Noţiuni introductive- laborator 2013-2014

Matlab este un pachet de programe performante, care rezolvă numeric şi probleme ale calculului ştiinţific. Probleme complicate pot fi rezolvate rapid, permiţându-ne astfel să folosim timpul gândind şi experimentând. Algoritmii folosiţi sunt de foarte bună calitate, aşa că putem avea încredere deplină în rezultatele obţinute. În plus resursele de grafică sunt excelente.

Cu siguranţă Matlab ne va fi de un real folos pentru a înţelege si a folosi rezultatele calculului ştiinţific. Există un singur mod de a învăţa cum poate fi folosit şi anume lucrând cât mai multe şi mai variate exemple.

Aritmetică în Matlab

În Matlab operaţiile aritmetice de bază (+ , - , * , /, ^) sunt folosite împreună cu parantezele ( ). Ordinea operaţiilor este cea cunoscută din aritmetica elementară.

```
» 6*7-4/9+2^5
```

Importanţa parantezelor este reamintită prin următorul exemplu:

```
» -3^4+2/5*7
» (-3)^4+2/5*7
» (-3)^4+2/(5*7)
```

Să urmărim următorul calcul:

```
» 2-7/3
ans =
        -0.3333
» ans^2
ans =
         0.1111
```

Rezultatul în urma calculului primei expresii a fost etichetat de Matlab cu ans (answer). Putem atribui nume pentru a stoca numerele:

```
» x=2-7/3
» y=x^2
```

şi astfel valorile lui x şi y pot fi folosite în calcule ulterioare.

În cazul în care nu dorim afişarea rezultatelor intermediare, la sfârşitul expresiei sau atribuirii, scriem punct şi virgulă (semi-colon):

```
» x=2-7/3;  y=x^2; z=y^2+2
```

Prezentăm câteva funcţii elementare din Matlab:

- abs = valoarea absolută — » abs(3-5*2^3)
- sqrt = radical — » sqrt(3)

  de reţinut: pentru a calcula $\sqrt[n]{a}, a > 0$ veţi scrie $a^{\frac{1}{n}}$
- sin = funcţia sin — » sin(pi/6)
- cos = funcţia cos — » cos(pi/10)
- tan = funcţia tg — » tan(pi/12)
- asin = funcţia arcsin — »asin(-sqrt(3)/2)
- acos = funcţia arccos — » acos(-1)

- atan = funcţia arctg » atan(-1)
- exp = funcţia exponeţială » exp(3)

de reţinut: în Matlab pentru a scrie numărul irational e veţi scrie exp(1)

- log = funcţia logaritm natural » log(1)
- log10 = funcţia logaritm în baza 10 » log10(1)

de reţinut: pentru a calcula $\log_a b,\ a,b>0,\ a\neq 1$, veti folosi formula: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

Matrice în Matlab

Pentru a scrie o matrice în Matlab folosim următoarea sintaxă:

- fiecare linie a matricei poate fi considerată a fi o listă de numere, separate între ele de virgulă sau spaţiu liber;
- fiecare linie a matricei este despărţită de următoarea prin punct şi virgulă;
- elementele matricei se scriu între paranteze drepte.

```
» M=[1 -2 3 -4;2 1 5 2;-2 3 1 0; 3 1 2 -5]
» M1=[2 1 -1 3; 1 3 2 -5]
```

Pentru a obţine *matricea transpusă* a matricei M scriem M':

```
» M'
» M1'
```

Operaţiile cu matrice sunt cele cunoscute; eventualele greşeli, legate de dimensiunea matricelor sunt semnalate de soft:

```
» M2=[1 0 -2 1;3 1 2 -3]; M1+M2
» (-3)*M2
» M+M1
   ??? Error using ==> plus
   Matrix dimensions must agree.
```

Calculul *matricei inverse* se face cu funcţia inv(.)

```
» inv(M)
```

Soft-ul atenţionează următoarele greşeli:

- se cere să se calculeze inversa unei matrice care nu este pătratică;
- se cere calcularea inversei unei matrici singulare

```
» inv(M1)
   ??? Error using ==> inv
   Matrix must be square.
```

```
» M4=[1 -2 3 ;1 0 1 ;-2  4 -6]; inv(M4)
   Warning: Matrix is singular to working precision.
   (Type "warning off MATLAB:singularMatrix" to suppress this warning.)
```

Pentru a calcula determinantul matricei, folosim funcţia det( )

- Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; calculaţi determinantul matricei şi inversa ei.

```
» A=[1 3 3 3 3 3 3;3 1 3 3 3 3 3;3 3 1 3 3 3 3;3 3 3 1 3 3 3 ; 3 3 3 3 1 3 3 ;  3 3 3 3 3 1 3; 3 3 3 3 3 3 1];
» det(A)
» inv(A)
```

Vectori în Matlab

Vectorii *linie* sunt matrici cu o linie şi *n* coloane. Ei pot fi consideraţi a fi liste de numere, separate între ele de virgulă sau spaţiu liber. Numărul de input-uri reprezintă lungimea (*length*) vectorului; deseori folosim pentru input-urile vectorului, termenul de componentă. Astfel, un element din $\mathbf{R}^n$ este un vector linie de lungime *n* în loc de vector de dimensiune ***n.***

```
»x=[1 -2  7 15]
```

Prin instrucţiunea a:b:c unde a < c, b > 0 obţinem un vector de forma:

a a+b a+2b a+3b …a+mb

unde a+mb este cel mai mare număr de acest tip, mai mic sau egal cu c.

```
»y=0:2:8
» -2:5:2
»1:2:-1
```

În ultimul exemplu rezultatul este mulţimea vidă deoarece dacă a > c este necesar ca numărul b să fie negativ, cum se întâmplă în exemplul următor:

```
»1:-5:-14
```

Operaţiile cu vectori sunt cele cunoscute din $\mathbf{R}^n$: adunarea şi înmulţirea cu scalari.

```
»x=[1 -2  7 15]; y=0:2:6; x+y
» 0.2*x
```

Vectorii *coloană* sunt matrici cu *n* linii şi o coloană. In Matlab elementele sunt separate de punct şi virgulă.

```
» u=[-2;3;1;4]
```

Adunarea a doi vectori de aceeaşi dimensiune şi respectiv înmulţirea cu scalar se definesc ca în cazul vectorilor linie.

```
» u=[3;2;1;-10];u+v
» (-3)*u
```

Putem transforma un vector linie într-un vector coloană prin procedeul numit *transpunere*, notat „ **'** ”:

```
» x=[2 -1 4 19]; x'
```

Rezolvarea unui sistem de n ecuaţii cu n necunoscute, compatibil determinat:

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$..............................$$
$$a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

se reduce la rezolvarea ecuaţiei matriceale $A \cdot x = b$, unde matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ este nesingulară, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Ecuaţia are o soluţie unică $x = A^{-1} \cdot b$.

- Rezolvaţi cu Matlab sistemul: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 + 3x_7 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + x_7 = -10 \end{cases}$

```
» A=[1 3 3 3 3 3 3;3 1 3 3 3 3 3;3 3 1 3 3 3 3;3 3 3 1 3 3 3 ; 3 3 3 3 1 3 3 ;  3 3 3 3 3 1 3; 3 3 3 3 3 3 1];
b=[1 3 5 2 -4 2 -10]; x=inv(A)*
```

Pentru a obţine soluţia sistemului putem scrie şi: x=A\b:

```
» x=A\b'
```

Am definit noţiunea de *produs scalar* pe **R^n**.

In general produsul scalar este produsul dintre un vector linie şi un vector coloană, amândoi având aceeaşi dimensiune: dacă $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, atunci se defineşte: $\langle x, y \rangle = x * y = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$

```
»x=[3 2 1 -7]; u=[4;-1;2;13]; x*u
```

Dacă avem:

```
» x=[3 2 1 -7]; y=[4 2 -2 12];x*y
   ??? Error using ==> mtimes
   Inner matrix dimensions must agree.
```

Eroarea se datorează faptului că vectorii al căror produs scalar vrem să-l calculăm sunt vectori linie; pentru a evita această situaţie folosim vectorul y' (vectorul transpus).

```
» x=[3 2 1 -7]; y=[4 2 -2 12];x*y'
```

Calculăm produsul scalar a doi vectori linie sau doi vectori coloană. Comentariile sunt precedate de % , având doar rolul de a da explicaţii cititorului.

```
»x=[3 2 1];y=[2 4 5];x*y' % x si y sunt vectori linie
»x=[3 2 1];x*x' % x este vector linie
» u=[2;0;-3];v=[-1;2;3];u'*v  % u si v sunt vectori coloana
```

Cele trei norme definite pe **R^n**, $\|x\|$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ unde $x = (x_1, x_2, .. x_n)$,

se calculează în Matlab folosind instrucţiunile:

norm(x) = $\|x\|$;   norm(x,1) = $\|x\|_1$; norm(x,inf) = $\|x\|_\infty$

```
» x=[-1 3 14 -11 2]; norm(x)
» norm(x,1)
» norm(x,inf)
```

Pentru a calcula distanţele definite anterior, dintre doi vectori din $\mathbf{R^n}$, folosim formula $d(x,y)=\|x-y\|$:

```
» x=[-1 3 14 -11 2];y=[2 -5 21 1 -10];norm(x-y)
» norm(x-y,1)
» norm(x-y,inf)
```

- Unghiul θ dintre doi vectori linie x şi y din $\mathbf{R^3}$ este definit de formula: $\cos\theta=\dfrac{<x,y^t>}{\|x\|\cdot\|y\|}$. Calculaţi, utilizând Matlab, cosinusul unghiului dintre $x=(1,2,-3)$ şi $y=(-1,2,-4)$ şi determinaţi măsura unghiului în grade.

```
» x=[1 2 -3];y=[-1 2 -4]; a=(x*y')/(norm(x)*norm(y))
» t=acos(a)
» th=t*180/pi
```

Vă propunem să justificaţi formula Schwarz-Cauchy folosind formula de mai sus.

- Folosind Matlab să reluăm problema de clustering (simplificată) cu pacienţii de la gastroenterologie: stabiliţi dacă vectorii

  $P_1=(162,255,74,258)$ şi $P_2=(422,488,183,292)$

  aparţin bilei deschise de centru $C_1(356,\ 350,\ 134,\ 228)$ sau bilei deschise de centru $C_2(184,\ 203,\ 95,\ 189)$?

```
»x=[165 255 74 258]; y=[422 488 183 292];a=[356 350 134 228]; b=[184 203 95 189];
»norm(x-a)
»norm(x-b)
»norm(y-a)
»norm(y-b)
```

În continuare introducem un nou tip de produs a doi vectori de aceeaşi dimensiune şi acelaşi tip, cunoscut sub numele de *produsul Hadamard*. Aproape de loc utilizat în matematică, aşa numitul *dot product* (**.***) este o caracteristică esenţială a Matlab-ului.

Fiind daţi doi vectori $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ şi $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ definim:

$$x.*y=(x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_ny_n).$$

După cum se observă rezultatul este un vector n-dimensional, ale cărui componente sunt componentele celor doi vectori înmulţite punctual (element cu element).

```
» x=[2 -6 1 3];y=[-1 3 2 5];u=[4;19;2;-2];v=[4;10;-4;23];
» x.*u'
» x.*v'
» u.*v
» x'.*u
» y'.*v
» x.^2
» u.^3
```

- Scrieţi (sub forma de tabel) valorile funcţiei $f(x)=x\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ în punctele 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.

```
»x=0.2:0.2:1;y=x.*log(x+sqrt(x.^2+1));[x',y']
```

Împărţirea a doi vectori nu există în matematică, dar în Matlab operaţia $(./)$ este definită ca fiind împărţirea element la element, adică pentru $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ şi $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ avem:

$$x./y=(x_1/y_1,x_2/y_2,\ldots,x_n/y_n)$$

```
» x=[2 -6 1 3];y=[-1 3 2 5];u=[4;19;2;-2];v=[4;10;-4;23];
» x./y
» v./u
» u./x'
```

- Să scriem (sub forma de tabel) valorile funcţiei $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}$ în punctele 0.1; 0.2; 0.3;0.4; 0.5.

```
» x=[0.1:.1:.5]';y=(asin(x))./x;[x,y]
```

Introducere în programarea în Matlab

Instrucţiunea for

- Calculaţi următoarea sumă: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{20^2}$.

```
» s=0;
» for i=1:20
s=s+1/i^2;
end
» s
s =
        1.5962
```

Dacă renunţăm la punct şi virgulă (semi colon) vom avea afişate toate valorile intermediare ale sumei:

```
» s=0;
» for i=1:20
s=s+1/i^2
end
```

Un mod mai simplu, specific pentru Matlab, de a calcula această sumă este utilizarea funcţiei sum:

```
» sum(1./(1:20).^2)
```

Instrucţiunea while

- Determinaţi cel mai mic număr natural pentru care $\frac{2^n}{n!}<\frac{1}{10}$, problema fiind posibilă deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

```
» n=1;
» x=2;
» while x>=1/10
x=x*2/n;
n=n+1;
end
» n-1
```

Probleme propuse

1. Utilizând Matlab
   - calculaţi: $7-\frac{\sqrt{3}}{2e^2}$; $\frac{35\sin\frac{\pi}{12}}{1+\sqrt[3]{2}}$; $5\ln\left(1+\sqrt{e}\right)$; $\text{arctg}\frac{2}{1+\lg 7}$.
   - stabiliţi dacă următoarele matrice sunt nesingulare şi în caz afirmativ calculaţi matricele inverse:

     $$\begin{pmatrix}3&5&7&2\\1&2&3&4\\0&1&9&10\\0&1&2&0\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\3&2&3&0&0\\0&4&3&4&0\\0&0&5&4&5\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$$
   - rezolvaţi următoarele sisteme liniare:

$$\begin{array}{l} x-3y+5z-7t=12 \\ 3x-5y+7z-t=0 \\ 5x-7y+z-3t=4 \\ 7x-y+3z-5t=16 \end{array};\quad \begin{array}{l} x+2y+3z=14 \\ y+2z+3t=20 \\ 3x+z+2t=14 \\ 2x+3y+t=12 \end{array};\quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ 3y+4z=18 \\ 5z+6u=39 \\ 7u+8v=68 \\ 9v+10x=55 \end{array}$$

- fiind daţi vectorii $x=(2,3,\sqrt{\pi},-1)$ şi $y=(-5,0,1,e^2)$ calculaţi:

  $x+y,\ x-3y$;
  normele cunoscute ale acestor vectori;
  distanţele cunoscute dintre cei doi vectori;
  produsul scalar al celor doi vetori.

- fiind daţi vectorii $u=\begin{pmatrix}1\\-7\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ şi $v=\begin{pmatrix}0\\-1\\\sqrt[5]{e}\end{pmatrix}$ calculaţi:

  $2u+v,\ u-5v$;
  normele cunoscute ale acestor vectori;
  distanţele cunoscute dintre cei doi vectori;
  produsul scalar al celor doi vetori.

- Scrieţi (sub forma de tabel) valorile funcţiilor $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x^4-x^2+2}$ şi $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ în punctele: -0.5; -0.4; -0.3; -0.2; -0.1; 0.1; 0.1; 0.2; 0.3;0.4; 0.5.

2. Calculaţi următoarea sumă: $\sum_{k=2}^{20}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$;
   - utilizând instrucţiunea for şi afişând rezultatul final;
   - utilizând instrucţiunea for şi afişând rezultatele parţiale sub forma unui vector coloană;
   - folosind functia sum

3. Calculaţi următoarea sumă: $\sum_{k=1}^{40}(-1)^{n+1}\frac{1}{k}$

   utilizând instrucţiunea for şi afişând rezultatul final;
   utilizând instrucţiunea for şi afişând rezultatele parţiale sub forma unui vector coloană;
   folosind functia sum

4. Determinati cel mai mic număr natural n pentru care

   - $\dfrac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}<0.001$
   - $\dfrac{n^2}{5^n}<0.02$

5 În cazul bazei de date cu florile de Iris, prezentată la începutul paragrafului s-a calculat că irişii de acelaşi tip sunt grupaţi într-o bilă deschisă şi anume

- Setosa în bila de centru C_1(2.4, 14.6, 34.3, 50.1),
- Verginica în bila de centru C_2(20, 55.5, 29.7, 65.9)
- Versicolor în bila de centru C_3(13.3, 43.2, 27.7, 59.4)

Decideţi cărui tip îi aparţine un iris cu următoarele attribute:

	lăţimea petalei	lungimea petalei	lăţimea sepalei	lungimea sepalei
I_1	21	56	28	64
I_1	13	42	26	57

……………………………………

Grafice de funcţii în Matlab

Este evident că putem desena graficul unei funcţii doar în cazul $A, B \subset \mathbf{R}$ sau $A \subset \mathbf{R}^2$, $B \subset \mathbf{R}$.

Pentru început vom desena in Matlab graficul unei funcţii $f : A \to B$, unde $A, B \subset \mathbf{R}$.

Dacă $A = [a, b]$, generăm doi vectori:

$x = (a, a+h, a+2h, \ldots, a+(n-1)h, b)$ şi $y = (f(a), f(a+h), f(a+2h), \ldots, f(a+(n-1)h), f(b))$,

scriind:

```
» x=a:h:b
» y=f(x)
```

Perechile ($(a+ih, f(a+ih))$, $0 \le i \le n-1$, vor fi unite prin segmente de dreaptă în urma aplicării funcţiei plot(x,y)

Pentru a obţine un grafic cu o bună acurateţe este necesară folosirea unui pas h cât mai mic. În exemplul următor dacă $h = 1$ obţinem o linie poligonală ce aproximează funcţia, în schimb dacă $h = 0.1$ obţinem graficul cunoscut.

```
» x=0:1:2*pi
» y=cos(x)
» plot(x,y)
» x=0:0.01:2*pi; y=cos(x);plot(x,y)
```

Pentru a nu mai fi afişate valorile vectorilor x respectiv y am scris punct şi virgulă (*semicolon*) după fiecare instrucţiune.

Pe fiecare figură scriem un titlu şi etichetăm axele selectând din Insert (apare la Figure) x-label, y-label, title şi în ferestrele ce s-au deschis înscriind axa Ox, axa Oy, respectiv titlul.

Alegerea valorii pasului h este importantă şi penrtu a argumenta această afirmaţie vom prezenta mai multe variante, desenând toate graficele în acelaşi ecran. În acest scop vom construi nişte "ferestre", în care vom desena graficele, ferestre situate într-o $m \times n$ matrice. Fiecare element al matricei este constituit dintr-o asemenea fereastră, iar numerotarea acestora este de la 1 la $m \cdot n$, începând cu colţul stânga sus. Funcţia folosită este subplot.

```
» subplot(411);x=0:1:2*pi;y=cos(x);plot(x,y)
» subplot(412);x=0:0.5:2*pi;y=cos(x);plot(x,y)
» subplot(413);x=0:0.1:2*pi;y=cos(x);plot(x,y)
» subplot(414);x=0:0.01:2*pi;y=cos(x);plot(x,y)
```

În mod obişnuit, graficul este desenat printr-o linie continuă de culoare albastră; dacă dorim altă culoare, sau alt stil de linie facem precizarea în plot. Prezentăm câteva opţiuni pentru culori şi stiluri de linie:

y	galben	.	punct
m	mov	o	cerc
r	roşu	+	plus
g	verde	-	linie continuă
b	albastru	*	steluţă
w	alb	:	punctat
k	negru	-.	linie punct

Aceste opţiuni se scriu în cadrul funcţiei plot, încadrate de apostrof, fără virgulă între ele.

- Desenaţi graficul funcţiei *cos* pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$, în culoarea roşie, punctat, luând pasul $h = 0.1$.

```
» x=-2*pi:.1:2*pi;y=cos(x);plot(x,y,'r.')
```

Deseori în Matlab scriem .1 în loc de 0.1

- Desenaţi graficul funcţiei $f(x) = tgx$, folosind diferite valori ale lui h şi eventual diferite culori.

  Domeniul de definiţie al funcţiei este $\mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$; funcţia este periodică de perioadă π, aşadar este suficient să desenăm graficul pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

  Dacă vom considera vectorul

```
»x = -pi/2:.1:pi/2;
```

rezultatul va fi catasrofal, deoarece $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx = +\infty$ şi $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} tgx = -\infty$

```
»x=-pi/2:.1:pi/2;y=tan(x);plot(x,y)
```

Astfel vom considera un vector x a cărui primă componentă este -1.5 şi a cărui ultimă componentă este 1.5.

```
» subplot(141);x=-1.5:.6:1.5;y=tan(x);plot(x,y,'r*')
» subplot(142);x=-1.5:.4:1.5;y=tan(x);plot(x,y,'bo')
» subplot(143);x=-1.5:.2:1.5;y=tan(x);plot(x,y,'k.')
» subplot(144);x=-1.5:.05:1.5;y=tan(x);plot(x,y,'m-.')
```

Stabilirea corectă a domeniului de definiţie al funcţiei este foarte importantă. În unele cazri soft-ul ne avertizează asupra greşelilor şi graficul poate prezenta erori.

- Desenaţi graficul funcţiei $f(x) = \ln(16 - x^2)$:

  Domeniul de definiţie este este (-4,4),

```
» x=-4:.1:4;y=log(16-x.^2);plot(x,y)
    Warning: Log of zero.
```

Alegem intervalul $(-3.95.3.95)$:

```
»x=-3.95:.1:3.95;y=log(16-x.^2);plot(x,y)
```

Desenăm pe [-10,10]:

```
»x=-10:.1:10;y=log(16-x.^2);plot(x,y)
    Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored
```

- Desenaţi pe acelaşi ecran, în ferestre diferite, graficul funcţiei $f(x) = \frac{3-2x}{\sqrt{9-x^2}}$ pe [-3,3] şi respecriv pe

  $[-2.95, 2.95]$ pe acelaşi ecran, în ferestre diferite. Comentaţi desenele obţinute

```
» subplot(121); x=-3:.1:3; y=(3-2*x)./sqrt(9-x.^2);plot(x,y,'k')
  Warning: Divide by zero.
» subplot(122); x=-2.95:.1:2.95; y=(3-2*x)./sqrt(9-x.^2);plot(x,y,'b')
```

În cazul funcţiei $f : A \to B$, unde $A, B \subset \mathbf{R}$, A fiind o submulţime nemărginită a axei reale, problema constă în alegerea mulţimii la care restricţionăm funcţia, pentru a obţine cel mai bun desen al grficului..

- Desenaţi graficul funcţiei $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

  Vom desena în acelaşi ecran mai multe variante şi anume graficele restricţiilor la [-1000,1000], [-100,100], [-20,20], [-10,10] şi vom alege desenul care ne convine:

```
»subplot(411);x=-1000:1:1000;y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+1);plot(x,y)
» subplot(412);x=-100:1:100;y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+1);plot(x,y)
»subplot(413);x=-20:.1:20;y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+1);plot(x,y)
»subplot(414);x=-10:.1:10;y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+1);plot(x,y)
```

- Desenaţi graficul funcţiei $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|}$

  În Matlab funcţia modul este notată abs

```
» x=-20:.1:20;y=sqrt(abs(x.^2-4));plot(x,y)
```

Pentru a desena graficul unei funţii al cărei domeniu de definiţie este o reuniune de intervale disjuncte este nevoie de a studia problema desenării graficelor a două funcţii în acelaşi sistem de coordonate. (*multiplot*) . Considerând cazul a două funcţii $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ vom scrie:

```
» x=a:h:b;y1=f(x); y2=g(x);plot(x,y1,x,y2)
```

sau

```
» x=a:h:b; plot(x,f(x),x,g(x))
```

- Desenaţi graficele funcţiilor $f(x) = \sin x + \cos x$ şi $g(x) = \sin x - \cos x$ pe $[0,2\pi]$.

```
»  x=0:.05:2*pi;y=sin(x)+cos(x);y1=sin(x)-cos(x);plot(x,y,'r',x,y1,'k.')
```

Pentru a desena graficul unei funcţii definite pe $[a,b]\cup[c,d], \quad b<c$ vom scrie:

```
» x1=a:h:b;y1=f(x1);x2=c:h:d,y2=f(x2);plot(x1,y1,x2,y2)
```
sau
```
» x1=a:h:b; x2=c:h:d, plot(x1, f(x1),x2, f(x2))
```

- Desenaţi graficul funcţiei: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$;

  Domeniul de definiţie al lui *f* este $\mathbf{R}\backslash\{2\}$; funcţia are asimptotă verticală în $x=2$.
  În primul caz nu ţinem seama de această asimptotă verticală, considerând un vector a cărui primă componentă este –10, ultimă componentă 10 şi pasul 0.1; în al doilea caz folosim metoda propusă anterior, considerând restricţiile la $(-10,2)$ respectiv la $(2,10)$:

```
» subplot(121);x=-20:.1:20;plot(x,(2*x+1)./(x-2))
   Warning: Divide by zero
» subplot(122);x1=-20:.1:1.95;x2=2.05:.1:20; plot(x1,(2*x1+1)./(x12),'k',x2,(2*x2+1)./(x2-2),'k')
```

Nu e nevoie să specificăm funcţia separat, formula ce o defineşte poate fi scrisă şi în plot. Dacă nu se specifică aceeaşi culoare pentru cele două ramuri, graficul va fi desenat în culori diferite

- Desenaţi graficul funcţiei $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

  Domeniul de definiţie este $(-\infty,-2)\bigcup(3,+\infty)$
  Dacă ne propunem să folosim intervalul (-20,20), fără a ţine seama care este domeniul de definiţie, softul ne avertizează că greşim.

```
» x=-20:.1:20;plot(x,log(sqrt((x+2)./(x-3))))
   Warning: Divide by zero.
   Warning: Log of zero.
   Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
```
Utilizăm metoda prezentată anterior:
```
»x1=-20:.1:-2.05;y1=log(sqrt((x1+2)./(x1-3)));
»x2=3.05:.1:20;y2=log(sqrt((x2+2)./(x2-3)));
»plot(x1,y1,'k',x2,y2,'k')
```

Matlab include aplicaţii specifice, numite Toolbox-uri, utilizate pentru a rezolva probleme variate. Symbolic math este un asemenea Toolbox, care cuprinde calculul simbolic şi accesul la nucleul Maple. Symbolic math este folosit pentru calculul diferenţial şi integral.

În Matlab există două noţiuni distincte legate de funcţii:

- *expresia simbolică*, de exemplu $\dfrac{1}{x^2+1}$ sau $\log(x)$
- *funcţia -algoritmul* (*regula*) care produce un *output* numeric pentru un *input* numeric sau o mulţime de input-uri numerice.

Desenul graficului unei expresii simbolice se execută uşor folosind ezplot; dezavantajele constau în faptul că nu se mai poate modifica stilul sau culoarea desenului. Avantajul rezidă din faptul ca nu mai lucrăm cu vectori şi matrice şi astfel sintaxa este mult mai simplă.

- Desenaţi graficele funcţiilor prezentate anterior, utilizând Symbolic math

  1. $f(x)=\cos x,\ x\in[0,2\pi]$

```
»syms x
» ezplot(cos(x),[0,2*pi])
```

  2. $f(x)=tgx,\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

```
» ezplot(tan(x), [-1.55,1.55])
```

3. $f(x) = \ln(16 - x^2)$

```
» ezplot(log(16- x^2),[3.95,3.95])
```

4. $f(x) = \dfrac{3-2x}{\sqrt{9-x^2}}$

```
»ezplot((3-2*x)/sqrt(9-x^2),[-2.95,2.95])
```

5. $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

```
»ezplot((2*x-1)/sqrt(x^2+1),[-20,20])
```

6. $f(x) = \sqrt{|x^2-4|}$

```
»ezplot(sqrt(abs(x^2-4)),[-20,20])
```

Pentru a desena graficele a două funcţii în acelaşi sistem de axe vom scrie:

```
»ezplot(f(x),[a,b]);hold on
»ezplot(g(x),[a,b]);hold off
```

Graficele celor două funcţii vor fi de culoare albastră şi astfel nu putem distinge funcţiile pe baza coloritului graficelor lor.

- Desenaţi în acelaşi sistem de axe graficele funcţiilor $f(x) = \sin x + \cos x$ şi $g(x) = \sin x - \cos x$;

```
» ezplot(sin(x)+cos(x),[0,2*pi]);hold on
» ezplot(sin(x)-cos(x),[0,2*pi]);hold off
```

- Desenaţi graficul funcţiei $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

  În Symbolic Math nu putem folosi „multiplot” pe domenii de definiţie diferite, dar problema este rezolvată corect chiar dacă cerem ca $x \in [-20, 20]$

```
» ezplot(log(sqrt((x+2)/(x-3))),[-20,20])
```

Vom desena în Matlab (pachetul de bază) graficele funcţiilor reale de două variabile reale, caz în care

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D \subset \mathbf{R^2}\} \subset \mathbf{R^3}$$

În termeni de informatică, putem spune că funcţia f este o regulă care produce dintr-un vector *input* (x, y), un *output* numeric notat $f(x, y)$.

În cazul $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$, scriind

```
» [x,y] = meshgrid(a:h:b,c:h:d)
```

vom crea o matrice ale cărei elemente sunt vârfurile unei reţele de pătrate de latură *h*, din dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$; scriind

```
»z=f(x,y);
```

creăm un vector ale cărui elemente sunt valorile funcţiei f în punctele reţelei.
Funcţia

```
»surf(x,y,z)
```

construieşte graficul funcţiei cu ajutorul informaţiilor anterioare.

- Desenaţi graficul funcţiei $f:[-2,2]\times[-2,2]\to\mathbf{R}$, definită prin: $f(x,y)=x^2-y^2$ (*funcţia şa -Saddle*).

» [x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=x.^2-y.^2;surf(x,y,z)

Graficul obţinut este graficul unei *porţiuni de suprafaţă*.

Desenaţi graficele următoarelor porţiuni de suprafaţă:

- $f:[-2,2]\times[-2,2]\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x,y)=x^2+y^2$ (*paraboloid*)

» [x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=x.^2+y.^2;surf(x,y,z)

- $f:[-2,2]\times[-2,2]\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (*con*)

»[x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=sqrt(x.^2+y.^2);surf(x,y,z)

- $f:[-2,2]\times[-2,2]\to\mathbf{R}$, definită de $f(x,y)=3-\sqrt{x^2+y^2}$ (*con*)

» [x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=3-sqrt(x.^2+y.^2);surf(x,y,z)

În desenul unei porţiuni de suprafaţă, în Matlab,există un cod al culorilor: albastru închis înseamnă cele mai mici valori ale lui $z=f(x,y)$, iar roşu intens reprezintă cele mai mari valori.

În general pentru a desena graficul funcţiei $f(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2$ vom alege restrictia funcţiei la domeniul definit de inegalităţile: $-\alpha\le x-a\le\alpha$, $-\alpha\le y-b\le\alpha$, adică $[-\alpha+a,\alpha+a]\times[-\alpha+b,\alpha+b]$

- Desenaţi graficul funcţiei $f(x,y)=(x+1)^2+(y-2)^2$:

» [x,y]=meshgrid(-3:.1:1,0:.1:4);z=(x+1).^2+(y-2).^2;surf(x,y,z)

- Desenaţi graficele următoarelor funcţii:

$f:[-4,4]\times[-4,4]\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x,y)=ye^{-(x^2+y^2)}$;

$$g:[-3,3]\times[-3,3]\to\mathbf{R},\ g(x,y)=\frac{x^4+2x^3y-6x^2y^2+y^4}{x^4+y^4+1}$$

```
» [x,y]=meshgrid(-4:.1:4,-4:.1:4);f=y.*exp(-x.^2-y.^2);surf(x,y,f)
» [x,y]=meshgrid(-3:.1:3,-3:.1:3);
»g=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2 +y.^4)./(x.^4+y.^4+1);
»surf(x,y,g)
```

Considerând funcţia $f:A\to\mathbf{R}$, $A\subset\mathbf{R}^2$, mulţimea $M_c=f^{-1}(\{c\})=\{(x,y)\mid f(x,y)=c\}$, unde c este o constantă reală se numeşte *curbă de nivel* constant c. Această mulţime este proiecţia în $\mathbf{R}^2$ a secţiunii graficului lui f cu planul $z=c$.

Pentru a desena aceste curbe de nivel folosim funcţiile contour, pentru desenul în $\mathbf{R}^2$ şi contour3 pentru desenul în $\mathbf{R}^3$, funcţii ce se apelează astfel:

```
» [x,y]=meshgrid(a:h:b,c:h:d); f=f(x,y); contour(x,y,f,n)
» [x,y]=meshgrid(a:h:b,c:h:d); f=f(x,y); contour3(x,y,f,n)
```

unde n reprezintă numărul de curbe de nivel ce vor fi desenate.

- Desenaţi curbele de nivel în $\mathbf{R}^2$ respectiv în $\mathbf{R}^3$, ale funcţiei $f:[-4,4]\times[-4,4]\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x,y)=ye^{-(x^2+y^2)}$.

```
» [x,y]=meshgrid(-4:.1:4,-4:.1:4);f=y.*exp(-x.^2-y.^2); contour (x,y,f,15)
» [x,y]=meshgrid(-4:.1:4,-4:.1:4);f=y.*exp(-x.^2-y.^2); contour3 (x,y,f,15)
```

Pentru a desena în acelaşi sistem de axe, atât suprafaţa, cât şi curbele sale de nivel în $\mathbf{R}^2$, folosim funcţia surfc.

- Desenaţi în acelaşi sistem de axe, porţiunea de suprafaţă definită de funcţia $f:[-4,4]\times[-4,4]\to \mathbf{R}$ $f(x,y)=ye^{-(x^2+y^2)}$ cât şi curbele sale de nivel în $\mathbf{R}^2$.
- Fie funcţia $f:[-4,4]\times[-4,4]\to \mathbf{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^4+2x^3y-6x^2y^2+y^4}{x^4+y^4+1}$; desenaţi graficul, curbele de nivel în $\mathbf{R}^2$ respectiv în $\mathbf{R}^3$, porţiunea de suprafaţă şi curbele sale de nivel în $\mathbf{R}^2$, cele patru desene fiind în aceeaşi pagină

```
» subplot(221); [x,y]=meshgrid(-4:.2:4,-4:.2:4);
»f=(x.^4+2.*x.^3.*y6.*x.^2.*y.^2+y.^4)./(x.^4+y.^4+1);surf(x,y,f)
» subplot(222); [x,y]=meshgrid(-4:.2:4,-4:.2:4);
»f=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2+y.^4)./(x.^4+y.^4+1);contour(x,y,f,20)
» subplot(223); [x,y]=meshgrid(-4:.2:4,-4:.2:4);
» f=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2+y.^4)./(x.^4+y.^4+1);contour3(x,y,f,20)
»subplot(224); [x,y]=meshgrid(-4:.2:4,-4:.2:4);
»f=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2+y.^4)./(x.^4+y.^4+1);surfc(x,y,f)
```

Dacă privim aceste funcţii ca expresii simboloce putem folosi în Symbolic Math instrucţiunile ezsurf şi ezcontour pentru a desena graficul funcţiei., respectiv curbele de nivel in R^2

- Fie funcţia $f:[-4,4]\times[-4,4]\to \mathbf{R}$, $f(x,y)=\dfrac{x^4+2x^3y-6x^2y^2+y^4}{x^4+y^4+1}$;

desenaţi graficul şi curbele de nivel corespunzătoare utilizând Symbolic Math.

```
»syms x y
»f=(x^4+2*x^3*y-6*x^2*y^2+y^4)/(x^4+y^4+1);ezsurf(f,[-4,4,-4,4])
» f=(x^4+2*x^3*y-6*x^2*y^2+y^4)/(x^4+y^4+1);ezcontour(f,[-4,4,-4,4])
```

Probleme propuse

1. Desenaţi graficul funcţiei $f(x)=\arcsin x$, folosind diferite valori ale lui pasului h şi eventual diferite culori, în 6 ferestre pe aceeaşi pagină

2. Desenaţi graficele funcţiilor folosind pachetul de bază Matlab şi apoi Symbolic Math:

   - $f_1(x)=\mathrm{arc}tg 2x$;
   - $f_2(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$;
   - $f_3(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$;
   - $f_4(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
   - $f_5(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^3+1}}$

4. Desenaţi în acelaşi sistem de axe graficele funcţiilor:

   - $f_1(x)=e^x$ şi $g_1(x)=\ln x$;
   - $f_2(x)=e^x$ şi $g_2(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$;
   - $f_3(x)=\sin x$ şi $g_3(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$

5. Desenaţi graficul, curbele de nivel în $\mathbf{R}^2$ respectiv în $\mathbf{R}^3$, porţiunea de suprafaţă şi curbele sale de nivel în $\mathbf{R}^2$, cele patru desene fiind în aceeaşi pagină

   - $f_1(x,y)=x^2+y^2-4x+4$;
   - $f_2(x,y)=\sqrt{8-x^2-y^2+2x}$;

- $f_3(x,y) = (x-1)\cdot(y+2)$;
- $f_4(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5}$;
- $f_5(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+x^2\cdot y^2}{(x^2+y^2+1)^2}$.

6. Desenaţi graficul, curbele de nivel în $\mathbf{R}^2$ ale functiilor de la problema 5 utilizând Symbolic Math.