Calcul integral

2013-2014

Marina Gorunescu

Integrala Riemann

Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, o *diviziune* a intervalului $[a, b]$ este mulțimea punctelor $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ şi anume:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b .$$

Notăm cu $\mathrm{D}[a, b]$ mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

Norma diviziunii $\Delta \in \mathrm{D}\ [a, b]$ este numărul $\|\Delta\| = \max\limits_{1 \le k \le n} \left| x_k - x_{k-1} \right|$.

O diviziune este *echidistantă* dacă $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}, 1 \le k \le n$,

caz în care avem: $x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n}, 1 \le k \le n$.

Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, şi $\Delta \in \mathrm{D}\,[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, mulţimea $\xi_\Delta = \{\xi_k, 1 \le k \le n, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$ este mulţimea *punctelor intermediare* asociate diviziunii Δ.

Pentru funcţia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, construim suma:

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

numită *suma Riemann.*

Aceasta, reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de laturi $(x_k - x_{k-1})$ şi $f(\xi_k)$, $1 \le k \le n$.

Funcţie integrabilă Riemann

Funcţia f este *integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ dacă există un număr real I, cu proprietatea că:

$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D}\,[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \delta$ să avem

$\left|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I\right| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_Δ

Numărul I se numeşte *integrala Riemann* a lui f pe $[a,b]$, este unic determinat

şi se notează $I = \int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta), \ \Delta \in \mathcal{D}\,[a,b].$$

Pentru funcţia $f:[a,b]\to \mathbb{R}_+$, integrabilă Riemann pe $[a,b]$, numărul $\int_a^b f(x)dx$ reprezintă aria mulţimii mărginite de axa Ox, dreptele $x=a, x=b$ şi graficul funcţiei $y=f(x)$.

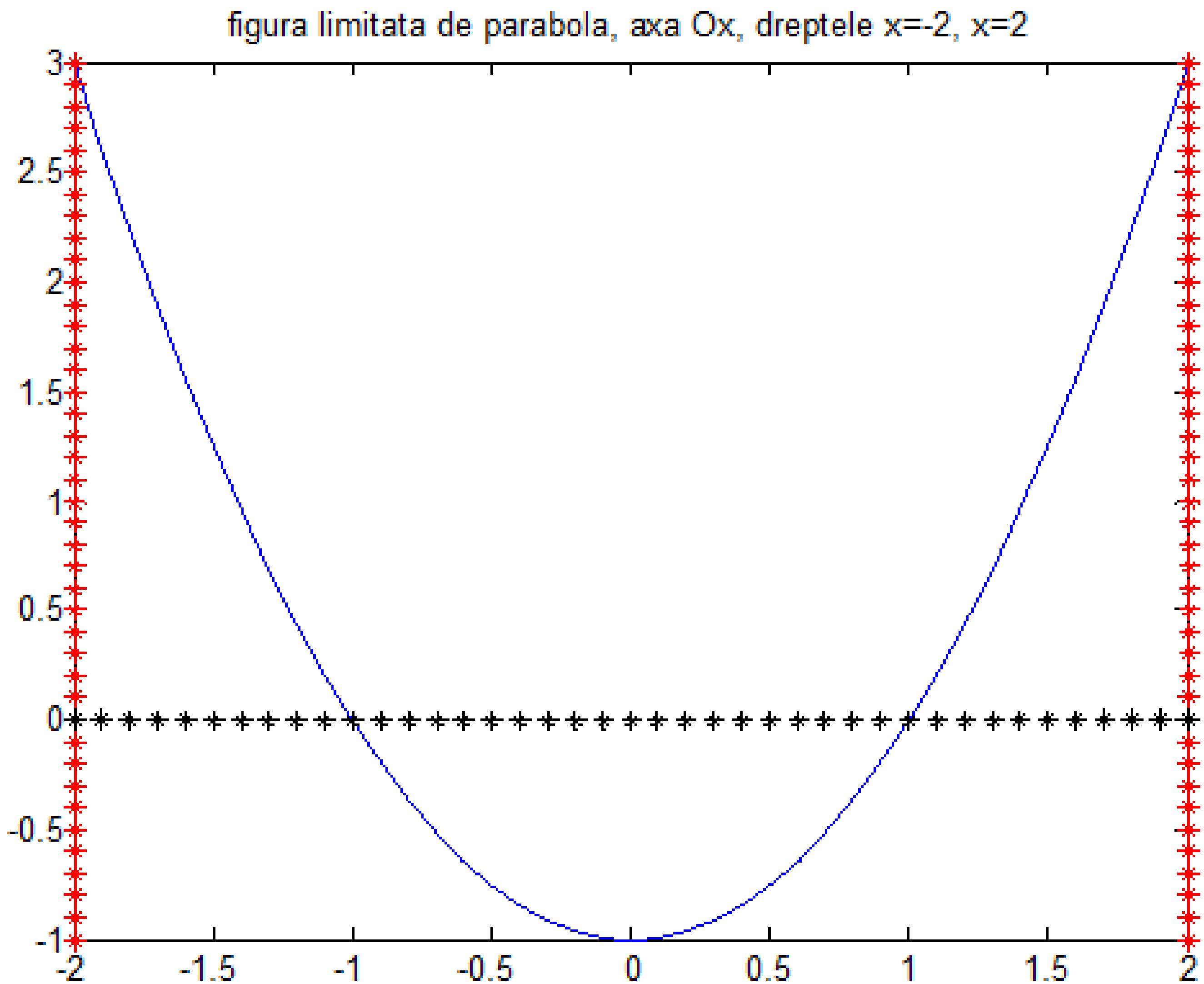
Reamintim că în general, aria mulţimii limitată de axa Ox, dreptele $x=a, x=b$ şi graficul funcţiei $y=f(x)$, unde funcţia $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, este $\int_a^b \left|f(x)\right|dx$.

1. Exemplu

Să calculăm aria figurii limitată de parabola $y = x^2 - 1$, axa Ox şi dreptele x=-2 , x=2:

$$Aria = \int_{-2}^{2} \left| x^2 - 1 \right| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx$$

» x=-2:.1:2;x1=-2; x2=2;y=-1:.1:3; y1=0; plot(x,x.^2-1,x1,y,'r*',x2,y,'r*', x,y1,'k*')



```
»  syms x
»  Aria=int(abs(x^2-1),-2,2)
Aria =
4
```

Clase de funcţii integrabile Riemann

- O funcţie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, continuă, este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

- Dacă mulţimea punctelor de discontinuitate ale unei funcţii mărginite $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, este cel mult numărabilă, atunci funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

  In consecinţă funcţia monotonă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Proprietăţile integralei Riemann

- Dacă funcțiile $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$, atunci $f+g$ este integrabilă pe $[a,b]$; dacă $\alpha \in \mathbf{R}$, funcția $\alpha \cdot f$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,;$$

$$\int_a^b (\alpha \cdot f)(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$$

(*liniaritatea integralei Riemann*).

- Dacă funcția $f:[a,b]\to \mathbf{R}_+$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$,

atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Consecință: *monotonia integralei Riemann*, în sensul că

dacă funcțiile $f, g:[a,b]\to \mathbf{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$,

cu proprietatea că $f(x)\leq g(x), \forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

- Dacă $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Riemann pe orice compact $[c,d]\subset[a,b]$. (*ereditate*).

- Dacă funcția $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci oricare ar fi $c\in[a,b]$ avem $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

  (*aditivitatea integralei ca funcție de interval*).

Teorema de medie

- Dacă funcția $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$,atunci:

$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a)$$

unde $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$ şi $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\xi\in[a,b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a)\ .$$

3. Exemplu

- Pentru a demonstra inegalitatea $\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < 1$, observăm că funcția $f(x) = e^{-x^2}$ este descrescătoare pe $[0,1]$ $\left(f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \le 0,\ x \in [0,1]\right)$ şi astfel avem $\frac{1}{e} \le e^{-x^2} \le 1,\quad x \in [0,1]$, deci conform teoremei de medie $\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < 1$.

  Pe de altă parte $f(x) = e^{-x^2}$ fiind continuă pe $[0,1]$, există $\xi = 0.5043$ astfel încât $f(\xi) = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

- Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe $[a,b]$, vom defini funcția $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, prin $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Funcția F este continuă pe $[a,b]$

- Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci funcția $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ este derivabilă pe $[a,b]$ şi $F'(x)=f(x)$.

4. Exemplu

- Pentru a calcula derivata funcției $\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt$, notăm cu $F(x)$ primitiva

funcției (continue) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; atunci $\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt = F(\cos x) - F(0)$

și astfel

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt\right) = \frac{d}{dx}\big(F(\cos x) - F(0)\big) = -\sin x \cdot F'(\cos x) =$$

$$= -\sin x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x \cdot |\sin x| \,.$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 4.

```
»  syms x t
» f=sqrt(1-t^2);
» F=int(f,0,cos(x));Fx=diff(F,x)
Fx =
(sin(x)*cos(x)^2)/(2*(1 - cos(x)^2)^(1/2)) - sin(x)/(2*(1 - cos(x)^2)^(1/2)) - (sin(x)*(1 -
cos(x)^2)^(1/2))/2
```

Dezavantajul este că răspunsul nu apare imediat, o perioadă fiind afişat Busy.
Obţinând o formă complicată a derivatei, este nevoie de simplificarea acestei expresii simbolice:

```
» Fx=simple(Fx)
Fx =
-sin(x)*(sin(x)^2)^(1/2)
```

Transfer de integrabilitate

- Fie un şir $(f_n)_n \subset \mathcal{C}([a,b])$, uniform convergent la funcţia f pe $[a,b]$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

- Dacă seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$ are raza de convergenţă $R>0$, suma f , atunci

şi seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}\cdot x^{n+1}$ are raza de convergentă R şi avem relaţia

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\cdot x^{n+1} .$$

5.Exemplu

- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, x \in (-1,1)$, deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1,1)$ și integrând,

obținem relația de mai sus

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} x^n, x \in (-1,1) ;$$

6-7. Exemple

- Pentru a stabili mulţimea de convergenţă a seriei de puteri

  $$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

  calculăm raza de convergenţă $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+3}}=1$;

  în punctele $x=1$ şi $x=-1$ sunt verificate condiţiile din criteriul Leibniz, deci seria este convergentă şi astfel mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$.

  Definim suma seriei ca fiind $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

  Derivând seria termen cu termen obţinem

  $$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\ \forall\ |x|<1$$

  şi astfel $f(x)=arctgx+C, \left|x<1\right|$. Pentru $x=0$, obţinem $C=0$.

- Folosind transferul de integrabilitate în cazul seriilor de puteri, să dezvoltăm în serie funcția $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\, x\in \mathbf{R}$:

Calculăm derivata $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ şi o dezvoltăm în serie de puteri (este suma unei serii binomiale), aşadar:

$$f'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n},\ x\in \mathbf{R}$$

Integrăm termen cu termen pe $[0,x],\, x\in \mathbf{R}$ şi obținem:

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)}\cdot x^{2n+1}+C\,;$$

din $f(0)=0$, rezultă $C=0$

De reţinut

- Funcţie integrabilă Riemann
- Clase de functii integrabile
- Proprietăţile funcţiilor integrabile
- Teorema de medie
- O primitivă a unei funcţii integrabile Riemann
- Transfer de integrabilitate

Integrale improprii

Integralele improprii constituie o extindere naturală a integralei Riemann, în sensul că vom considera domeniul de integrare sau funcția de integrat nemărginite, bazându-ne pe teoria trecerii la limită.

Integrale pe intervale nemărginite

Integralele pe *intervale nemărginite* sunt integralele în care cel puțin una din limitele de integrare este infinită, adică de forma:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx\,,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \ \text{ sau } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\,.$$

Dacă pentru funcția $f:[a,+\infty)\to \mathbf{R}$, integrabilă pe orice interval $[a,x]$, cu $x>a$, există $\lim\limits_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx \in \mathbf{R}$, vom spune că $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este *convergentă*

și vom nota $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx$. În caz contrar integrala este *divergentă*.

8. Exemple

- Să calculăm $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty} arctgu = \frac{\pi}{2}$;
- Integrala $\int_0^\infty \sin\, x dx$ este divergentă deoarece:

  $\lim_{u\to\infty}\int_0^u \sin\, x dx = \lim_{u\to\infty}(-\cos u + 1)$ şi nu există $\lim_{u\to\infty} \cos u$.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 8

```
» I1=int(1/(1+x^2),0,inf)
I1 =
pi/2

» int(cos(x),0,inf)
ans =
NaN
```

Reamintim că NaN = not a number

Există încă două cazuri de integrale improprii, cu domeniul de integrare nemărginit, cazuri care se reduc imediat la cazul prezentat anterior. Astfel, avem:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{\infty} f(-t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

dacă $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ există.

- Integralele $\int_a^\infty f(x)dx$ şi $\int_b^\infty f(x)dx$, unde $f:[c,\infty)\to\mathbf{R}$, $c=\min\{a,b\}$

  converg sau diverg în acelaşi timp.

- Considerând $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$, integralele $\int_a^\infty f(x)dx$ şi $\int_a^\infty k\cdot f(x)dx$ au aceeaşi natură, oricare ar fi $k\neq 0$.

Criteriu de convergenţă

- Dacă funcția $f:[a,+\infty)\to \mathbf{R}_+$, integrabilă pe orice interval $[a,x]$, are proprietatea că există o funcție $g:[a,+\infty)\to \mathbf{R}_+$ astfel încât $f(x)\le g(x), \forall x\ge a$, atunci din convergența $\int_a^\infty g(x)dx$ rezultă că integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă, în timp ce divergența integralei $\int_a^\infty f(x)dx$ implică divergentă integralei $\int_a^\infty g(x)dx$.

9. Exemplu

- $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ este convergentă, deoarece $\forall x > 1$ avem

  $e^{-x^2} < e^{-x}$ şi

  $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{e}$.

Consecinţă

- Pentru funcția $f:[a,+\infty)\to \mathbf{R}_+$, integrabilă pe orice interval $[a,x]$:
  - dacă $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=A$ (finit), pentru $\alpha>1$, atunci $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă;
  - dacă $\alpha\le 1$ şi $A\neq 0$, integrala este divergentă.

10.Exemplu

- $\int_0^\infty \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ este convergentă, deoarece $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{2}$.

Pentru a calcula integrala, folosim a doua schimbare de variabilă:

din substituția $x = tgt$ obținem $dx = (1+tg^2 t)dt$;

se schimbă limitele de integrare: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ şi $x = \infty \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ şi astfel:

$$\int_0^\infty \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos t dt = \frac{\pi}{2} - 1$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 10

```
» int((atan(x))/(x^2+1)^(3/2),0, inf)
Warning: Explicit integral could not be found.
ans =
int(atan(x)/(x^2 + 1)^(3/2), x = 0..Inf)
```

Instrucţiunea int nu face faţă, fiind vorba după cum am văzut de un calcul laborios.
Vom scrie în faţa instrucţiunii int, instrucţiunea double, şi Matlab ne va returna rezultatul unei integrări numerice.

```
» double(int((atan(x))/(x^2+1)^(3/2),0, inf))
Warning: Explicit integral could not be found.
ans =
    0.5708
```

Verificăm dacă am obţinut acelaşi rezultat:

```
»pi/2-1
ans =
    0.5708
```

Integrală absolut convergentă

Spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este *absolut convergentă* dacă integrala $\int_a^\infty |f(x)|dx$ este convergentă.

Se observă că o integrala absolut convergentă este şi convergentă.

11. Exemplu

- Să studiem natura integralei $\int_0^\infty e^{-2x}\cdot\sin 3x dx$ şi în caz de

convergenţă să calculăm efectiv integrala:

Avem inegalitatea $\left|e^{-2x}\cdot\sin 3x\right|\le e^{-2x},\quad \forall x\in\mathbf{R}$ şi în plus

$\int_0^\infty e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$, aşadar integrala este absolut convergentă

$$\int_0^\infty e^{-2x}\cdot\sin 3x dx=\int_0^\infty\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\cdot\sin 3x dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\sin 3x\Big|_0^\infty+$$

$$+\frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\cdot\cos 3x dx=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot\cos 3x\Big|_0^\infty-\frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-2x}\cdot\sin 3x dx\right),$$

calcul din care rezultă că $\int_0^\infty e^{-2x}\cdot\sin 3x dx=\frac{3}{13}$.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 11

```
»  I=int(exp(-2*x)*sin(3*x),0, inf)
I =
3/13
```

Integrale definite de funcţii nemărginite

Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, continuă pe $[a,b]$ cu excepția unui punct x_0, $a\le x_0\le b$, punct în care funcția f are o discontinuitate de speța a doua ($\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$).

Să presupunem că $x_0=b$, în caz contrar putând scrie:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx-\int_b^{x_0} f(x)dx$$

Integrala $\int_a^b f(x)dx$ este *convergentă* daca există $\lim\limits_{u\to 0}\int_a^{b-u} f(u)du$ şi este finită.

In caz contrar, integrala este *divergentă*.

12. Exemple

- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{u\to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-u} = \frac{\pi}{2}$$
- $$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \lim_{u\to 0} \int_0^{1-u} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \lim_{u\to 0} \int_0^{1-u} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{u\to 0}\left(\arcsin x \Big|_0^{1-u} - \sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^{1-u}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1$$

Rezolvarea in Matlab a exemplelor nr 12

```
» int(1/sqrt(1-x^2),0,1)
ans =
pi/2


» int(sqrt((1+x)/(1-x)), 0,1)
ans =
pi/2 + 1
```

Criteriu de convergenţă

- Fie funcţia $f:[a,b)\to \mathbf{R}_+$, cu $\lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty$, integrabilă pe orice interval $[a,b-u]$, $u\in(0,b-a)$; dacă există şi este finită $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^{\beta}\cdot f(x)$ pentru $\beta<1$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

13. Exemplu

- Integrala $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$ este convergentă, deoarece

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\;;$$

pentru a calcula integrala folosim substituția $t=\frac{1}{x+1}$, rezultând astfel

$dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$; după înlocuirea limitelor de integrare obținem:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{2t-1}}{t}}\cdot\frac{1}{t^2}\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\cdot\sqrt{2t-1}}\,dt=1$$

Rezolvarea in Matlab a exemplelor nr 13

```
» int(1/((x+1)*sqrt(1-x^2)),0,1)
ans =
1
```

De reţinut

- **Integrale pe intervale nemărginite**
- Criteriul de convergenţă şi consecinţă
- Integrală improprie absolut convergentă
- **Integrala definită de funcţii nemărginite**
- Criteriu de convergenţă

Integrale multiple

Integralele multiple sunt o extindere naturală a integralei Riemann pentru cazul funcțiilor de mai multe variabile.

- Integralele *duble*, notate $\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy$, unde funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^2$ este continuă și $A \subset D$ o mulțime compactă.

- Integralele *triple*, notate $\iiint\limits_{A} f(x,y,z)dxdydz$, unde funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^3$ este continuă, și $A \subset D$ este o mulțime compactă.

Integrale duble

Pentru început studiem cazul $A=[a,b]\times[c,d]$ și $f:A\to \mathbf{R}_+$, funcție continuă.
Considerând diviziunile

$$\Delta'\in \mathcal{D}\,[a,b]\,,\ \Delta':a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b$$

$$\Delta''\in \mathcal{D}\,[c,d]\,,\ \Delta'':c=y_0<y_1<\ldots<y_n=d$$

obținem o diviziune $\Delta\in \mathcal{D}[a,b]\times[c,d]$, ale cărei elemente sunt dreptunghiurile $[x_{k-1},x_k]\times[y_{j-1},y_j], 1\le k\le m, 1\le j\le n$, de normă

$$\|\Delta\|=\max\{(x_k-x_{k-1})\cdot(y_j-y_{j-1}), 1\le k\le m, 1\le j\le n\}$$

Familia punctelor intermediare $(\xi_{\Delta}, \eta_{\Delta})$ corespunzătoare diviziunii Δ are ca elemente perechile (ξ_{k}, η_{j}) unde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$.

Construim suma Riemann corespunzătoare funcției f şi diviziunii Δ şi punctelor intermediare $(\xi_{\Delta}, \eta_{\Delta})$

$$\sigma_f(\Delta, (\xi_\Delta, \eta_\Delta)) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}),$$

ce reprezintă suma volumelor paralelipipedelor cu baza $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ şi înălțimea $f(\xi_k, \eta_j)$.

Funcţie reală de două variabile reale, integrabilă

Funcția $f : A = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}_+$ este *integrabilă pe A*, dacă există un număr real I, cu proprietatea că:

$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât $\Delta \in \mathcal{D}[a,b] \times [c,d]$, cu $\|\Delta\| < \delta$ să avem

$\left|\sigma_f(\Delta, (\xi_\Delta, \pi_\Delta)) - I\right| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_\Delta, \eta_\Delta)$.

Numărul I se numeşte *integrala dublă* a lui f pe $A=[a,b]\times[c,d]$, este unic determinat şi se notează $I=\iint\limits_A f(x,y)dxdy$.

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy=\lim_{|\Delta|\to 0}\sigma_f(\Delta,(\xi_\Delta,\pi_\Delta))$$, $\Delta\in\mathcal{D}[a,b]\times[c,d]$, pentru orice alegere a punctelor intermediare $\left(\xi_\Delta,\eta_\Delta\right)$.

Numărul $I=\iint\limits_A f(x,y)dxdy$ reprezintă volumul corpului situat deasupra planului xOy şi sub graficul funcţiei $y=f(x,y)$, unde $f:A\to\mathbb{R}_+$ este o funcţie integrabilă.

Calculul prin iterare al integralei duble

Calculul acestei integrale duble se reduce la calculul unei integrale Riemann, bazându-ne pe teorema:

- Dacă funcția $f : A = [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$ este continuă, atunci

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

(*teorema Fubini de permutare a ordinii de integrare*)

14. Exemplu

- Pentru a calcula $I = \iint\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (x^2 - xy + y^2)\,dx\,dy$, folosim teorema Fubini:

$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2}(x^2 - xy + y^2)\,dy\right)dx$$

În calculul integralei $\int_0^2 (x^2 - xy + y^2)\,dy$, considerăm y variabilă şi x constantă:

$$\int_0^2 (x^2 - xy + y^2)\,dy = x^2 y - x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = 2x^2 - 2x + \frac{8}{3}$$

şi astfel:

$$I = \int_{-1}^{1}\left(2x^2 - 2x + \frac{8}{3}\right)dx = \frac{20}{3}$$

Calculul integralelor duble in Matlab

Pentru a evalua simbolic integrala int = $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$ vom lucra in două etape:

după declararea variabilelor simbolice, şi a funcţiei f evaluăm $\int_c^d f(x,y)dy$ =intx

şi apoi $\int_a^b$ intx dx =int

```
» syms x y
»f=f (x,y);intx=int(f,y,c,d)
»int=int(intx,a,b)
```

Se poate evalua integrala folosind o singură funcţie şi anume:

```
»syms x y
» f= f (x,y);; int=int(int(f, y,c,d), a,b)
```

Nu uitaţi că dacă *f* este funcţie continuă se poate permua ordinea deintegrare!

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 14

- $$I = \iint_{[-1,1]\times[0,2]} (x^2 - xy + y^2)\,dxdy$$

```
»syms x y
» f=x^2-x*y+y^2; intx=int(f,y,0,2)
      intx =
                2*x^2-2*x+8/3
»int=int(intx,-1,1)
      int =
                20/3
```

sau

```
»syms x y
» f=x^2-x*y+y^2; int=int(int(f,y,0,2),-1,1)
```

15. Exemplu

- Pentru a calcula integrala $\iint\limits_{[0,1]\times[2,3]} y\cdot e^{xy}\,dxdy$, e preferabil să calculăm $\int_0^1 y\cdot e^{xy}\,dx = e^{xy}\Big|_0^1 = e^y - 1$, decât $\int_2^3 y\cdot e^{xy}\,dy$ şi astfel:

$$\iint\limits_{[0,1]\times[2,3]} y\cdot e^{xy}\,dxdy = \int_2^3\left(\int_0^1 y\cdot e^{xy}\,dx\right)dy = \int_2^3 (e^y - 1)\,dy = e^3 - e^2 - 1$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 15

Dacă în rezolvarea anterioară era esenţială o anumită ordine de integrare , în rezolvarea cu Symbolic Math nu are importanţă. Intr-adevăr înal doilea caz rezolvarea durează mai mult.

```
» int(int(f,x,0,1),y,2,3)
ans =
exp(3) - exp(2) - 1

» int(int(f,y,2,3),x,0,1)
ans =
exp(3) - exp(2) - 1
```

In cazul în care $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$, unde $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ şi $g:[c,d]\to \mathbf{R}$, calculul integralei se simplifică:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)\cdot h(y)\,dy \right) dx = \int_a^b g(x)\cdot \left(\int_c^d h(y)\,dy \right) dx =$$

$$= \left(\int_c^d h(y)\,dy \right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx \right)$$

16. Exemplu

- $$\iint\limits_{[-1,1]\times[0,\pi]} e^{x}\cdot\cos\frac{y}{2}\,dx\,dy=\left(\int_{-1}^{1} e^{x}\,dx\right)\cdot\left(\int_{0}^{\pi}\cos\frac{y}{2}\,dy\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

Într-un caz mai general funcţia f este definită pe o mulţime $A_i \subset \mathbf{R}^2$, $i \in \{1,2\}$, de forma

$$A_1 = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

unde $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue, sau

$$A_2 = \{(x,y) \mid c \le y \le d, \alpha_1(y) \le x \le \beta_1(y)\},$$

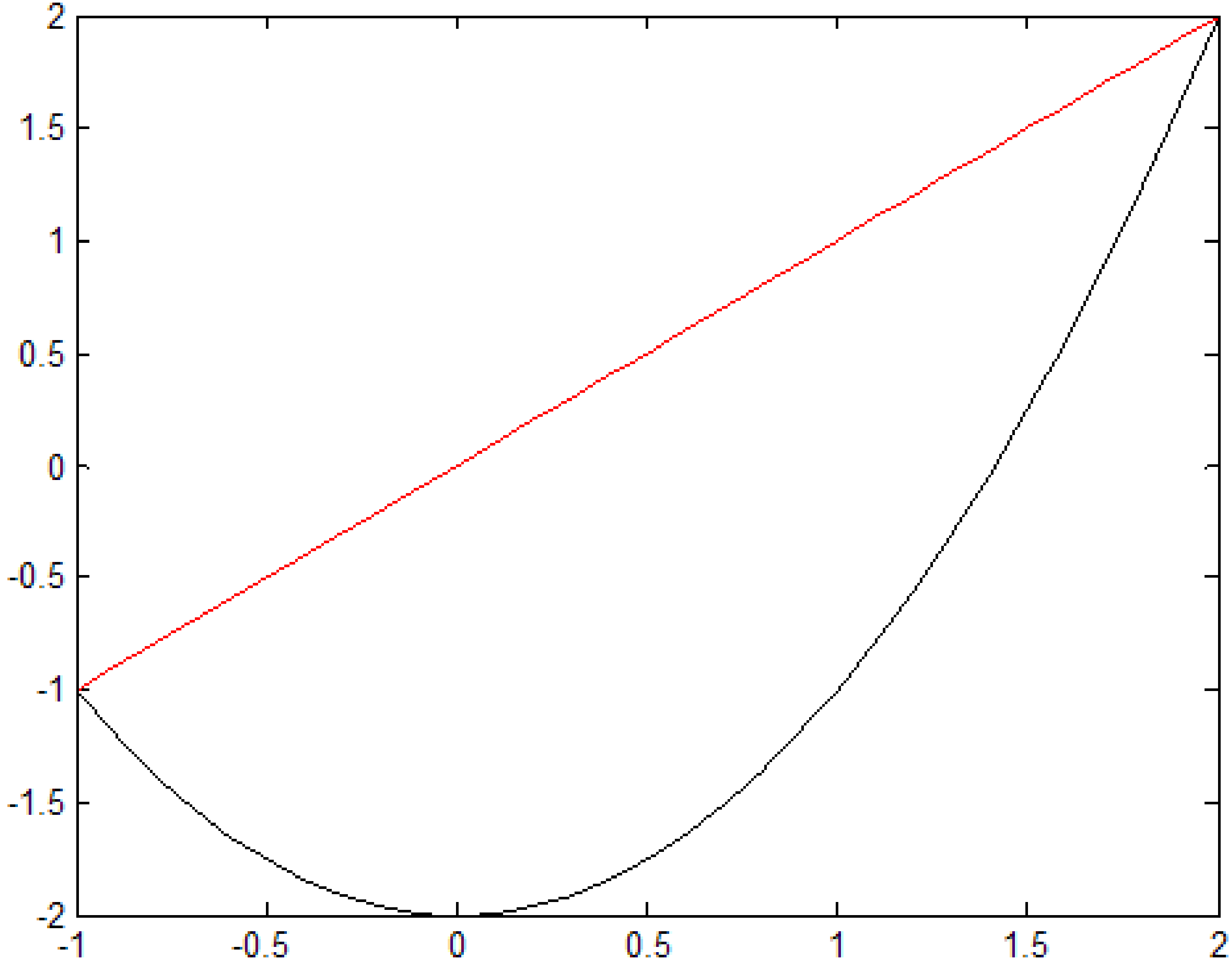
unde $\alpha_1, \beta_1 : [c,d] \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue.

17. Exemplu

- Pentru a defini cu ajutorul inegalităților mulțimea A_1, limitată de parabola $y = x^2 - 2$ şi de prima bisectoare $y = x$ vom desena cele două curbe.

Calculăm abscisele intersecțiilor: $x = x^2 - 2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$, obținem că $x \in [-1,2]$

```
x=-1:.1:2;plot(x,x,'r',x,x.^2-2,'k')
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Aşadar $x \in [-1,2]$, în timp ce ordonata y este cuprinsă între parabolă şi prima bisectoare, adică $x^2 - 2 \leq y \leq x$.

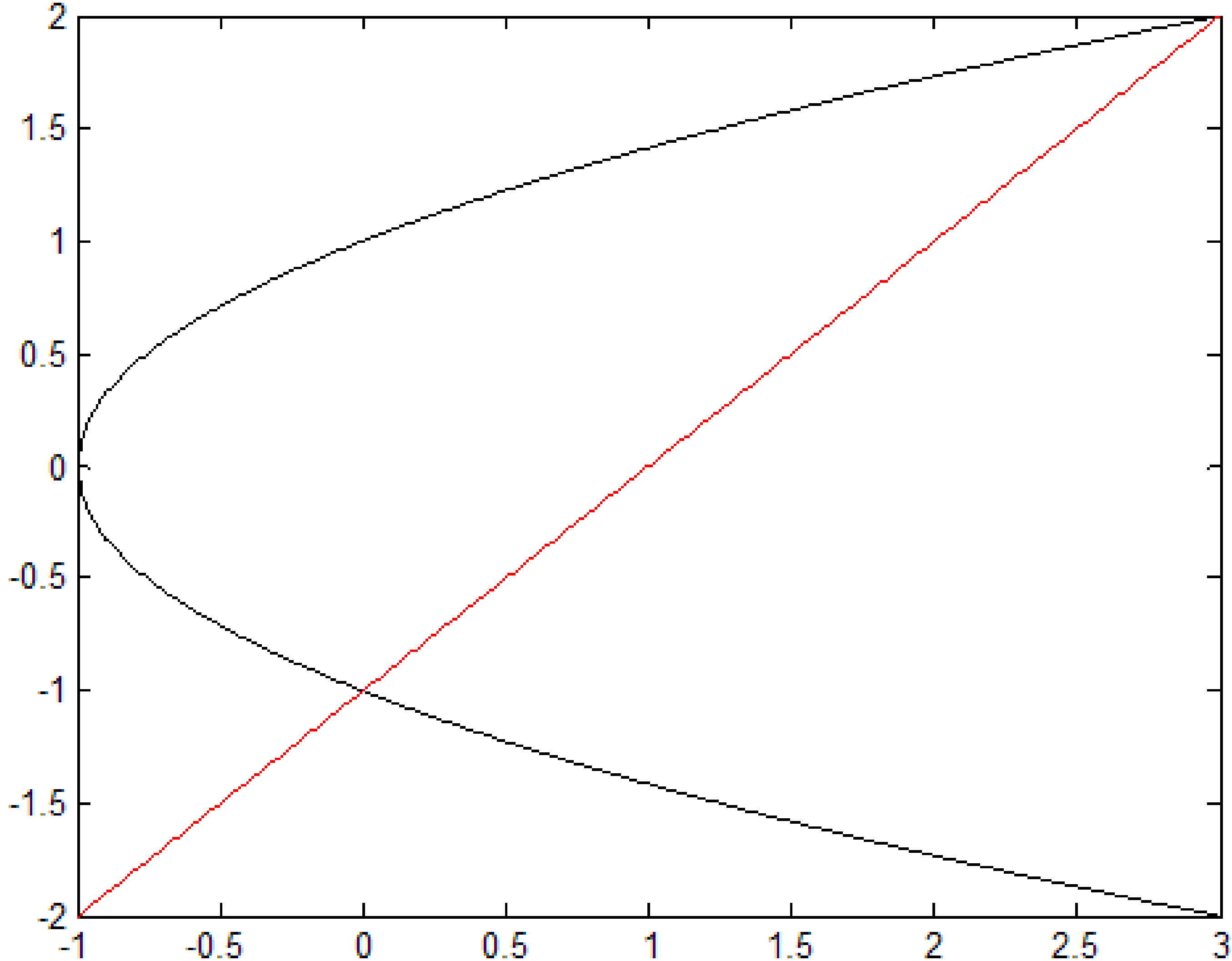
Astfel putem spune că:

$$A_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, x^2 - 2 \leq y \leq x\}$$

18. Exemplu

- În cazul mulțimii A_2, limitată de parabola $x = y^2 - 1$ și dreapta $x = y + 1$ avem:

```
x=-1:.01:3; plot(x,sqrt(x+1),'k',x,-sqrt(x+1),'k',x,x-1,'r')
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Calculăm ordonatele intersecțiilor: $y^2 - 1 = y - 1 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 2$ şi astfel $y \in [-1,2]$, în timp ce x variaza între parabolă şi dreaptă.

Caracterizăm mulțimea A_1 prin inegalități:

$$A_2 = \{(x, y) \mid -1 \le y \le 2,\ y^2 - 1 \le x \le y + 1\}.$$

Calculul integralei duble ca succesiune de integrale simple

Dacă funcțiile $f, g : A_i \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2\}$ sunt continue definim:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

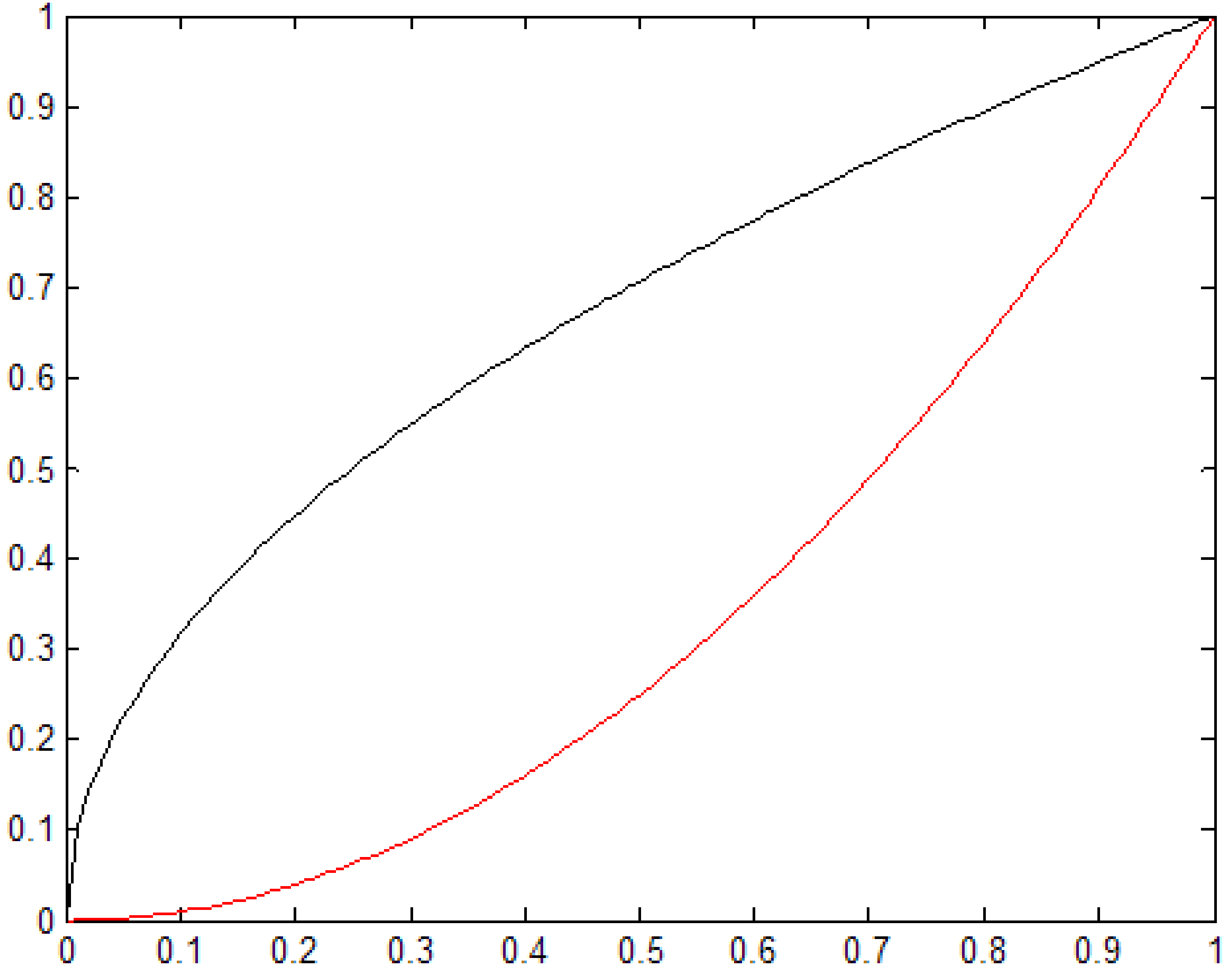
$$\iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha_1(y)}^{\beta_1(y)} f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

19. Exemplu

- Să calculăm $\iint_A (x^2 + y)dxdy$, dacă mulțimea A este limitată de parabolele $y = x^2$ şi $x = y^2$.

  Calculăm abscisele punctelor de intersecție: $x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

  x=0:.01:1;plot(x,x.^2,'r',x,sqrt(x),'k')



0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Aşadar $0 \le x \le 1$, în timp ce y variază între parabola $y = x^2$ şi parabola $y = \sqrt{x}$, adică $x^2 \le y \le \sqrt{x}$.

Avem:

$$\iint_A (x^2 + y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(x^2(\sqrt{x} - x^2) + \frac{1}{2}(x - x^4) \right) dx = \frac{2}{7} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4}.$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 19

Avem nevoie de reprezentarea grafică a domeniului de integrare, pentru a-l defini cu inegalităţi.

Pentru început calculăm abscisele punctelor de intersecţie:

```
» syms x
»  limx=solve(x-sqrt(x))
limx =
      0
      1
```

Apoi vom desena în acelaşi sistem de axe cele două curbe, pentru $x \in [0,1]$:

```
»x=0:.01:1;plot(x,x.^2,'r',x,sqrt(x),'k')
```

Din desen deducem că $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$, şi suntem în măsura să calculăm simbolic integr

```
» syms x y
» f=x^2+y; I=int(int(f,y,x^2,sqrt(x)),x,0,1)
I =
      33/140
```

20. Exemplu

- Să calculăm $\iint_A (x+y)dxdy$, dacă mulțimea A este limitată de hiperbola

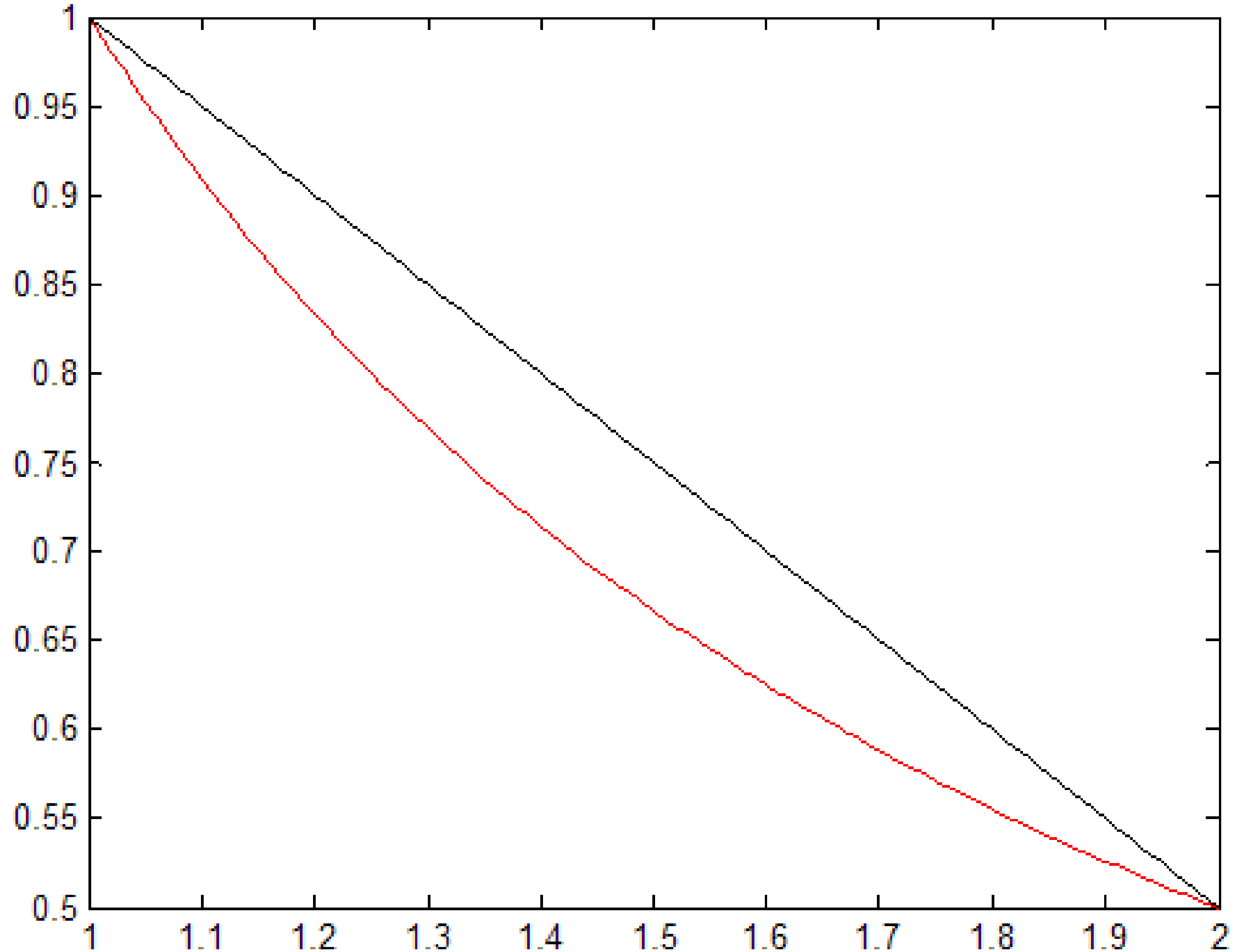
$y=\dfrac{1}{x}$ şi dreapta $x+2y=3$.

Calculăm punctele de intersecție:

$$x+\frac{2}{x}=3 \Rightarrow x_1=1, x_2=2$$

Să desenăm mulțimea A:

```
x=1:.01:2;plot(x,1./x,'r',x,0.5*(3-x),'k')
```


1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2

Se vede că $1 \le x \le 2$ şi $\frac{1}{x} \le y \le \frac{3-x}{2}$ şi avem:

$$\iint_A (x+y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{3-x}{2}} (x+y)dy \right) dx = \int_1^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\frac{3-x}{2}} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x \cdot \left(\frac{3-x}{2} - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{3-x}{2} \right)^2 - \frac{1}{x^2} \right) \right) dx = \frac{1}{8}$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 20

```
» limx=solve (1/x-(3-x)/2)
limx =
      1
      2

»x=1:.01:2;plot(x,1./x,'r',x,0.5*(3-x),'k')
```

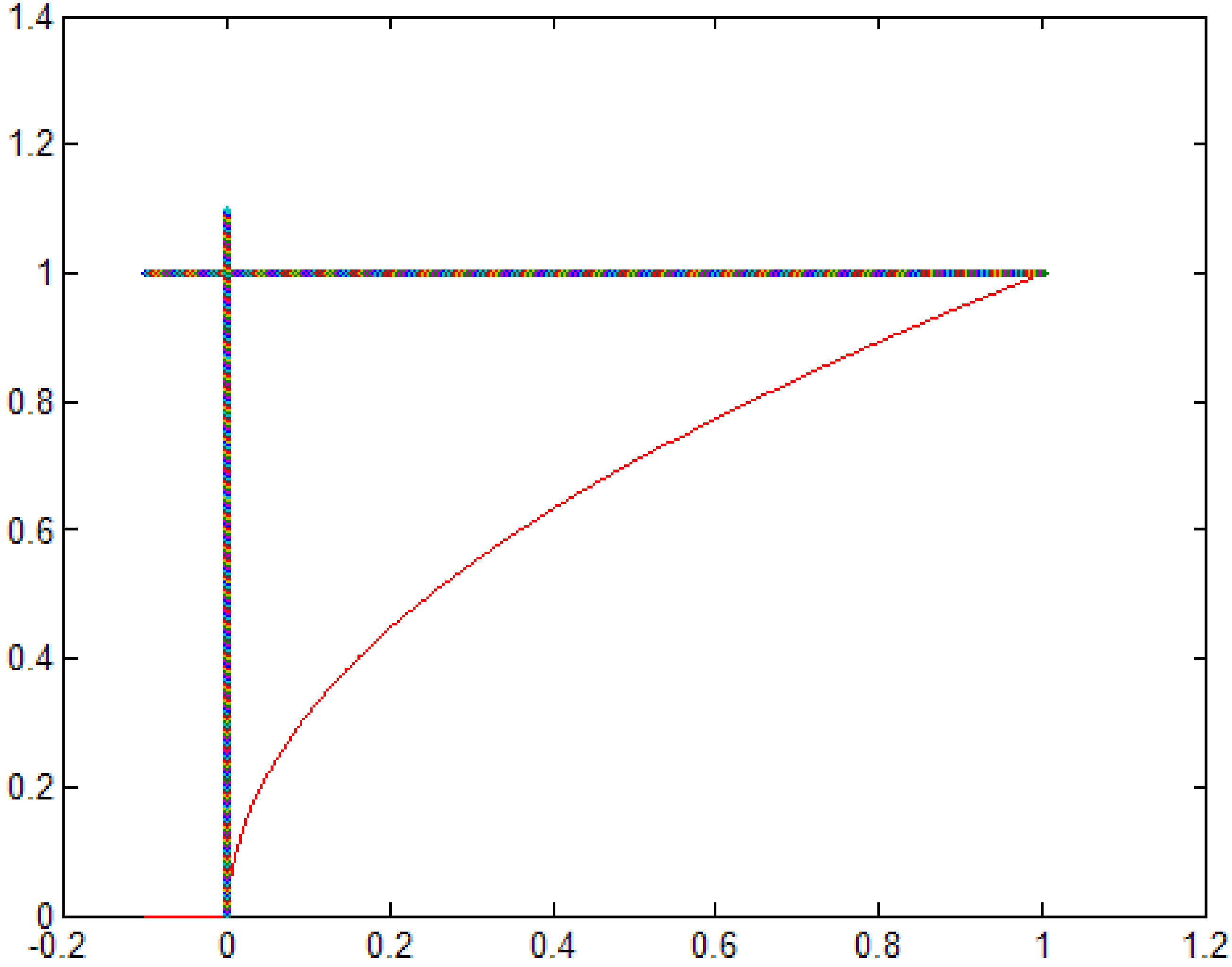
Desenul domeniului de integrare a fost prezentat anterior.

```
» syms x y
»f=x+y;
»int(int(f,y,1/x,(3-x)/2),x,1,2)
I =
     1/8
```

21 Exemplu

- $\iint_A e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, dacă A este mărginită de parabola $y^2 = x$ şi dreptele $x = 0,\ y = 1$

x=-0.1:.001:1;x1=0;y1=0:.001:1.1;plot(x,sqrt(x),'r',x,1,x1,y1)


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

Abscisele punctelor de intersecţie sunt $x_1 = 0, x_2 = 1$ şi y variază între parabolă şi dreapta $y = 1$, adică $\sqrt{x} \le y \le 1$, astfel:

$$\iint_A e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}}\,dy \right) dx$$

Nu ştim să calculăm prin metode elementare $\int e^{\frac{x}{y}}\,dy$, aşa că suntem obligaţi să încercăm cealaltă variantă de definire cu inegalităţi, a mulţimii A, şi anume $0 \le y \le 1$ şi abscisa x, care variază între axa Ox şi parabolă, adică $0 \le x \le y^2$.

În acest caz avem:

$$\iint_A e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(y \cdot e^{\frac{x}{y}} \Big|_0^{y^2} \right) dy = \int_0^1 y \cdot e^{y}\,dy = \frac{1}{2}$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 21

```
» I=int(int(exp(x/y), y,sqrt(x),1),x,0,1)
Warning: Explicit integral could not be found.
Warning: Explicit integral could not be found.
I =
int(int(exp(x/y), y = x^(1/2)..1), x = 0..1)


» I=int(int(exp(x/y),x,0,y^2),y,0,1)
I =
1/2
```

Proprietăţile integralei duble

- Dacă funcțiile $f, g : A_i \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2\}$ sunt continue, atunci:

$$\iint_{A_i} (f+g)(x,y)dxdy = \iint_{A_i} f(x,y)dxdy + \iint_{A_i} g(x,y)dxdy$$

$$\iint_{A_i} (k \cdot f)(x,y)dxdy = k \cdot \iint_{A_i} f(x,y)dxdy$$, unde $k \in \mathbf{R}$

- Pentru functia continuă $f : A_i' \cup A_i'' \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2\}$, unde $A_i' \cap A_i'' \neq \phi$ avem:

$$\iint_{A_i' \cup A_i''} f(x,y)dxdy = \iint_{A_i'} f(x,y)dxdy + \iint_{A_i''} f(x,y)dxdy$$

(aditivitatea integralei duble).

22. Exemplu - aditivitatea integralei duble

- $\iint_A \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy$, unde A este definită de inegalitățile:

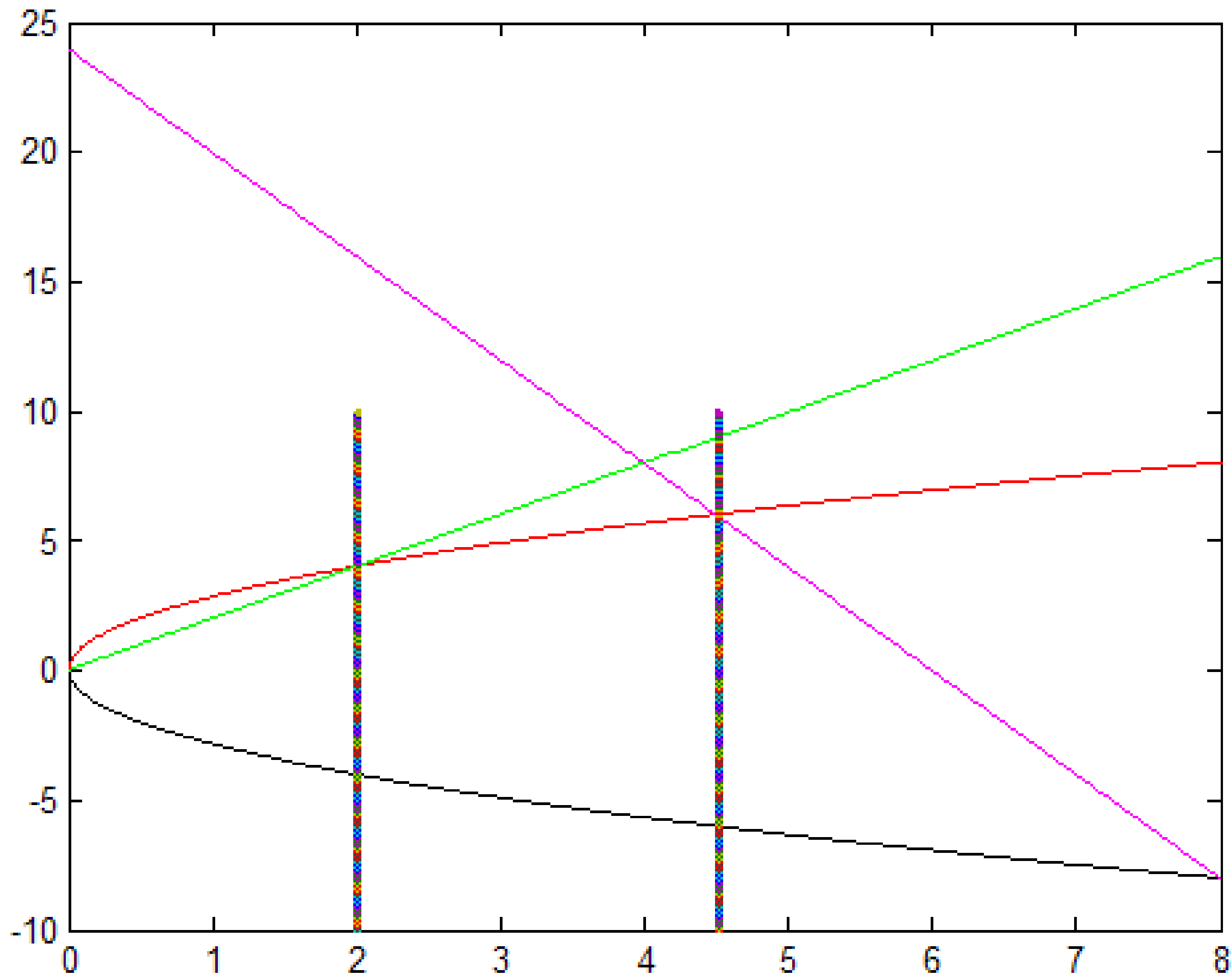
$y^2 \le 8x; \quad y \le 2x; \quad y + 4x \le 24$.

Să stabilim pentru început punctele de intersecție ale parabolei cu cele două drepte, respectiv punctul de interecție al dreptelor:

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2 \qquad \begin{cases} y^2 = 8x \\ y + 4x = 24 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{9}{2},\ x_2 = 8$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y + 4x = 24 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4$$

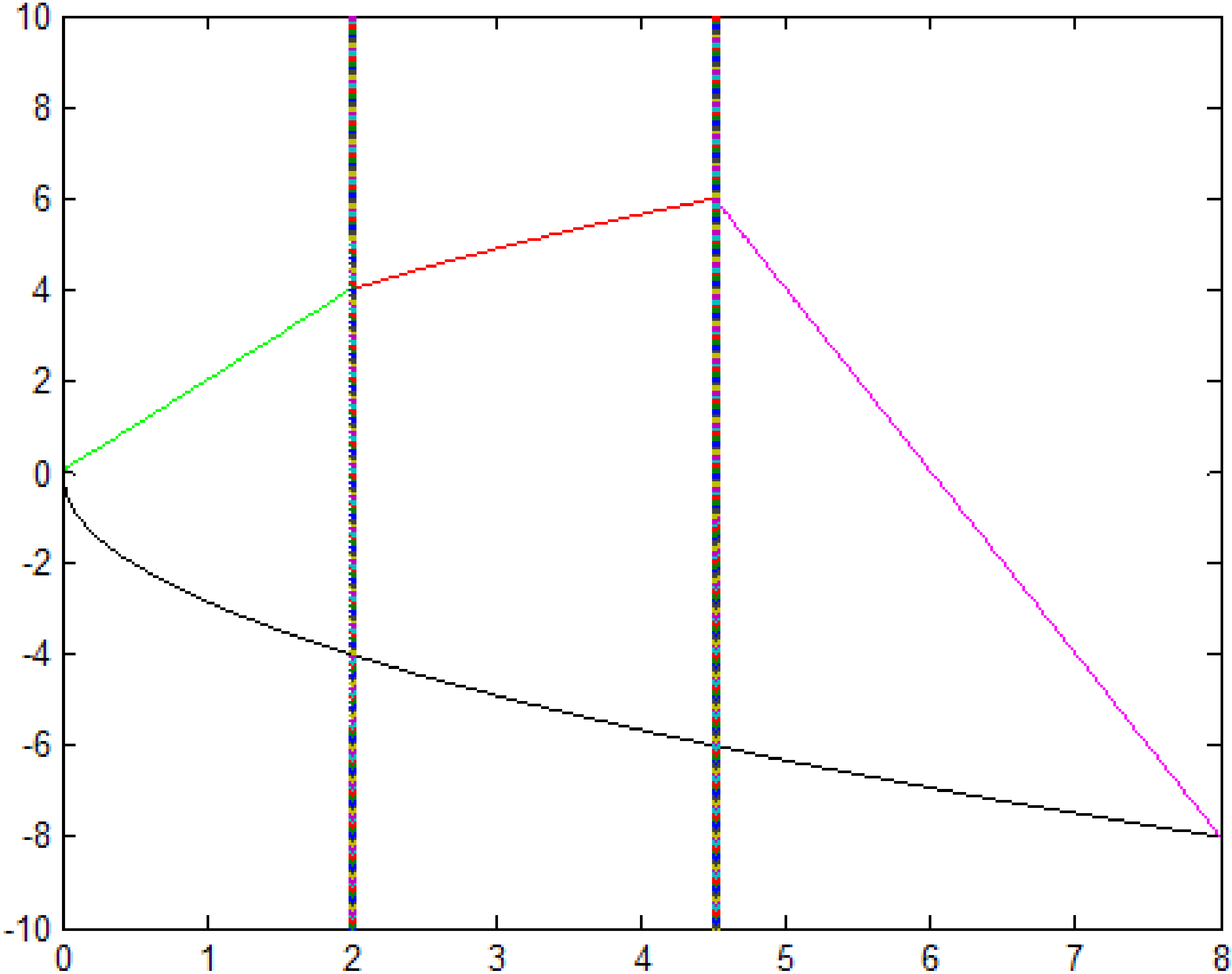
```
x=0:.01:8;x1=2;y1=-10:.01:10; x2=9/2;
plot(x,2*sqrt(2*x),'r',x,-2*sqrt(2*x),'k',x,2*x,'g',x,24-4*x,'m',x1,y1,x2,y1)
```



25
20
15
10
5
0
-5
-10
0
1
2
3
4
5
6
7
8

pentru calculul acestei integrale, împărţim mulţimea A în trei submulţimi, disjuncte prin ducerea unor paralele la Oy: $x=2$ şi $x=\frac{9}{2}$

```
x=2:.01:9/2;x3=0:.01:8;x4=0:.01:2;x5=9/2:.01:8;x1=2;y1=-10:.1:10; x2=9/2;
plot(x,2*sqrt(2*x),'r',x3,-2*sqrt(2*x3),'k',x4,2*x4,'g',x5,24-4*x5,'m',x1,y1,x2,y1)
```


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0
1
2
3
4
5
6
7
8

$$A' = \{(x,y) \mid x \in [0,2],\ -\sqrt{8x} \le y \le 2x\}$$

$$A'' = \{(x,y) \mid x \in [2, \tfrac{9}{2}],\ -\sqrt{8x} \le y \le \sqrt{8x}\}$$

$$A''' = \{(x,y) \mid x \in [\tfrac{9}{2}, 8],\ -\sqrt{8x} \le y \le \sqrt{24-4x}\}$$

şi astfel:

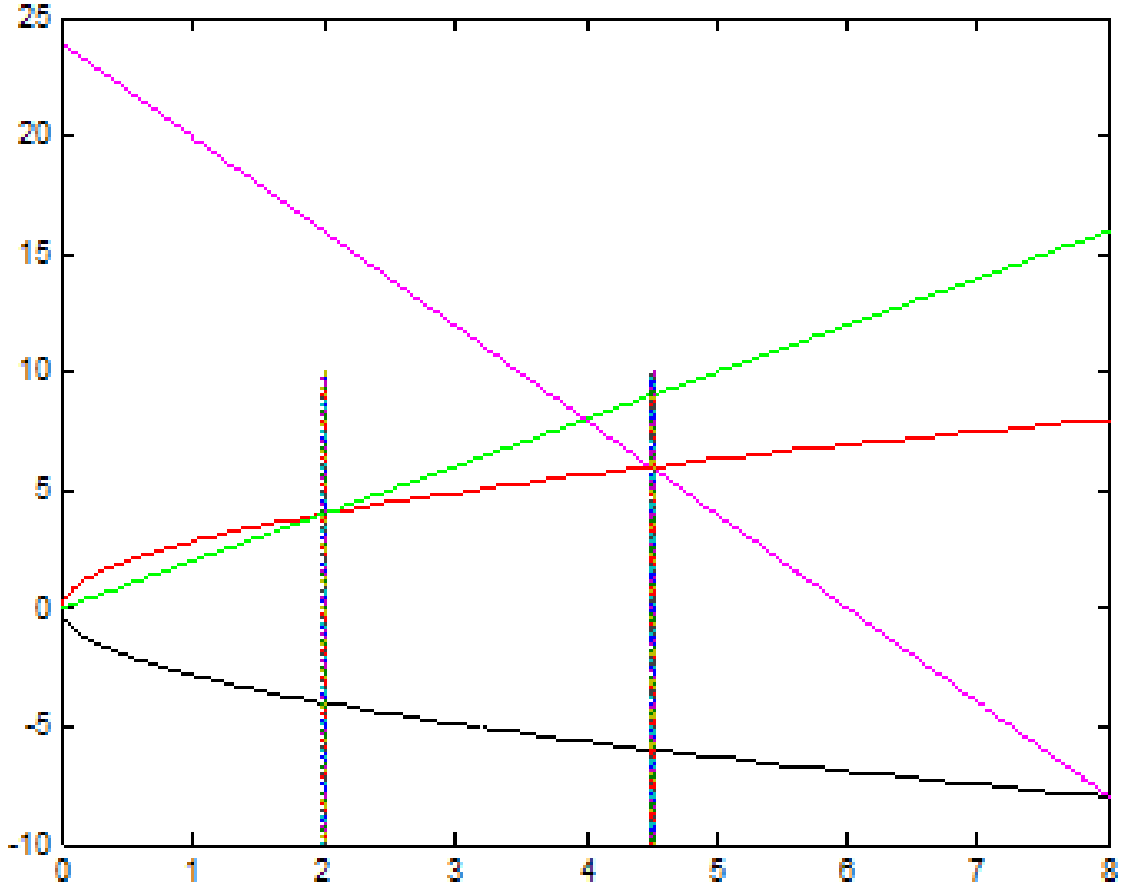
$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{2x} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dy \right) dx + \int_2^{\frac{9}{2}} \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dy \right) dx + \int_{\frac{9}{2}}^{8} \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{24-4x} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{2x + \sqrt{8x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_2^{\frac{9}{2}} \frac{2\cdot\sqrt{8x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_{\frac{9}{2}}^{8} \frac{24 - 4x + \sqrt{8x}}{\sqrt{x}}\,dx = 23\sqrt{2}$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 22

```
» syms x y
»imx1=solve(sqrt(8*x)-2*x)
limx1 =
            0
            2
» limx2=solve(-sqrt(8*x)-2*x)
limx2 =
           0
» limx3=solve(24-4*x-2*x)
limx3 =
           4
» limx4=solve(sqrt(8*x)-24+4*x)
limx4 =
           9/2
» limx5=solve(-sqrt(8*x)-24+4*x)
limx5 =
           8

»x=0:.01:8;x1=2;y1=-10:.01:10; x2=9/2;

»plot(x,2*sqrt(2*x),'r',x,-2*sqrt(2*x),'k',x,2*x,'g',x,24-4*x,'m',x1,y1,x2,y1)
```

Desenul domeniului de integrare a fost prezentat anterior




```
» int(int(1/sqrt(x),y,-sqrt(8*x),2*x),x,0,2)+
int(int(1/sqrt(x),y,-sqrt(8*x),sqrt(8*x)),x,2,9/2)+
int(int(1/sqrt(x),y,-sqrt(8*x),24-4*x),x,9/2,8)
ans =
23*2^(1/2)
```

Calculul ariei unei multimi cu integrala dubla

O interpretare geometrică a integralei duble ne spune că $\iint_A dxdy$ reprezintă aria mulţimii A.

justificare:

Aria mulţimii $A = \{(x,y) | a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ unde funcţiile $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt continue se calculează după formula:

$$aria(A) = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]dx$$

Din definiţia integralei duble avem:

$$\iint_A dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))dx .$$

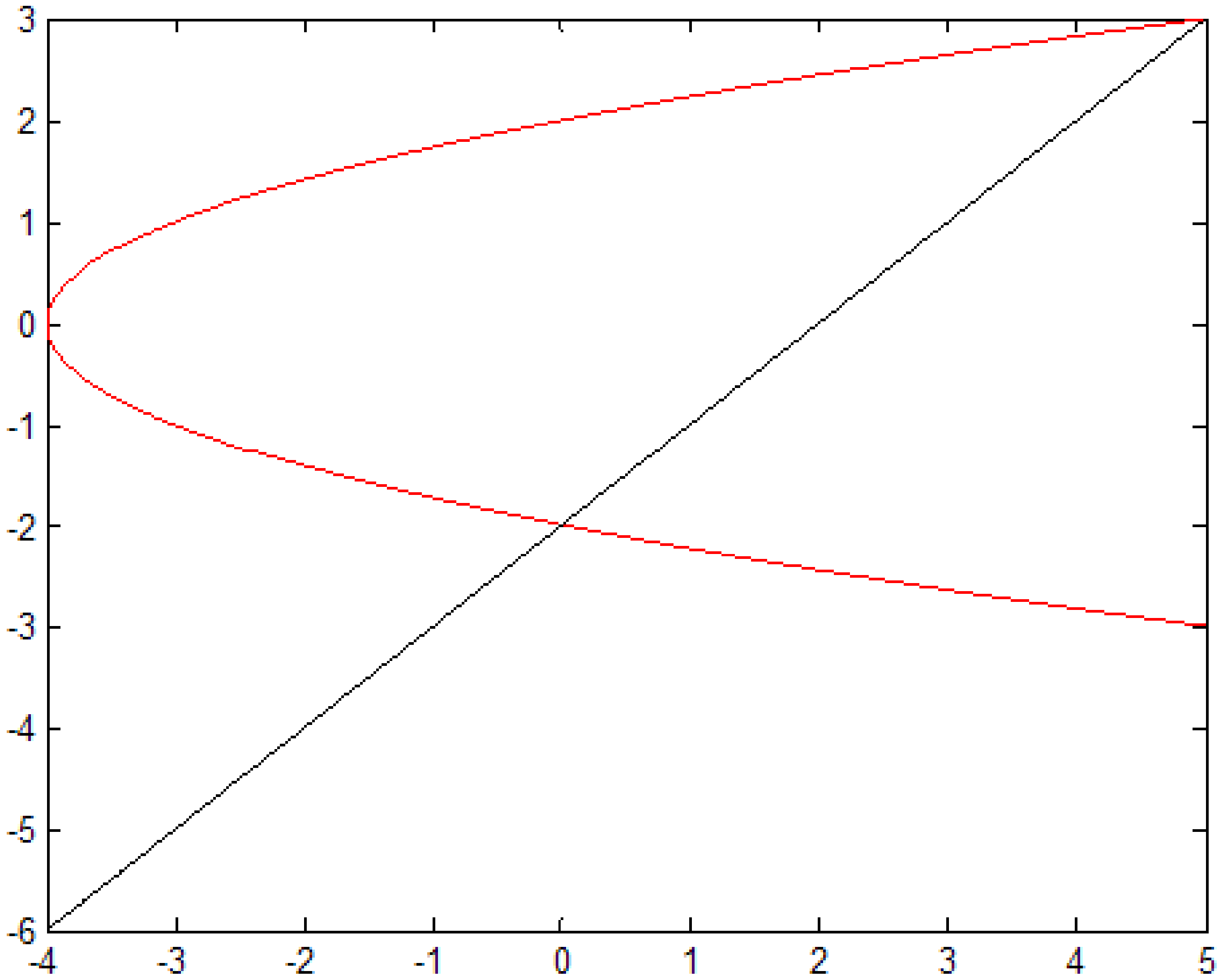
23. Exemplu

- Calculați aria mulțimii A care este limitată de parabola $y^2 = x+4$ și de dreapta $y = x-2$.

Determinăm punctele de intersecție rezolvând ecuația $x+4=(x-2)^2$:

$x_1 = 0, x_2 = 5$ și $y_1 = -2, y_2 = 3$

```
x=-4:.01:5;plot(x,sqrt(x+4),'r',x,-sqrt(x+4),'r',x,x-2,'k')
```


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Dacă vom considera mulţime de tip A_1 ($x \in [a, b]$) va fi necesar să descompunem în două submulţimi.

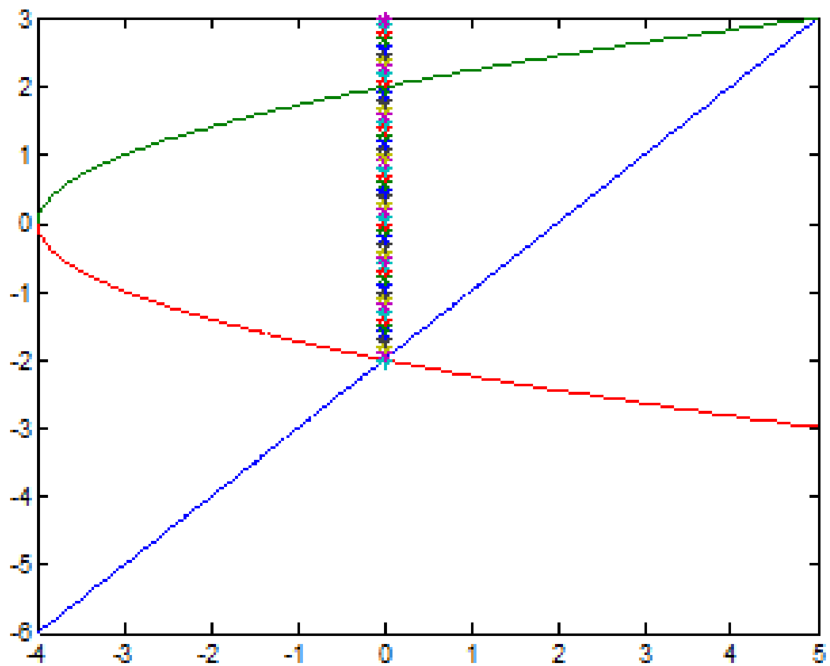
Pentru simplificarea calcului este preferabil să definim A astfel:

$$-2 \le y \le 3;\ y^2 - 4 \le x \le y + 2$$

$$aria(A) = \iint_A dxdy = \int_{-2}^{3}\left(\int_{y^2-4}^{y+2} dx\right)dy = \int_{-2}^{3}(y + 2 - y^2 + 4)dy = \frac{125}{6}$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 23

```
» syms x y
»limx1=solve(x-2-sqrt(x+4))
limx1 =
5
» limx2=solve(x-2+sqrt(x+4))
limx2 =
0

» x=-4:.01:5;y=-2:.1:3;plot(x,x-2,x,sqrt(x+4),x,-sqrt(x+4),0,y,'*')
```



```
» syms x y
» A=int(int(1,y,-sqrt(x+4),sqrt(x+4)),x,-4,0)+int(int(1,y,x-2,sqrt(x+4)),x,0,5)
A =
125/6
```

Dacă folosim abordarea prezentată anterior avem:

```
» A= int(int(1,x,y^2-4, y+2),y,-2,3)
A =
125/6
```

Schimbare de variabile în integrala dublă

O aplicație $F:U \to \mathbf{R}^2$, unde $U \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă, dată de $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, injectivă, de clasă C^1 pe U, cu proprietatea că $F(U)$ este deschisă şi F^{-1} este de clasă C^1 pe $F(U)$ se numeşte *schimbare de coordonate* în U.

Pentru orice punct $(x,y) \in U$ numerele $f_1(x,y), f_2(x,y)$ se numesc *coordonatele* lui (x,y) în sistemul de coordonate F, iar funcțiile f_1, f_2 se numesc *sistem de coordonate* în U.

Schimbarea de variabile uzuală pentru integrala dublă este trecerea la coordonate polare, caz în care:

$$\iint_{A} g(x,y)\,dxdy = \iint_{F^{-1}(A)} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi$$

unde $g: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ compactă, este o funcție continuă. .

24. Exemplu

- Să calculăm $\iint\limits_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, unde

$A = \{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$:

Trecem la coordonate polare, în inegalitățile ce definesc domeniul

$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$ şi obținem $1 \le r^2 \le 9,\ r\cos\varphi \ge 0,\ r\sin\varphi \ge 0$, adică:

$$F^{-1}(A) = \{(r,\varphi) \mid r \in [1,3],\ \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]\}$$

Astfel $\displaystyle\iint\limits_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{[1,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r\cdot r\,dr\,d\varphi = \left(\int_1^3 r^2 dr\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right) = \frac{13\pi}{3}$.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 24

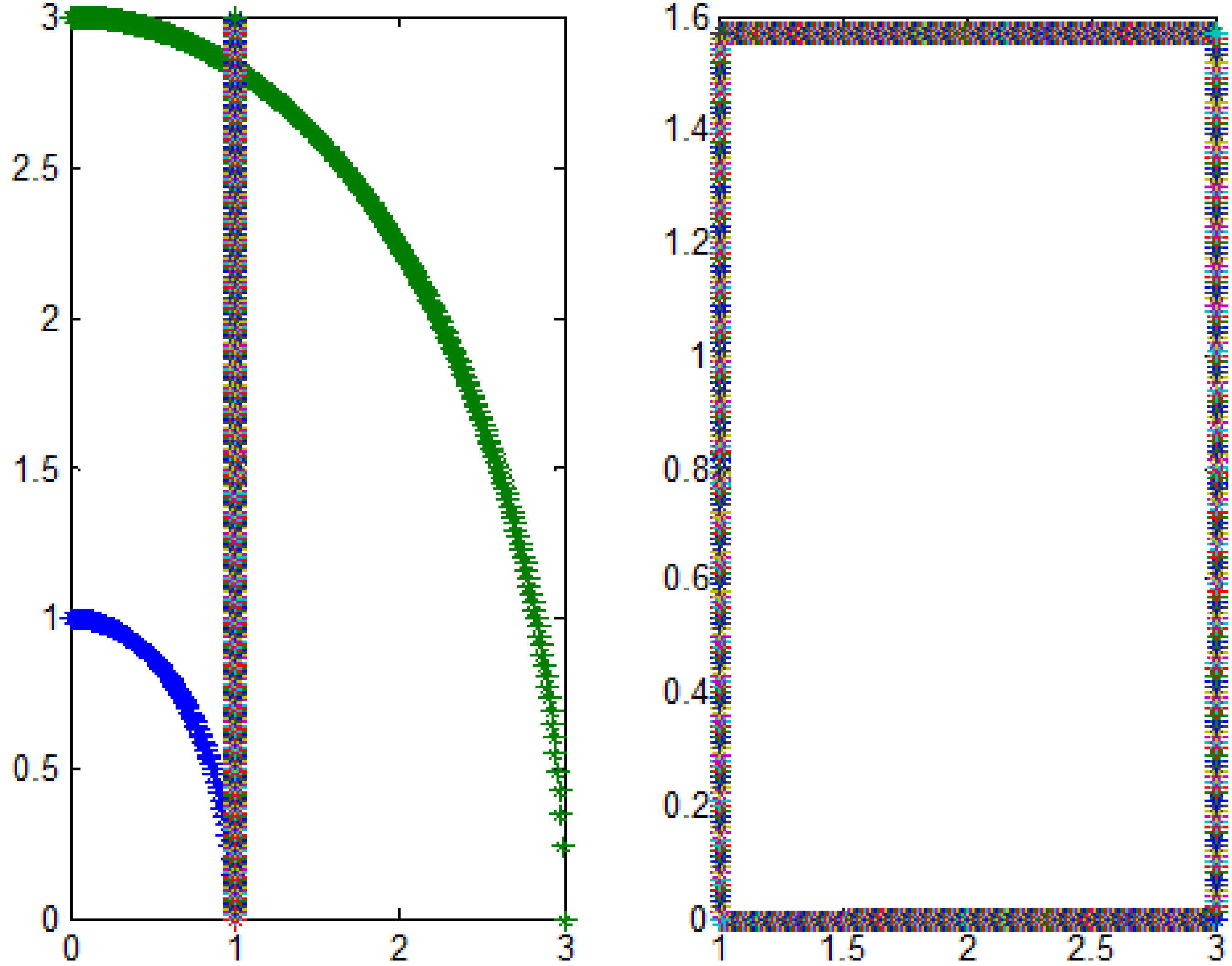
```
» syms x y r phi
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-9,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polardom =
           r^2 - 9
» polardom1=simplify(subs(x^2+y^2-1,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polardom1 =
           r^2 - 1

» limr=solve(polardom,r)
limr =
            -3
           3
» limr1=solve(polardom1,r)
limr1 =
            -1
             1
```

r ia numai valori pozitive, deci $r \in [1,3]$;

$$\begin{cases} \cos\varphi \geq 0 \\ \sin\varphi \geq 0 \end{cases} \text{ implică } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Prezentăm alăturat cele două mulţimi A şi $F^{-1}(A)$

```
» subplot(121); x=0:.01:1; x1=0:.01:3; y=0.:.01:3;plot(x,sqrt(1-x.^2),'*',x1,sqrt(9-x1.^2),'*', 1,y,'*')
»ubplot(122); x=1:.01:3; y=0:.01:pi/2; plot(x,0,'*',x,pi/2,'*',1,y,'*',3,y,'*')
```



```
» f=sqrt(x^2+y^2);
»polarfun=simplify(subs(f,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polarfun =
            (r^2)^(1/2)

» F=[r*cos(phi),r*sin(phi)];jacob=det(jacobian(F,[r,phi]))
jacob =
r*cos(phi)^2 + r*sin(phi)^2
» j=simple(jacob)
j =
            r

» int(int(polarfun*j,1,3),0,pi/2)
ans =
(13*pi)/3
```

25. Exemplu

- $\iint\limits_A e^{x^2+y^2}dxdy$, unde mulţimea A este limitată de cercul $x^2+y^2=1$.

Mulţimea A este discul unitate, caracterizat de inegalitatea $x^2+y^2\le 1$,

care în coordonate polare devine $r^2\le 1$;

în inegalitatea în coordonate polare ce defineşte pe A, nu apare nici o restricţie impusă variabilei φ ,aşadsar $r\in[0,1]$ şi $\varphi\in[0,2\pi]$.

$$\iint\limits_A e^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} e^{r^2}\cdot r dr d\varphi=\left(\int_0^1 r\cdot e^{r^2}dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)=\pi(e-1)$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 25

```
»syms x y r phi
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-1,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]));limr=solve(polardom,r)
limr =
          -1
           1
```

Asupra unghiului φ nu se impune nicio retricţie, deci $\varphi \in [0,2\pi]$

```
» f=exp(x^2+y^2); polarfun=simplify(subs(f,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]));
» int(int(polarfun*r,r,0,1),phi,0,2*pi)
ans =
         pi*(exp(1) - 1)
```

Coordonate polare generalizate

În cazul în care mulțimea A, pe care integrăm este mărginită de o elipsă $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trecem la coordonate polare generalizate:

$$\begin{matrix} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{matrix}\ ,\ r \geq 0, \varphi \in [0,2\pi] \ \text{ şi } \ \left|\det J_F\right| = abr$$

26. Exemplu

- Pentru a calcula $\iint\limits_A \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,dxdy$, unde A se află în primul cadran şi este mărginită de elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, înainte de a trece la coordonate polare generalizate vom descrie mulţimea prin inegalităţi şi anume: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1;\ x\ge 0, y\ge 0$, inegalităţi care devin:

$r^2 \le 1,\ 3r\cos\varphi \ge 0;\ 2r\sin\varphi \ge 0$.

Astfel $r\in[0,1],\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ şi

$$\iint\limits_A \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,dxdy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} 6r\cdot\sqrt{1-r^2}\,drd\varphi = \pi$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 26

```
» syms x y r phi
» polardom=simplify(subs(x^2/9+y^2/4-1,[x,y],[3*r*cos(phi),2*r*sin(phi)]));
limr=solve(polardom,r)
» limr =
          -1
           1
```

r ia numai valori pozitive, deci $r \in [0,1]$;

$$\begin{cases} \cos\varphi \ge 0 \\ \sin\varphi \ge 0 \end{cases} \text{ implică } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

```
» f=sqrt(1-x^2/9-y^2/4); polarfun=simplify(subs(f,[x,y],[3*r*cos(phi),2*r*sin(phi)]))

» F=[3*r*cos(phi),2*r*sin(phi)];jacob=det(jacobian(F,[r,phi]));j=simple(jacob)
j =
         6*r

»int(int(polarfun*j,r,0,1),phi,0,pi/2)
ans =
         pi
```

27. Exemplu

- Pentru a evalua $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, calculăm:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right) = \iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

Prin trecere la coordonate polare mulțimea $[0,\infty)\times[0,\infty)$ se transformă în $[0,\infty)\times[0,2\pi)$ şi astfel:

$$I^2 = \int_0^\infty\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}\cdot r\,d\varphi\right)dr = \frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty\right) = \frac{\pi}{4}$$

şi astfel $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

In Symbolic Math (Matlab), calculul integralei $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ este imediat şi nu necesită tehnici deosebite

```
» int(exp(-x^2),0,inf)
ans =
            pi^(1/2)/2
```

De retinut

- Funcţie reală de două variabile reale, integrabilă
- Calculul integralei duble ca succesiune de integrale simple
- Aditivitatea integralei duble
- Aplicaţii ale integralei duble.
- Schimbarea de variabile

Integrale triple

Pentru funcția $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^3$ continuă, şi $V \subset D$ mulțime compactă putem defini $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz$.

Dacă $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ definim:

$$\iiint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x, y, z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3}\left(f(x, y, z)\right)dz\right)dy\right)dx$$

Din ipoteză funcția f este continuă, şi astfel teorema Fubini de permutare a ordinii de integrare este valabilă, ceea ce înseamnă că avem 6 posibilități de calcul în cazul acestei integrale.

28.Exemplu

- $$\iiint\limits_{[0,1]\times[-3,-1]\times[-2,2]} (x^2y^2z+2z^2x)dxdydz = \int_0^1\left(\int_{-3}^{-1}\left(\int_{-2}^{2}\left(x^2y^2z+2z^2x\right)dz\right)dy\right)dx =$$

$$\int_0^1\left(\int_{-3}^{-1}\frac{32}{3}xdy\right)dx = \int_0^1\frac{64}{3}xdx = \frac{32}{3}$$

Am ales această ordine de integrare, pentru simplificarea calculelor, deoarece dacă funcția integrabilă $f:[-a,a]\to\mathbf{R}$ este impară avem $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 28

```
»  syms x y z
» f=x^2*y^2*z+2*z^2*x;
»  int(int(int(f,z,-2,2),y,-3,-1),x,0,1)
ans =
          32/3
```

Dacă $V=\{(x,y,z) \mid (x,y)\in A\subset \mathbf{R}^2,\ \alpha(x,y)\le z\le \beta(x,y)\}$, unde funcțiile $\alpha,\beta : A\to \mathbf{R}$ sunt continue, definim:

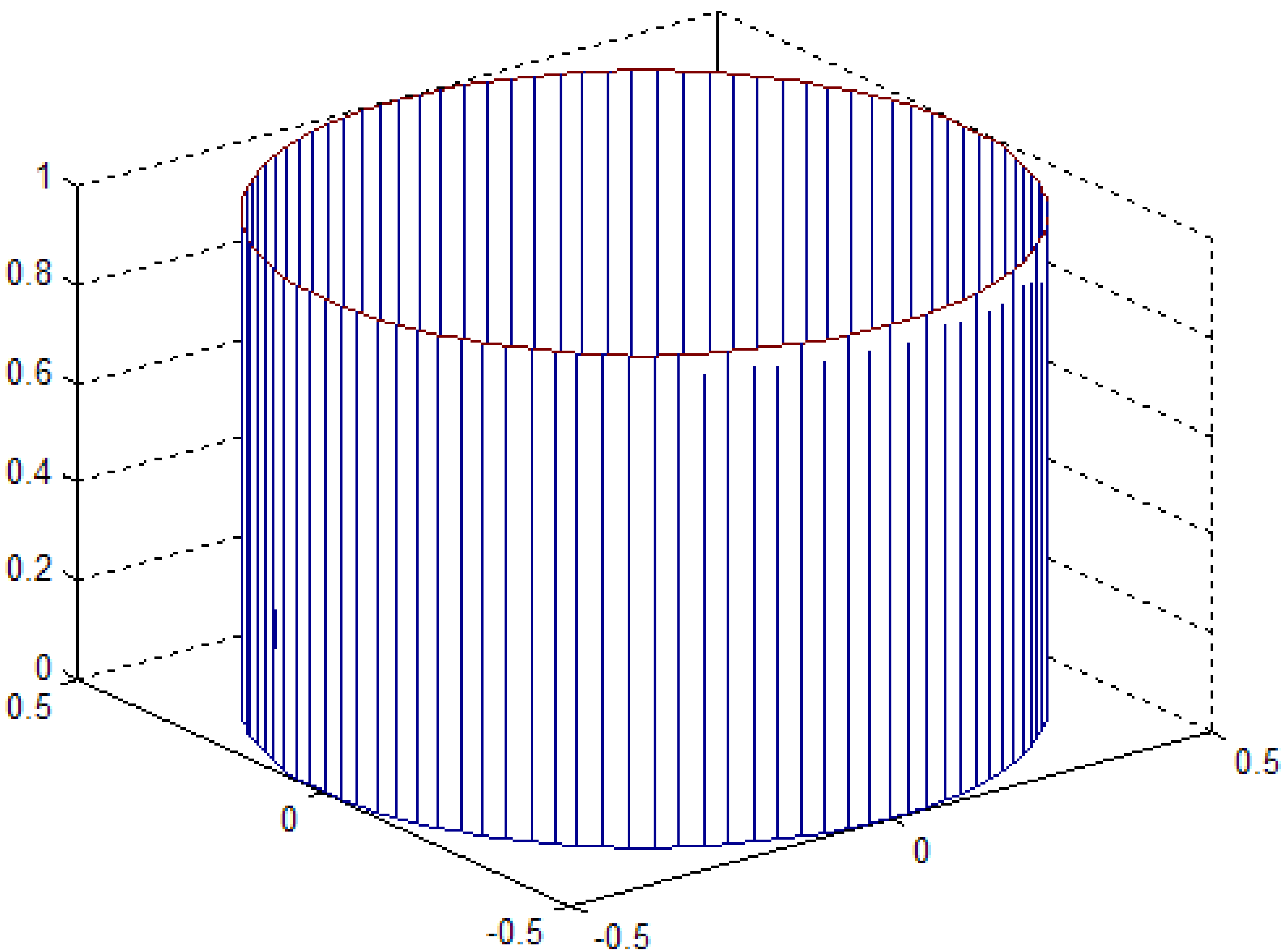
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_A\left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy .$$

Pentru aplicații, reținem că mulțimea A este de fapt proiecția pe planul xOy a mulțimii V .

29. Exemplu

- $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, unde V se află deasupra planului xOy şi este limitat de cilindrul $x^2+y^2=4$ şi planul $z=1$:

    [x,y,z]=cylinder(.5,100);mesh(x,y,z)


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5

Avem $0 \le z \le 1$ (observați că z este cuprins între planul xOy şi planul $z=1$),

în timp ce proiecția acestui corp în planul xOy este discul $x^2+y^2 \le 4$:

$$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\left(\int_0^1 (x+y+z)\,dz\right)dxdy =$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x+y+\frac{1}{2})\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(r\cos\varphi + r\sin\varphi + \frac{1}{2})\cdot r\,d\varphi\right)dr = \pi\int_0^1 r\,dr = \frac{\pi}{2}$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 29

Observăm că z variază între planul xOy ($z = 0$) şi planul $z = 1$.

```
» Iz=int(f,z,0,1)
Iz =
         x + y + 1/2
```

Calculul integralei triple se reduce la calculul unei integrale duble:

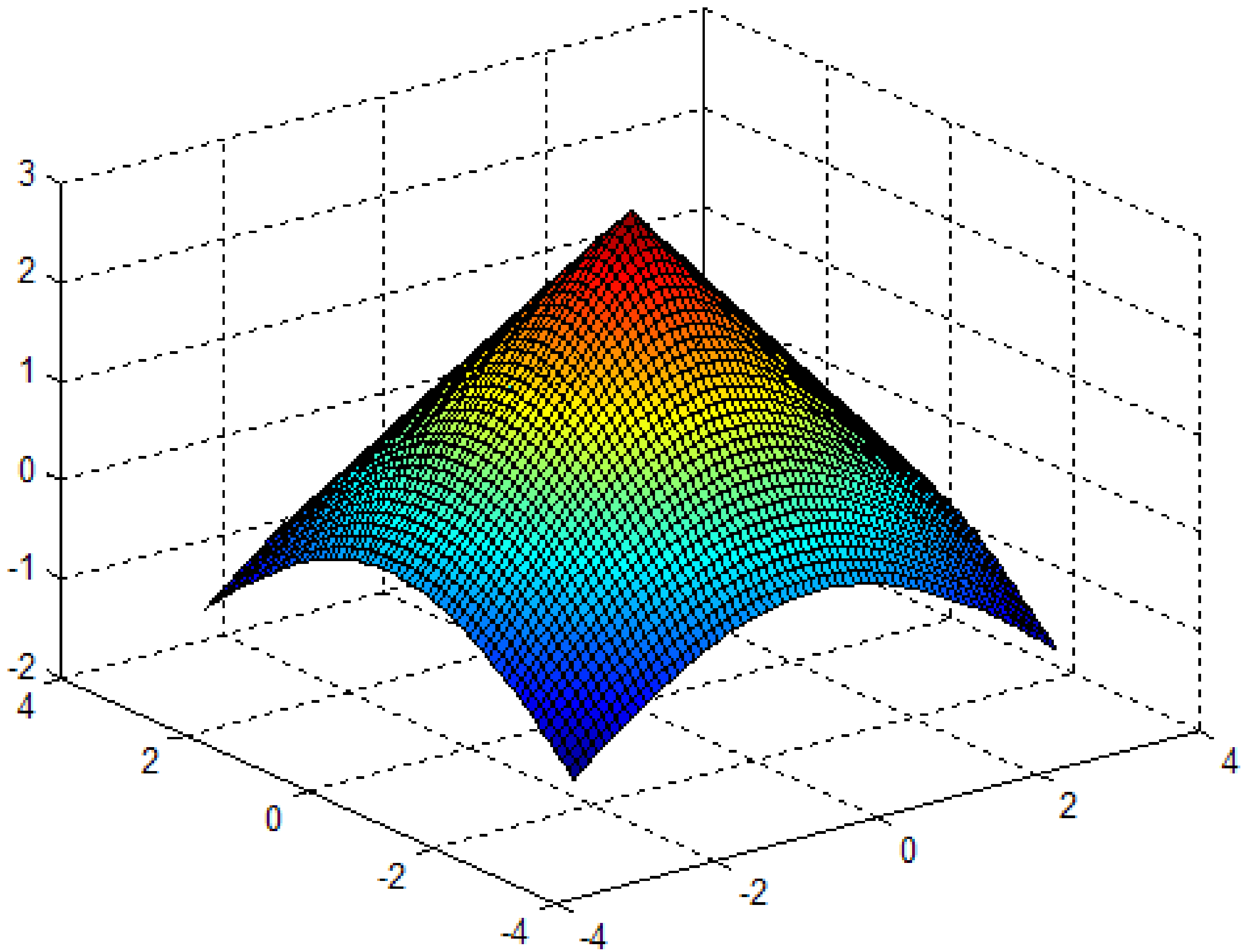
```
» syms x y  r phi
»polardom=simplify(subs(x^2+y^2-1,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polardom =
         r^2 - 1

»limr=solve(polardom,r)
limr =
         -1
          1

» polarIz=subs (Iz,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]);
» I=int(int(polarIz*r,r,0,1),phi,0,2*pi)
I =
         pi/2
```

30. Exemplu

- $\iiint_V (z+2)\,dxdydz$, unde V se află deasupra planului xOy şi este limitată de

conul $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

```
[x,y]=meshgrid(-3:.1:3,-3:.1:3);z=3-sqrt(x.^2+y.^2);surf(x,y,z)
```


3
2
1
0
-1
-2
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

În acest caz z variază între planul xOy şi suprafaţa conului, adică:

$$0 \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

mulţimea A fiind discul $x^2 + y^2 \le 3$

$$\iiint\limits_V (z+2)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 3} \left(\int\limits_0^{3-\sqrt{x^2+y^2}} (z+2)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le 3} \left(\frac{1}{2} (3 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 - 2(3 - \sqrt{x^2 + y^2}) \right) dx\,dy \,.$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 30

Observăm că z variază Între planul xOy ($z = 0$) şi conul $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$

```
» syms x y z r phi
»f=z+2; Iz=int(f,z,0,3-sqrt(x^2+y^2))
Iz =
         (((x^2 + y^2)^(1/2) - 3)*((x^2 + y^2)^(1/2) - 7))/2
```

Calculul integralei triple se reduce la calculul unei integrale duble:

```
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-9,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
» limr=solve(polardom,r)
limr =
         -3
         3

» polarIz=subs (Iz,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]);
» I=int(int(polarIz*r,r,0,3),phi,0,2*pi)
I =
         (99*pi)/4
```

Interpretare geometrica a integralei triple

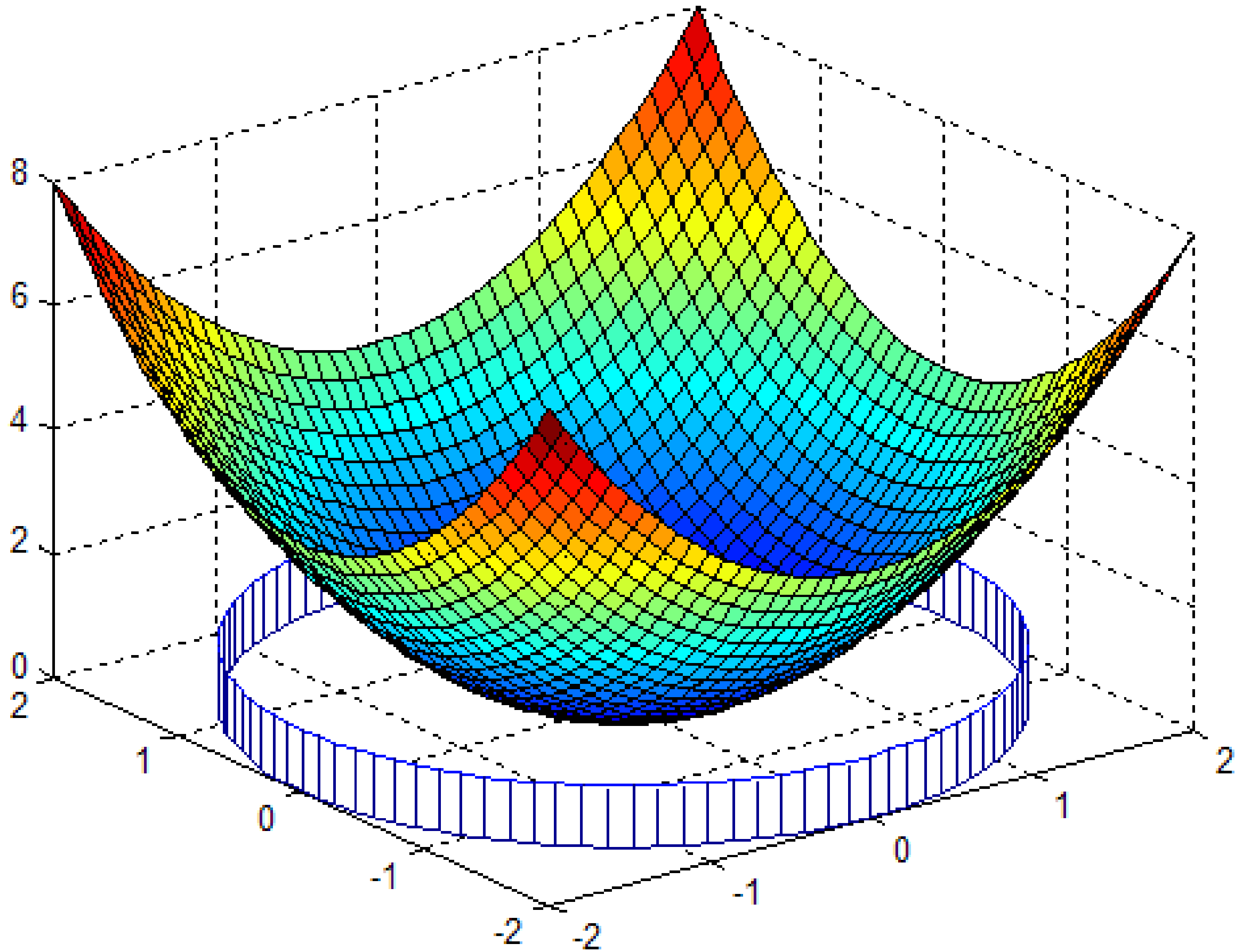
Un rezultat important afirmă că volumul mulțimii $V \subset \mathbf{R}^3$ se calculează cu integrala triplă şi anume

$$vol(V) = \iiint_V dx dy dz \, .$$

31. Exemplu

- *Să calculăm volumul mulțimii* $V \subset \mathbf{R}^3$, *situată deasupra planului* xOy *şi limitată de paraboloidul* $z = x^2 + y^2$ *şi de cilindrului* $x^2 + y^2 = 4$.

```
[x,y,z]=cylinder(2,100);mesh(x,y,z);hold on
[x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=x.^2+y.^2;surf(x,y,z);hold off
```

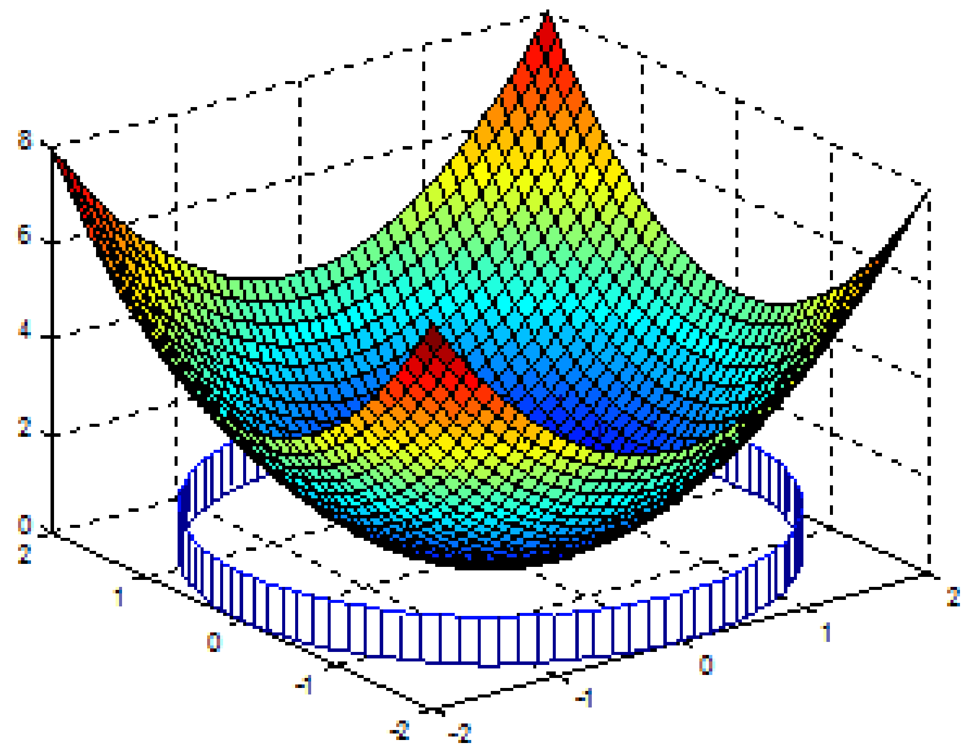

8
6
4
2
0
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2

Avem $0 \le z \le x^2 + y^2$ şi A este definită de inegalitatea $x^2 + y^2 \le 4$

$$vol(V) = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} dz \right) dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \left(x^2 + y^2 \right) dxdy = 2\pi \int\limits_0^2 r^3 dr = 8\pi$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 31

```
» syms x y z r phi
[x,y,z]=cylinder(2,100);mesh(x,y,z);hold on
[x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=x.^2+y.^2;surf(x,y,z);hold off
```




```
» f=1;Iz=int(f,z,0,x^2+y^2);
```

Calculul integralei triple se reduce la calculul unei integrale duble:

```
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-4,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]));
»limr=solve(polardom,r)
limr =
          -2
           2

»polarIz=subs (Iz,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]);
» I=int(int(polarIz*r,r,0,2),phi,0,2*pi)
I =
         8*pi
```

O aplicație $F:U \to \mathbf{R}^3$, unde $U \subset \mathbf{R}^3$ este o mulțime deschisă, dată de $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$, injectivă, de clasă C^1 pe U, cu proprietatea că $F(U)$ este deschisă şi F^{-1} este de clasă C^1 pe $F(U)$, este o *schimbare de coordonate* în U.

Schimbarea de variabile uzuală pentru integrala triplă este trecerea la coordonate sferice caz în care:

$$\iint\limits_{V} g(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{F^{-1}(V)} g(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^{2}\cdot\sin\theta\cdot drd\varphi$$

32. Exemplu

- $\iiint\limits_V (z^2-1)\,dxdydz$, unde V se afla în primul octant şi este limitat de

octantul de sferă $x^2+y^2+z^2=9$

Pentru început să definim mulţimea V cu ajutorul inegalităţilor:

$$x^2+y^2+z^2\le 9,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$$

şi apoi trecând la coordonate sferice

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi\ ,\ \ r\ge 0,\ \theta\in[0,\pi\},\ \varphi\in[0,2\pi] \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

avem: $r^2 \leq 9$ şi $\sin\theta\cos\varphi \geq 0, \sin\theta\sin\varphi \geq 0, \cos\theta \geq 0$,

inegalități ce implică: $r \in [0,3], \theta \in [0,\frac{\pi}{2}], \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$$\iiint_V (z^2-1)\,dxdydz = \iiint_{[0,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times 0,\frac{\pi}{2}]} (r^2\cos^2\theta-1)\cdot r^2\sin\theta\cdot dr d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r^4\cos^2\theta\cdot\sin\theta - r^2\sin\theta)d\theta\right)d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 32

```
» syms x y z r phi th
» f=z^2-1;spherf=simplify (subs(f, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
spherf =
r^2*cos(th)^2 - 1
» spherdom=simplify (subs(x^2+y^2+z^2-9, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi), r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
spherdom =
r^2 - 9
» limr=solve(spherdom)
limr =
          -3
           3
```

r fiind pozitiv vom avea $r \in [0,1]$;

Din ipoteză avem: $\cos\theta \geq 0$ ceea ce implică $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi astfel inegalităţile

$\sin\theta\cos\varphi \geq 0$ şi $\sin\theta\sin\varphi \geq 0$ se reduc la $\cos\varphi \geq 0$ şi $\sin\varphi \geq 0$, ceea ce implică $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Calculăm jacobianul schimbării de variabile:

```
» F=[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)];JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]));
» JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]));JF=simple(JF)
JF =
r^2*sin(th)
```

.

Calculăm integrala În aceste condiții:

```
»int(int(int(spherf*JF,r,0,3),th,0,pi/2),0,pi/2)
ans =
(18*pi)/5
```

33. Exemplu

- $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, V fiind mărginită de sfera $x^2+y^2+z^2=z$.

Prin trecere la coordonate sferice, inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \le z$ care defineşte mulţimea pe care integrăm, devine $r^2 \le r\cos\theta$ şi astfel $r\in[0,\cos\theta]$;

este necesar ca să avem $\cos\theta \ge 0$, ceea ce înseamnă că $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Asupra unghiului φ nu se impune vreo restricţie şi astfel $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]}\left(\int_0^{\cos\theta} r\cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos^4\theta\cdot\sin\theta\cdot d\varphi\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}.$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 33

```
» syms x y z r th phi
»f=sqrt(x^2+y^2+z^2);
spherf=simplify (subs(f, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
spherf =
          (r^2)^(1/2)

» spherdom=simplify (subs(x^2+y^2+z^2-z, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi), r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
spherdom =
r*(r - cos(th))
» limr=solve(spherdom,r)
limr =
                0
           cos(th)
```

r fiind pozitiv vom avea $r \in [0, \cos\theta]$;Astfel avem: $\cos\theta \geq 0$ ceea ce implică $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

şi din inegalităţile $\sin\theta\cos\varphi \geq 0$ şi $\sin\theta\sin\varphi \geq 0$ avem $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

```
» F=[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)];JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]));
» JF=simple(JF);

» int(int(int(spherf*JF,r,0,cos(th)),th,0,pi/2),0,2*pi)
ans =
```

Coordonate sferice generalizate

In cazul în care mulțimea V este limitată de un elipsoid, sau o de o porțiune din suprafata elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, vom face shimbarea în coordonate sferice generalizate:

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi\ ,\ r \geq 0, \theta \in [0,\pi\}, \varphi \in [0,2\pi] \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

caz în care $\left|\det J_F\right| = abcr^2\sin\theta$.

34.Exemplu

- Să calculăm $\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}}}dxdydz$, dacă V se afla în primul octant şi

este limitat de planele de coordonate şi de elipsoidul $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$

Inegalitățile ce definesc mulțimea V sunt:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}\le 1, \quad x\ge 0,\, y\ge 0,\, z\ge 0$$

şi prin trecere la coordonate sferice generalizate devin:

$$r^2 \leq 1 \quad , \; 5r\sin\theta\cos\varphi \geq 0,\; 4r\sin\theta\sin\varphi \geq 0,\; 3r\cos\theta \geq 0$$

şi astfel avem $r \in [0,1],\; \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}],\; \theta \in [0,\frac{\pi}{2}].$

$$\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}}}dxdydz = 60 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{1+r^2}}\, d\theta \right) d\varphi \right) dr =$$

$$= 30\pi \cdot \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\, dr = 15\pi \cdot (\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}))$$

Rezolvarea in Matlab a exemplului nr 34

```
» syms x y z r th phi
» f=1/sqrt(x^2/25+y^2/16+z^2/9);
» sphergf=simplify (subs(f, [x,y,z],[5*r*sin(th)*cos(phi),4*r*sin(th)*sin(phi),3*r*cos(th)]));
» sphergdom=simplify (subs(x^2/25+y^2/16+z^2/9-1, [x,y,z],[5*r*sin(th)*cos(phi),
4*r*sin(th)*sin(phi),3*r*cos(th)]));
» limr=solve(spherdom)
limr =
          -1
           1
```

r fiind pozitiv vom avea $r \in [0,1]$; avem: $3\cos\theta \geq 0$ ceea ce implică $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ şi astfel

inegalităţile $5\sin\theta\cos\varphi \geq 0$ şi $4in\theta\sin\varphi \geq 0$ implică $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

```
» F=[5*r*sin(th)*cos(phi),4*r*sin(th)*sin(phi),3*r*cos(th)];JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]));
»JF=simple(JF)
JF =
          60*r^2*sin(th)

» int(int(int(spherf*JF,r,0,1),th,0,pi/2),phi,0,pi/2)
ans =
          (-15)*pi*(log(2^(1/2) + 1) - 2^(1/2))
```

De retinut

- Calculul integralei triple ca succesiune de integrale
- Schimbarea de variabile în integrala triplă
- Aplicaţie a integralei triple