Funcţii continue_laborator 2013-2014

În Matlab există două noţiuni distincte legate de funcţii:

- *expresia simbolică*, de exemplu $\frac{1}{x^2+1}$ sau $\log(x)$
- *funcţia -algoritmul* (*regula*) care produce un *output* numeric pentru un *input* numeric sau o mulţime de input-uri numerice.

Se poate calcula limita unei expresii simbolice într-un punct, dar limita unei funcţii (în sensul Matlab) nu . Pentru a defini o expresie simbolică scriem:

```
»syms x
» f=f(x)
```

Să calculăm în continuare câteva limite unor funcţii reale de variabilă reală, intr-un punct $\lim_{x\to x_0} f(x)$ folosind instrucţiunea limit(f,x,x_0)

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

```
»syms x
» f=sin(x)/x
» limit(f,x,0)
» limit(f,x,inf)
```

- $\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$; $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

```
»f=sin(1/x); limit(f,x,inf)
» limit(f,x,0)
```

Matlab poate fi folosit în scop didactic: o serie de rezultate, cunoscute din liceu rămân nişte noţiuni abstracte, care nu sunt percepute efectiv. Cu ajutorul unor tehnici simple, numerice, putem vizualiza aceste rezultate care astfel ne vor deveni familiare:

- Pentru a vizualiza rezultatul cunoscut: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$, vom tabela pentru început funcţia pentru valori la stânga şi la dreapta lui zero, suficient de apropiate de zero.

```
» x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;;-.00001;.00001;.0001; 001;.01;.1]; y=(log(1+x))./x ;[x y]
```

Să desenăm şi graficul restricţiei funcţiei la intervalul $[-0.1,0.1]$

```
»x=-.1:.01:.1;y=(sin(x))./x;plot(x,y)
```

- Să vizualizăm alt rezultat cunoscut: $\lim_{x\to o} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

```
»x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;.0001;.001;.01;.1];x.*sin(1./x); [x y]
»x=[-.5:.01:.5];y=x.*sin(1./x);plot(x,y)
```

Teorema lui Weierstrass afirmă că orice funcţie continuă pe $[0,1]$ este limita uniformă a unui şir de polinoame Bernstein, ceea ce înseamnă că putem aproxima funcţia cu polinomul Bernstein asociat.

- Să scriem polinomul Bernstein de grad 7, asociat funcţiei $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\log(1+x^2)$ şi să-i desenăm graficul şi graficul funcţiei în acelaşi sistem de axe .

```
»x=0:.01:1;y1=log(x.^2+1);y=7*x.*((1-x).^6).*log(1+(1/7).^2)+
21*(x.^2).*((1-x).^5).*log(1+(2/7).^2)+35*(x.^3).*((1-x).^4).*log(1+(3/7).^2)+
35*(x.^4).*((1-x).^3).*log(1+(4/7).^2)+21*(x.^5).*((1-x).^2).*log(1+(5/7).^2)+
7*(x.^6).*(1-x).*log(1+(6/7).^2)+(x.^7).*log(2);plot(x,y1,'k',x,y,'k*')
```

Pentru a desena, utilizând Matlab, urma unei curbe γ din $\mathbf{R}^2$, de ecuaţii parametrice

$$\gamma:\begin{cases} x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}\quad t\in[a,b]$$

folosim următoarea sintaxă:

```
»t=a:h:b; plot(f(t),g(t))
```

- Urma curbei $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$, de ecuaţii parametrice: $\begin{cases} x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$ este

$\gamma([0,2\pi])=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\}$, cunoscută sub numele de *astroidă*. Să desenăm $\gamma([0,2\pi])$:

```
» t=0:pi/50:2*pi;plot((cos(t)).^3,(sin(t)).^3,'k')
» title ('astroida')
```

Să desenăm următoarele mulţimi:

- $M=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2,\ x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0\}$ este imaginea intervalului $[0,\frac{\pi}{2}]$ prin curba γ de ecuaţii parametrice $\begin{cases} x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\quad t\in[0,\frac{\pi}{2}]$:

```
»t=0:pi/50:pi/2;plot(cos(t),sin(t))
```

- $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1\}$ este imaginea intervalului $[0,2\pi]$ prin curba γ de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x=5\cdot\cos t\\ y=2\cdot\sin t\end{cases}\quad t\in[0,2\pi]$$

```
»t=0:pi/50:2*pi;plot(5*cos(t),2*sin(t),'k')
»title('elipsa')
```

- Să desenăm cardioida, curbă a cărei ecuaţie în coordonate polare este $r=1-\cos t, t\in[-\pi,\pi]$. Ecuaţiile parametrice sunt $\begin{cases} x=(1-\cos t)\cdot\cos t\\ y=(1-\cos t)\cdot\sin t\end{cases}\quad t\in[-\pi,\pi]$

```
»t=-pi:pi./50:pi;plot((1-cos(t)).*cos(t),(1-cos(t)).*sin(t))
```

- Desenaţi spirala hipebolică. a cărei ecuaţie în coordonate polare este $r=\frac{1}{t}, t\in[\frac{1}{3},10]$

  »t=1/3:.01:10;plot((1./t).*cos(t),(1./t).*sin(t))

Pentru a desena utilizând Matlab, urma unei curbe γ din $\mathbf{R}^3$, de ecuaţii parametrice $\gamma:\begin{cases} x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases}\quad t\in[a,b]$

folosim următoarea sintaxă:

»t=a:h:b; plot3(f(t),g(t),h(t)).

- Să desenăm urma curbei, de ecuaţii parametrice $\begin{cases} x=\cos t\\ y=\sin t \quad t\in[0,10\pi]\\ z=t\end{cases}$

  »t=0:pi/50:10*pi;plot3(cos(t),sin(t),t)

Probleme propuse:

1. Ilustraţi prin tabelare şi desenând graficul următoarele rezultate:

   - nu există $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$;
   - $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x}=0$

   Verificaţi calculând cu Symbolic math.

2. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale următoarelor curbe ale căror ecuaţii în coordonate polare sunt date; desenaţi utilizând Matlab urmele acestor drumuri.

   - $r=t,\quad t\in[0,4\pi]$ (spirala lui Arhimede);
   - $r=1-\sin t, t\in[0,2\pi]$ (cardioida);
   - $r=1-2\sin t, t\in[0,2\pi]$;
   - $r=3-\sin t, t\in[0,2\pi]$

3. Reprezentaţi grafic următoarele mulţimi:

   - $A_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 |\ (x^2+y^2)^2=y\cdot(3x^2-y^2)$ (rozariu cu trei bucle);
   - $A_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 |\ (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=2x\cdot y$ (rozariu cu patru bucle)