Şiruri şi serii _laborator_2013-2014

Şiruri

Considerând *şir de elemente* în **R**, care este o funcţie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, putem vorbi despre o reprezentare grafică a şirului, $G_f = \{(n, x_n), n \in \mathbf{N}\}$, unde $x_n = f(n)$, vizualizare ce permite o mai bună înţelegere a noţiunii de convergenţă, respectiv divergenţă.

- Să desenăm primii 100 de termeni ai şirului $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi să calculăm utilizând Symbolic Math limita şirului. Să scriem un program pentru a determina limita acestui şir cu o zecimală exactă, respectiv cu două zecimale exacte

```
»n=1:100; plot(n,(1+(1./n)).^n,'k*')
```

Limita unui şir se calculează ca limita unei expresii simbolice într-un punct.

```
»syms n
»limit((1+1/n)^n,n,inf)
ans =
        exp(1)
```

A scrie un program pentru a determina limita acestui şir cu o zecimală exactă, respectiv cu două zecimale exacte înseamnă a găsi rangul termenului începând de la care $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$ unde $\varepsilon = 0.01$, respectiv $\varepsilon = 0.001$. Vom utiliza instrucţiunea while.

Verificăm începând cu $n=1$, dacă $x = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right|$ depăşeşte $\varepsilon = 0.01$; dacă da, mărim valoarea lui n, dacă nu, am găsit rangul termenului căutat:

```
»n=1; x=abs((1+(1./n)).^n-exp(1)); while x>.01 n=n+1; x=abs((1+(1./n)).^n-exp(1));end
» [n]
ans =
      135
```

Să calculăm al 135-lea termen, termen care aproximează cu o zecimală exactă numărul e:

```
» n=135;y=(1+(1./n)).^n
y =
       2.7083
```

Prezentăm programul şi calculul efectiv al termenului căutat, pentru $\varepsilon = 0.001$:

```
»n=1;x=abs((1+(1./n)).^n-exp(1)); while x>.001 n=n+1; x=abs((1+(1./n)).^n-exp(1));end
» n
ans =
        1359
» n=1359;y=(1+(1./n)).^n
y =
        2.7173
```

- Să desenăm primii 50 de termeni ai şirului $x_n = n\cdot(\sqrt[n]{5}-1),\ n\ge 2$ şi să calculăm limita şirului. Să aflăm câţi termeni ai şirului se află în afara intervalului $(\ln 5-0.001, \ln 5+0.001)$?

```
»n=1:50;plot(n,n.*(5.^(1./n)-1),'k*')
»syms n
» limit(n*(5^(1/n)-1),n,inf)
ans =
        log(5)
```

Pentru a calcula câţi termeni ai şirului se află în afara intervalului $(\ln 5-0.001, \ln 5+0.001)$ vom găsi care este rangul începând de la care termenii şirului se află la distanţa mai mică de 0.0001 de limita şirului:

```
» n=1;x=abs(n.*(5.^(1./n)-1)-log(5));
while x>0.0001 n=n+1;x=abs(n.*(5.^(1./n)-1)-log(5));end
» n=
        12952
```

Aşadar 12952 termeni ai şirului sunt în afara intervalului cerut.

- Să calculăm limita şirului definit de $x_n = \left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^n, \frac{n^2+1}{2^n}, n\cdot(\sqrt[n]{2}-1\right)$ şi să determinăm câţi termeni ai şirului se află în afara bilei de centru $\left(\frac{1}{e^2}, 0, \ln(2)\right)$ şi rază 0.001?

```
»syms n
»f=[((n-2)/n)^n, (n^2+1)/2^n, n*(2^(1/n)-1)];
»L=limit(f,n,inf)
 L =
        [ exp(-2),      0,  log(2)]
```

Limita şirului fiind centrul bilei din enunţ aplicăm definiţia limitei unui şir şi astfel vom scrie un program care să calculeze care este rangul termenului începând de la care distanţa euclidiană de la acest termen la limita şirului este mai mică decât 0.001.

```
» n=1;x=norm([((n-2)./n).^n, (n.^2+1)./2.^n, n.*(2.^(1./n)-1)]-[exp(-2),0,log(2)]);
while x>0.001 n=n+1;
x=norm([((n-2)./n).^n, (n.^2+1)./2.^n, n.*(2.^(1./n)-1)]-[exp(-2),0,log(2)]);end
» n
ans =
        363
```

Deci 363 de termeni ai şirului nu aparţin bilei.

Suntem tentaţi în scopul simplificării scrierii programului să utilizam următoarea variantă:

```
» n=1; x=norm(f-L);
??? Undefined function or method 'norm' for input arguments of type 'sym'.
```

Răspunsul computerului este clar: în Symbolic Math nu este definită funcţia normă şi astfel va trebui să apelăm la pachetul de bază Matlab.

- Să reprezentăm grafic primii 100 de termeni ai şirului $x_n = \frac{(1+(-1)^n)}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{n}$. Studiind graficul să intuim natura şirului şi apoi să justificăm matematic afirmaţia.

```
» n=1:100;plot(n,(1+(-1).^n)./2.*cos(pi./n),'k*')
```

Subşirul termenilor impari este constant zero, în timp ce subşirul termenilor pari converge la 1, aşadar avem un şir divergent, deoarece dacă şirul ar fi convergent, orice subşir al său ar converge la aceeaşi limită.

- Să studiem convergenţa şirului $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$ şi să ilustrăm grafic rezultatul obţinut.

Cu criteriul de trecere la limită în inegalităţi din inegalitatea $0 < \left|\frac{1+(-1)^n}{n+1}\right| < \frac{1}{n+1}$ obţinem $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \le 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

```
»n=1:100;plot(n,(1+(-1).^n).*1./(n+1),'k*')
```

Dacă desenăm doar primii 100 de termeni, din desen avem două subşiruri (par şi impar) care nu sunt convergente la aceeaşi limită (ceea ce înseamnă că şirul nu este convergent), ceea ce contrazice rezultatul obţinut matematic.
Să desenăm primii 300 termeni:

```
»n=1:300;plot(n,(1+(-1).^n).*1./(n+1),'k*')
```

Şirurile de funcţii, par a fi o noţiune nou studiată, dar în clasa a XI-a se calculează limite de şiruri de funcţii, fără a fi definită noţiunea. Pentru o mai bună înţelegere a problemei, considerăm că exerciţiile următoare sunt utile:

- Să desenăm primii 35 de termeni ai şirului de funcţii $f_n : (-1,1] \to \mathbf{R}$, unde $f_n(x) = x^n + 1$; apoi să desenăm în acelaşi sistem de axe (multiplot) termenii $f_{10}, f_{25}, f_{50}, f_{101}$ ai şirului precedent, (fiecare funcţie în altă culoare). În final să calculăm funcţia limită.

```
» x=-1:.01:1; for n=1:35 subplot(7,5,n),plot(x,x.^n,'k'); end
```

Începând cu f_7, funcţiile se apropie din ce în ce mai mult de dreapta $y = 1$, chiar dacă aparent, subşirurile par, respectiv impar au comportări diferite.

```
»x=-1:.01:1;plot(x,x.^10+1,'r',x,x.^25+1,'k*',x,x.^50+1,'b',x,x.^101+1,'g')
```

Funcţia limită este $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n + 1 = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$.

- Să desenăm primii 9 de termeni ai şirului de funcţii $f_n : [-2,2] \to \mathbf{R}$, unde $f_n(x) = e^{nx}$; apoi să desenăm în acelaşi sistem de axe (multiplot) termenii f_2, f_3, f_4 ai şirului precedent, (fiecare funcţie în altă culoare). În final vom determina funcţia limită.

```
»x=-5:.5:5; for n=1:9 subplot(3,3,n),plot(x,exp(x.*n),'k'); end
```

Începând cu f_5 se observă cât de repede crește funcția pentru $x>0$; remarcați că $f_3((0,2))\subset(0,4.10^4)$

```
»x=2:.1:2;plot(x,exp(2.*x),'k',x,exp(3.*x),'r*',x,exp(4.*x),'b')
```

Funcția limită este $f:[-5,0]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\in[-5,0)\end{cases}$.

Pentru $x>0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx}=\infty$

- Vom desena primii 9 de termeni ai șirului de funcții $f_n:[-5,5]\to\mathbf{R}$, unde $f_n(x)=\dfrac{x^{2n}-x^2+1}{x^{2n}+x^2+3}$, $n\in\mathbf{N}$, apoi vom desena în același sistem de axe (multiplot) termenii f_2, f_4, f_7 ai șirului precedent. Determinați funcția limită și desenați-o.

```
»x=-5:.5:5;for n=1:9 subplot(3,3,n); plot(x,(1-x.^2-x.^(2.*n))./(3+x.^2+x.^(2.*n)),'k'); end
» x=-5:.1:5;  plot(x,(1-x.^2+x.^(4))./(3+x.^2+x.^(4)),'r',x,(1-x.^2+x.^(8))./(3+x.^2+x.^(8)),'b*',
x,(1-x.^2+x.^(14))./(3+x.^2+x.^(14)),'k--')
```

Funcția limită este $f:[-5,5]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+1}{x^2+3}, & |x|<1\\ \dfrac{1}{5}, & |x|=1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

```
»x=-5:.01:-1;x1=-1:.01:1;x2=1:.01:5;
»plot(x,1,'k*',x1,(1-x1.^2)./(3+x1.^2),'k*',x2,1,'k*',-1,1/5,'k*',1,1/5,'k*')
```

- Să desenăm primii 9 de termeni ai șirului de funcții $f_n:[-3,3]\to\mathbf{R}$ unde $f_n(x)=\dfrac{x^3+xe^{nx}}{2+x^2+3e^{nx}}$, $n\in\mathbf{N}$. Să calculăm funcția limită și să desenăm apoi în același sistem de axe (multiplot) termenii f_1, f_6, f_{14} ai șirului precedent și funcția limită.

Funcția limită este $f:[-3,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{2+x^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{x}{3}, & x>0\end{cases}$

```
»x=-3:.1:3;for n=1:9 subplot(3,3,n);
plot(x,(x.^3+x.*exp(n.*x))./(2+x.^2+3.*exp(n.*x)),'k');
end
» x=-3:.1:0;x1=0:.1:3;plot(x,(x.^3)./(2+x.^2),'k',0,0,'k*',x1,x1./3,'k')
```

Probleme propuse

1. Reprezentaţi grafic primii 50 de termeni ai şirului $x_n = \frac{2n}{n^3+1}$, $n \geq 0$ calculaţi limita şirului cu Symbolic Math şi apoi scrieţi un program pentru a determina limita acestui şir cu o zecimală exactă, respectiv cu două zecimale exacte **.**

2. Reprezentaţi grafic primii 100 de termeni $x_n = \frac{n^2+11}{3^n} \cdot, n \geq 0$, calculaţi limita şirului cu Symbolic Math şi scrieţi un program pentru a determina câţi termeni ai şirului se afla în afara intervalului (-0.002,0.002).

3. Reprezentaţi grafic primii 100 de termeni ai şirului $x_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n, n \geq 1$, calculaţi-i limita şi determinaţi termenul şirului care aproximează numărul limita cu două zecimale exacte.

4. Calculaţi limita şirului $x_n = \left(\frac{2n^2-1}{n^2+7}, \sqrt[n]{n}, \frac{n^4+5}{5^n}\right)$, $n \geq 1$. Câţi termeni ai şirului se află în afara bilei de centru (2,1,0) şi rază 0.001?

5. Calculaţi limita şirului $x_n = \left(\frac{n^2-4}{n^4+7}, \left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2}\right)^n, n \cdot (\sqrt[n]{5}-1)\right)$, $n \geq 1$. Câţi termeni ai şirului se află în afara bilei de centru (l_1, l_2, l_3) (unde (l_1, l_2, l_3) este limita calculată anterior) şi rază 0.001?

6. Desenaţi primii 16 de termeni ai şirului de funcţii $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ unde $f_n(x) = \cos^n x, n \in \mathbf{N}$. Desenaţi în acelaşi sistem de axe (multiplot) termenii f_{13}, f_{26}, f_{32} ai şirului şi funcţia limită.

Serii

- Ştiind că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, să scriem un program pentru a afla rangul n_1 începând de la care

$| s_n - \frac{\pi^2}{6} | = | \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} | < 0.01, \forall n \geq n_1$ şi apoi să determinăm s_{n_1}

```
»n=1;S=1;  while abs(S-((pi).^2)./6)>0.01  n=n+1; S=S+1./n.^2;end
» [n,S]
ans =
100.0      1.6350
```

Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$; pentru calculul lui $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ în Matlab folosim deseori (dacă nu apar factoriale) funcţia sum($a_{(1:n)}$)

- Să calculăm în cazul seriei convergente $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ următorii termeni ai şirului sumelor parţiale: $s_{102}, s_{5000}, s_{10000}$; ştim deja că suma seriei este $-\ln 2 \approx -0.6931$.

```
» sum(log(1-1./(2:10000).^2))
ans =
        -0.6930
```

Stabiliţi convergenţa seriilor din exemplele anterioare. Termenii s_{10000}, s_{10000} vor aproxima suma seriei:

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{0.2^n + n^3}$

```
» sum(1./(0.2.^(1:10000)+(1:10000).^3))
ans =
        1.0348

» sum(1./(0.2.^(1:100000)+(1:100000).^3))
ans =
        1.0348
```

- $\sum_{n\geq 1} \ln(0.3^n + 1)$

```
» sum(log(0.3.^(1:10000)+1))
ans =
        0.3867

» sum(log(0.3.^(1:100000)+1))
ans =
         0.3867
```

- $\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{2}{n^3+1}\right)$

```
» sum (atan(1./((1:10000).^3+1)))
ans =
        0.6497

» sum (atan(1./((1:100000).^3+1)))
ans =
        0.6497.
```

Remarcaţi că această serie converge destul de lent.

- $$\sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$$

```
»sum(((1+1./(1:10000)).^(1:10000).^2)./3.^(1:10000))
ans =
        2.2162
»sum(((1+1./(1:100000)).^(1:100000).^2)./3.^(1:100000))
ans =
        2.2162
```

Să studiem natura seriilor următoare folosind criteriile de convergenţă cunoscute şi în caz de convergenţă aproximaţi suma seriei cu s_{10000}

- $$\sum_{n=1}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^3}$$

$\sin\frac{n\pi}{3}$ nu ia numai valori pozitive şi astfel vom aplica criteriul de comparaţie cu inegalităţi seriei modulelor: deoarece $\frac{|\sin\frac{n\pi}{3}|}{n^3}<\frac{1}{n^3}$, din convergenţa seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ deducem absolut convergenţa seriei.

```
» sum((sin(pi.*(1:10000)./3))./((1:10000).^3))
ans =
         0.9570
```

- $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+(0,5)^n}$$

Aplicând criteriul de comparaţie cu trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+(0,5)^n}}{\frac{1}{n}}=1$, rezultând divergenţa seriei.

- $$\sum_{n\geq 1}\arcsin\frac{1}{n^3}$$

Din criteriul de compatraţie cu trecere la limită avem: $\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}}=1$, rezultând convergenţa seriei.

```
»sum (asin(1./(1:10000).^3))
ans =
  1.7732
```

În cazul în care decidem convergenţa seriei folosind criteriul raportului, putem evalua şi eroarea comisă:

- Să stabilim câţi termeni trebuie însumaţi pentru a obţine suma seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{5^n}$ cu două zecimale exacte:

Aplicăm criteriul raportului: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}<1$ şi deducem convergenţa seriei.

Avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{5n}<\frac{3}{10}$ şi $|R_n|<\frac{|a_n|\cdot\frac{3}{10}}{1-\frac{3}{10}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{n}{5^n}<0.001$; vom scrie un program pentru a găsi cel mai mare număr natural pentru care $\frac{3}{7}\cdot\frac{n}{5^n}>0.001$:

```
»n=1;x=n./(5.^n); while (3*x)./7>.001 n=n+1; x=n./(5.^n);end
» [n]
ans =
    5.0000
 » sum((1:6)./5.^(1:6))
 ans =
    0.3124
```

- Să studiem natura seriei $1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ şi în caz de convergenţă să aproximăm suma seriei cu două zecimale exacte:

Primul termen al seriei este $a_0=1$, în rest $a_n=\frac{1}{n!}, n\geq 1$; aplicăm criteriul raportului $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$**,** deci seria este convergentă.

Avem $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{3}, \forall n\geq 2$ şi $|R_n|<\frac{|a_n|\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)!}<0.001$:

```
» n=1;x=1;while .5*x>.001 n=n+1;x=x*(1/n);end
»  [n]
ans =
  6
```

Pentru a calcula cel de-al 7-lea termen al şirului sumelor parţiale, care aproximează suma seriei cu două zecimale exacte, este nevoie de un program (situaţie valabilă dacă în termenul general al seriei apar factoriale):

```
»suma=1;x =1;for n=1:7 x=x.*(1./n);suma =suma+x;end
» [suma]
ans =
   2.7183
```

- Am stabilit cu criteriul raportului că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ este convergentă; să aproximăm suma seriei cu două zecimale exacte:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1}{2}.,\ \text{deoarece avem } 2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

şi astfel avem de rezolvat în mulţimea numerelor naturale inecuaţia: $|R_n|<\frac{n!}{n^n}<0.001$

```
» n=1;x=1;while x>.001 n=n+1;x=x.*n.*((n-1).^(n-1))./(n.^n);end
» [n]
ans =
    9
```

Aşadar s_{10} aproximează suma seriei cu două zecimale exacte.

```
»suma=1;x =1;for n=2:10 x=x.*n.*((n-1).^(n-1))./(n.^n);suma =suma+x;end
» [suma]
ans =
   1.8796
```

- Să studiem natura seriei $1+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ şi în caz de convergenţă, să aproximăm suma seriei prin s_{1000}

Deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+3}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}=1$ **,**aplicăm criteriul Raabe Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty}n.(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n.(\frac{(2n+2).(2n+3)}{(2n+1)^2}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}$$

şi obţinem astfel convergenţa seriei**.**

```
» suma=7/6; x=1/6;for n=1:998 x=x.*((2*n+1).^2)./((2*n+2).*(2*n+3));
suma=suma +x;
end
» [suma]
ans =
   1.5530
```

În cazul unei serii alternate, a cărei convergenţă o stabilim cu criteriul lui Leibniz, putem evalua eroarea comisă.

- Să studiem natura seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ şi să-i aproximăm suma cu trei zecimale exacte:

Stabilim convergenţa seriei cu criteriul lui Leibniz**;** pentru a stanili numărul natural începând de la care $|R_n|<a_{n+1}<10^{-4}$, vom scrie un program care determină cel mai mic număr natural pentru care $a_{n+1}>0.0001$:

```
» n=1;x=1./(n+1); while x>.0001 n=n+1; x=1./(n+1);end
» [n]
ans =
  9999
» sum(((-1).^(2:10001))./(1:10000))
ans =
   0.6931
```

- Să stabilim natura seriei $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \cdot \frac{1}{\ln^2 n}$ şi în caz de convergenţă să-i aproximăm suma cu o zecimală exactă.

Este o serie convergentă deoarece şirul $a_n = \frac{1}{\ln^2 n}$ este descrescător şi convergent la zero. Să determinăm numărul natural începând de la care $|R_n| < \frac{1}{\ln^2(n+1)} < 0.01$:

```
»n=2;x=1./((log(n+1)).^2); while x>.01 n=n+1;
x=1./((log(n+1)).^2);
 end
»  [n]
 ans =
            22026
»sum(((-1).^(2:22027))./((log(2:22027)).^2))
 ns =
            1.5620
```

Pentru a intui comportarea seriilor de funcţii, considerăm că un exerciţiu de grafică ne este de ajutor::

- Să desenăm primii trei termeni ai seriei $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n \cdot x^2}{x^4+n^6}$ şi respectiv $s_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ în acelaşi sistem de axe:

```
»  x=-3:.1:3;y1=(-x.^2)./(x.^4+1);y2=(x.^2)./(x.^4+2^6);y3=(-x.^2)./(x.^4+3^6);y=y1+y2+y3;
»plot(x,y1,'k.',x,y2,'r-',x,y3,'b',x,y,'g*')
```

- În cazul seriei de funcţii $\sum_{n\geq 0} arctg\,\frac{2x}{x^2+n^2}$ să desenăm în acelaşi sistem de axe

$f_5(x) = arctg\,\frac{2x}{x^2+25}$ şi $s_5(x) = \sum_{k=1}^{5} arctg\,\frac{2x}{x^2+n^2}$

```
» x=-5:.1:5;y5=atan(2*x./(x.^2+5^2));
»y=atan(2*x./(x.^2+1))+atan(2*x./(x.^2+2^2))+atan(2*x./(x.^2+3^2))+atan(2*x./(x.^2+4^2))
+atan(2*x./(x.^2+5^2));
»plot(x,y5,'r',x,y,'k*')
```

Dacă dorim să desenăm $s_{49}(x)$, lucrurile se complică, aşa că e nevoie de altă abordare: declarăm variabila simbolică x, şi scriem expresia simbolică $s_{49}(x)$. Pentru desenul acesteia folosim funcţia ezplot(f,a,b)

```
»syms x
»n=1;s = atan((2*x)./(x.^2+1)); while n<50 n=n+1;
s=s+ atan((2*x)./(x.^2+n.^2));
end
»ezplot(s,-3,3)
```

Seriile de puteri sunt cazuri particulare de serii de funcţii:

- Să desenăm în acelaşi sistem de axe al 10-lea termen al seriei de puteri $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\cdot x^n$ şi respectiv al 10-lea termen al şirului sumelor parţiale, al aceleaşi serii:

```
»x=-8:.1:8;y10=(x.^10)./(2*3*4*5*6*7*8*9* 10);y=1+x+(x.^2)./2+
(x.^3)./(2*3)+(x.^4)./(2*3*4)+(x.^5)./(2*3*4*5)+(x.^6)./(2*3*4*5*6)+
(x.^7)./(2*3*4*5*6*7)+(x.^8)./(2*3*4*5*6*7*8)+(x.^9)./(2*3*4*5*6*7*8*9)+(x.^10)./(2*3*4*5*
6*7*8*9*10);plot(x,y10,'k',x,y,'k*')
```

pentru a desena $s_{99}(x)$ folosim Symbolic math

```
»syms x
»n=1; s=x;n=2;f=x^2/2; s=s+f ;while n<100 n=n+1 ;f=f*x/n;s=s+f;end
» ezplot(s,-5,5)
```

Probleme propuse

1. Fie seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$; scrieţi un program pentru a determina rangul începând de la care distanţa dintre termenul general al şirului sumelor parţiale s_n şi suma seriei este mai mică decât $\varepsilon = 0{,}005$.

2. Fie seria $\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$; scrieţi un program pentru a determina rangul termenului general al şirului sumelor parţiale s_n ce aproximează suma seriei cu două zecimale exacte.

3. Studiaţi natura seriilor următoare folosind criteriile de convergenţă cunoscute şi în caz de convergenţă aproximaţi suma seriei cu s_{1000}

- $1+\sum_{n\geq 1}\ln\frac{n^4+4}{n^4}$;
- $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{n+(0{,}7)^n}$;
- $\sum_{n\geq 0}\frac{n-1}{n^3+7}$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;
- $2+\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}{5^n}$

4. Studiaţi natura seriilor:

- $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$;
- $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}$;
- $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2\cdot n)!}$

şi în caz de convergenţă aproximaţi suma seriei cu două zecimale.

5. Studiaţi natura seriilor

- $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$;
- $\sum_{n\geq 4} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

în caz de convergenţă aproximaţi suma seriei cu două zecimale exacte.

6. Desenaţi, în acelaşi sistem de axe, termenul al 5-lea f_5 al seriei $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)^n \cdot \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n$ şi respectiv termenul al 5-lea al şirului sumelor parţiale s_5, având ca domeniu de definiţie un interval judicios ales .

7. Desenaţi, în acelaşi sistem de axe, al 10-lea termen al seriei de puteri $\sum_{n\geq 0} n\cdot x^n$ şi respectiv al 10-lea termen al şirului sumelor parţiale, al aceleaşi serii, alegând judicios domeniul de definiţie, submulţime a mulţimii de convergenţă. Desenaţi folosind Symbolic Math $s_{100}(x)$.