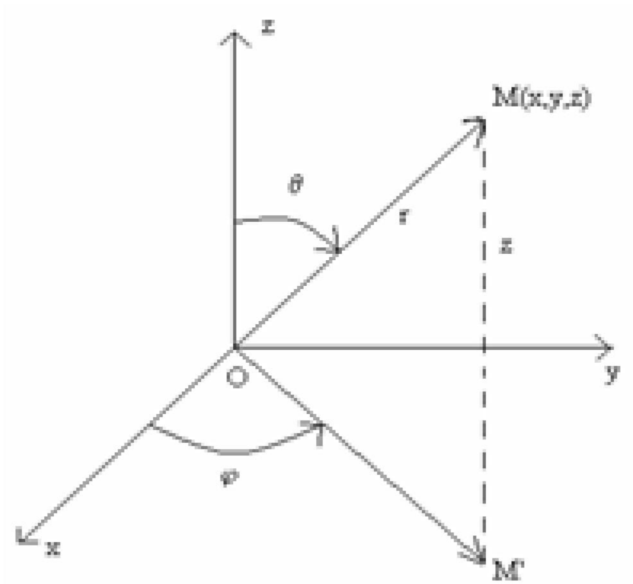
şi astfel $\det J_f = r^2\sin\theta$.

```
»  syms r th phi
»  F=[r*sin(th)*cos(phi), r*sin(th)*sin(phi), r*cos(th)];
»  JF=jacobian(F,[r,th,phi])
JF =
[ cos(phi)*sin(th), r*cos(phi)*cos(th), -r*sin(phi)*sin(th)]
[ sin(phi)*sin(th), r*cos(th)*sin(phi),  r*cos(phi)*sin(th)]
[          cos(th),          -r*sin(th),                   0]

» D=det(JF)
D =
r^2*cos(phi)^2*cos(th)^2*sin(th) + r^2*cos(phi)^2*sin(th)^3 +
r^2*cos(th)^2*sin(phi)^2*sin(th) + r^2*sin(phi)^2*sin(th)^3

»  D=simple(D)
D =
r^2*sin(th)
```

Coordonate sferice



Coordonatele sferice (r,θ,φ) ce caracterizează punctul $M \in \mathbf{R}^3$ reprezintă:

- $r = \|OM\|$ este distanța de la originea O la punctul M, $r \geq 0$;
- θ este unghiul dintre axa Oz și OM, $\theta \in [0,\pi]$;
- φ este unghiul dintre axa Ox și OM', unde M' este proiecția punctului M

în planul xOy, $\varphi \in [0,2\pi]$

Formulele ce stabilesc legătura între coordonate carteziene şi coordonate sferice:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \quad \text{unde } r \in [0, +\infty),\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi]$$

$$z = r\cos\theta$$

26. **Exemplu** de functie discontinua intr-un punct ce admite derivate partiale in acel punct

- Funcția $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

este discontinuă în $(0,0)$, deoarece nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

$f(x,\sqrt{mx})=\dfrac{m}{1+m^2}$ Aplicăm criteriul lui Heine: luând şirurile:

$\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{\sqrt{m}}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0),\ m\in\mathbf{R}_+$ avem $f\left(\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{\sqrt{m}}{n}\right)\right)\xrightarrow{n\to\infty}\dfrac{m}{1+m^2}$.

Admite insă derivate parțiale în $(0,0)$ şi anume:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to\infty}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

Funcţie diferenţiabilă într-un punct

Funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este *diferențiabilă* în $a \in \operatorname{int} A$ dacă există o aplicație liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0 .$$

Considerând $\varphi : A \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}$, spunem că

f este *diferențiabilă* în $a \in \operatorname{int} A$ dacă există o aplicație liniară

$T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, astfel încât

$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\| \cdot \varphi(x)$, $\forall x \in A$ şi $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este *diferențiabilă* în $a \in \operatorname{int} A$, atunci aplicația liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este unică, se notează $T = df(a)$ şi se numeşte *diferențiala* lui f în *a*.

- Dacă $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, atunci este şi continuă în a.

  Rezultă că o funcție $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ care nu este continuă în $a \in \operatorname{int} A$, nu este diferențiabilă în a

- Funcția $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ este discontinuă în $(0,0)$,

deci nu este diferențiabilă în $(0,0)$.

- Funcția $f: A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$ dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt diferențiabile în a şi $df(a) = (df_1(a), df_2(a), \ldots, df_m(a))$.

Rezultatul afirmă că studiul diferențiabilității unei funcții vectoriale se reduce la studiul diferențiabilității componentelor sale.

- Dacă $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, atunci există $\dfrac{df}{ds}(a)$ pentru orice versor $s \in \mathbf{R}^n$ şi avem $\dfrac{df}{ds}(a) = df(a)s$; în particular, există derivate parțiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)e_i$, $1 \le i \le n$.

Deducem că matricea asociată aplicației liniare $df(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este matricea jacobiană $J_f(a)$.

Rezultă că o funcție $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ care nu admite derivate parțiale în $a \in \operatorname{int} A$, nu este diferențiabila în a. De exemplu:

- Să calculăm $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ pentru $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$, limită ce nu există, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{|x|}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{|x|}{x} = -1$.

Astfel f nu este diferențiabilă în (0,0).

Pentru o funcție $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, se pot calcula derivatele după un versor cu ajutorul derivatelor parțiale:

fie $s = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot e_k$, $\|s\| = 1$, atunci:

$$\frac{df}{ds}(a) = df(a)s = df(a)\left(\sum_{k=1}^{n} s_k \cdot e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot df(a)e_k = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

27. Exemplu

- Pentru a determina $\frac{df}{ds}(1,2)$ dacă $s=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi $f(x,y)=\sqrt{x^2+2y^2+1}$,

calculăm:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2+1}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{\sqrt{x^2+2y^2+1}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

şi aplicăm formula precedentă:

$$\frac{df}{ds}(1,2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}+4}{2\cdot\sqrt{10}}\,.$$

Vector gradient

Reamintim că pentru orice aplicație liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ există un vector unic $\omega \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $Tv = \langle \omega, v \rangle$, $\forall v \in \mathbf{R}^n$, unde $\langle , \rangle$ este produsul scalar euclidian (este suficient a lua ω ca fiind vectorul ce are drept componente $Te_1, \ldots, Te_n$, unde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este baza uzuală în $\mathbf{R}^n$).

Putem reformula definiția diferențiabilității unei funcții într-un punct:
Funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$ dacă există un vector $\omega \in \mathbf{R}^n$, astfel încât $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \langle \omega, x - a \rangle}{\|x - a\|} = 0$.
Acest vector unic determinat se numeşte *vectorul gradient* al lui f în a şi se notează $\operatorname{grad} f(a)$ sau $\nabla f(a)$.

Având $\frac{df}{ds}(a) = df(a)s = \langle \nabla f(a), s \rangle$, derivata după un versor se obține prin calcularea produsului scalar dintre gradient şi versor.

Coordonatele vectorului $\nabla f(a)$ în baza uzuală din $\mathbf{R}^n$ sunt derivatele parțiale $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ şi astfel putem considera că $\nabla f(a) = J_f(a)$.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 27.

```
» syms x y
» f=sqrt(x^2+2*y^2+1);
» gradf=jacobian(f,[x,y])
gradf =
[ x/(x^2 + 2*y^2 + 1)^(1/2), (2*y)/(x^2 + 2*y^2 + 1)^(1/2)]
» w=subs(gradf,[x,y],[1,2])
w =
    0.3162    1.2649
» s=[sqrt(3)/2,1/2];
fs=w*s'
fs =
    0.9063
```

Formula de calcul a diferenţialei

Funcţia $pr_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definită prin $pr_i(x_1,...,x_n) = x_i$ fiind o aplicaţie liniară este diferenţiabilă în orice punct din $\mathbf{R}^n$ şi $dpr_i = pr_i$. Această diferenţială fiind independentă de punctul în care o calculăm, se notează cu dx_i.

Dacă $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferenţiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, diferenţiala $df(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ poate fi scrisă ca o combinaţie liniară de $dx_1,...,dx_n$,
Adică:

$$df(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot dx_k \, .$$

28-29. Exemple

- Pentru funcția $f(x,y,z)=\ln(x^2\cdot y^2+z^2+2)$ vom calcula

$$df(1,2,-1)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1)\cdot dy+\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1)\cdot dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{2xy^2}{x^2y^2+z^2+2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1)=\frac{8}{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{2x^2y}{x^2y^2+z^2+2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1)=\frac{4}{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{2z}{x^2y^2+z^2+2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1)=-\frac{2}{7}$$

și astfel $df(1,2,-1)=\frac{8}{7}\cdot dx+\frac{4}{7}\cdot dy-\frac{2}{7}\cdot dz$.

Condiţie suficientă de diferenţiabilitate

Dacă funcţia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este de clasă C^1 pe A (adică f este continuă, cu derivate parţiale de ordin I continue pe A),
atunci este diferenţiabilă pe A.

Derivarea funcţiilor compuse

Dacă funcţia $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferenţiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, funcţia $g : B \to \mathbf{R}^p$, $B \subset \mathbf{R}^m$, $f(A) \subset B$, este diferenţiabilă în $f(a)$, atunci funcţia $h = g \circ f : A \to \mathbf{R}^p$ este diferenţiabilă în a şi derivatele parţiale ale funcţiei h în raport cu derivatele parţiale ale lui f şi g se calculează conform formulei:

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a), 1 \le j \le p, 1 \le 1 \le n$$

unde $(x_1, \ldots, x_n)$ este variabila lui f, respectiv $(y_1, \ldots, y_m)$ este variabilă lui g.

- Dacă $g(x,y) = f(u(x,y))$, unde $f : A_1 \to \mathbf{R}$, $A_1 \subset \mathbf{R}$ şi $u : A_2 \to \mathbf{R}$, $A_2 \subset \mathbf{R}^2$, f şi u de clasă C^1, avem:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

30.Exemplu

Calculăm derivatele parțiale ale funcției $g(x,y)=f\left(\dfrac{x}{y^2+1}\right)$, unde

$f:A_1\to\mathbf{R},\ A_1\subset\mathbf{R},\ f$ de clasă C^1:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=f'(u)\cdot\frac{1}{y^2+1}\ \text{şi}\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=f'(u)\cdot\frac{-2xy}{(y^2+1)^2}$$

- Dacă $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, unde funcţia $f : A_2 \to \mathbf{R}, A_2 \subset \mathbf{R}^2$ şi funcţiile $u, v : B_2 \to \mathbf{R}, B_2 \subset \mathbf{R}^2$, sunt de clasă C^1, avem:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

31. Exemplu

- Să scriem diferențiala în punctul curent a funcției
  $g(x,y) = f(xy^2, x^2 + y^2)$, unde $f : A_2 \to \mathbf{R}$, $A_2 \subset \mathbf{R}^2$, f de clasă C^1

Calculăm derivatele parțiale ale funcției $g(x,y) = f(xy^2, x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot y^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x \quad \text{şi} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y$$

Atunci:

$$dg(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot y^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x \right) \cdot dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y \right) \cdot dy$$

Puncte de extrem

Pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, punctul $a \in A$ este *punct de minim local* al lui f pe A dacă există o bilă $B(a,r)$ astfel încât:

$f(a) \le f(x), \forall x \in A \cap B(a,r)$.

Punctul este de *minim global* dacă $f(a) \le f(x), \forall x \in A$.

Analog, definim punctele de maxim local şi global. Punctele de minim şi de maxim se numesc *puncte de extrem*.

Punct critic

- Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este derivabilă în $a \in \operatorname{int} A$, după versorul s și a este un punct de extrem local, atunci $\frac{df}{ds}(a) = 0$; în particular dacă funcția f admite derivate parțiale în a, punct de extrem local, atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, 1 \le i \le n$, rezultând că $\nabla f(a) = \theta_{R^n}$.

Punctul $a \in \operatorname{int} A$, în care f este diferențiabilă și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, 1 \le i \le n$,

se numește *punct critic*.

32. Exemplu

- pentru $f(x,y) = x \cdot y,\quad (x,y) \in \mathbf{R}^2$, derivata după un versor oarecare, în origine,

este $\dfrac{df}{ds}(0,0) = 0$, dar $(0,0)$ nu este punct de extrem, deoarece funcția ia valori negative și pozitive în orice vecinătate a originii.

Derivate parţiale de ordin superior

Considerăm $f : A \to \mathbf{R}$ unde $A \subset \mathbf{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ şi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nu neapărat distincte.

Dacă funcția de o variabilă $x_i \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ este definită pe

$(a_i - \delta, a_i + \delta) \subset \mathbf{R}$, $\delta > 0$ şi dacă această funcție este derivabilă în a_i atunci

putem spune că f este *de două ori derivabilă* în raport cu variabilele x_i şi x_j

şi scriem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$.

Derivatele de ordin trei, patru sau mai mult se definesc analog.

Spunem că funcția $f : A \to \mathbf{R}^m, m \geq 1$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este *de clasă* C^k *pe* A, dacă funcția și derivatele sale parțiale până la ordinul k inclusiv, sunt continue pe A.

Funcția f este *de clasă* C^{∞} *pe* A dacă are derivate parțiale de orice ordin continue pe A..

Matricea hessiană

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Se observă că $H_f(a) = J_{\nabla f(a)}$.

Ordinea în care se efectuează derivarea parţială este importantă

- pentru $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ calculăm derivatele mixte de ordinul II în origine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=-1$$

Criteriul lui Schwarz

Criteriul lui Schwarz este o condiţie suficientă ce permite permutarea ordinii de derivare în cazul derivatelor de ordin superior.

Astfel dacă funcţia $f : A \to \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}^n$ este de clasă C^2, atunci derivatele parţiale $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sunt egale, $\forall i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, caz în care hessiana lui f este o matrice simetrică.

33. Exemplu

- Să calculăm hessiana funcției $f(x,y)=\frac{x^2}{y}+y^3$ în punctul (2,1):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{y};\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x^2}{y^2}+3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2}{y};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{-2x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{-2x}{y^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2x^2}{y^3}+6y$$

și astfel $H_f(2,1)=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$

```
» syms x y
» f=x^2/y+y^3;
» gradf=jacobian(f,[x,y])
gradf =
[ (2*x)/y, 3*y^2 - x^2/y^2]
» Hf=jacobian(gradf,[x,y])
Hf =
[        2/y,                -(2*x)/y^2]
[ -(2*x)/y^2, 6*y + (2*x^2)/y^3]
» H1=subs(Hf,[x,y],[2,1])
H1 =
      2    -4
     -4    14
```

Polinom Taylor

Pentru funcţia $f: A \to \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}^n$, de clasă C^p într-o bilă deschisă $B(a,r), r>0$ unde $a \in \operatorname{int} A$, vom defini *polinomul Taylor* de grad p al funcţiei f în a ca fiind funcţia polinomială:

$$T_p(x,a) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\cdot(x_k - a_k) + \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)\cdot(x_j - a_j)\cdot(x_k - a_k) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{p!}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}\ldots\partial x_{k_p}}(a)\cdot(x_{k_1} - a_{k_1})\cdot(x_{k_2} - a_{k_2})\ldots(x_{k_p} - a_{k_p})$$

Diferenţa $R_p(x,a) = f(x) - T_p(x,a)$ se numeşte *restul dezvoltării Taylor* de ordin p a lui f în a.

35. Exemplu

- Pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$, de clasă C^3 să scriem polinomul Taylor în $(a,b) \in \operatorname{int} A$:

$$T_3((x,y),(a,b)) = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot(x-a)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot(y-b)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\cdot(x-b)\cdot(y-b)\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)\cdot(x-a)^3 + \right.$$

$$\left. +3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a,b)\cdot(x-a)^2\cdot(y-b) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)\cdot(y-b)^3\right)$$

Formula Taylor

- Pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, de clasă C^{p+1}, considerând $a \in \operatorname{int} A$ şi $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset A$ avem:

$\forall x \in B(a,r)$ există $c \in [a,x]$ astfel încât:

$$R_p(x,a) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k_1,\ldots,k_{p+1}}^{n} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_{p+1}}}(c) \cdot (x_{k_1} - a_{k_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{k_{p+1}} - a_{k_{p+1}})$$

Calculul extremelor

Pentru a calcula punctele de extrem ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale,folosim următorul algoritm:

1. Calculăm punctele critice ale funcţiei, ca soluţii reale ale sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \quad\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n)=0 \end{cases}$$, puncte notate cu $a^i=(a_1^i,\ldots,a_n^i)$

2. Calculăm matricea hessiană în punctele critice determinate la punctul 1.

3. H_i, $1 \le i \le n$, fiind matricea hessiană în punctul $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$;

a. dacă $\Delta_1^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a^i) > 0$, $\Delta_2^i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a^i) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a^i) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a^i) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a^i) \end{vmatrix} > 0$,

$$\Delta_3^i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a^i) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a^i) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a^i) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a^i) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a^i) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a^i) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a^i) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a^i) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a^i) \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots,$$

atunci $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$ este punct de minim

b. dacă $\Delta_1^i < 0$, $\Delta_2^i > 0$, $\Delta_3^i < 0$, $\Delta_4^i > 0, \ldots.$, atunci $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$ este punct de maxim.

Pasul 3 poate fi înlocuit cu:

A. Dacă toate valorile proprii ale matricei H_i sunt pozitive, atunci $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$ este punct de minim.

B. B. Dacă toate valorile proprii ale matricei H_i sunt negative, atunci $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$ este punct de maxim.

37.Exemplu

- Pentru a găsi extremele funcției $f(x,y)=x^4+y^4+xy-x^2-y^2$, calculăm mai întâi punctele critice, ca soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=4x^3+y-2x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4y^3+x-2y=0 \end{cases}$$

Acestea sunt: $(0,0)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Calculăm matricea hessiană în punctul curent:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-2 & 1\\ 1 & 12y^2-2\end{pmatrix} \text{şi}$$

şi evaluăm :

- $\Delta=\det H_f(0,0)=3$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-2$ şi astfel $(0,0)$ este punct de maxim local;

- $\Delta=\det H_f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=48$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=7$, rezultă că $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este punct de minim local;

- $\Delta=\det H_f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=48$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=7$, rezultă că $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este punct de minim local;

- $\Delta=\det H_f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=1$;

- $\Delta=\det H_f\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)=1$;

în aceste ultime două cazuri, nu putem afirma nimic.

- Să rezolvăm aceeaşi problemă, folosind condiţia necesară şi suficientă cu valori proprii: scriem hessiana în punctele critice, calculându-i apoi valorile proprii:

- $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$; calculăm valorile proprii, rezolvând ecuaţia

$(-2-\lambda)^2-1=0 \Rightarrow \lambda=-1, \lambda=-3$,

rezultă ca $(0,0)$ este punct de maxim local;

- $H_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}=H_f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; rezolvăm ecuaţia $(7-\lambda)^2-1=0$, $\lambda=6, \lambda=8$ şi

astfel $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sunt puncte de minim local;

- $H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=H_f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; rezolvând ecuaţia $(1-\lambda)^2-1=0$

obţinem valorile proprii corespunzătoare: $\lambda=0, \lambda=2$, aşadar $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

nu sunt puncte de extrem.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 37

```
»syms x y
»f=x^4+y^4+x*y-x^2-y^2
```

Determinăm punctele critice:

```
»fx=diff(f,x);fy=diff(f,y); [xcr,ycr]=solve(fx,fy); [xcr,ycr]
ans =
        [          0,          0]
        [ -1/2*3^(1/2),  1/2*3^(1/2)]
        [  1/2*3^(1/2), -1/2*3^(1/2)]
        [        1/2,        1/2]
        [        1/2,        1/2]
        [        1/2,        1/2]
        [       -1/2,       -1/2]
        [       -1/2,       -1/2]
        [       -1/2,       -1/2]
```

Altă variantă constă în rezolvarea ecuației $\nabla f = (0,0)$, notând gradf(i), componentele gradientului, care apar în funcția solve

```
» gradf=jacobian(f,[x,y])
» [xcr,ycr]=solve(gradf(1),gradf(2));[xcr,ycr]
```

Este preferabilă utilizarea condiţiei necesare şi suficiente cu valori proprii:
Calculăm hessiana, care este jacobiana gradientului:

```
» gradf=jacobian(f,[x,y]) ; hessf=jacobian(gradf,[x,y])
```

Determinăm matricea hessiană, în punctele critice găsite şi îi calculăm valorile proprii.

```
» H1=subs(hessf,[x,y],[xcr(1),ycr(1)]); eig(H1)
ans =
        [ -3]
        [ -1]
```

$(0,0)$ este punct de maxim local

```
»H2=subs(hessf,[x,y],[xcr(2),ycr(2)]); eig(H2)
ans =
        [ 6]
        [ 8]
```

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este punct de minim local.

```
» H3=subs(hessf,[x,y],[xcr(3),ycr(3)]); eig(H3)
 ans =
            [ 6]
            [ 8]
```

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este punct de minim local,

```
» H4=subs(hessf,[x,y],[xcr(4),ycr45)]); eig(H4)
 ans =
            [ 0]
            [ 2]
```

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ nu este punct de extrem

```
» H7=subs(hessf,[x,y],[xcr(7),ycr(7)]) eig(H7)
 ans =
            [ 0]
            [ 2]
```

$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ nu este punct de extrem

38. Exemplu

- Pentru a determina extremele funcției $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4+xyz$, calculăm punctele critice, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + yz = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + xz = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 4z^3 + xy = 0 \end{cases}$$

Soluțiile reale ale sistemului (punctele critice) sunt:

$$(0,0,0), \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right),$$

Hessiana în punctul curent este $H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & z & y \\ z & 12y^2 & x \\ y & x & 12z^2 \end{pmatrix}$ și astfel:

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\ a_{11}=0,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}=0,\ \Delta=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0;$$

$$H_f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix};\ a_{11}=\frac{3}{4},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{2};\ \Delta=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{4};$$

$$H_f\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{-1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{-1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix};\ a_{11}=\frac{3}{4},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{2};\ \Delta=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{-1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{-1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{4};$$

$$H_f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix};\ a_{11}=\frac{3}{4},\ \Delta_1=\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=\frac{1}{2};\Delta=\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=\frac{3}{4};$$

$$H_f\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix};\ a_{11}=\frac{3}{4},\ \Delta_1=\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=\frac{1}{2};\ \Delta=\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}=\frac{3}{4}$$

Conform regulei lui Sylvester avem următoarele puncte de minim local:

$$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right),\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right).$$

- Să rezolvăm aceeaşi problemă, folosind condiția necesară şi suficientă cu valori proprii: scriem hessiana în punctele critice, calculându-i apoi valorile proprii:

- pentru punctul critic $(0,0,0)$, rezolvând ecuația $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, avem $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

aşadar $(0,0,0)$ nu este punct de extrem local;

- pentru punctul critic $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ obținem $\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, deci avem punct de minim;

- pentru punctul critic $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, rezolvând ecuația

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ obținem $\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, deci avem punct de minim.

Lăsăm cititorului să verifice că si celelalte două puncte critice sunt puncte de minim local.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 38

```
syms x y z
»  f=x^4+y^4+z^4+x*y*z; gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
»hessianf=jacobian(gradf,[x,y,z]);
» [xcr,ycr,zcr]=solve(gradf(1),gradf(2),gradf(3));[xcr,ycr,zcr]
ans =
      [      0,       0,       0]
      [   -1/4,     1/4,     1/4]
      [   -1/4,    -1/4,    -1/4]
      [    1/4,   1/4*i,   1/4*i]
      [    1/4,  -1/4*i,  -1/4*i]
      [    1/4,    -1/4,     1/4]
      [    1/4,     1/4,    -1/4]
      [   -1/4,  -1/4*i,   1/4*i]
      [   -1/4,   1/4*i,  -1/4*i]
      [ -1/4*i,   1/4*i,    -1/4]
      [  1/4*i,  -1/4*i,    -1/4]
      [  1/4*i,   1/4*i,     1/4]
      [ -1/4*i,  -1/4*i,     1/4]
      [  1/4*i,     1/4,   1/4*i]
      [ -1/4*i,     1/4,  -1/4*i]
      [ -1/4*i,    -1/4,   1/4*i]
      [  1/4*i,    -1/4,  -1/4*i]
```

Calculăm hessiana în punctele critice (soluţiile reale ale ecuaţiei $\nabla f = (0,0,0)$) şi valorile ei proprii:

```
» H1=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(1),ycr(1),zcr(1)]); eig(H1)
      ans =
                  [ 0]
                  [ 0]
                  [ 0]
```

(0,0,0) nu este punct de extrem

```
» H2=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(2),ycr(2),zcr(2)]); eig(H2)
      ans =
                  [ 1/4]
                  [   1]
                  [   1]
```

$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ este punct de minim.

```
» H3=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(3),ycr(3),zcr(3)]); eig(H3)
      ans =
                  [ 1/4]
                  [   1]
                  [   1]
```

$\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ este punct de minim.

```
» H6=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(6),ycr(6),zcr(6)]) eig(H6)
      ans =
                  [ 1/4]
                  [   1]
                  [   1]
```

$\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ este punct de minim.

```
» H7=subs(hessianf,[x,y,z],[xcr(7),ycr(7),zcr(7)]); eig(H7)
      ans =
                  [ 1/4]
                  [   1]
                  [   1]
```

$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$, este punct de minim.

39. Exemplu

- Prețurile a două produse p_1 și p_2 sunt legate de cantitățile vândute x_1 și x_2

prin relațiile $\begin{cases} x_1 = 32 - 2p_1 \\ x_2 = 22 - p_2 \end{cases}$.

Costul total (CT) de producție și vânzare ale celor două produse este legat de cantitățile vândute, prin funcția $CT(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{2} + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 73$.

Să dezvoltăm un model matematic care să exprime profitul (P), ca funcție de cantitățile vândute și să determinăm prețurile și cantitățile care maximizează profitul

$$\textbf{Profit} = p_1x_1 + p_2x_2 - CT(x_1, x_2) = (16 - \frac{x_1}{2})x_1 + (22 - x_2)x_2 - \frac{x_1^2}{2} + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 73$$

$$= -x_1^2 - 2x_1x_2 + 16x_1 - 2x_2^2 + 22x_2 - 73$$

calculăm punctele critice, rezolvând sistemul:

$$\frac{\partial \textbf{Profit}}{\partial x_1} = -2x_1 - 2x_2 + 16 = 0$$

$$\frac{\partial \textbf{Profit}}{\partial x_2} = -2x_1 - 4x_2 + 22 = 0$$

Punctul critic este (5,3) şi hessiana în acest punct este $H_f(3,5) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Cum $\det H_f(5,3) > 0$ şi $\dfrac{\partial^2 \textbf{Profit}}{\partial x_1^2}(5,3) < 0$, punctul (5,3) este punctul de maxim

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 39

```
»  syms x1 x2
»  P=-x1^2-2*x1*x2+16*x1-2*x2^2+22*x2-73'
»  gradP=jacobian(P,[x1,x2])
gradP =
[ 16 - 2*x2 - 2*x1, 22 - 4*x2 - 2*x1]
» [x1cr,x2cr]=solve(gradP(1),gradP(2)); [x1cr,x2cr]=
ans =
 [ 5, 3]
» hessP=jacobian(gradP,[x1,x2])
hessP =
[ -2, -2]
[ -2, -4]
>> eig(hessP)
ans =
 - 5^(1/2) - 3
   5^(1/2) - 3
```

Ambele valori prporii fiind negative, (5,3) este un punct de maxim.

Extreme cu legături

Considerăm o funcţie de clasă C^1, $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^{n+m}$;

fiind date m funcţii de clasă C^1 $g_i : D \to \mathbf{R}$, presupunem că

există relaţii de forma:

$$g_i(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0, 1 \le i \le m \text{ ,}$$

numite *legături* între $(x_1,...,x_n)$ şi $(y_1,...,y_m)$.

Mulţimea punctelor din D ce verifică aceste legături o vom nota:

$$M = \{(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) \in D \mid g_i(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0, 1 \le i \le m\}$$

Extremele cu legături ale lui f sunt extremele locale ale restricţiei

Multiplicatorii lui Lagrange

esupunem că $(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$ este un punct de extrem local al funcţiei f ,

legăturile $g_i(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0, 1\le i\le m$.

acă funcţia vectorială $g=(g_1,\dots,g_m)$ are jacobianul nenul în $(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$

istă numerele reale $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ (*multiplicatorii lui Lagrange*), astfel încât,

nsiderând funcţia $F=f+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\cdot g_k$, punctul $(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)$ verifică

stemul de $(2m+n)$ ecuaţii:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0,\ 0\le i\le n$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}=0,\ 0\le k\le m$$

$$g_j=0, 1\le j\le m$$

u $(2m+n)$ necunoscute $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_m)$ $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$

- Extremele locale ale unei funcţii $f(x,y)$ cu legătura $g(x,y)=0$, unde f şi g sunt funcţii de clasă C^1 $(m=n=1)$ se află printre punctele care verifică sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y}=0$$
$$g=0$$

Se observă că pentru funcţia $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$, avem $\frac{\partial F}{\partial \lambda}=g$, observaţie importantă în rezolvarea problemei în Matlab.

40. Exemplu

Pentru a calcula extremele funcţiei $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, cu legătura

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$, construim funcţia $F(x,y,\lambda)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-1\right)$.

Rezolvăm sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2\lambda}{x^3}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)=-\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-1=0$$

ştiind că printre soluţiile sale se află extremele funcţiei ce satisfac legătura din enunt:

Soluţiile sistemului fiind:

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = y = -\sqrt{2}$ şi $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = y = \sqrt{2}$

calculăm hessiana lui F in aceste puncte:

1. $H_F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

rezultând că $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ este un punct de minim.

2. $H_F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

rezultând că $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ este un punct de maxim.

Calculăm hessiana lui F in aceste puncte:

$$H_F(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

rezultând că $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ este un punct de minim.

$$H_F(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

rezultând că $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ este un punct de maxim.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 40.

```
» syms x y a
» f=1/x+1/y; g=1/x^2+1/y^2-1;
» F=f+a*g; gradF=jacobian(F,[a,x,y]);
» [acr,xcr,ycr]=solve(gradF(1),gradF(2), gradF(3));[acr,xcr,ycr]
ans =
[ -2^(1/2)/2,  2^(1/2),  2^(1/2)]
[  2^(1/2)/2, -2^(1/2), -2^(1/2)]

» F1=f+acr(1)*g; gradF1=jacobian(F1, [x,y]); hessF1=jacobian(gradF1,[x,y])
hessF1 =
[ 2/x^3 - (3*2^(1/2))/x^4,                        0]
[                       0, 2/y^3 - (3*2^(1/2))/y^4]
» H1=subs(hessF1,[x,y], [xcr(1),ycr(1)]);eig(H1)
ans =
 -2^(1/2)/4
 -2^(1/2)/4
```

Valorile proprii fiind negative, ($\sqrt{2}, \sqrt{2}$) este un punct de maxim.

```
» F2=f+acr(2)*g; gradF2=jacobian(F2, [x,y]); hessF2=jacobian(gradF2,[x,y]);
» H2=subs(hessF2,[x,y], [xcr(2),ycr(2)]);eig(H2)
ans =
 2^(1/2)/4
 2^(1/2)/4
```

Valorile proprii fiind pozitive, ($\sqrt{2}, \sqrt{2}$) este un punct de minim

41. Exemplu

- Pentru a calcula extremele funcției $f(x,y,z)=x-2y+2z$ cu legătura

$x^2+y^2+z^2=9$ construim funcția

$$F(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda\cdot(x^2+y^2+z^2-9)$$

Rezolvând sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda)=1+2\lambda\cdot x=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda)=-2+2\lambda\cdot y=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda)=2+2\lambda\cdot z=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-9=0$$

obținem:

$$\lambda=\frac{1}{2}, x=-1, y=2, z=-2 \text{ şi } \lambda=-\frac{1}{2}, x=1, y=-2, z=2$$

Să calculăm hessiana lui F în punctele $(-1,2,-2)$ şi $(1,-2,2)$:

$H_F(-1,2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, adică $(-1,2,-2)$ este punct de minim;

$H_F(-1,2,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, adică $(1,-2,2)$ este punct de maxim.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 41

```
»syms x y z a
»f=x-2*y+2*z;g=x^2+y^2+z^2-9;
»F=f+a*g;gradF=jacobian(F,[x,y,z,a])
» [acr,xcr,ycr,zcr]=solve(gradF(1),gradF(2),gradF(3),gradF(4));
» [acr,xcr,ycr,zcr]
ans =
          [ 1/2,   -1,    2,   -2]
          [ -1/2,   1,   -2,    2]
». F1=f+acr(1)*g; hessF1=jacobian(jacobian(F1,[x,y,z]));
» H1=subs(hessF1, [x,y,z], [xcr(1), ycr(1), zcr(1)]; eig(H1);
    ans =
        1
        1
        1
```

(-1,2,-2) este punct de minim.

```
» F2=f+acr(2)*g;hessF2=jacobian(jacobian(F2,[x,y,z]));
»  H2=subs(hessF3, [x,y,z], [xcr(3), ycr(3), zcr(3)]) ; eig(H2) ;
    ans =
        -1
        -1
        -1
```

(1,-2,2) este punct de maxim.

42. Exemplu

- O fabrică de mânuşi de basseball are două locații, costurile de producție fiind diferite din cauza ratei locurilor de muncă vacante, taxelor locale, tipul echipamentelor, capacității, etc. Astfel fabrica A are costurile de producție săptămânale în funcție de numărul de mânuşi produse $C_1(x_1) = x_1^2 - x_1 + 5$, unde x_1 este volumul producției săptămânale în mii de unități. Costurile de producție săptămânale pentru fabrica B sunt date de $C_2(x_2) = x_2^2 + 2x_2 + 3$, unde x_2 este volumul producției săptămânale în mii de unități. Targetul fabricii este producerea a 8000 de mânuşi săptămânal, la cel mai mic preț de cost posibil.

Formulați modelul matematic ce poate fi utilizat pentru a determina numărul de mânuşi ce urmează a fi produs de fiecare fabrică, în fiecare săptămână. Calculați numărul optim de mânuşi produs de fiecare fabrică.

Avem de minimizat funcția $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2x_2 + 8$, cu legătura $x_1 + x_2 = 8$

Considerăm funcția $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2x_2 + 8 + \lambda(x_1 + x_2 - 8)$

Rezolvăm sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 1 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + 2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 8 = 0$$

şi obținem $x_1 = \frac{19}{4}, x_2 = \frac{13}{4}, \lambda = -\frac{34}{4}$

$H_F(\frac{19}{4}, \frac{13}{4}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi valorile proprii corespunzătoare sunt soluțiile ecuației

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, adică $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Astfel $x_1 = \frac{19}{4}, x_2 = \frac{13}{4}$ este un punct de minim

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 42.

```
»  f=x1^2-x1+x2^2+2*x2+8;g=x1+x2-8;
» =f+a*g; gradF=jacobian(F,[a,x1,x2])
»  [acr,x1cr,x2cr]=solve(gradF(1),gradF(2), gradF(3));[acr,x1cr,x2cr]
ans =
[ -17/2, 19/4, 13/4]
»  F1=f+acr(1)*g; gradF1=jacobian(F1, [x1,x2]); hessF1=jacobian(gradF1,[x1,x2])
»  H1=subs(hessF1,[x1,x2], [x1cr(1),x2cr(1)]);eig(H1)
ans =
     2
     2
```

Valorile proprii ale hessianei fiind pozitive, (19/4,13/4) este un punct de minim

Extremele unei funcţii reale definite pe un compact

Fie o funcție de clasă C^1, $f : A \to \mathbf{R}$, unde $A \subset \mathbf{R}^n$ este o mulțime deschisă; considerăm o mulțime compactă $K \subset A$, a cărei frontieră poate fi descrisă prin ecuații carteziene. Funcția f fiind continuă pe K, este mărginită şi îşi atinge marginile pe K, adică există punctele a şi b aparținând mulțimii K, astfel încât $f(a) = \inf_{x \in A} f(x)$ şi . $f(b) = \sup_{x \in A} f(x)$.

Dacă $a \in \operatorname{int} K$, atunci a este un punct de minim local pentru f şi $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0, 1 \leq k \leq n$;

dacă $a \in FrK$, atunci a este un punct de minim pentru f, cu legăturile date de ecuațiile carteziene care descriu frontiera lui f.

Analog se întâmplă şi cu punctul de maxim b.

43. Exemplu

- Pentru a calcula marginile funcției $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2+4$ definită pe discul $x^2+y^2\le 4$, calculăm la început punctele de extrem ale funcției în discul deschis $x^2+y^2<4$:

Soluțiile sistemului $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2y=0 \end{cases}$ sunt:

$$(0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

şi se verifică imediat că se află în discul deschis $x^2+y^2<4$.

Să calculăm hessiana lui f în aceste puncte:

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ rezultă că $(0,0)$ este punct de maxim;

$H_f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $H_f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

$H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

$H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, deci $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim;

$H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim;

$H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim;

$H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim;

Calculăm:

$M_1 = f(0,0) = 4$;

$$m_1 = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{7}{2}$$

Pentru a calcula extremele funcției ce se află pe cercul $x^2+y^2=4$, construim funcția $F(x,y,\lambda)=x^4+y^4-x^2-y^2+4+\lambda\cdot(x^2+y^2-4)$ și rezolvăm sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)=4x^3-2x+2\lambda\cdot x=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)=4y^3-2y+2\lambda\cdot y=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=x^2+y^2-4=0$$

ale cărui soluții sunt:

$\lambda=-7, x=2.y=0;\ \lambda=-7, x=-2.y=0;$

$\lambda=-7, x=0.y=2;\ \lambda=-7, x=0.y=-2;$

$\lambda=-3, x=\sqrt{2}.y=\sqrt{2};\ \lambda=-3, x=-\sqrt{2}.y=\sqrt{2};$

$\lambda=-3, x=-\sqrt{2}.y=\sqrt{2};\ \lambda=-3, x=\sqrt{2}.y=-\sqrt{2}$

Să scriem hessiana funcției $F(x, y, -7)$ în punctele găsite:

$$H_F(2,0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = H_F(-2,0)\,;\ H_F(0,2) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = H_F(0,-2)\,,$$

remarcăm că nu sunt puncte de extrem;

Scriem hessiana funcției $F(x, y, -3)$ în punctele corespunzătoare:

$$H_F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = H_F(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = H_F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) =$$

$$= H_F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})\,.$$

Punctele $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sunt puncte de minim şi avem

$$m_2 = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8\,.$$

Aşadar $\inf\limits_{x^2+y^2 \le 4} f(x, y) = \dfrac{7}{2}$ şi $\sup\limits_{x^2+y^2 \le 4} f(x, y) = 4$.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 43

```
»syms x y a
»f=x^4+y^4+x*y-x^2-y^2;g=x^2+y^2-1; F=f+a*g
» gradF=jacobian(F,[x,y,a]);
» [acr,xcr,ycr]=solve(gradF(1),gradF(2),gradF(3));[acr,xcr,ycr]
ans =
        [-1/2,          1/2*2^(1/2),           1/2*2^(1/2)]
        [-1/2,         -1/2*2^(1/2),          -1/2*2^(1/2)]
        [1/2,          -1/2*2^(1/2),           1/2*2^(1/2) ]
        [-1/2,          1/2*2^(1/2),          -1/2*2^(1/2)]
        [ -1             0.2588                 0.9659  ]
        [ -1           - 0.2588               - 0.9659  ]
        [ -1             0.9659                 0.2588  ]
        [ -1            -0.9659               - 0.2588 ]
```

Valorile xcr,ycr pentru a = -1, au fost prelucrate, softul dând pentru început o expresie foarte complicată şi astfel dificil de utilizat

```
» F1=f-g;hessF1=jacobian(jacobian(F1,[x,y]))
» H1=subs(hessF1,[x,y],[0.2588,0.9659]);eig(H1)
     ans =
       -3.2916
        7.2909
»H2= subs(hessF1,[x,y],[-0.2588,-0.9659]);eig(H2)
     ans =
            -3.2916
            7.2909
»H3= subs(hessF1,[x,y],[-0.9659,-0.2588]);eig(H3)
     ans =
            -3.2916
             7.2909
»H4=ubs(hessF1,[x,y],[0.9659,0.2588]);eig(H4)
     ans =
            -3.2916
             7.2909
```

Se observă că aceste puncte critice nu sunt puncte de extrem. (regula Sylvester).

```
» F2=f-(1/2)*g;hessF2=jacobian(jacobian(F2,[x,y]));
»H5=subs(hessF2,[x,y],[1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);eig(H5)
    ans =
                2
                4
»H6=subs(hessF2,[x,y],[-1/sqrt(2),-1/sqrt(2)]);eig(H6)
    ans =
                4
                6
» F3=f+(1/2)*g;hessF3=jacobian(jacobian(F3,[x,y]))
»H7= subs(hessF3,[x,y],[-1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);eig(H7)
    ans =
                4
                6
» subs(hessF3,[x,y],[1/sqrt(2),-1/sqrt(2)])
    ans =
                4
                6
```

Punctele $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, sunt puncte de minim .

Să calculăm acum valoarea lui f în aceste minime locale, observând înainte că este necesar să calculăm doar în două cazuri: xcr.ycr > 0 şi xcr.ycr < 0:

Să calculăm acum valoarea lui f în aceste minime locale, observând înainte că este necesar să calculăm doar în două cazuri: xcr.ycr > 0 şi xcr.ycr < 0:

```
» subs(f,[x,y],[1/sqrt(2),-1/sqrt(2)])
ans =
        -1
» subs(f,[x,y],[1/sqrt(2),1/sqrt(2)])
ans =
        0
```

În exemplul nr 37 am determinat punctele de extrem ale funcţiei şi anume:

$(0,0)$ este punct de maxim local, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sunt puncte de minim local;

se observă că doar $(0,0)$ se află în discul $x^2+y^2<1$ şi că $M_1=f(0,0)=0$.

O analiză imediată stabileşte că:

$$\sup_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)=0=f(0,0)$$

$$\inf_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)=-1=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Suprafaţă parametrizată

Vom studia un caz particular de funcție vectorială de două variabile reale.

O funcție de clasă C^1, $s : D \to \mathbf{R}^3$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă, se numeşte *suprafață parametrizată de clasă* C^1.

Aplicația $(u,v) \mapsto s(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$

face să-i corespundă fiecărui punct $(u,v) \in D$ un punct $s(u,v)$ din $\mathbf{R}^3$, de

coordonate $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v), (u,v) \in D \\ z = h(u,v) \end{cases}$.

Aceste relații reprezintă *ecuațiile parametrice* ale suprafeței s.

Mulțimea $s(D)$ notată Σ, se numeşte *urma suprafeței.*

44. Exemplu

- Să scriem ecuațiile parametrice ale suprafeței elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Vom scrie ecuația elipsoidului în coordonate sferice generalizate:

$$x = a\cdot r\sin u\cos v$$

$$y = b\cdot r\sin u\sin v\ ,\ \text{unde } r\in[0,+\infty),\ v\in[0,2\pi],\ u\in[0,\pi]$$

$$z = c\cdot r\cos u$$

şi anume $r=1$; înlocuind în formulele ce exprimă coordonatele carteziene, ca funcții de coordonatele sferice generalizate, pe r, cu ecuația sa în coordonate sferice generalizate, obținem ecuațiile parametrice ale elipsoidului:

$$x = a\cdot\sin u\cos v$$

$$y = b\cdot\sin u\sin v\ ,\ \text{unde } v\in[0,2\pi],\ u\in[0,\pi]$$

$$z = c\cdot\cos u$$

Grafica in Matlab

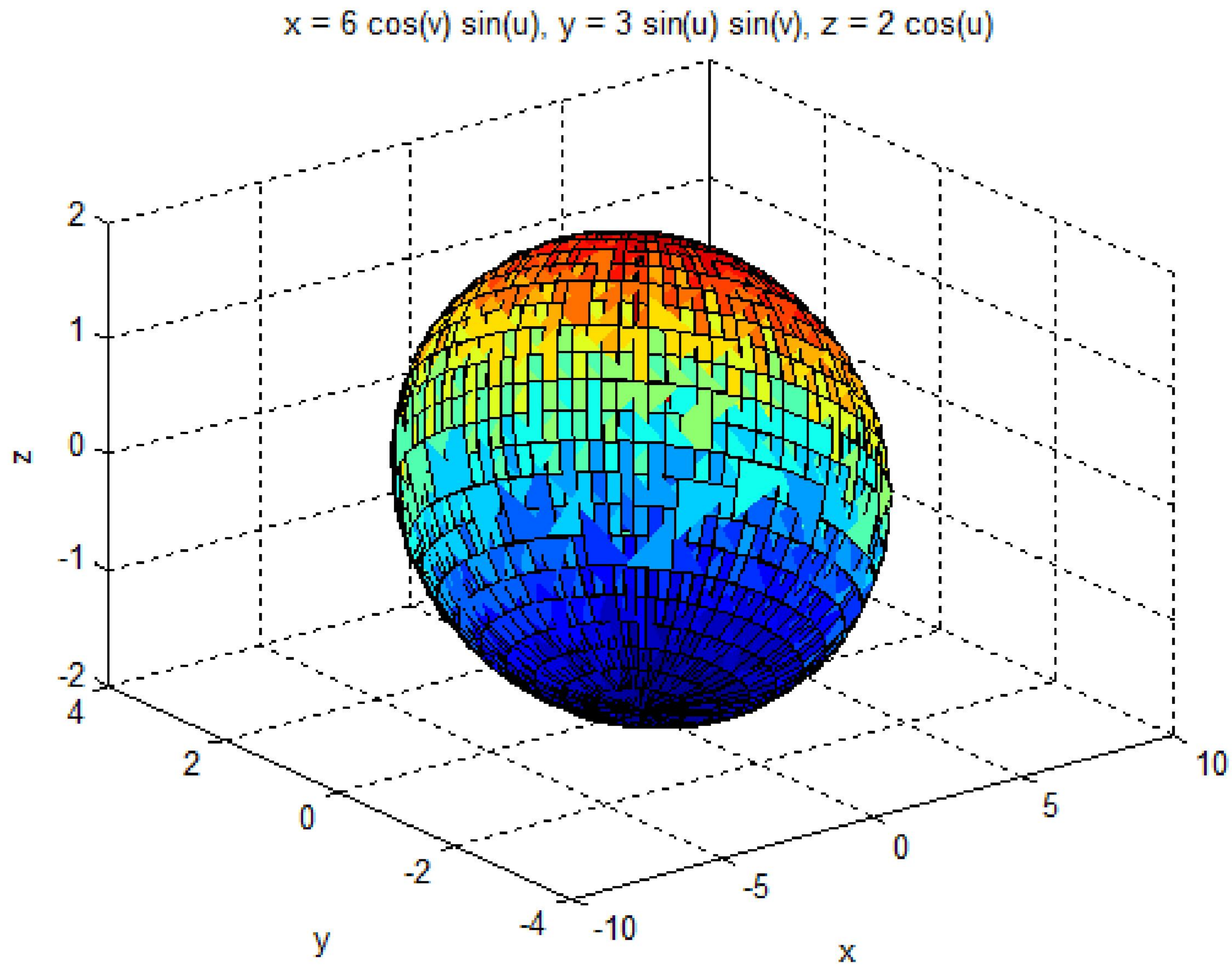
Pentru a desena o suprafață de ecuații parametrice

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v),\ (u,v) \in D \subset [0,2\pi]\times[0,2\pi]\,,$$

folosim instrucțiunea ezsurf(x,y,z), care desenează suprafața pe $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

Să reprezentăm grafic elipsoidul $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$:

```
» syms u v
» x=6*sin(u)*cos(v);y =3*sin(u)*sin(v);z=2*cos(u);
» ezsurf(x,y,z)
```


x = 6 cos(v) sin(u), y = 3 sin(u) sin(v), z = 2 cos(u)
z
2
1
0
-1
-2
y
4
2
0
-2
-4
x
-10
-5
0
5
10

45. Exemplu

- În cazul în care suprafața este dată prin ecuația sa în coordonate carteziene $z = f(x, y), (x, y) \in D$ (caz în care suprafața este graficul unei funcții reale, de două variabile reale, de clasă C^1), vom scrie astfel ecuațiile parametrice ale suprafeței $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}, (u, v) \in D$

Să scriem ecuațiile parametrice ale paraboloidului $2z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1$:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{u^2 + v^2}{2} \end{cases}, (u, v) \in \{(u, v) \in \mathbf{R}^2, u^2 + v^2 \le 2\}$$

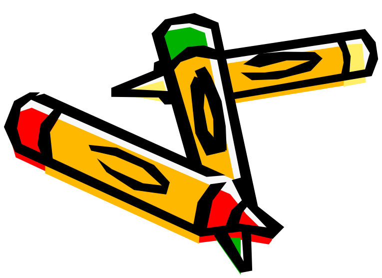
Suprafața s este *simplă* dacă funcția s este injectivă; suprafața este *nesingulară* dacă matricea sa jacobiană

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$$

are rangul maxim în toate punctele lui D.

De reţinut

- Derivata după un versor,
- Derivate parţiale
- Matrice jacobiană, jacobian
- Funcţie diferenţiabilă într-un punct
- Vectorul gradient
- Formula de calcul a diferenţialei într-un punct
- Condiţie suficientă de diferenţiabilitate
- Derivate de ordin superior
- Matrice hessiană



- Criteriul lui Schwarz
- Polinomul Taylor, formula Taylor
- Calculul extremelor funcţiilor de mai multe variabile.
- Extreme cu legături
- Suprafaţă parametrizată