Diferenţiabilitate-laborator 2013-2014

Pentru calculul diferenţial folosim Symbolic math, deoarece o expresie simbolică poate fi derivată, în timp ce o funcţie din Matlab nu.
Pentru a deriva funcţia reală de variabila reală f , folosim funcţia diff şi anume f1=diff(f); pentru a calcula $f'(a)$ vom scrie subs(f1,x,a).

- Să calculăm $f'(3)$ în cazul funcţiei $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

```
»syms x
» f=1/(x^2+1); f1=diff(f)
» subs(f1,x,3)
```

- Să calculăm $f'(2)$ pentru $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

```
syms x
»f=log(x+sqrt(x^2+1));f1=diff(f,x)
```

Expresia derivatei este complicată, e nevoie de simplificări, cu instrucţiunea simplify obţinem:

```
»simplify(f1)
» subs(f1,x,2)
```

- Să calculăm utilizând Matlab $f'(2)$ pentru funcţia $f(x)=\arcsin\frac{2x}{x^2+1}$; reamintindu-ne că funcţia nu este derivabilă în $x=\pm 1$ să verificăm ce răspuns primim dacă vom cere să calculeze de $f'(1)$:

```
»syms x
» f=asin(2*x/(x^2+1)); f1=diff(f,x)
»subs(f1,x,2)
» subs(f1,x,1)
```

- Pentru a determina rădăcinile derivatei funcţiei $f(x)=arctg\frac{2x}{x^2+16}$ vom calcula derivata şi vom rezolva ecuaţia $f'(x)=0$, folosind funcţia solve.

```
»f=atan((2*x)/(x^2+16)); f1=diff(f,x)
»froots=solve(f1)
```

Pentru a desena o funcţie a cărei expresie simbolică o avem putem folosi funcţia fin=inline(vectorize(f)), care "*vectorizează*", adică redefineşte funcţia pentru a fi în stare să opereze cu vectori; vor fi înlocuite astfel operaţiile ***, ^, /** cu **.***, **.^**, **. /** . În continuare se procedează cum am studiat deja.

- Considerăm $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ ca fiind expresie simbolică şi să-i desenăm graficul, folosind instrucţiunea plot, deci "vectorizând-o"

```
»f=sqrt(x^2-x+1);
»fin=inline(vectorize(f))
»x=-5:.1:6; plot(x,fin(x),'k')
```

- Să calculăm în cazul elicei de ecuaţii parametrice $x=\cos t, y=\sin t, z=t$, $t\in[0,2\pi]$, vectorul său tangent şi lungimea elicei. Declarăm utilizarea calculului simbolic şi scriem ecuaţiile parametrice ale curbei

```
» syms t
»  elice=[cos(t),sin(t),t]
```

Ştiind că vectorul tangent este derivata $(f'(t), g'(t), h'(t))$, calculăm:

```
» tgelice=diff(elice)
```

Lungimea unei curbe, de ecuaţii parametrice $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \ t \in [a,b] \\ z = h(t) \end{cases}$ se calculează cu formula

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt .$$

Pentru calculul integralei $\int_a^b f(t)dt$ în Matlab, vom scrie int(f,a,b), pentru expresii relativ simple ale lui *f*.

Dacă integrala pare mai complicată folosim double(int(f,a,b)), caz în care integrala se rezolvă numeric.
Definim funcţia ce calculează norma vectorului $(f(t), g(t), h(t))$, funcţie ce o numim norma, neputând folosi numele de norm, care în Matlab se refera la un calcul cu numere (nu cu funcţii)

```
»norma=inline('sqrt(v*transpose(v))')
```

Calculăm norma (lungimea) vectorului găsit

```
»norma(tgelice) .
```

Norma vectorului tangent poate fi calculată şi direct, folosind formula prezentată:

```
»normatgelice=sqrt(tgelice(1)^2+ tgelice(2)^2+ tgelice(3)^2)
```

Putem determina lungimea elicei:

```
» L= int(norma(tgelice),0,2*pi)
```

sau

```
» L= int(normatgelice,0,2*pi)
```

- Să calculăm vectorul tangent şi lungimea curbei în cazul lemniscatei lui Bernoulli, ale cărei ecuaţii parametrice sunt:

$$x = \sqrt{\cos 2t} \cdot \cos t,\ y = \sqrt{\cos 2t} \cdot \sin t, t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

```
» syms t
» lemniscata=[(sqrt(cos(2*t)))*cos(t),(sqrt(cos(2*t)))*sin(t)];
» tglemniscata=diff(lemniscata);
»normalemn= sqrt(tglemniscata(1)^2+ tglemniscata (2)^2)
» L= int(normlemn,-pi/4,pi/4)+int(normlemn,3*pi/4,5*pi/4)
```

sau:

```
» syms t
» lemniscata=[(sqrt(cos(2*t)))*cos(t),(sqrt(cos(2*t)))*sin(t)];
» tglemniscata=diff(lemniscata);
»norma=inline('sqrt(v*transpose(v))');
» L= int(norma(tglemniscata),-pi/4,pi/4)+int(norma(tglemniscata),3*pi/4,5*pi/4)
```

Putem desena lemniscata, în Symbolic math folosind instrucţiunea ezplot, specificând axis normal, dispar eventualele erori de scalare.

```
» ezplot(lemniscata,[0,2*pi]); axis normal
```

Putem calcula derivate de ordin superior utilizând Matlab, dar nu reuşim să stabilim formula derivatei de ordin n.

- Pentru a calcula derivatele $f^{(5)}(2)$, $f^{(99)}(2)$, pentru $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, vom scrie un program care calculează derivatele până la ordinul 100.

```
»syms x
»f(1)=sqrt(x^2+1); i=2; while i<100 f(i)=diff(f(i-1),x);i=i+1;end
» simplify(f(5))
» subs(ans,x,2)
» simplify(f(99))
  subs(ans,x,2)
```

La derivate de ordin mai mare este preferabil să cerem direct formula derivatei, după ce au fost făcute simplificările. Atenţie!

- pentru calculul lui f' scriem diff (f,x)
- pentru calculul lui f'' scriem diff (f,x,1)
- pentru calculul lui $f^{(99)}$ scriem diff (f,x,98)

Polinomul lui Taylor pentru o expresie simbolică se obţine direct, cu instrucţiunea taylor(f,n,x_0), unde n este gradul polinomului.

- Să scriem polinomul Taylor de grad 8 asociat funcţiei $f:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\ln(x+1)$ în punctul $x_0=2$, să desenăm în acelaşi sistem de axe funcţia şi polinomul asociat.

```
»syms x
» log(x+1);g=taylor(f,8,2)
```

Pentru a desena în Symbolic Math graficele a două funcţii în acelaşi sistem de axe cerem:

```
» ezplot(f,[a,b]); hold on; ezplot(g,[a,b]);hold off
```

Instrucţiunea hold on se foloseşte pentru ca output-ul de la prima instrucţiune să fie reţinut şi afişat doar după ce este scrisă instrucţiunea hold off

```
»ezplot(f,[-1,10]);hold on;ezplot(g,[-1,10]);hold off
```

Să desenăm aceste grafice, folosind funcţia plot, ceea ce ne permite să alegem culoarea, respective stilul fiecărui grafic:

```
syms x
» f=log(x+1); g=taylor(f,8,2);
» fin=inline(vectorize(f))
» gin=inline(vectorize(g))
» x=-.99:.1:7;plot(x,fin(x),'k*',x,gin(x),'k')
```

- Să scriem polinomul Taylor de gradul 7, în $x_0=0$, pentru funcţia $f:(-2,2)\to\mathbf{R}$ definită de $f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{x+2}{2-x}}$ şi să desenăm acest polinom şi funcţia f în acelaşi sistem de coordonate.

```
syms x
» f=(1/3)*log((x+2)/(2-x));g=taylor(f,7,0);
» fin=inline(vectorize(f))
»gin=inline(vectorize(g))
» x=-1.95:.01:1.95; plot(x,fin(x),'k*',x,gin(x),'k')
```

Am prezentat *dezvoltări în serie Taylor* în cazuri oarecum clasice. În continuare vom desena termeni ai şirului sumelor parţiale ale seriilor respective şi funcţia, în acelaşi sistem de axe.

- Să desenăm termenii s_{10}, s_{20} ($s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$), din dezvoltarea în serie a funcţiei $f(x)=e^{-3x}$ şi funcţia în acelaşi sistem de axe.

```
» syms x
```

```
» f=exp(-3*x);
» ft10=taylor(f,10,0)
»ft20=taylor(f,20,0)
» fin=inline(vectorize(f));ft10in=inline(vectorize(ft10)); ft20in=inline(vectorize(ft20));
»x=-4:.1:4; plot(x,fin(x),'k*',x,ft10in(x),'k',x,ft20in(x))
```

- Să desenăm termenii s_9, s_{26} din dezvoltarea în serie a funcţiei $f(x) = \sin^3 x$ şi funcţia în acelaşi sistem de axe:

```
»syms x
»f=(sin(x))^3;ft9=taylor(f,9,0);ft26=taylor(f,26,0);
»ft9in=inline(vectorize(ft9));fin=inline(vectorize(f));ft26in=inline(vectorize(ft26));
»x=-3:.1:3; plot(x,fin(x),'k*',x,ft9in(x),'k',x,ft26in(x))
```

Vom scrie, folosind Matlab, sumele parţiale ale dezvoltării în serie a unei funcţii, sume care sunt dificil de determinat folosind metodele calculului ştiinţific:

- Să scriem termenul $s_{19} = \sum_{k=0}^{19} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ din dezvoltarea in serie Taylor a funcţiei $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; trebuie menţionat că această dezvoltare se poate face pe $(-1,1)$, cu toate că domeniul de definiţie este **R**.

```
»syms x
» f=asin(2*x/(1+x^2)); ft19=taylor(f,20,0)
```

Pentru a calcula derivatele parţiale ale unei expresii simbolice $f(x, y)$ declarăm înainte de a scrie funcţia syms x y. (dacă expresia simbolică este $f(x, y, z)$, vom scrie syms x y z). Pentru a determina $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ de exemplu vom cere fx=diff(f,x), iar pentru a calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ vom scrie în continuare subs(fx,[x,y],[a,b]).

- Să calculăm derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei $f : \mathbf{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ $f(x, y) = \frac{x + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ şi apoi să calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$:

```
»syms x y
» f=(x+y^2)/sqrt(x^2+y^2);
»fx=diff(f,x)
» simplify(fx)
```

Forma iniţială a lui $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a fost complicată şi a fost nevoie de instrucţiunea simplify; pentru calculul lui $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ne propunem pentru economie să combinăm cele două instrucţiuni:

```
» fy=simplify(diff(f,y))
```

Dacă nu suntem mulţumiţi de expresia obţinută putem folosi cea mai eficientă instrucţiune de simplificare :

```
»fy=simple(fy)
```

Să calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$:

```
» m=subs(fx,[x,y],[2,1])
```

- Să calculăm derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei $f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$, $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$

```
»syms x y z
» f=x/y+y/z+z/x;
» fx=diff(f,x)
» fy=diff(f,y)
» fz=diff(f,z)
```

Pentru a determina matricea jacobiană a funcţiei: $f(x_1,\ldots,x_k)=(f_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_k))$ vom scrie:

»syms $x_1,\ldots,x_k$
»f=[$f_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots, f_m(x_1,\ldots,x_k)$];w=[$x_1,\ldots,x_k$]; J=jacobian(f,w)

Dacă dorim să calculăm jacobianul în punctul $(a_1,\ldots,a_k)$, vom scrie:

»J1=subs(J, [$x_1,\ldots,x_k$], [$a_1,\ldots,a_k$])

- Să calculăm matricea jacobiană în punctul curent şi apoi în punctul $(1,2,3)$ pentru funcţia $f(x,y,z)=(x\cdot y\cdot z,\, x^2+y^2+z^2)$:

```
» syms x y z
» f=[x*y*z,x^2+y^2+2*z^2];w=[x,y,z];J=jacobian(f,w)
»J1=subs(J,[x,y,z],[1,2,3])
```

- Să calculăm jacobianul funcţiei $f:[0,+\infty)\times\{0,2\pi]$ definită prin $f(r,\varphi)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, în punctul curent:

```
syms r phi
»F=[r* cos(phi),r* sin(phi)];
»J1=simplify(det(jacobian(F, [r,phi])
```

Dacă funcţia $f:A\to\mathbf{R}$, $A\subset\mathbf{R}^n$, este diferenţiabilă în $a\in \operatorname{int} A$, *vectorul gradient* al lui f în a, $\nabla f(a)$ este de fapt matricea jacobiană a lui f în a şi astfel pentru a calcula gradientul funcţiei $f(x,y,z)$ vom scrie

```
gradf=jacobian(f,[x,y,z]).
```

Formula de calcul a derivatei după un versor, în cazul unei funcţii diferenţiabile poate fi scrisă ca fiind $\frac{df}{ds}(a)=\langle s,\nabla f(a)\rangle$, formă ce ne va fi utilă în calculele ce urmează:

- Să calculăm $\frac{df}{ds}(1,3,-1)$ dacă $s=\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, pentru funcţia $f(x,y,z)=\frac{x+z}{yz^2}+\frac{2y+1}{x^2+y^2+z^2}$:

```
»syms x y z
»f=(x+z)/(y*z^2)+(2*y+1)/(x^2+y^2+z^2);gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
»w=subs(gradf,[x,y,z],[1,3,-1]);s=[1/3,sqrt(2)/3,sqrt(6)/3];fs=w*s'
```

În continuare vom calcula câteva derivate de ordin superior:

- $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(2,3)$, dacă $f(x,y)=\frac{2}{x+y^2}-\frac{y}{x}$

```
»syms x y
```

```
» f=2/(x+y^2)-y/x; fx1=diff(f,x);  fx2=diff(fx1,x); fyx2=diff(fx2,y);
» subs(fyx2,[x,y],[2,3])
```

- $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial y \partial x}(2,1,-1)$, pentru $f(x,y,z)=\ln(x^2+3y^2+z^2)$

```
»syms x y z
»f=log(x^2+3*y^2+z^2);fx=diff(f,x);fyx=diff(fx,y);fzyx=diff(fyx,z);fzzyx=diff(fzyx,z);
»subs(fzzyx,[x,y,z],[2,1,-1])
```

Pentru a calcula hessiana unei funcţii într-un punct, folosim formula $H_f(a)=J_{\nabla_f(a)}$ şi anume:

```
»syms x1,…,xk
»f=f(x1,…,xk); gradf=jacobian(f,[ x1,…,xk]);
»hessianf=jacobian(gradf,[ x1,…,xk])
```

- Să calculăm hessiana funcţiei $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}+y^3$ în punctul (2,1):

```
»syms x y
» f=(x^2)/y+y^3;gradf=jacobian(f,[x,y])
» hessianf=jacobian(gradf,[x,y])
» subs(hessianf,[x,y],[2,1])
```

- Să calculăm hessiana funcţiei $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{z}+\dfrac{5z}{x}+xyz$ în punctul (2,2,1):

```
»syms x  y z
»f=x/y+2*y/z+5*z/x+x*y*z;gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
»hessianf=jacobian(gradf,[x,y,z]);subs(hessianf,[x,y,z],[2,-2,1])
```

Determinarea extremelor unor funcţii de două, respectiv trei variabile reale este una dintre problemele importante ce le putem rezolva utilizând Symbolic Math

- Să calculăm extremele funcţiei $f(x,y)=y\cdot e^{-x^2-y^2}$:

```
»syms x y
» f=y*exp(-x^2-y^2);
```

Pentru început găsim punctele critice:

```
» fx=diff(f,x); fy=diff(f,y);
» [xcr,ycr]=solve(fx,fy);[xcr,ycr]
ans =
    [ 0,  2^(1/2)/2]
    [ 0, -2^(1/2)/2]
```

Altă variantă constă în rezolvarea ecuaţiei $\nabla f=(0,0)$, notând gradf(i), componentele gradientului, care apar în funcţia solve

```
» gradf=jacobian(f, [x,y]);
» [xcr,ycr]=solve(gradf(1),gradf(2));[xcr,ycr]
```

Este preferabilă utilizarea condiţiei necesare şi suficiente cu valori proprii:
Calculăm hessiana, care este jacobiana gradientului:

```
» gradf=jacobian(f,[x,y]) ; hessf=jacobian(gradf,[x,y])
  hessf =

    [ (4*x^2*y)/exp(x^2 + y^2) - (2*y)/exp(x^2 + y^2), (4*x*y^2)/exp(x^2 + y^2) - (2*x)/exp(x^2 + y^2)]
    [ (4*x*y^2)/exp(x^2 + y^2) - (2*x)/exp(x^2 + y^2),   (4*y^3)/exp(x^2 + y^2) - (6*y)/exp(x^2 + y^2)]
```

Determinăm matricea hessiană, în punctele critice găsite şi îi calculăm valorile proprii.

```
» H1=subs(hessf, [x,y], [xcr(1),ycr(1)])
H1 =

[ -2^(1/2)/exp(1)^(1/2),                    0]
[                    0, -(2*2^(1/2))/exp(1)^(1/2)]
» eig(H1)
ans =
-2^(1/2)/exp(1)^(1/2)
 -(2*2^(1/2))/exp(1)^(1/2)
```

Punctul $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este un punct de maxim

```
» H2=subs(hessf, [x,y], [xcr(2),ycr(2)])
H2 =
[ 2^(1/2)/exp(1)^(1/2),                    0]
[                    0, (2*2^(1/2))/exp(1)^(1/2)]
» eig(H2)
ans =
 2^(1/2)/exp(1)^(1/2)
(2*2^(1/2))/exp(1)^(1/2)
```

Punctul $\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este un punct de minim .

- Să determinăm extremele funcției $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$

```
»syms x y z
» f=x^2+y^2+z^2-x*y+x-2*z;
» gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
» [xcr,ycr,zcr]=solve (gradf(1),gradf(2),gradf(3)); [xcr,ycr,zcr]
ans =
[ -2/3, -1/3, 1]
» hessf=jacobian(gradf,[x,y,z])
» H1=subs(hessf,[x,y,z], [xcr,ycr,zcr]); eig(H1)
ans =
   1
   2
   3
```

Punctul (-2/3, -1/3,1) este un punct de minim.

- Să determinăm extremele funcției $f(x,y,z)=x^2\cdot y^2+z^2-xy+x-2z$

```
»syms x y z
» f=x^2*y^2+z^2-x*y+x-2*z
» gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
» [xcr,ycr,zcr]=solve (gradf(1),gradf(2),gradf(3)); [xcr,ycr,zcr]
ans =
[ 0, 1, 1]
» hessf=jacobian(gradf,[x,y,z])
» H1=subs(hessf,[x,y,z], [xcr,ycr,zcr]);  eig(H1)
ans =
     2
```

```
1 - 2^(1/2)
2^(1/2) + 1
```

Punctul (0,1,1) nu este punct de extrem deoarece hessiana funcţiei are două valori proprii pozitive şi una negativă, în concluzie funcţia considerată nu are puncte de extrem.

Se poate întâmpla ca rezolvarea sistemului ale cărui soluţii sunt punctele critice, să fie imposibilă cu Symbolic Math, caz în care se folosesc metode numerice, care nu fac obiectul acestui curs.

In general calculul extremelor cu legături este destul de laborios, să reluăm exemplele de la curs, utilizând Matlab:

- Să se calculeze extremele funcţiei $f(x, y) = x^1 + 2y^1 + 2x - 4y$ cu legătura $x + y = 2$.

Construim funcţia $F = f + ag$ (am renotat λ, notaţia clasică pentru un multiplicator al lui Lagrange cu a, pentru simplificarea scrierii în Matlab) şi pentru început rezolvăm sistemul $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial a} = 0$; nu uitaţi să declaraţi pe a ca variabilă a expresiilor simbolice!

```
» f=x^2+2*y^2+2*x-4*y; g=x+y-2;
» F=f+a*g; gradF=jacobian(F,[a,x,y]);
» [acr,xcr,ycr]=solve(gradF(1),gradF(2), gradF(3));[acr,xcr,ycr]
ans =
     [ -8/3, 1/3, 5/3]
```

Verificăm dacă punctele critice sunt puncte de extrem pentru F_a

```
»F1=f+acr(1)*g; gradF1=jacobian(F1, [x,y]); hessF1=jacobian(gradF1,[x,y])
» H1=subs(hessF1,[x,y], [xcr(1),ycr(1)]);eig(H1)
ans =
        2
        4
```

şi astfel punctul $1/3,5/3)$ este un minim ce satisface legătura din ipoteză.

.

- Să calculăm punctele de extrem ale funcţiei $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z$ situate în bila inhisă $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$:

Să determinăm punctele de extrem ale funcţiei f ce se află în bila deschisă $x^2 + y^2 + z^2 < 9$

```
» syms x y z a
»  f=x^2+y^2+z^2-2*x-4*y+6*z;
» gradf=jacobian(f,[x,y,z]);
» xcr,ycr,zcr]=solve(gradf(1), gradf(2),gradf(3));[xcr,ycr,zcr]
ans =
[ 1, 2, -3]
```

Verificăm dacă punctul critic (1,2,-3) aparţine bilei deschise $x^2 + y^2 + z^2 < 9$, calculând distanţa de la acesta la origine, care este centrul bilei considerate:

```
» sqrt([xcr,ycr,zcr]*[xcr,ycr,zcr]')
ans =
14^(1/2)
```

Punctul critic (1,2,-3) nu aparţine bilei deschise $x^2 + y^2 + z^2 < 9$, aşa că nu mai verificăm dacă este sau nu punct de extrem.

Stabilim dacă funcţia *f* are extreme ce se află pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, ceea ce înseamnă că satisfac legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

```
» g=x^2+y^2+z^2-9;
» F=f+a*g;gradF=jacobian(F,[a,x,y,z]) ;
» [acr, xcr,ycr,zcr]=solve(gradF(1),gradF(2),gradF(3),gradF(4));  [acr, xcr,ycr,zcr]
ans =
[   14^(1/2)/3 - 1,  (3*14^(1/2))/14,  (3*14^(1/2))/7, -(9*14^(1/2))/14]
[ - 14^(1/2)/3 - 1, -(3*14^(1/2))/14, -(3*14^(1/2))/7,  (9*14^(1/2))/14]
»F1=f+acr(1)*g;hessF1=jacobian(jacobian(F1,[x,y,z]),[x,y,z]);
»H1=subs(hessF1,[x,y,z],[xcr(1),ycr(1),zcr(1)]);eig(H1)
ans =
2.4944
 2.4944
 2.4944
```

Valorile propeii ale hessienei fiind pozitive, punctul $\left(\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{-9\sqrt{14}}{14}\right)$ este punct de minim, ce se găseşte pe sfera considerată. Valoarea minimă a funcţiei pe compactul considerat va fi:

```
» m=subs(f,[x,y,z],[(3*14^(1/2))/14,  (3*14^(1/2))/7, -(9*14^(1/2))/14])
m =
  -13.4499
```

```
» F2=f+acr(2)*g;hessF2=jacobian(jacobian(F2,[x,y,z]),[x,y,z]);
» H2=subs(hessF2,[x,y,z],[xcr(2),ycr(2),zcr(2)]);eig(H2)
ans =
  -2.4944
 -2.4944
 -2.4944
```

Punctul $\left(\frac{-3\sqrt{14}}{14}, \frac{-3\sqrt{14}}{14}, \frac{9\sqrt{14}}{14}\right)$ este punct de maxim. Valoarea minimă a funcţiei pe compactul considerat va fi:

```
» M=subs(f,[x,y,z],[-(3*14^(1/2))/14,  -(3*14^(1/2))/7, +(9*14^(1/2))/14])
M =
   31.4499
```

Am stabilit că graficul unei funcţii reale, de două variabile reale este o porţiune de suprafaţă; pentru a vizualiza o asemenea funcţie avem două posibilităţi:

- desenul graficului funcţiei, care este o mulţime de puncte din $\mathbf{R}^3$;
- desenul în $\mathbf{R}^2$ al *curbelor de nivel* ale suprafeţei, de ecuaţii $f(x, y) = c$ unde c este o constantă.

Pentru a fi in spiritul acestui paragraf vom desena expresii simbolice ce definesc funcţiile folosind funcţiile `ezsurf` şi `ezcontour`.

- Să desenăm graficul şi curbele de nivel corespunzătoare funcţiei definite de formula

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + x^2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \text{ pentru } (x, y) \in [-4,4] \times [-4,4].$$

```
»syms x y
```

```
» f=(x^2+y^2+x^2*y^2)/(x^2+y^2+1)^2;ezsurf(f,[-4,4,-4,4])
»ezcontour(f,[-4,4,-4,4])
```

- Să desenăm porţiunea de suprafaţă definită de expresia $f(x,y)=\frac{x^4+2x^3y-6x^2y^2+y^4}{x^4+y^4+1}$ pentru $(x,y)\in[-3,3]\times[-3,3]$; apoi să desenăm curbele de nivel:

```
»f=(x^4+2*x^3*y-6*x^2*y^2+y^4)/(x^4+y^4+1);ezsurf(f,[-3,3,-3,3])
»ezcontour(f,[-3,3,-3,3])
```

Pentru a desena o suprafaţă de ecuaţii parametrice

$$x=f(u,v),\ y=g(u,v),\ z=h(u,v),\ (u,v)\in D\subset[0,2\pi]\times[0,2\pi],$$

folosim instrucţiunea `ezsurf(x,y,z)`, care desenează suprafaţa pe $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

- Pentru a desena sfera $x^2+y^2+z^2=1$, scriem ecuaţiile parametrice

$$x=\sin u\cos v,\ y=\sin u\sin v,\ z=\cos v,\ v\in[0,2\pi],\ u\in[0,\pi]$$

```
»x=sin(u)*cos(v);y=sin(u)*sin(v);z=cos(u);
» ezsurf(x,y,z)
```

Probleme propuse

1. Calculaţi $f'(3)$ pentru funcţia $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2-x+2}$; calculaţi $f'(2)$ şi justificaţi rezultatul; determinaţi zerourile funcţiei.
2. Calculaţi lungimea lemniscatei lui Bernoulli .
3. Calculaţi vectorul tangent, pentru curbele ale caror ecuaţii în coordonate carteziene sunt:
   - $\sqrt{x^2+y^2}=arctg\,\frac{y}{x}$.
   - $\sqrt{x^2+y^2}\cdot arctg\,\frac{y}{x}=1$
   - $x^2+y^2-y=\sqrt{x^2+y^2}$.

   În final desenaţi aceste curbe şi calculaţi-le lungimile
5. Calculaţi $f^{(24)}(2)$ pentru $f(x)=e^{x^2+3x}$, respective $g^{(43)}(1)$ pentru $g(x)=\sqrt{3x+1}$.
6. Scrieţi polinomul Taylor de grad 9 asociat funcţiei $f:(-0.5,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{2x+1}$ în punctul $x_0=4$, desenaţi în acelaşi sistem de axe funcţia şi polinomul asociat, în culori diferite şi stabiliţi eroarea comisă prin aproximarea funcţiei cu acest polinom pe intervalul $(2,6)$.
7. Scrieţi polinomul Taylor de grad 15 asociat funcţiei $f:\mathbf{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, definită prin $f(x)=arctg2x$, în punctul $x_0=1$, desenaţi în acelaşi sistem de axe funcţia şi polinomul asociat
8. Determinaţi gradul polinomului Taylor în $x_0=2$, ce aproximează cu trei zecimale, pe intervalul $(1,3)$, funcţia $f:(-4,4)\to\mathbf{R}$ definită de $f(x)=\ln\sqrt{16-x^2}$; desenaţi acest polinom şi funcţia f în acelaşi sistem de coordonate.
9. Desenaţi termenii s_9, s_{26} din dezvoltarea în serie a funcţiilor $f_k, 1\le k\le 4$ şi funcţia f_k în acelaşi sistem de axe:

   $f_1(x)=e^{\frac{x}{2}},\ x\in\mathbf{R};\ f_2(x)=\frac{2x+1}{x^3+3x^2-4x-12},\ x\notin\{-3,-2,2\};\ f_3(x)=\sin^3 x,\ x\in\mathbf{R};\ f_4(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1.$

10. Scrieţi termenul $s_{29} = \sum_{k=0}^{29} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$ din dezvoltarea in serie Taylor a funcţiei $f(x) = arctg \frac{2x}{4+x^2}$.

11. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul I, în punctul curent, ale funcţiei $f(x, y, z) = \ln(2x^2 + y^4 + 3z^2 + 1)$

12. Calculaţi $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ dacă $f(x, y) = \ln(x^2 y^2 + \sqrt{x^4 + y^4 + 1})$.

14. Calculaţi $\frac{df}{ds}(3,2)$, dacă $s = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pentru funcţia $f(x, y) = 2^{x^2 + y^4}$

15. Calculaţi matricele hessiene, în punctele indicate, pentru următoarele funcţii:

   o $f_1(x, y) = \frac{xy^2}{x + 2y}$ în $(2,1)$;

   o $f_2(x, y, z) = \frac{x}{y+1} + \frac{z^2}{x}$ în $(1,0,2)$.

16. Calculaţi punctele de extrem ale funcţiilor

$f_1(x, y) = x \cdot e^{-x^2 - y^2}$; $f_2(x, y) = x^3 - 3x^2 + 5x \cdot y - 7y^2$; ;

$f_3(x) = x^2 + xy + y^2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{y}, x > 0, y > 0$;

$f_4(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x > 0, y > 0, z > 0$;

$f_5(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{16}, x > 0, y > 0, z > 0$

.

17. Calculaţi

   - extremele funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2$, cu legătura $2x + y = 1$
   - extremele funcţiei $f(x, y) = 2x^2 - 20x + 2xy + y^2 - 14y + 58$, cu legătura $x + 4y = 8$

18. Desenaţi porţiunea de suprafaţă $f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 5x^2 - 3y^2 + 9}{x^4 + y^4 + 1}$, pentru $(x, y) \in [-4,4] \times [-4,4]$ şi curbele sale de nivel.

19. Desenaţi sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

20. Desenaţi hiperboloidul $z = x \cdot y$ pentru $x^2 + y^2 \le 1$, folosind o parametrizare convenabil aleasă