Calcul integral_ laborator 2013-2014

Integrala Riemann

Pentru calculul unei integrale Riemann $\int_a^b f(x)dx$ lucrăm cu Symbolic Math folosind instrucţiunea int(f,a,b).

Să calculăm următoarele integrale:

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$:

```
» syms x
» f=1/sqrt(1+x^2);
» int(f,0,1)
```

- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

```
»syms x
»f=1/(1+(cos(x))^2);int(f,0,pi/4)
```

În cazul unei integrale care necesită un calcul laborios, instrucţiunea int nu face faţă. Vom scrie în faţa instrucţiunii int, instrucţiunea double, şi Matlab ne va returna rezultatul unei integrări numerice:

- $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$

```
» syms x
» f=log(x+sqrt(1+x^2)); int(f,0,1)
Warning: Explicit integral could not be found.
 In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
ans =
        int(log(x+(1+x^2)^(1/2)),x = 0 .. 1)
```

atunci:

```
» double(int(f,0,1))
Warning: Explicit integral could not be found.
In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
ans =
   0.4672
```

Să calculăm o valoare aproximativă a acestei întegrale, înlocuind funcţia cu seria Taylor asociată şi aplicând integrarea termen cu termen. Reamintim că nu se lucrează cu seria propriu-zisa, ci cu un termen al şirului sumelor parţiale, ce o aproximează:

```
» f=log(x+sqrt(1+x^2)); ft=taylor(f,0,47);int(ft,0,1)
```

- Calculul matematic al integralei $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^x dx$ ridică dificultăţi serioase; în Matlab, calculăm polinomul Taylor, de

grad suficient de mare, asociat funcţiei, polinom ce aproximează funcţia:

```
»f=x^x;ft=taylor(f,1/2,9); simplify int(ft,1/2,1)
```

- Se demonstrează relativ uşor că şirul $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sin(\pi \cdot x)dx$ este descrescător şi are limita 0, şi anume:

Folosim monotonia întegralei:

Dacă $x \in (0,1)$ atunci $x^{n+1} < x^n$ şi $\sin(\pi \cdot x) > 0$; vom avea: $x^{n+1} \cdot \sin(\pi \cdot x) < x^n \cdot \sin(\pi \cdot x), \forall x \in (0,1) \Rightarrow I_{n+1} < I_n$

În plus $0 \le x^n \cdot \sin(\pi \cdot x) \le x^n, \forall x \in (0,1) \Rightarrow 0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ şi prin trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Să ilustrăm cu ajutorul softului aceste rezultate, în sensul de a calcula primii 20 de termeni ai şirului. Pentru început calculăm primul termen folosind instrucţiunea int, apoi double(int( )), în scopul de a decide care merită a fi utilizată:

```
»syms x
»  f=x*sin(pi*x);int(f,0,1)
ans =
1/pi
 » double(int(f,0,1))
ans =
        0.3183
```

Este preferabil să utilizăm instrucţiunea cu output numeric, caz în care ilus trarea va fi elocventă.

```
» for k=1:20 fk=x^k*sin(pi*x);I(k)=double(int(fk,0,1));end
 »k=1:20; I(k)
ans =
Columns 1 through 7
0.3183    0.1893    0.1248    0.0881    0.0654    0.0504    0.0400
Columns 8 through 14
0.0324    0.0268    0.0226    0.0192    0.0166    0.0144    0.0127
Columns 15 through 20
0.0112    0.0100    0.0090    0.0081    0.0073    0.0067
```

- Să calculăm $\xi \in \{0,1\}$ astfel încât $f(\xi) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$:

```
syms x
» f=exp(-x^2);a=double(int(f,0,1))
a =
   0.7468
» solve (f-a)
ans =
[  (-log(840849221561335/1125899906842624))^(1/2)]
[ -(-log(840849221561335/1125899906842624))^(1/2)]
```

Ne interesează valoarea din $(0,1)$:

```
» (-log(840849221561335/1125899906842624))^(1/2)
ans =
        0.5403
```

Putem calcula întegrala, folosind dezvoltarea în serie Taylor, în jurul originii, a funcţiei $f(x) = e^{-x^2}$ şi anume integrând termenul T_{20}

```
syms x
» f=exp(-x^2);  ft=taylor(f,0,20); int(ft,0,1)
```

- O integrală întâlnită în manuale este $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+tgx)dx$ se face substituţia $t = \frac{\pi}{4} - x$ şi în urma calculului obţinem $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$
-

```
» g=log(1+tan(x));int(g,0,pi/4)
ans =
-1/2*i*log(1+i)*log(2)+1/2*i*log(1+i)*log(-1-i)+1/2*i*log(1-i)*log(2)-1/2*i*log(1-i)*log(-1+i)-
1/2*i*dilog(1/2-1/2*i)+1/2*i*dilog(1/2+1/2*i)-1/4*log(1+i)*pi-1/4*log(1-i)*pi-Catalan
```

Evident, rezultatul nu este cel aşteptat; sa folosim integrarea numerică:

```
»double(int(g,0,pi/4))
ans =
  0.2722 - 0.0000i
```

Observăm că partea imaginară a răspunsului este zero, asa că răspunsul este cel aşteptat.
Altfel, să dezvoltăm în serie Taylor, funcţia de integrat şi să o înlocuim în integrală cu :

```
»gt=taylor(g,0,9); int(gt,0,pi/4)
ans =
1/4*pi*log(2)-1/32*pi^2+1/384*pi^3-1/1536*pi^4+7/61440*pi^5-1/36864*pi^6+31/5160960*pi^7-
61/41287680*pi^8+2159/5945425920*pi^9
```

Este cazul să cerem calculul aritmetic, al acestei expresii

```
»1/4*pi*log(2)-1/32*pi^2+1/384*pi^3-1/1536*pi^4+7/61440*pi^5-1/36864*pi^6+31/5160960*pi^7-
61/41287680*pi^8+2159/5945425920*pi^9
ans =
   0.2770
```

Rezultatul este satisfăcător, remarcaţi cele trei zecimale exacte si poate fi imbunătăţit prin cresterea rangului lui s .

Am studiat aspectele legate de funcţia $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, unde $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$. Vom încerca rezolvarea unor asemenea probleme cu Matlab.

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt$:

```
 »syms x t
»f=exp(t^2);F=int(f,0,x);Fx=diff(F,x)
Fx =
        exp(x^2)
```

In acest caz, singurul dezavantaj este că răspunsul nu apare imediat, o perioadă fiind afişat Busy.

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t\cdot\sqrt{t^2+t+1}}dt$:

```
»g=1/(t*sqrt(t^2+t+1)); G=int(g,1,x);Gx=diff(G,x)
Gx =
-(1/2/(x^2+1+x)^(1/2)-1/4*(2+x)/(x^2+1+x)^(3/2)*(2*x+1))/(1-1/4*(2+x)^2/(x^2+1+x))
```

Obţinând o formă complicată a derivatei, este nevoie de simplificarea acestei expresii simbolice:

```
»simplify(Gx)
ans =
        1/x/(x^2+1+x)^(1/2)
```

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t\cdot\sqrt{t^2+t+1}}dt$:

```
» g=1/(t*sqrt(t^4+t^2+1)); G=int(g,1,x);Gx=diff(G,x)

 »simplify(Gx)
ans =
3*x^3*(2*x^2+1+x^4)/((x^2-x+1)*(x^2+1+x))^(1/2)/(((x^2-x+1)*(x^2+1+x))^(1/2)-1)/(1+((x^2-
x+1)*(x^2+1+x))^(1/2))/(2*x^2+1-((x^2-x+1)*(x^2+1+x))^(1/2))/(2*x^2+1+((x^2-x+1)*(x^2+1+x))^(1/2))
```

Remarcaţi că utilizarea instrucţiunii simplify nu a rezolvat problema în sensul dorit. In această situaţie se foloseşte instrucţiunea simple, care are ca scop simplificarea expresiei, în sensul ca rezultatul să aibă cel mai mic număr de caractere. Simple aplică independent toate instructiunile de simplificare a expresiei simbolice considerate.
Dacă scriem simple(Gx), vor fi afişate toate înbcercările de simplificare, în schimb dacă vom scrie

```
Gx = simple(Gx),
```

va fi afişat doar rezultatul final:

```
» Gx=simple(Gx)
Gx =
1/(x^4+1+x^2)^(1/2)/x
```

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x} e^{t^2}\,dt$

```
» f=exp(-t^2);F=int(f,0,cos(x));fx=diff(F,x)
```

- Să calculăm $\frac{d}{dx}\int_1^{\ln x} \frac{1}{t\cdot\sqrt{t^2+1}}\,dt$

```
» f=1/(t*sqrt(t^2+1));F=int(f,1,log(x));fx=diff(F,x)
» fx=simple(fx)
```

- Să determinăm termenul s_{25} din dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $f(x)=\arcsin x,\ |x|\le 1$

```
».f=asin(x);ft=taylor(f,0,25)
```

- Să determinăm termenul s_{19} din dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt,\ x\in\mathbf{R}$:

```
» f=1/sqrt(1+t^2);F=int(f,0,x);taylor(F,0,19)
```

Probleme propuse

1. Calculaţi integralele:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0} x\cdot arctgx dx\ ;\ \int_1^e \frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)\cdot(x+5)\cdot(x+6)}dx\ ;$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+x+1}}dx\ ;\ \int_1^5 \sqrt{-x^2+6x-5}\,dx$$

2. Justificaţi afirmaţia: „şirul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x dx$ este descrescător şi convergent la zero”. Ilustraţi cu ajutorul Matlab-ului acesastă afirmaţie.

3. Calculaţi derivatele:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{t^6+1}dt\ ;\quad \frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x^2+1}} e^{-t^4}\,dt$$

Integrale improprii

- Să calculăm $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

```
»syms x
» f=exp(-x^2);int(f,0,inf)
```

In cazul integralelor improprii nu putem folosi dezvoltarea în serie a funcţiei, deoarece transferul de integrabilitate se poate utiliza doar pe intervale compacte $[a,b]$. Să încercăm o înlocuire a funcţiei $f(x)=e^{-x^2}$ cu polinomul s_{19}, din seria Taylor asociată:

```
» f=exp(-x^2);ft=taylor(f,0,19)
» int(ft,0,inf)
ans =
   -inf
```

Răspunsul este greşit, deoarece pe baza criteriului de convergenţa cu inegalităţi, integrala converge.

- Calculaţi $\int_0^{\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$,

```
» g=(atan(x))/(1+(x^2))^(3/2);int(g,0,inf)
```

- Integrala $\int_a^{\infty} \sin x dx$ este divergentă; să urmărim răspunsul dat de soft:

```
»f=sin(x);int(f,0,inf)
 ans =
         undefined
```

Calculaţi :

- $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$

```
»  syms x
»  f=1/((x+1)*sqrt(1-x^2));int(f,0,1)
```

- $\int_{-2}^0 \frac{1}{x\cdot\sqrt{4-x^2}}\,dx$

```
»  f=1/(x*sqrt(4-x^2));int(f,-2,0)
ans =
             -inf
```

ceea ce ne confirma divergenţa integralei.

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{\left|1-x^2\right|}}\,dx$

```
» f=1/((x+1)*sqrt(abs(1-x^2)));int(f,0,inf)
```

- $I = \int_0^{\pi/2} \ln(tgx)dx$

```
»  f=log(tan(x));int(f,0,pi/2)
  ans =
             0
```

Probleme propuse

1. Calculaţi următoarele integrale, dupa ce în prealabil aţi studiat convergenţa lor:
   - o $\int_0^{\infty} \frac{2+arctgx}{x^2+1} dx$;
   - o $\int_1^{\infty} \frac{arctgx}{x^2} dx$;
   - o $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)} dx$;
   - o $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-x+1}} dx$;
   - o $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$;

Integrale duble

Pentru a evalua simbolic integrala int = $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$ vom lucra in două etape: după declararea variabilelor simbolice, şi a funcţiei f evaluăm $\int_c^d f(x,y)dy$ =intx şi apoi $\int_a^b$ intx dx =int

```
» syms x y
»f=f (x,y);intx=int(f,y,c,d)
»int=int(intx,a,b)
```

Se poate evalua integrala folosind o singură funcţie şi anume:

```
»syms x y
» f= f (x,y);; int=int(int(f, y,c,d), a,b)
```

Nu uitaţi că dacă *f* este funcţie continuă se poate permua ordinea deintegrare!

Calculaţi:

- $\iint_{[0,1]\times[1,\sqrt{3}]} \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$,

```
»f=x/(x^2+y^2); intx=int(f,y,0,1)
intx =
atan(1/x)
» I=int(intx,1,sqrt(3))
I =
log(2)/2 - pi/4 + (pi*3^(1/2))/6
```

sau

```
»int(int(f,y,0,1),1,sqrt(3))
ans =
log(2)/2 - pi/4 + (pi*3^(1/2))/6
```

Matlab nu poate calcula simbolic anumite integrale şi anume cazul în care funcţia nu poate fi integrată prin metode elementare; atunci vor fi calculate numeric scriind double în faţa funcţiilor prezentate anterior,

- În calculul integralei $\iint\limits_{[0,1]\times[1,2]} e^{x^2-y^2}\,dxdy$, să folosim pentru început integrarea simbolică:

```
»syms x y
» f=exp(x^2-y^2);int(int(f,y,1,2),0,1)
ans =
 -1/4*i*erf(2)*pi*erf(i)+1/4*i*erf(1)*pi*erf(i)
```

Matlab nu poate evalua integrala, răspunsul apare în termeni de erf, care înseamnă primitiva unei anumite funcţii. Să aplicăm ultimul rezultat prezentat:

```
» f=exp(x^2-y^2);double(int(int(f,y,1,2),0,1))
 ans =
   0.1978
```

Pentru a calcula $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$, unde $A=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \alpha(x)\le y\le \beta(x)\}$ avem nevoie de reprezentarea grafică a domeniului de integrare, pentru a-l defini cu inegalităţi.

- $\iint\limits_A (x+y)dxdy$, unde mulţimea A este limitată de parabola $y=x^2-2$ şi de prima bisectoare $y=x$:

Pentru început calculăm abscisele punctelor de intersecţie:

```
» syms x
»  limx=solve(x^2-2-x)
    limx =
           [ -1]
           [  2]
```

Apoi vom desena în acelaşi sistem de axe cele două curbe, pentru $x\in[-1,2]$:

```
»  x=-1:.1:2;y1=x.^2-2;y2=x;plot(x,y1,x,y2)
```

Din desen deducem că $x^2-2\le y\le x$, şi suntem în măsura să calculăm simbolic integrala

```
» syms x y
» f=x+y;int(int(f,y,x^2-2,x),-1,2)
    ans =
             9/20
```

În cazul integralei $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$, unde mulţimea A este de forma $A=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\ \alpha_1(y)\le x\le \beta_1(y)\}$, desenul este mai complicat; soluţia este inter-schimbarea axelor de coordonate între ele

- Să calculăm $\iint\limits_A (x-y)dxdy$, unde A este limitată de parabola $y^2=x+4$ şi de dreapta $y=x-2$

```
» syms y
» solve(y^2-4-y-2)
    ans =
             [ -2]
             [  3]
» y=-2:.1:3;x1=y.^2-4,x2=y+2;plot(y,x1,y,x2)
```

Remarcaţi axele de coordonate!!

Putem descrie mulţimea A cu ajutorul inegalităţilor: $-2\le y\le 3$; $y^2-4\le x\le y+2$

```
» syms x y
» f=x-y;inty=int(f,x,y^2-4,y+2)
    inty =
```

```
   1/2*(y+2)^2-1/2*(y^2-4)^2-y*(y+6-y^2)
» int(inty,-2,3)
   ans =
         -125/12
```

- $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, unde A este limitată de cercul $x^2+y^2=2$ şi parabola $y^2=x$ (interiorul în raport cu parabola.)

```
»syms y
»solve(y^4+y^2-2)
   ans =
         [        1]
         [       -1]
         [  i*2^(1/2)]
         [ -i*2^(1/2)]
»y=-1:.1:1; x1=y.^2;x2=sqrt(2-y.^2);plot(y,x1,y,x2)

»f=sqrt(x^2+y^2);int(int(f,x,y^2,sqrt(2-y^2)),-1,1)
Warning: Explicit integral could not be found.
In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
   ans =
         int(1/2*2^(1/2)*(2-y^2)^(1/2)+1/2*y^2*log((2-y^2)^(1/2)+2^(1/2))-1/2*y^2*(y^4+y^2)^(1/2)-
   1/2*y^2*log(y^2+(y^2*(1+y^2))^(1/2)),y = -1 .. 1)
```

Integrala nu poate fi rezolvată simbolic.

```
»f=sqrt(x^2+y^2);double(int(int(f,x,y^2,sqrt(2-y^2)),-1,1))
 Warning: Explicit integral could not be found.
»In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
   ans =
       1.6956
```

Dacă în problemele anterioare am evitat folosirea proprietăţii de aditivitate a integralei duble, prin schimbarea ordinii de integrare, în exerciţiul următor, nu avem altă soluţie:

- $\iint_A (x^2+y^2)dxdy$, unde A este definită de inegaliatea $|x|+|y|\le 1$

Înainte de a desena cu Matlab domeniul de integrare, trebuie să observăm că $|x|\le 1-|y|$, ceea ce înseamnă că $x\in[-1,1]$

```
» x=-1:.1:1;y1=1-abs(x);y2=abs(x)-1;plot(x,y1,x,y2)
```

Să descompunem mulţimea A, în două submulţimi, cu dreapta $x=0$

```
»x1=-1:.1:1;y1=1-abs(x);y2=abs(x)-1;x3=0;y3=1:.1:1;
plot(x,y1,x,y2,x3,y3,'*')
```

Mulţimea A_1 (cea din stânga axei Oy) este definită de inegalităţile: $-1\le x\le 0, -1-x\le y\le 1+x$, în timp ce mulţimea A_2 este definită de: $0\le x\le 1, -1+x\le y\le 1-x$

```
»syms x y
» int(int(x^2+y^2,y,-1-x,1+x),-1,0)+int(int(x^2+y^2,y,-1+x,1-x),0,1)
   ans =
         2/3
```

Să calculăm integrale duble, folosind schimbarea de variabile. Prezentăm integrale calculabile prin trecere la coordonate polare sau coordonate polare generalizate:

- $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ unde mulţimea A este limitată de cercul $x^2+y^2=4$.

Declarăm variabilele simbolice care apar x y r phi, scriem ecuaţia curbei ce limitează domeniul în coordonate polare şi o rezolvăm stabilind astfel limitele între care variază r.

```
»syms x y r phi
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-4,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polardom =
            r^2-4
»limr=solve(polardom,r)
    limr =
            [  2]
            [ -2]
```

Ştim că r este pozitiv, deci $r \in [0,2]$; asupra lui φ nu se pune nici o condiţie, aşadar $\varphi \in [0,2\pi]$.
Scriem funcţia de integrat în coordonate polare şi calculăm jacobianul trecerii de la coordonate carteziemne la cele polare

```
» polarfun=simplify(subs(f,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polarfun =
            csgn(r)*r
```

r este pozitiv, avem de fapt $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r$ (csgn=signum)

```
» F=[r*cos(phi),r*sin(phi)];jacob=det(jacobian(F,[r,phi]))
    jacob =
    cos(phi)^2*r+r*sin(phi)^2
»j=simple(jacob)
    j =
        r
```

Astfel avem:

```
»int(int(r*r,0,2),0,2*pi)
    ans =
            16/3*pi
```

- $\iint_A (x+y)dxdy$, unde mulţimea A se află în primul cadran şi este limitată de cercul $x^2+y^2=1$ şi prima bisectoare.

Domeniul este definit de inegalităţile $x^2+y^2 \le 1$ şi $y \le x$:

```
syms x y r phi
» polardom1=simplify(subs(x^2+y^2-1,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polardom1 =
            r^2-1
» polardom2=simplify(subs(y-x,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
    polardom2 =
            r*sin(phi)-r*cos(phi)
```

Calculăm limitele între care variază r şi nu uităm că r este pozitiv, apoi calculăm limitele între care variază φ ştiind că $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$:

```
»limr=solve(polardom1,r)
limr =
        [  1]
        [ -1]

»limphi=solve(polardom2,phi)
limphi =
```

```
        1/4*pi
```

Aşadar $r \in (0,1)$, în timp ce $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Calculăm $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ şi când integrăm nu uităm să înmulţim cu jacobianul transformării.

```
» polarfun=simplify(subs(x+y,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polarfun =
        r*cos(phi)+r*sin(phi)
» int(int(polarfun*r,0,1),0,pi/4)
ans =
        1/3
```

- $\iint\limits_A e^{-x^2-y^2}dxdy$, dacă A este limitată de cercul $(x-1)^2+y^2=1$

```
»syms x y r phi
» polarfun=simplify(subs((x-1)^2+y^2-1,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polarfun =
        -2*r*cos(phi)+r^2
 » rlim=solve(polarfun,r)
rlim =
        [          0]
        [ 2*cos(phi)]
```

Am obţinut că $0 \le r \le 2\cos\varphi$; această inegalitate implică $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

```
»int(int(r*exp(-r^2),0,2*cos(phi)),-pi/2,pi/2)
Warning: Explicit integral could not be found.
In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
ans =
int(-1/2*exp(-4*cos(phi)^2)+1/2,phi = -1/2*pi .. 1/2*pi)
```

Integrarea simbolică nu rezolvă problema, este nevoie de integrare numerică:

```
» double(int(int(r*exp(-r^2),0,2*cos(phi)),-pi/2,pi/2))
Warning: Explicit integral could not be found.
In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
ans =
        1.0862
```

În cazul în care domeniul de integrare este limitat de o elipsă, sau o porţiune de elipsă, se folosesc coordonate polare generalizate:

- Calculaţi aria mulţimii limitate de elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Formula de calcul a ariei este cunoscută $aria(A)=\iint\limits_A dxdy$

```
»syms x y r phi
»f=sqrt(1-x^2/9-y^2/4);
»polarfun=simplify(subs(f,[x,y],[3*r*cos(phi),2*r*sin(phi)]))
polarfun =
        (1-r^2)^(1/2)
»polardom=simplify(subs(x^2/9+y^2/4-1,[x,y],[3*r*cos(phi),m2*r*sin(phi)]))
polardom =
        -1+r^2
» limr=solve(polardom,r)
limr =
        [  1]
```

```
        [ -1]
 » F=[3*r*cos(phi),2*r*sin(phi)];jacF=det(jacobian(F,[r,phi]))
jacF =
        6*cos(phi)^2*r+6*r*sin(phi)^2
» JF=simple(jacF)
JF =
        6*r
»int(int(polarfun*JF,r,0,1),0,2*pi)
ans =
        4*pi
```

- Să calculăm aria limitată de lemniscata lui Bernoulli, curbă a cărei ecuaţie în coordonate carteziene este $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)$

Desenând curba observăm că din simetria figurii, ne permitem să calculăm doar aria limitată de bucla din dreapta, rezultatul final fiind această arie înmulţită cu 2;

```
»syms x y r phi
»polardom=simplify(subs((x^2+y^2)^2-x^2+y^2,[x,y],[r*cos(phi), r*sin(phi)]))
polardom =
        r^4-2*r^2*cos(phi)^2+r^2
»limr=solve(polardom,r)
limr =
        [                    0]
        [                    0]
        [  (-1+2*cos(phi)^2)^(1/2)]
        [ -(-1+2*cos(phi)^2)^(1/2)]
```

Rezultă că $r\in[0,\sqrt{2\cos^2\varphi-1}]$

```
»limphi=solve(2*cos(phi)^2-1)
limphi =
        [ 1/4*pi]
        [ 3/4*pi]
```

Urmărind desenul, deducem din simetria buclei din dreapta că $\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$

```
»aria =2*int(int(r,r,0,sqrt(2*cos(phi)^2-1)),-pi/4,pi/4)
aria =
        1
```

Probleme propuse

1. $\iint\limits_A (xy+1)dxdy$, *unde mulţimea* A *este limitată de parabola* $y=x^2-3$ *şi dreapta* $y=3x+1$.

2. $\iint\limits_A (x^2-y)dxdy$, , *unde* A *este limitată de parabolele* $y^2=x+3$ şi $y^2=-x+5$

3. *Calculaţi aria mulţimii mărginita de dreptele:* $y=x$, $y=2x$ şi. $y=4-x$

4. $\iint\limits_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dxdy$, *unde mulţimea* A *este situaţa deasupra axei* Ox şi este *limitată de semicercul* $x^2+y^2=4$ $(y\geq 0)$.

5. $\iint_A (xy+2)dxdy$, *unde mulţimea* A *se află în primul cadran şi este limitată de cercul* $x^2+y^2=1$ *şi de dreptele* $y = x\sqrt{3}$ şi $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

6. *Calculaţi aria limitată de elipsa* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Integrale triple

Calculul integralelor triple pe mulţimea $[a,b]\times[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ se efectuează imediat, prin iterare, cum se vede în exemplul următor:

- $$\iiint_{[-1,1]\times[0,3]\times[1,2]} (xyz+x^2+yz)dxdydz$$

```
» syms x y z
»  int(int(int(x*y*z+x^2+y*z,x,-1,1),y,0,3),1,2)
ans =
         31/2
```

Calculăm în continuare $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$, în cazul în care avem:

$$V = \{(x,y,z)\big|(x,y)\in D, \alpha(x,y)\le z\le \beta(x,y)\} ,$$

unde $\alpha,\beta : D \to \mathbf{R}$, sunt funcţii continue.

- $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$, unde mulţimea V este limitată de paraboloidul $z = x^2+y^2$ şi de sfera $x^2+y^2+z^2=9$, interiorul în raport cu paraboloidul.

Vom începe prin a desena cele două suprafeţe ce limitează mulţimea V ; am folosit instrucţiunea ezsurf pentru desenul porţiunilor de suprafaţă, care sunt grafice ale unor funcţii (expresii simbolice), acelaşi rezultat îl vom obţine folosind ezmesh:

```
» syms x y z
»ezmesh(sqrt(6-x^2-y^2),[-2,2,-2,2]);hold on;
»ezmesh(x^2+y^2,[-2,2,-2,2]); hold off
```

Observăm că z variază între suprafaţa paraboloidului şi emisfera superioară a sferei, adică :

$$x^2+y^2 \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2} ,$$

ceea ce înseamnă că prima integrala ce o avem de calculat este $\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x+y+z)dz$:

```
» Iz= int(x+y+z,z,x^2+y^2,sqrt(9-x^2-y^2))
Iz =
x*((9-x^2-y^2)^(1/2)-x^2-y^2)+y*((9-x^2-y^2)^(1/2)-x^2-y^2)+9/2-1/2*x^2-1/2*y^2-1/2*(x^2+y^2)^2
```

Să determinăm planul în care se intersectează cele doua suprafeţe:

```
 »solve(z^2+z-6)
ans =
```

```
[ -3]
[  2]
```

Mulţimea este situată deasupra planului xOy, deci intersecţia are loc în $z = 2$, după cercul $x^2 + y^2 = 2$. Proiecţia mulţimii V în planul xOy va fi discul $x^2 + y^2 \le 2$ şi pentru a calcula integrala dublă pe acest disc, trecem la coordonate polare:

```
»syms x y r phi
»polarIz=simplify(subs(Iz,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polarIz =
r*cos(phi)*(9-r^2)^(1/2)-r^3*cos(phi)+r*sin(phi)*(9-r^2)^(1/2)-r^3*sin(phi)+9/2-1/2*r^2-1/2*r^4
»polardom=simplify(subs((x^2+y^2-2),[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polardom =
r^2-2
» limr=solve(polardom)
limr =
        [  2^1/2]
        [ -2^1/2]
```

Astfel $r \in [0, \sqrt{2}]$ şi $\varphi \in [0, 2\pi]$, asupra unghiului nefiind impusă nicio restricţie:

```
» int(int(polarIz*r,phi,0,2*pi),0,2)
ans =
        20/3*pi
```

- $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$ unde V este limitat de conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi emisfera superioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

Pentru a ne simplifica lucrul în Matlab, observăm că sfera are ecuaţia $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

```
» syms x y z
» ezmesh(sqrt(x^2+y^2),[-1.9,1.9,-1.9,1.9]);hold on
» ezmesh(2+sqrt(4-x^2-y^2),[-1.9,1.9,-1.9,1.9]);hold off
```

Se vede din figură că $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ şi astfel:

```
» Iz=int(z^2,z,sqrt(x^2+y^2),2+sqrt(4-x^2-y^2))
Iz =
        1/3*(2+(4-x^2-y^2)^(1/2))^3-1/3*(x^2+y^2)^(3/2)
```

Determinăm planul în care se intersectează suprafeţele

```
»  solve(2*z^2-4*z)
ans =
        [ 0]
        [ 2]
```

Proiecţia mulţimii V în planul xOy va fi discul $x^2 + y^2 \le 4$

```
»  syms x y r phi
»  polarIz=simplify(subs(Iz,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polarIz =
32/3+16/3*(4-r^2)^(1/2)-2*r^2-1/3*(4-r^2)^(1/2)*r^2-1/3*csgn(r)*r^3
»polardom=simplify(subs(x^2+y^2-4,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polardom =
        r^2-4
» limr=solve(polardom)
limr =
```

```
        [  2]
        [ -2]
» int(int(polarIz*r,r,0,2),0,2*pi)
ans =
        48*pi
```

- $\iiint\limits_V (x^2 + yz)dxdydz$ unde V este situat deasupra paraboloidului $z = x^2 + y^2$ şi sub planul $x + y + z = \frac{17}{2}$.

Pentru început desenăm cele două suprafeţe, în scopul de a stabili limitele între care variază z :

```
»  syms x y z
»  ezmesh(x^2+y^2,[-5,5,-5,5]);hold on;
» ezmesh(17/2-x-y,[-5,5,-5,5]);hold off
```

Aşadar $x^2 + y^2 \le z \le \frac{17}{2} - x - y$.

```
» Iz=int(x^2+y*z,z,x^2+y^2,17/2-x-y)
Iz =
x^2*(17/2-x-y-x^2-y^2)+1/2*y*((17/2-x-y)^2-(x^2+y^2)^2)
```

Eliminând z din cele două ecuaţii ce definesc suprafeţele $z = x^2 + y^2$ şi $x + y + z = \frac{17}{2}$, obţinem proiecţia acestei mulţimi în planul xOy : $x^2 + y^2 + x + y \le \frac{17}{2}$

Inegalitatea defineşte un disc şi merită să punem în evidenţă coordonatele centrului, pentru a face o transformare de coordonate convenabilă.

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \le 9$$

şi astfel vom nota $x + \frac{1}{2} = r \cdot \cos\varphi,\ y + \frac{1}{2} = r \cdot \sin\varphi.$

```
»  syms x y r phi
» polarIz=simplify(subs(Iz,[x,y],[r*cos(phi)-1/2,r*sin(phi)-1/2]))
polarIz =
-81/4-9*r^2*cos(phi)*sin(phi)9/2*r*cos(phi)+99/2*r*sin(phi)+r^4*cos(phi)*sin(phi)+
18*r^2*cos(phi)^2+5/4*r^4-9*r^2+1/2*r^3*cos(phi)-2*r^4*cos(phi)^2-r^3*sin(phi)-1/2*r^5*sin(phi)
»polardom=simplify(subs(x^2+y^2+x+y-17/2,[x,y],[r*cos(phi)-1/2,r*sin(phi)-1/2]))
polardom =
        -9+r^2
»  solve(polardom)
ans =
        [  3]
        [ -3]
```

Avem: $r \in [0,3]$, $\varphi \in [0,2\pi]$; calculăm jacobianul transformării:

```
»  F=[r*cos(phi)-1/2,r*sin(phi)-1/2];j=det(jacobian(F,[r,phi]))
j =
        cos(phi)^2*r+r*sin(phi)^2
»  JF=simple(j)
JF =
        r
»  int(int(polarIz*JF,phi,0,2*pi),0,3)
ans =
        -243/2*pi
```

Dacă am folosi transformarea $x = r \cdot \cos\varphi, \ y = r \cdot \sin\varphi.$, apar serioase complicaţii la determinarea limitelor domeniului de integrare, cum se vede din secvenţa următoare:

```
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2+x+y-17/2,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polardom =
        r^2+r*cos(phi)+r*sin(phi)-17/2
» limr=solve(polardom,r)
limr =
[ -1/2*cos(phi)-1/2*sin(phi)+1/2*(cos(phi)^2+2*cos(phi)*sin(phi)+sin(phi)^2+34)^(1/2)]
[ -1/2*cos(phi)-1/2*sin(phi)-1/2*(cos(phi)^2+2*cos(phi)*sin(phi)+sin(phi)^2+34)^(1/2)]
```

Nici folosirea instrucţiunii simple nu ajută la rezolvarea problemei.

```
» limr=simple(limr)
limr =
[ -1/2*cos(phi)-1/2*sin(phi)+1/2*(35+sin(2*phi))^(1/2)]
[ -1/2*cos(phi)-1/2*sin(phi)-1/2*(35+sin(2*phi))^(1/2)]
```

- $\iiint\limits_V (xy+z)dxdydz$, unde mulţimea V se afla deasupra planului xOy şi este limitată de cilindrul $x^2+y^2=\frac{9}{4}$ şi emisfera superioară a sferei $x^2+y^2+z^2=9$.

Problema mai delicată este reprezentarea grafică a celor două suprafeţe.
Funcţia sphere generează coordonatele (x, y, z) ale sferei unitate, precizându-se numărul de puncte folosite:

```
»{x,y,z]= sphere (N); mesh(x,y,z);
```

Am încercat această variantă: ştiind că raza sferei este 1, am ales raza cilindrului, astfel încât să păstrăm proporţia din enunţ: $\frac{1.5}{3}=\frac{R}{1}$.
Dezavantajul constă în faptul că nu am reuşit să desenăm doar corpul care se află deasupra planului xOy :

```
» [x,y,z]=cylinder(.5,100);mesh(x,y,z);hold on
» [x,y,z]=sphere(100);mesh(x,y,z);hold off
```

Varianta care pare mai bună este combinaţia dintre a folosi funcţia cylinder, şi a desena în acelaşi sistem de axe emisfera superioară, care este graficul funcţiei: $f(x, y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

```
»[x,y,z]=cylinder(1.5,100);mesh(x,y,z);hold on
»[x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=sqrt(9-x.^2-y.^2);surf(x,y,z);hold off
```

şi astfel deducem că $0 \le z \le \sqrt{9-x^2-y^2}$ în timp ce proiecţia pe planul xOy este discul $x^2+y^2 \le \frac{9}{4}$:

```
»syms x y z
» Iz=int(x*y+z^2,z,0,sqrt(9-x^2-y^2))
Iz =
        x*y*(9-x^2-y^2)^(1/2)+1/3*(9-x^2-y^2)^(3/2)
» syms x y r phi
» polarIz=simplify(subs(Iz,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polarIz =
        r^2*cos(phi)*sin(phi)*(9-r^2)^(1/2)+3*(9-r^2)^(1/2)-1/3*(9-r^2)^(1/2)*r^2
» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-9/4,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polardom =
        r^2-9/4
» limr=solve(polardom)
limr =
        [  3/2]
        [ -3/2]
```

```
»int=int(int(r*polarIz,phi,0,2*pi),0,3/2)
int =
        -729/80*pi*3^(1/2)+162/5*pi
» -729/80*pi*3^(1/2)+162/5*pi
ans =
        52.2029
```

O alta observaţie importantă: dacă în funcţia int nu specificăm variabila φ, softul integrează în funcţie de r şi avem un rezultat surprinzător, în care apar numere complexe:

```
»int=int(int(r*Iz,0,2*pi),0,3/2)
int =
2/5*i*pi^2*(-9+4*pi^2)^(3/2)*sin(3/2)^2+3/5*i*(-9+4*pi^2)^(3/2)*sin(3/2)^2-2/5*i*pi^2*(9+4*pi^2)^(3/2)+
9/10*i*(-9+4*pi^2)^(3/2)+81/5*sin(3/2)^2+243/10
```

- Calculaţi volumul limitat de $x^2+y^2+z^2=4z$ şi $x^2+y^2+z^2=4$

```
»ezmesh(sqrt(4-x^2-y^2),[-1.9,1.9,-1.9,1.9]);hold on;
»ezmesh(2-sqrt(4-x^2-y^2),[-1.9,1.9,-1.9,1.9]);hold off
```

Observăm că $2-\sqrt{4-x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2+y^2}$ şi astfel avem de calculat:

$$vol(V)=\iiint_V dxdydz=\iint_{pr_{xOy}V}\left(\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dz\right)dxdy$$

Cele două sfere se intersectează în planul $z=1$, după cercul $\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$.

```
»syms x y r phi
»Iz=int(1, 2-sqrt(4-x^2-y^2, sqrt(4-x^2-y^2))
Iz=
         2*sqrt(4-x^2-y^2)-2
»polarIz=simplify(subs(Iz,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polarfun =
        2*(4-r^2)^(1/2)-2

» polardom=simplify(subs(x^2+y^2-3,[x,y],[r*cos(phi),r*sin(phi)]))
polardom =
        r^2-3
» limr=solve(polardom)
limr =
        [  3^(1/2)]
        [  -3^(1/2)]
» int(int(polarIz*r,r,0,3^(1/2)),0, 2*pi)
ans =
        10/3*pi
```

Schimbarea clasică de variabile în integralele triple este trecerea la coordonate sferice; în cazul particular al unui elipsoid se folosesc coordonatele sferice generalizate. Prezentăm în continuare mai multe integrale triple, calculate Symbolic math, prin schimbare de variabilă:

- $\iiint_V (z+1)dxdydz$, unde V este mărginită de sfera $x^2+y^2+z^2=9$

Folosind trecerea la coordonate sferice, este necesar să declarăm ca variabile simbolice, atât coordonatele carteziene cât şi cele sferice; apoi calculăm $f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ şi descriem în coordonate sferice domeniul de integrare, pentru a determina limitele de integrare:

```
»syms x y z r phi th
»f=z+1;spherf=simplify (subs(f, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
spherf =
        r*cos(th)+1
```

```
»spherdom=simplify (subs(x^2+y^2+z^2-9, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi), r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
spherdom =
        r^2-9
» limr=solve(spherdom)
limr =
        [  3]
        [ -3]
```

Aşadar $r \in [0,3]$; asupra variabilelor φ şi θ nu se impune nici o condiţie, aşa că $\varphi \in [0,2\pi]$ şi $\theta \in [0,\pi]$. În formula de schimbare de variabile avem nevoie de jacobianul transformării, pe care îl vom calcula:

```
»F=[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)];
»JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]))
JF =
        sin(th)^3*cos(phi)^2*r^2+sin(th)^3*sin(phi)^2*r^2+r^2*sin(th)*sin(phi)^2*cos(th)^2+
        r^2*cos(th)^2*cos(phi)^2*sin(th)
» JF=simple(JF)
JF =
        sin(th)*r^2
»  int(int(int(spherf*JF,r,0,3),th,0,pi),0,2*pi)
ans =
        36*pi
```

- $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, unde V este definit de inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \le 2x$

```
»  syms x y z r th phi
»  f=sqrt(x^2+y^2+z^2);
» spherf=simplify (subs(f, [x,y,z],[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
spherf =
        csgn(r)*r
»  spherdom=simplify (subs(x^2+y^2+z^2-2*x, [x,y,z], [r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi),r*cos(th)]))
spherdom =
        r^2-2*r*sin(th)*cos(phi)
»  limr=solve(spherdom,r)
limsr =
        [               0]
        [ 2*sin(th)*cos(phi)]

»int=int(int(int(spherf*r^2*sin(th),r,0,2*sin(th)*cos(phi)),th,0,pi), -pi/2,pi/2)
Warning: Explicit integral could not be found.
> In C:\MATLAB6P5\toolbox\symbolic\@sym\int.m at line 58
int =
int(int(limit(1/4*sin(th)*csgn(r)*r^4,r = 2*sin(th)*cos(phi),left),th = 0 .. pi),th = -1/2*pi .. 1/2*pi)
```

Este posibil ca funcţia de integrat `csgn(r)*r` , să creeze probleme; putem rezolva imediat, ştiind că r este pozitiv:

```
»int=int(int(int(r^3*sin(th),r,0,2*sin(th)*cos(phi)),th,0,pi), -pi/2,pi/2)
int =
        8/5*pi
```

- $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, unde V este definit de inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \le 2y$

Funcţia de integrat este relativ simplă şi putem lucra cu următoarea schimbare de variabile, sugerată de inegalitatea ce defineşte domeniul de integrare $x^2+(y-1)^2+z^2 \le 1$ (se translatează de fapt centrul sferei în origine):

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi + 1,\ z = r\cos\theta$

```
»syms x y z r phi th
»f=x+y+z;
»spherf=simplify(subs(f,[x,y,z], [r*sin(th)*cos(phi), r*sin(th)*sin(phi)+1,r*cos(th)]))
spherf =
```

```
            r*sin(th)*cos(phi)+r*sin(th)*sin(phi)+1+r*cos(th)
»spherdom=simplify(subs(x^2+y^2+z^2-2*y,[x,y,z], [r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi)+1,r*cos(th)]))
spherdom =
            r^2-1
» limr=solve(spherdom)
limr =
            [  1]
            [ -1]
».F=[r*sin(th)*cos(phi),r*sin(th)*sin(phi)+1,r*cos(th)];
».JF=det(jacobian(F,[r,th,phi])) ;
» JF=simple(JF);
» int(int(int(spherfun*r^2*sin(th),phi,0,2*pi),th,0 ,pi),0,1)
ans =
            4/3*pi
```

- $\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}+1}}dxdydz$ unde V este limitat de elipsoidul $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

Vom folosi coordonatele sferice generalizate:

```
» syms x y z r phi th
»  f=1/sqrt(x^2/16+y^2/9+z^2/4+1);
spherf=simplify(subs(f,[x,y,z],[4*r*sin(th)*cos(phi),3*r*sin(th)*sin(phi),2*r*cos(th)]))
spherf =
            (r^2+1)^1/2
»spherdom=simplify(subs(x^2/16+y^2/9+z^2/4-1,[x,y,z],4*r*sin(th)*cos(phi) 3*r*sin(th)*sin(phi),
2*r*cos(th)]))
spherdom =
            r^2-1
» limr=solve(polardom)
limr =
            [  1]
            [ -1]
» F=[4*r*sin(th)*cos(phi), 3*r*sin(th)*sin(phi),2*r*cos(th)];
 »JF=det(jacobian(F,[r,th,phi]))
» JF=simple(JF)
JF =
            24*sin(th)*r^2
»  int(int(int(spherfun*r^2*sin(th),phi,0,2*pi),th,0 ,pi),0,1)
ans =
            2*pi*2^(1/2)+2*pi*log(2^(1/2)-1) !
```

Probleme **propuse**

1. $\iiint\limits_V (xyz+2)dxdydz$, *unde mulţimea* V *este limitată de conul* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *şi de sfera* $x^2+y^2+z^2=1$, *interiorul în raport cu conul.*
2. $\iiint\limits_V (z-1)dxdydz$ unde V este limitat de conul $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ şi emisfera inferioară a sferei $x^2+y^2+z^2=1$.
3. *Calculaţi volumul corpului limitat conul* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *şi de paraboloidul* $z=x^2+y^2$.
4. *Calculaţi volumul corpului situat deasupra planului* xOy *, limitat paraboloidul* $z=4-x^2-y^2$ *şi de cilindrul* $x^2+y^2=1$.
5. $\iiint\limits_V (z^2+xy)dxdydz$, unde mulţimea V se afla în primul octant şi este mărginită de planele de coordonate şi de sfera $x^2+y^2+z^2=4$.

6. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2+1}\,dxdydz$, unde $V\ :\ x^2+y^2+z^2 \le z$.

7. *Calculaţi volumul corpului* $V: \quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4} \le 1$