Subiecte date la examenele din ianuarie- februarie 2008

I

- Studiaţi natura seriilor: $\sum_{n\geq 1}\frac{2}{n^3\cdot\sqrt{n}}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{n+2}{n^2-n+11}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{3^n}{(n+2)!}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$. (2 puncte)
- Calculaţi extremele funcţiei $f(x,y)=y\cdot e^{-x^2-y^2}$ (2 puncte)
- Studiaţi convergenţa şi în caz afirmativ calculaţi integrala: $\int_0^\infty e^{-3x}\cdot\cos x dx$.(2 puncte)
- Calculaţi volumul limitat de conul $z=\sqrt{x^2+y^2}$ şi sfera $x^2+y^2+z^2=2$ (punctul (0,0,1) aparţine mulţimii) (2 puncte)
- Definiţi noţiunea de şir convergent într-un spaţiu liniar normat (0.5 puncte).
- Ce legătură există între diferenţiabilitatea unei funcţii într-un punct şi existenţa derivatelor parţiale ale funcţiei în punctul respectiv? (0.5 puncte).

II

- Calculaţi distanţa de la $A(-1,0,1)$ la $L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2-n+1},\frac{n^2+2}{3^n},\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right)$ (2 puncte)
- Studiaţi continuitatea funcţiei $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^6+y^6+x^6y^6)}{x^6+y^6}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (2 puncte)
- Calculaţi polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcţiei $f(x,y)=x^3\cos y$, în punctul $(2,0)$. (2 puncte)
- Calculaţi masa repartizată pe semicercul situat la dreapta axei Oy, $x^2+y^2=4$, dacă densitatea sa liniară în fiecare punct (x,y) este egală cu $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$. (2 puncte)
- Fie funcţia continuă $f:K\to R$, unde K este o mulţime compactă dintr-un spaţiu metric. Enumeraţi proprietăţile funcţiei f (0.5 puncte).
- Fie $f:(a,b]\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă pe orice inteval $[a+\varepsilon,b]$, $\varepsilon>0$, cu proprietatea că $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$. Enunţaţi un criteriu de convergenţă a integralei $\int_a^b f(x)dx$ (0.5 puncte).

III

- Pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\frac{x}{2x^2+1}$ determinaţi *f*(**R**); este funcţia uniform continuă pe **R**? (2 puncte)
- Este suma seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x}{x^2+n^5}$ o funcţie continuă? Justificaţi răspunsul. (2 puncte)
- Studiaţi existenţa extremelor funcţiei $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-2xy+4xz-6x+4y-8z+14$ (2 puncte)
- Calculaţi volumul mulţimii limitată de conul $z=\sqrt{x^2+y^2}$ şi planul $z=2$ (2 puncte)

- Este o funcţie $f : A \to \mathbf{R}$, unde $A \subset \mathbf{R}^n$ care admite derivate parţiale în $a = (a_1, ..., a_n) \in A$ continuă? (0.5 puncte).
- Care este legătura între o formă diferenţială exacta şi o forma diferenţiala închisă? (0.5 puncte).

IV

- Calculaţi distanţa $d(A, L)$ pentru $A(0,-2,3)$ şi $L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{3^n}, \frac{2n}{n^2+1}, \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^{2n}\right)$ (2 p)
- Studiaţi existenţa extremelor funcţiei $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xz - 4yz + 6x + 4y - 6z + 1$. (2 p)
- Studiaţi convergenţa şi în caz afirmativ calculaţi integrala $\int_0^1 \frac{2x + (\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.(2 p)
- Calculaţi $\int_{(1,2,3)}^{(2,1,5)} \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ (2 p)
- Definiţi L ($\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$) ; dacă T: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este o aplicaţie liniară putem afirma că $T \in$ L ($\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$)? (0.5 p).
- Dacă $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,b]$, se defineşte funcţia

$F : [a,b] \to \mathbf{R}$, prin $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. În ce condiţii este F derivabilă? (0.5 p).

V

- Este şirul de funcţii $f_n(x) = \frac{x^{2n+2} - \sqrt{x^2+5}}{2x^{2n}+5}$ uniform convergent pe [-3,3]?(2p)
- Calculaţi polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcţiei $f(x, y) = y^4 \sin x$, în punctul $(\pi, 1)$. (2p)
- Calculaţi aria mulţimii situată în primul cadran, limitată de cercurile $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, de axa Ox şi de prima bisectoare. (2 p)
- Calculaţi $\int_\gamma (x + y + 2)ds$, dacă ecuaţia curbei γ în coordonate polare este $r = 1 + \cos t,\ t \in [-\pi, \pi]$.(2 p)
- Enunţati criteriul lui Heine pentru funcţii continue. (0.5 p)
- În ce conditii este matricea hessiană simetrică? (0.5 p)

Subiecte date la examenele din ianuarie- februarie 2009

I

- Demonstraţi că şirul $(x_n, y_n, z_n)_n \subset \mathbf{R^3}$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ sunt Cauchy. (1.5p)
- Argumentaţi afirmaţia: „seria de funcţii $\sum_{n\geq 1} \frac{x^3}{x^6+4n^4}$ este convergentă pe **R**". Este suma seriei o funcţie continuă pe **R**? (1.5p)
- Scrieţi formula Taylor pentru funcţia $f:(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\ln(x^2-1)$, în punctul $x_0=2$. (1.5p)
- Studiaţi existenţa extremelor funcţiei $f(x,y)=y\cdot e^{-x^2-y^2}$. (1.5p)
- Calculaţi aria mulţimii mărginită de parabola $y=x^2-5x+4$ si de dreapta $y=1-x$. (1.5p)
- Calculaţi $\int_{\gamma^+} F$, unde $F(x,y,z)=\left(x+y+z, xy-z, xyz\right)$ şi γ^+ este cercul $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{cases}$, parcurs în sens trigonometric. (1.5p)

II

- Considerăm funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+5}$. Calculaţi $f(\mathbf{R})$. Este funcţia uniform continuă pe **R**? (1.5 p)
- Care este natura seriilor următoare: $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{5^n}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{5^n}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2-1}{n^3+7}$ (1.5 p)
- Argumentaţi afirmaţia: „funcţia $f=(f_1, f_2)$ este continuă în $(a,b,c)\in A\subset\mathbf{R^3}$ dacă şi numai dacă funcţiile f_1, f_2 sunt continue în $(a,b,c)\in A\subset\mathbf{R^3}$" (1.5 p)
- Calculaţi extremele funcţiei $f(x,y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$ (1.5 p)
- Calculaţi aria limitată de parabola $y=3-x^2$ şi dreapta $y=2x$. (1.5 p)
- Calculaţi $\int_{\gamma^+}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, unde γ^+ este cercul $x^2+y^2=2x$ parcurs în sens trigonometric (1.5 p)

III

- Câţi termeni ai şirului $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)_n$ se află în afara bilei cu centru în origine şi de rază 0.001? Justificaţi temeinic răspunsul. (1.5 p)
- Studiaţi continuitatea funcţiei $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\ln(1+x^4+y^4+2x^2y^2)}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$ (1.5 p)
- Demonstraţi afirmaţia: dacă funcţia $f:A\to\mathbf{R}$, unde $A\subset\mathbf{R^2}$, este diferenţiabilă în $(a,b)\in \operatorname{int}(A)$ atunci admite f derivate parţiale în (a,b). (1.5 p)
- Calculaţi extremele funcţiei $f(x,y)=x^3+y^3-x\cdot y$ (1.5 p)

- Calculaţi volumul corpului mărginit de emisfera superioară $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ şi planul $z=1$ (1.5 p)
- Calculaţi $\int_{\gamma^+} \frac{y^2dx-x^2dy}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$, unde γ^+ este sfertul astroidei $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ ce se află în primul cadran, parcurs în sens trigonometric(1.5 p)

IV

- Fie şirul de funcţii $f_n(x)=\frac{x\cdot e^{nx}-2}{e^{nx}+\sqrt{x^2-x+1}}$, $x\in \mathbf{R}$; stabiliţi funcţia limită *f*. Este şirul uniform convergent pe [-2,2]? Calculaţi $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.(1.5 p)
- Stabiliţi natura seriilor: $\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{1}{n}$, $\sum_{n\ge 1}\ln\left(1+\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$, $\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(0.2)^n}$ $2+\sum_{n\ge 1}\frac{n^2}{(2n)!}$; Justificaţi temeinic răspunsul. (1.5 p)
- Demonstraţi afirmaţia: funcţia $f:A\to \mathbf{R}^2$, $f=(f_1,f_2)$, $A\subset \mathbf{R}$ este uniform continuă pe *A* dacă şi numai dacă funcţiile f_1 şi f_2 sunt uniform continue pe *A*(1.5 p)
- Calculaţi extremele funcţiei $f(x,y,z)=z\cdot e^{-x^2-y^2-z^2}$ (1.5 p)
- Calculaţi $\iint_A (x^2+y^2)dxdy$ unde *A* se afla în cadranul II şi este limitată de cercurile $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$, axa Oy şi a doua bisectoare. (1.5 p)
- Determinaţi $F(x,y,z)$ ştiind că $dF=\frac{2(-yzdx+zxdy+xydz)}{(x-yz)^2}$

V

- Calculaţi distanţa minimă de la $A(1,0,a)$ la $L=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n^2-2n+3}{n^2}\right)^n, \sqrt[n]{n}, \frac{[3n^3]}{5n^3+1}\right)$ (1.5 p)
- Studiaţi continuitatea funcţiei $f:[0,2\pi]\to$ $\mathbf{R}^2$ definită prin $f(t)=(3\cdot\cos t,\sin t)$. Este mulţimea $M=\{(x,y)\in$ $\mathbf{R}^2$, $\frac{x^2}{9}+y^2=1\}$ compactă? Justificaţi temeinic răspunsul. (1.5 p)
- Demonstraţi afirmaţia: dacă funcţia $f:A\to\mathbf{R}$, unde $A\subset\mathbf{R}^2$, este diferenţiabilă în $(a,b)\in \mathrm{int}(A)$ atunci este continuă în (a,b). (1.5 p)
- Este funcţia $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ diferenţiabilă în origine? (1.5 p)
- Stabiliţi domeniul de definiţie al funcţiei $f(x,y,z)=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$ şi calculaţi-i punctele de extrem. (1.5 p)
- Calculaţi volumul corpului limitat de planul xOy, cilindrul $x^2+y^2=4$ şi paraboloidul $z=x^2+y^2$ (1.5 p)

Subiecte date la examenele din ianuarie- februarie 2010

I

- Fie vectorii $x=(-1,3,0)$ şi $y=(5,-1,2)$. Calculaţi norma euclidiană a acestor vectori, produsul lor scalar şi distanţa euclidiană între cei doi vectori. (1.5 p)
- Care este natura seriilor următoare: $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$; $\sum_{n\geq0}\frac{2^n}{(n+1)!}$; $\sum_{n\geq0}\ln\left(1+\frac{1}{5^n}\right)$? Justificaţi temeinic răspunsurile. (1.5p)
- Calculaţi extremele funcţiei: $f(x,y)=2x^4-12x^2+2x^2y+y^2-4y+20$ şi calculaţi valoarea funcţiei în punctele respective. (1.5p)
- Studiaţi convergenţa integralei $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$, $a>0$, $b\in\mathbf{R}$ şi în caz afirmativ calculaţi-o. (1.5p)
- Calculaţi volumul corpului limitat de conul $z=\sqrt{x^2+y^2}$ şi de emisfera superioară a sferei $x^2+y^2+z^2=8$ (1.5p)
- i. Dacă $(f_n)_n\subset Hom(I,\mathbf{R})$, $I\subset\mathbf{R}$ interval, este un şir de funcţii de clasă C^1 pe I, în ce condiţii avem $\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'$? ii. Ce este un câmp vectorial conservativ? (1.5p)

II

- Calculaţi limita şirului $(x_n,y_n,z_n)=\left(\frac{2n^2-1}{n^2+17},\frac{3^n}{n^3+1},\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n\right)$ (1.5p)
- Calculaţi $f(\mathbf{R})$ pentru $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; este funcţia uniform continuă pe **R**? Justificaţi răspunsul. (1.5p)
- Calculaţi extremele funcţiei $f(x,y)=x^2+2y^2-8x-12y+34$, cu legătura $x+2y=4$.(1.5p)
- Calculaţi aria mărginită de parabola $x=y^2-4$ şi dreapta $x=2$ (1.5p)
- Calculaţi integrala $\int_{\gamma^+}x^2dx-2xydy$ unde γ este sfertul de cerc $x^2+y^2=16$, situat în primul cadran, parcurs în sens trigonometric (1.5p)
- i. Care este condiţia suficientă de diferenţiabilitate a unei funcţii? ii. Daţi cel puţin două exemple de clase de funcţii integrabile (1.5p)

III

- Fie vectorii $x=(1,-2,3,-2)$ şi $y=(2,4,0,5)$. Care dintre ei aparţin bilei deschise de centru $(1,2,1,-1)$ şi rază 5? Care este valoarea minimă a razei bilei astfel încât ambii vectori să aparţină bilei? (1.5p)

- Este suma seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{3x}{x^2+n^{10}}$ o funcţie continuă? Justificaţi temeinic răspunsul (1.5p)
- Calculaţi extremele funcţiei $f(x,y)=4x^2+2y^2+4xy-8x-6y+35$ (1.5p)
- Calculaţi aria mulţimii situate în primul cadran, limitată de cercurile $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$ şi dreptele $y=x\sqrt{3}$, $y=x$. (1.5p)
- Calculaţi $\int_{\gamma^+}\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2}$, unde γ este cercul $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x=z\end{cases}$ parcurs în sens trigonometric. (1.5p)
- i. Ce proprietăţi are funcţia continuă $f:[a,b]\to \mathrm{R}$? ii.În ce situaţie hessiana este o matrice simetrică? (1.5p)