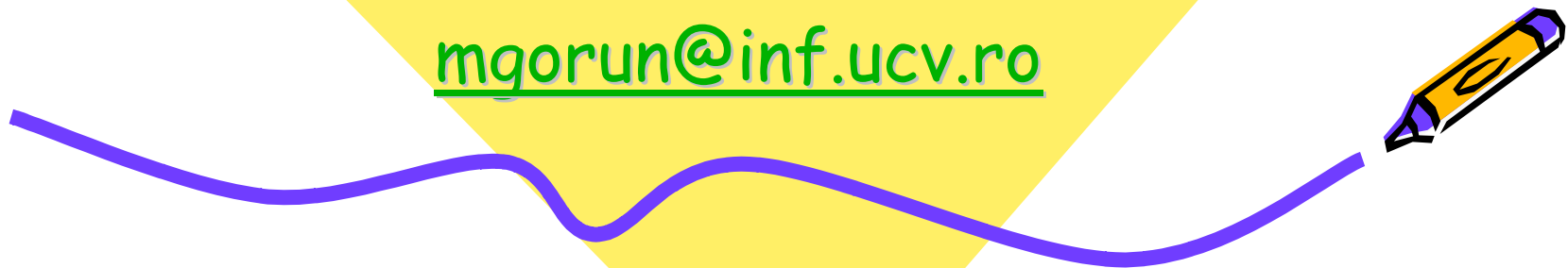




Calcul stiintific

3. Functii continue

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro



1. Limite de functii

Fie (X, d) și (X_1, d_1) , două spații metrice,
o funcție $f: A \rightarrow X_1$, unde $A \subset X$ și $x_0 \in A'$;
există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, dacă:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $d(x, x_0) < \delta$
avem $d_1(f(x), l) < \varepsilon$.





există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, dacă:

oricare ar fi bila $B_1(l, \varepsilon)$ există $B(x_0, \delta = \delta(\varepsilon))$

astfel încât avem:

$$f((A \setminus \{x_0\}) \cap B(x_0, \delta)) \subset B_1(l, \varepsilon).$$





În cazul $(E, \| \cdot \|)$, $(E_1, \| \cdot \|_1)$ spații liniare normate și a
funcției $f: A \rightarrow E_1$, $A \subset E$,

există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $x_0 \in A'$, dacă

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $\|x - x_0\| < \delta$,
avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.



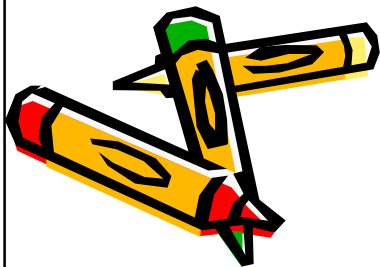
exemplu

- Pentru a vizualiza rezultatul cunoscut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

vom tabela pentru început funcția pentru valori la stânga și la dreapta lui zero, suficient de apropiate de zero.

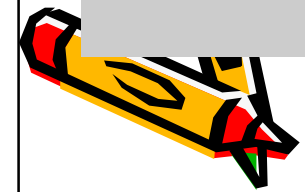
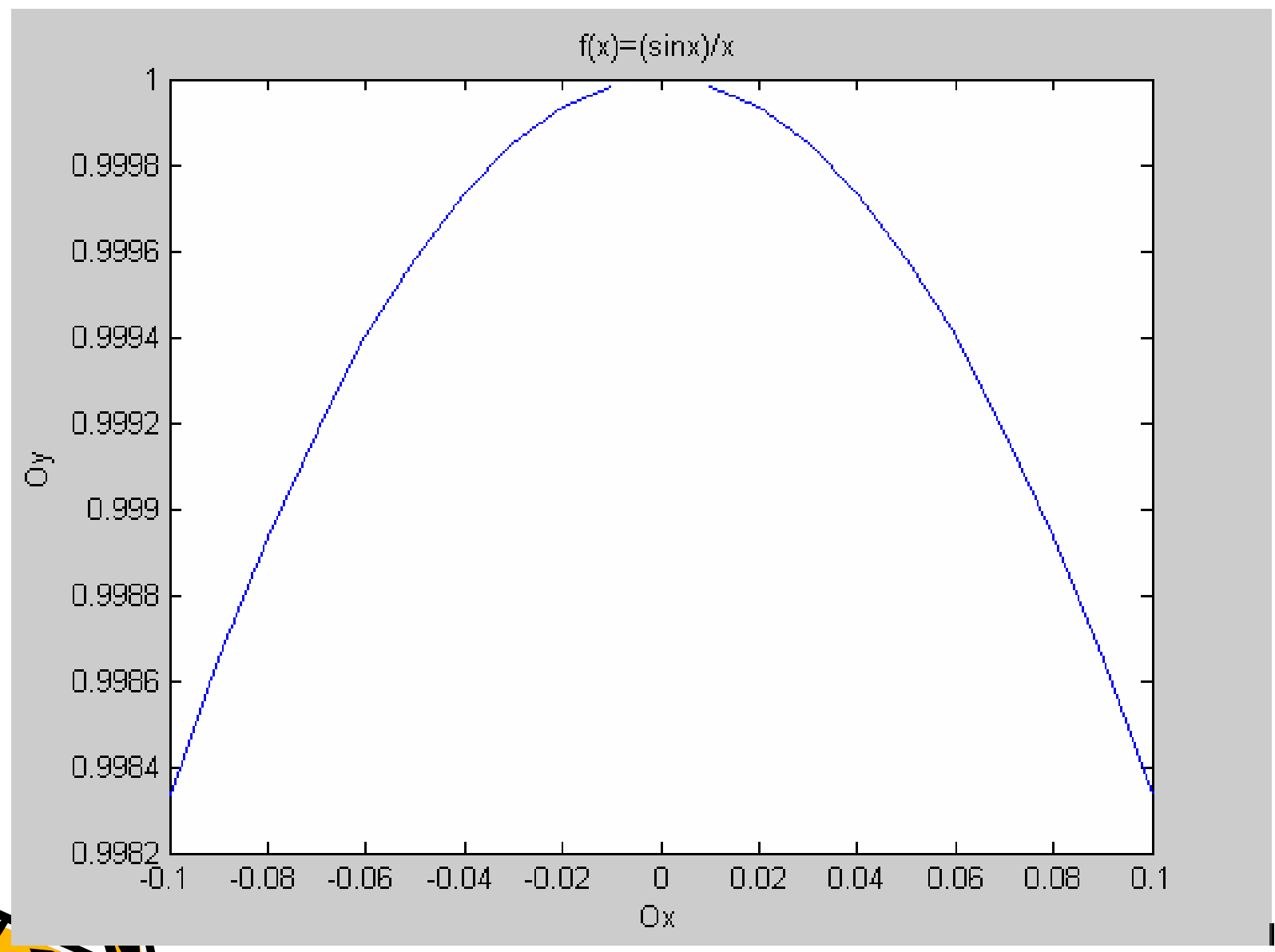
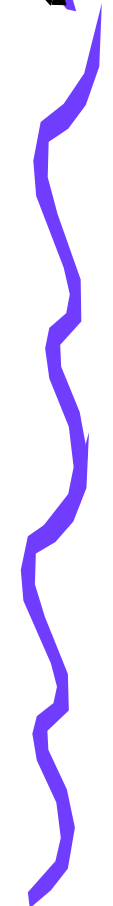
»x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;.0001;.001;.01;.1];[x,(sin(x))./x]





-0.1000	0.9983
-0.0100	1.0000
-0.0010	1.0000
-0.0001	1.0000
0.0001	1.0000
0.0010	1.0000
0.0100	1.0000
0.1000	0.9983





criteriul lui Heine

- Fie (X, d) și (X_1, d_1) , două spații metrice, o funcție $f: A \rightarrow X_1$, unde $A \subset X$ și $x_0 \in A'$; următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

2. oricare ar fi șirul $(x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}$ convergent la x_0 , avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$



exemple

- Nu există $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$, deoarece considerând șirurile

convergente la zero $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ și $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbf{N}$

avem:

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin 2n\pi = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$$

$$f(y_n) = \sin \frac{1}{y_n} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1.$$



```
x = [-.1;-.01;-.001;-.0001;.0001;.001;.01;.1];[x,sin(1./x)]
```

```
ans =
```

```
-0.1000    0.5440
```

```
-0.0100    0.5064
```

```
-0.0010   -0.8269
```

```
-0.0001    0.3056
```

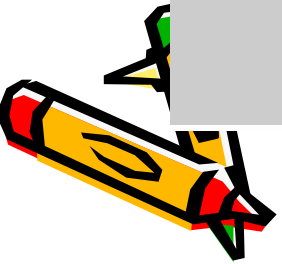
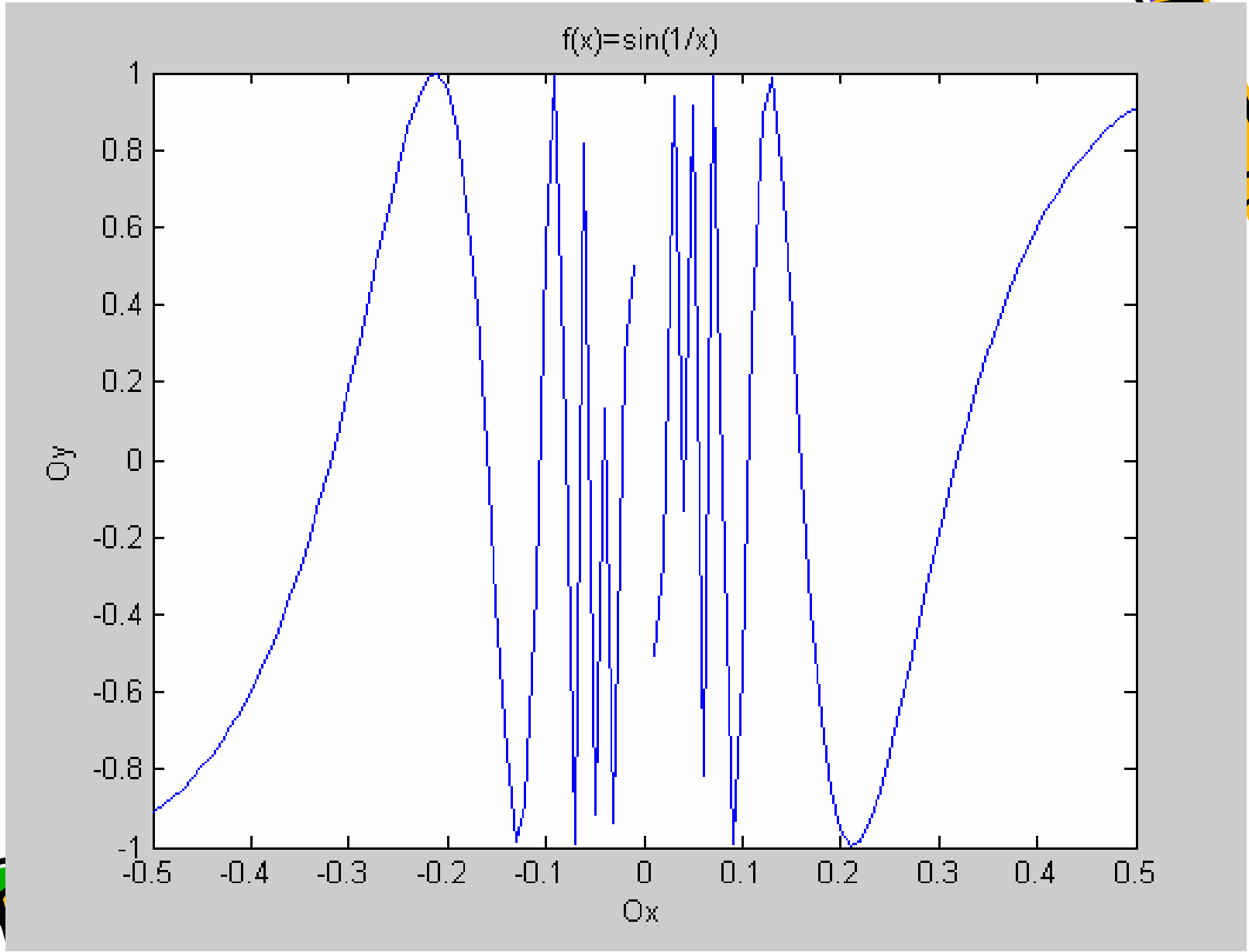
```
0.0001   -0.3056
```

```
0.0010    0.8269
```

```
0.0100   -0.5064
```

```
0.1000   -0.5440
```





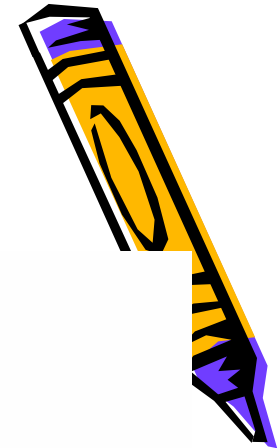
- nu există $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

restricționăm funcția $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ la mulțimea

$\{(x, y) \mid y = m \cdot x\}, m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ și avem:

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Restricția funcției depinde doar de parametrul real m deci nu există limita.



considerând șirurile convergente la $(0,0)$,

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ și } (x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), n \in \mathbf{N}^*$$

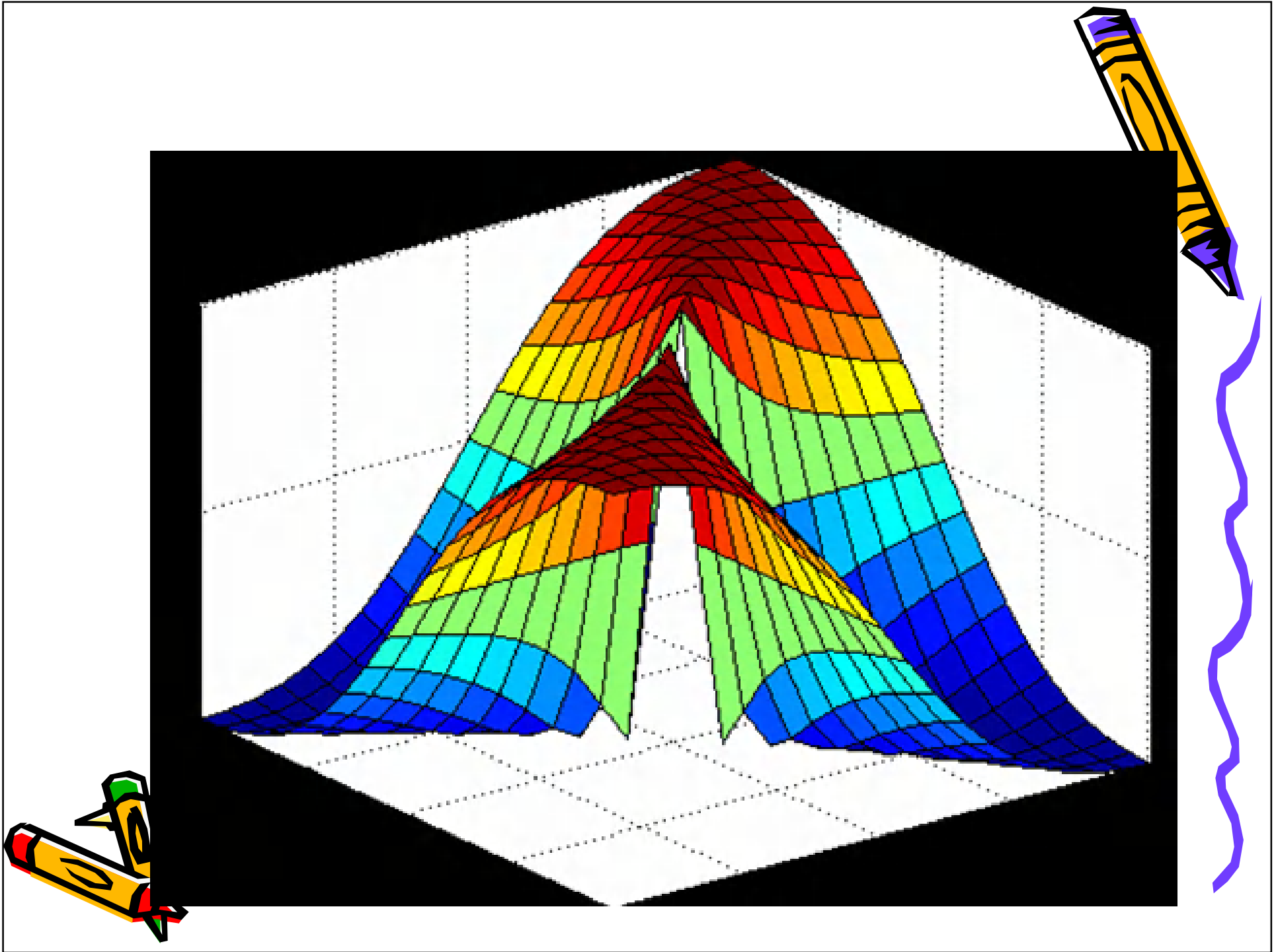
avem

$$f((x_n, y_n)) = \frac{1}{2}, f((x'_n, y'_n)) = \frac{2}{5}, \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f((x_n, y_n)) = \frac{1}{2} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} f((x'_n, y'_n)) = \frac{2}{5}.$$







Fie (X, d) un spațiu metric, $(E, \| \cdot \|)$ un spațiu liniar normat
funcțiile $f, g: A \rightarrow E$, unde $A \subset X$ și $x_0 \in A'$.

Folosind criteriul lui Heine putem demonstra că:

$$\square \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\square \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ unde } \alpha: A \rightarrow \mathbf{R}.$$





Fie spațiile metrice (X, d) , (X_1, d_1) , (X_2, d_2) , funcțiile $f: A \rightarrow X_1$
și $g: B \rightarrow X_2$, unde $A \subset X$, $B \subset X_1$, $f(A) \subset B$ și $x_0 \in A'$;
dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ și $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = l_1$, atunci există

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l_1.$$



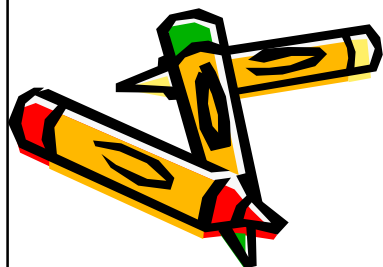
calculul limitelor de functii



□ Fie $f: A \rightarrow \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$ dată de $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, unde $f_k: A \rightarrow \mathbf{R}$, $1 \leq k \leq m$.

Dacă $x_0 \in A'$ avem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbf{R}^m$ dacă și

numai dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = l_k, 1 \leq k \leq m$.



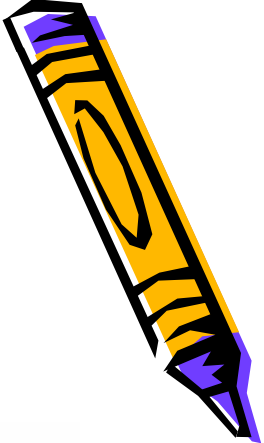


□ Pentru funcțiile $f, g: A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ ce au următoarele proprietăți:

- $|f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq g(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$
- $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_0} g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A'$

avem $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

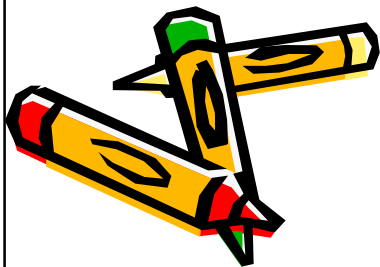




• $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} = 0$, deoarece

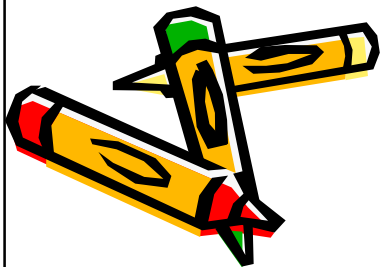
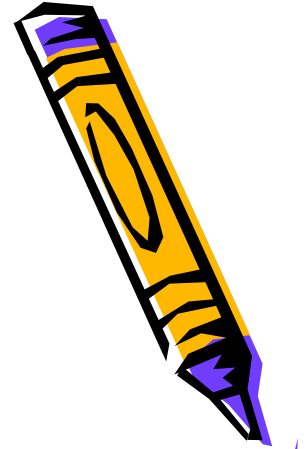
folosind inegalitatea $\frac{|a \cdot b|}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$ avem:

$$\frac{|x^2 \cdot y|}{x^2 + y^2} = \frac{|x \cdot y|}{x^2 + y^2} \cdot |x| \leq \frac{1}{2} \cdot |x| \text{ și } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} \cdot |x| = 0.$$



- $$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + x^4 + y^4 + x^4 \cdot y^4)}{x^4 + y^4}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$



$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + x^4 + y^4 + x^4 \cdot y^4)}{x^4 + y^4} = \\ & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4 + x^4 \cdot y^4}{x^4 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(1 + \frac{x^4 \cdot y^4}{x^4 + y^4} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{x^4 \cdot y^4}{x^4 + y^4} = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4} \cdot x^2 \cdot y^2 \leq \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot y^2$$



Tema 3.1



1. Studiați existența următoarelor limite:

$$\circ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{arctg} x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4};$$

$$\circ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^4 \cdot y^4 + 1} - 1}{x^4 + y^4}$$



2. Functii continue

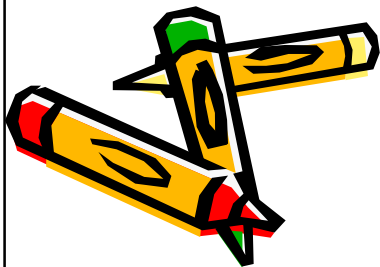
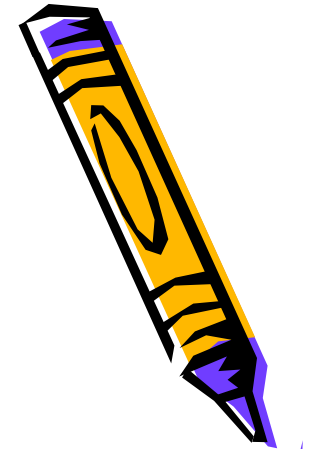
Fie (X, d) și (X_1, d_1) două spații metrice, o funcție

$f: A \rightarrow X_1$, unde $A \subset X$;

f este **continuă** în $x_0 \in A \cap A'$ dacă

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $d(x, x_0) < \delta$ avem

$$d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$





f este continuă în x_0 dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și este egală cu $f(x_0)$.

Dacă funcția $f: A \rightarrow X_1$ este continuă în fiecare punct din A spunem că f este **continuă pe** A .





Fie $(E, \| \cdot \|)$, $(E_1, \| \cdot \|_1)$ spații liniare normate și funcția

$$f: A \rightarrow E_1, A \subset E;$$

f este continuă în $x_0 \in A \cap A'$, dacă

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $\|x - x_0\| < \delta$, avem

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

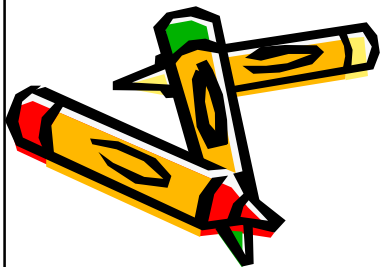


exemplu

- Fie $(E, \| \cdot \|)$ spațiu liniar normat; norma $\| \cdot \|: E \rightarrow \mathbf{R}_+$ este o funcție continuă pe E :

fie $\varepsilon > 0$, determinăm un $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta$ să avem $|\|x\| - \|x_0\|| < \varepsilon$.

deoarece $|\|x\| - \|x_0\|| < \|x - x_0\|$, obținem $\delta = \varepsilon$.



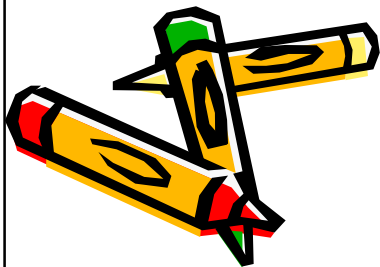
prelungirea prin continuitate



Fie $f: A \rightarrow X_1$, $A \subset X$ și $x_0 \in A' \setminus A$; dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,
se poate construi funcția $g: A \cup \{x_0\} \rightarrow X_1$, continuă în x_0 ,

$$\text{dată de } g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$$

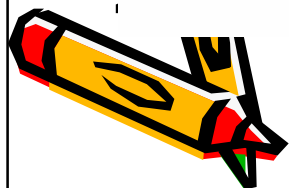
prelungirea prin continuitate a lui f în x_0 .



exemple

- Funcția $f_1 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow [-1,1]$, $f_1(x) = \sin \frac{1}{x}$ nu poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 0$, neexistând $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$.
- Funcția $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_2(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 0$, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



criteriul lui Heine

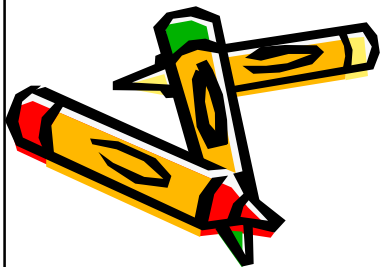
- Fie (X, d) și (X_1, d_1) , două spații metrice, o funcție $f: A \rightarrow X_1$, unde $A \subset X$ și $x_0 \in A' \cap A$; următoarele afirmații sunt echivalente:
 1. f este continuă în x_0 ;
 2. oricare ar fi șirul $(x_n)_n \subset A$, convergent la x_0 , avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$



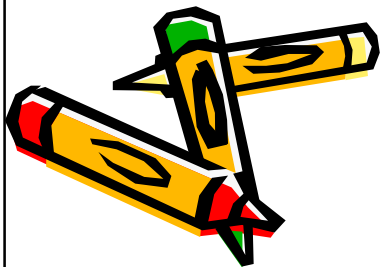
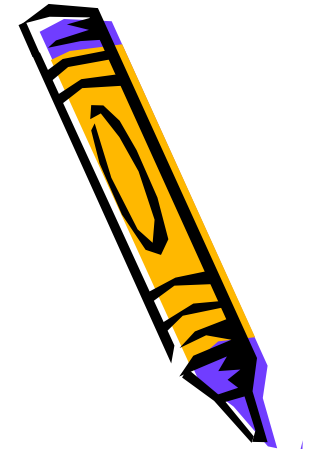
operatii cu functii continue

Fie (X, d) un spațiu metric, $(E, \| \cdot \|)$ un spațiu liniar normat
funcțiile $f, g: A \rightarrow E$, unde $A \subset X$ și $x_0 \in A \cap A'$.

- Dacă funcțiile f și g sunt continue în x_0 , atunci funcția $f + g$ este continuă în x_0 ;
- Dacă funcția f și funcția $\alpha: A \rightarrow \mathbf{R}$ sunt continue în x_0 , atunci funcția $\alpha \cdot f$ este continuă în x_0 .



$C(A) = \{f : A \rightarrow E, f \text{ continuă pe } A\},$
înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire cu
scalar, este un spațiu vectorial real.





Fie spațiile metrice (X, d) , (X_1, d_1) , (X_2, d_2) , funcțiile $f: A \rightarrow X_1$ și $g: B \rightarrow X_2$, unde $A \subset X$, $B \subset X_1$, $f(A) \subset B$ și $x_0 \in A' \cap A$; dacă există f este continuă în x_0 și g este continuă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f$ este continuă în x_0 .

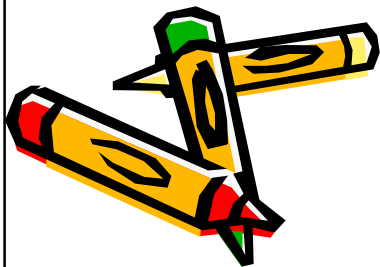
Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.



multime compacta

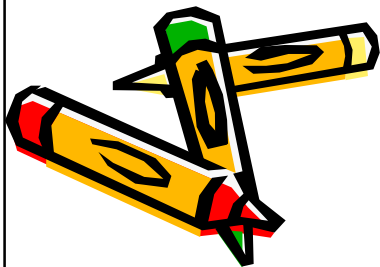
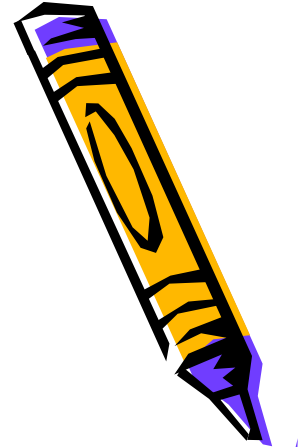
Într-un spațiu metric (X, d) , mulțimea K este *compactă* dacă orice șir din K conține un subșir convergent în K .

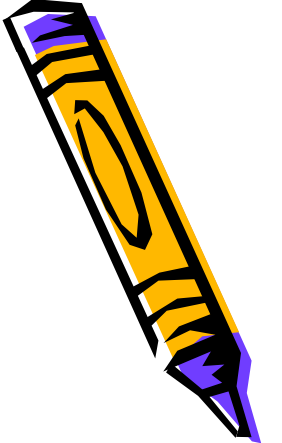

Într-un spațiu metric (X, d) mulțimea $A \subset X$ este *închisă* dacă limita oricărui șir convergent din A aparține lui A .

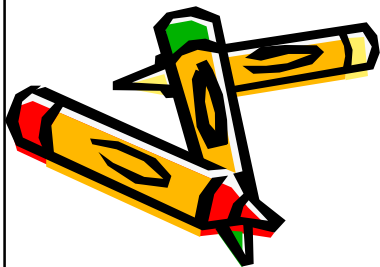


exemple

- Orice interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$ este o mulțime compactă.
- În \mathbf{R}^n o mulțime este compactă dacă și numai dacă este mărginită și închisă.



- 
- 
- Fie $(X, d), (X_1, d_1)$ spații metrice $(X, d), (X_1, d_1)$;
dacă funcția $f: A \rightarrow X_1$, $A \subset X$ este continuă, atunci
imaginea prin f a unei mulțimi compacte $K \subset A$, este o
mulțime compactă.



exemplu

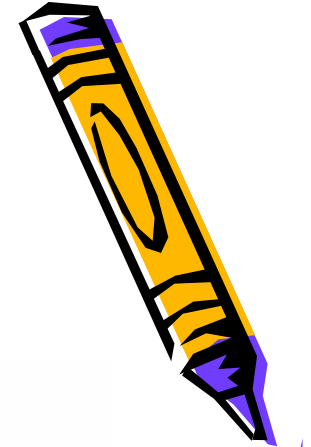
- Graficul unei funcții continue $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$,

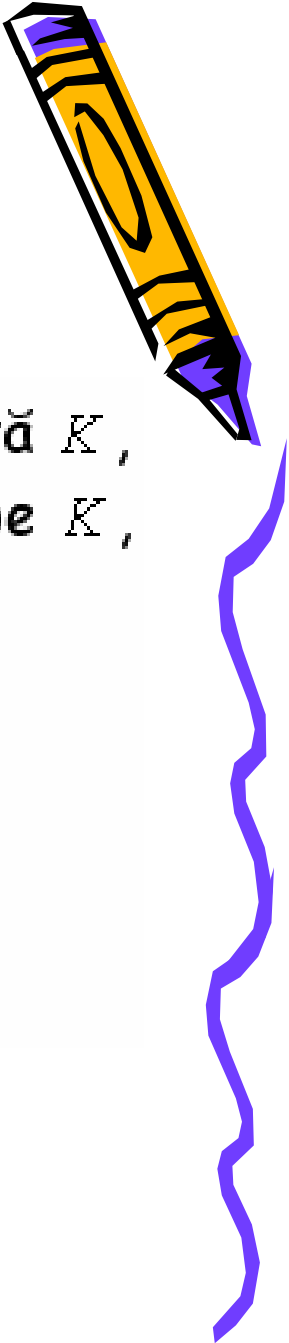
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$$

este o mulțime compactă.

Construim funcția vectorială $h:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $h(x) = (x, f(x))$,
funcție ce este continuă.

$G_f = h([a,b])$, deci este compactă



- 
- Dacă o funcție reală, definită pe o mulțime compactă K , dintr-un spațiu spațiu metric (X, d) este continuă pe K , atunci este mărginită pe K și își atinge marginile.

Funcția f își atinge *marginea superioară*, respectiv *inferioară* dacă există $x_1, x_2 \in K$ astfel încât:

$$f(x_1) = \sup_{x \in K} f(x) = \sup f(K) \text{ și } f(x_2) = \inf_{x \in K} f(x) = \inf f(K),$$



functie uniform continua

Fie (X, d) și (X_1, d_1) , două spații metrice;

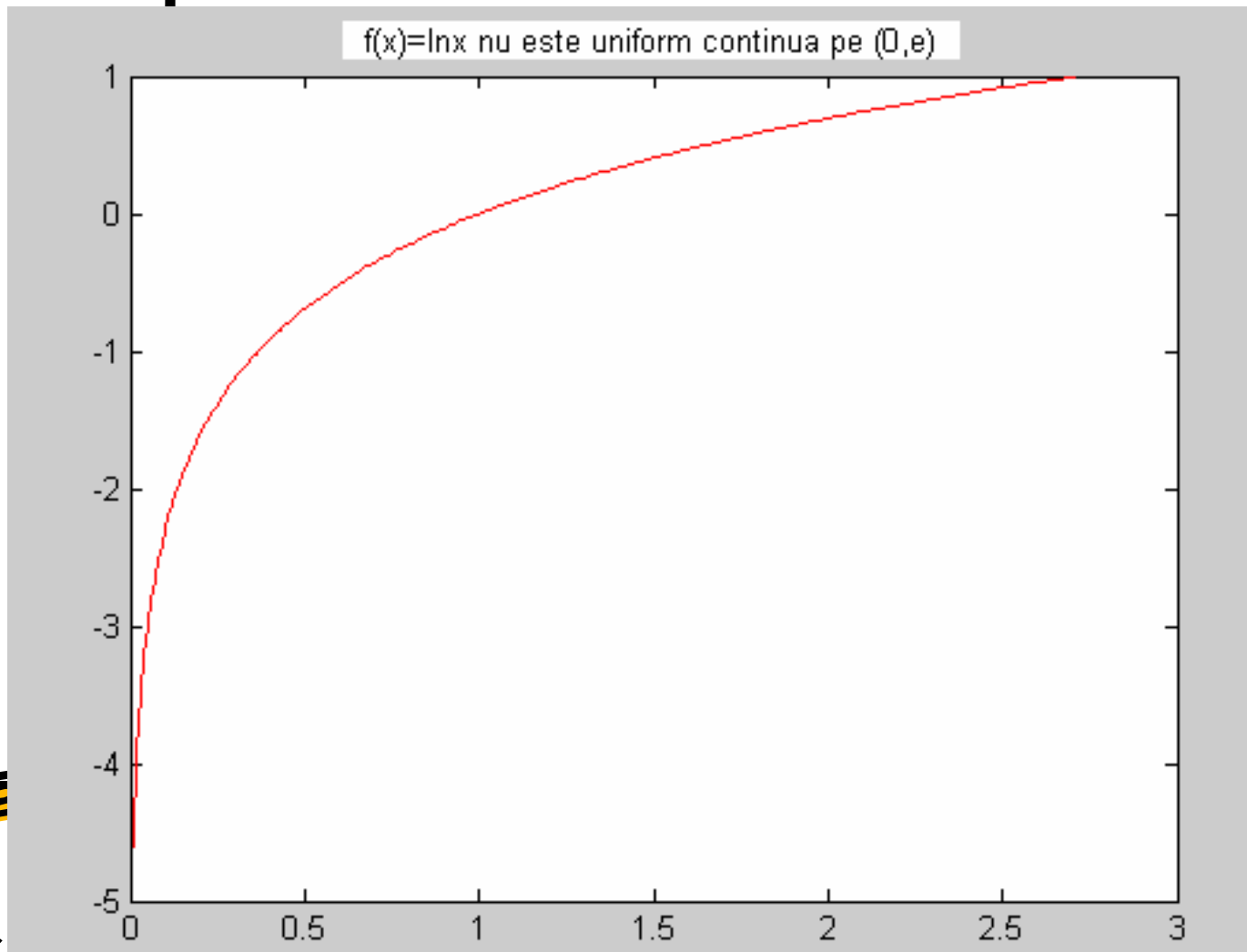
o funcție $f: X \rightarrow X_1$ este **uniform continuă** pe $A \subset X$

dacă:

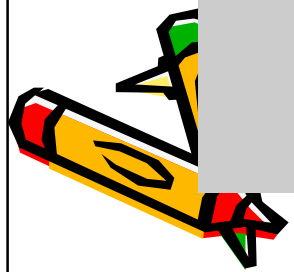
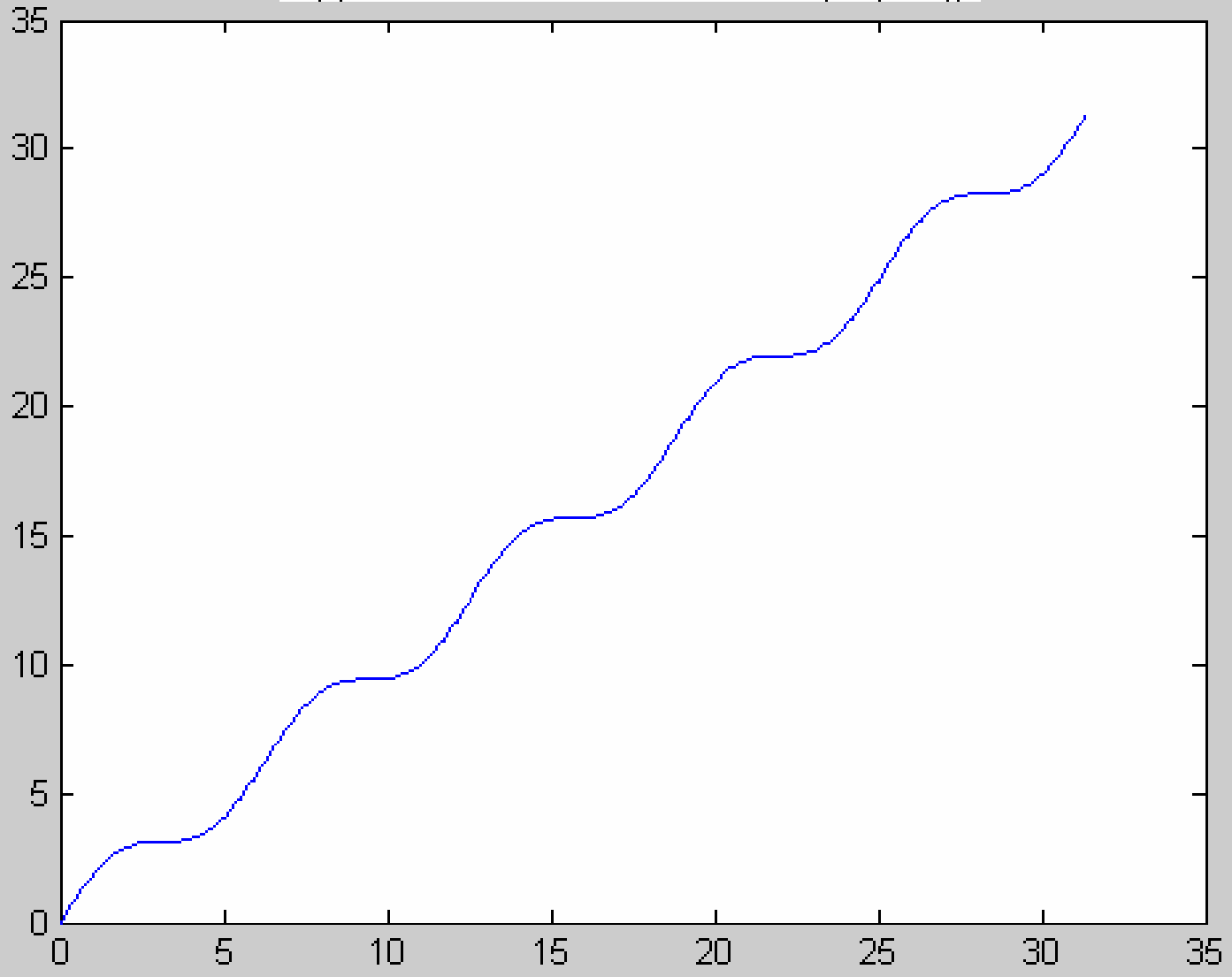
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $d(x_1, x_2) < \delta$
avem $d_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.



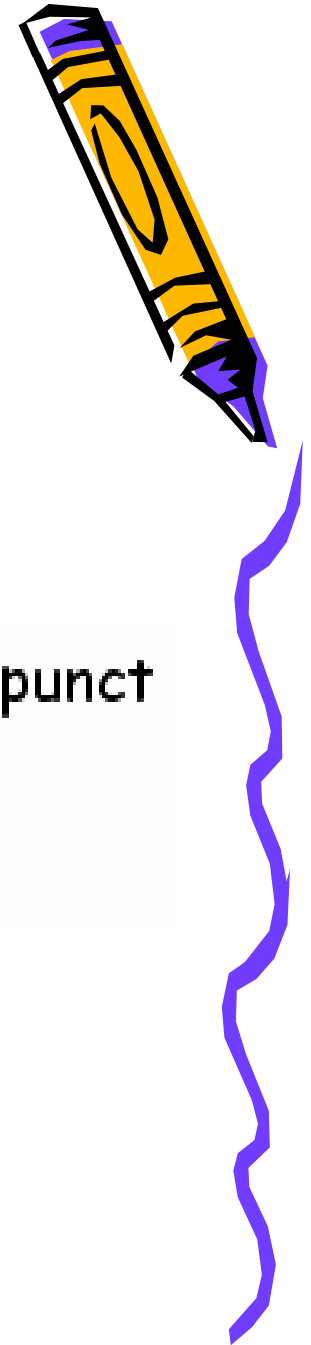
exemple



$f(x)=x+\sin x$ este uniform continua pe $(0,35)$



O funcție uniform continuă pe A este continuă în orice punct din A
Reciproca nu este adevărată.



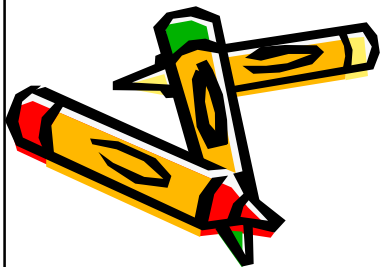
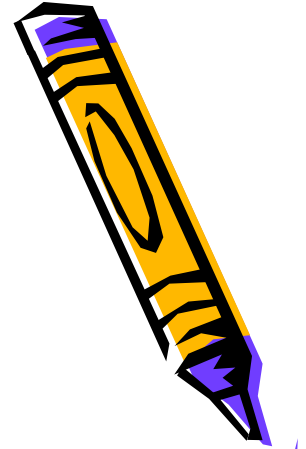
functie lipschitziana

Fie (X, d) și (X_1, d_1) , două spații metrice;
o funcție $f: A \rightarrow X_1$, $A \subset X$ este funcție *lipschitziană*
dacă există $L > 0$ astfel încât
$$d_1(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in A.$$



exemplu

- O funcție $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ derivabilă, cu derivata mărginită pe $A \subset \mathbf{R}$ este lipschitziană pe A .

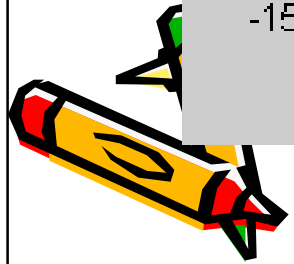
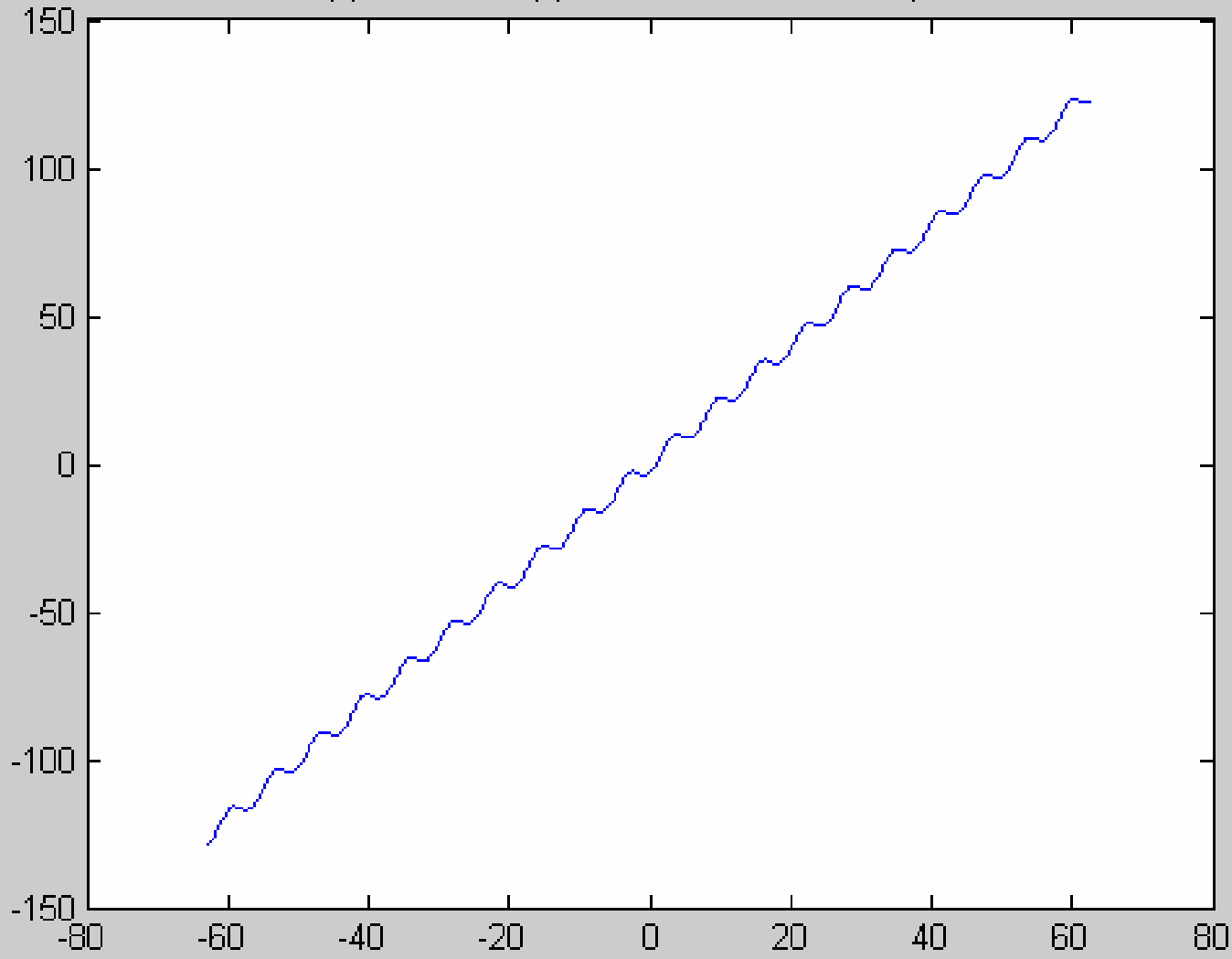




- O funcție lipschitziană este uniform continuă
- Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = 2x - 3 \cos x$ având derivata mărginită $|f'(x)| = |2 + 3 \sin x| \leq 5$, este lipschitziană, deci uniform continuă pe \mathbf{R} .



$f(x)=2*x-3*\cos(x)$ este uniform continua pe \mathbb{R}

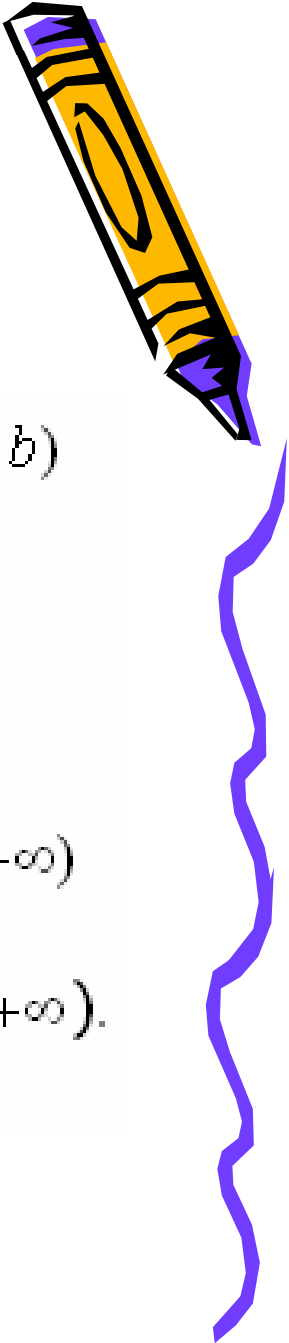




Dacă funcția $f: A \rightarrow X_1$, $A \subset X$ este uniform continuă pe A , atunci este uniform continuă pe orice submulțime $A_1 \subset A$.

- Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = 2x - 3 \cos x$ este uniform continuă pe $(-10\pi, 10\pi) \subset \mathbf{R}$.

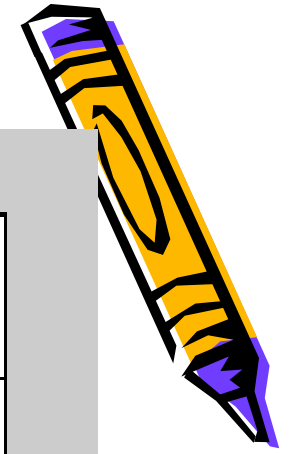
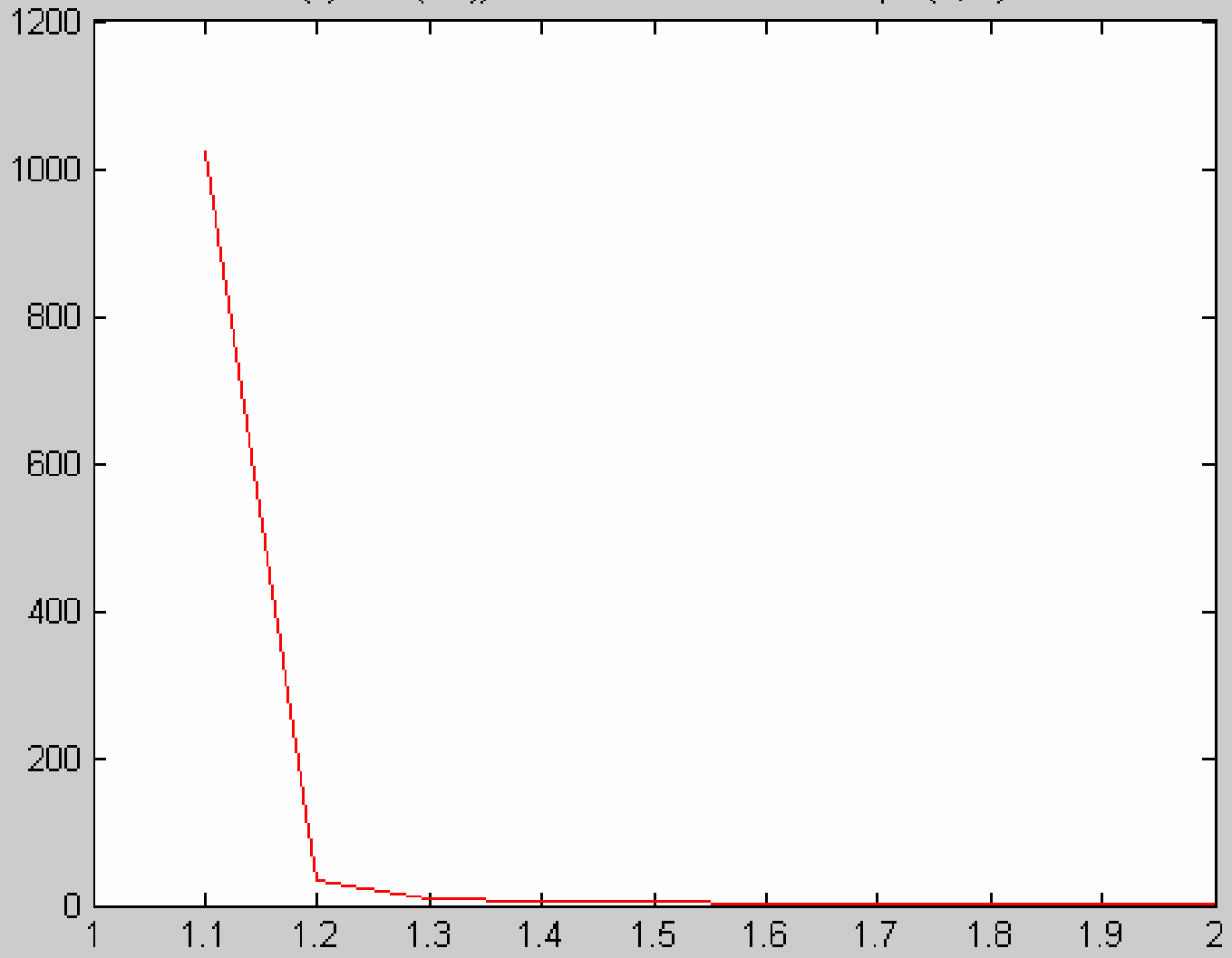


- 
- O funcție $f: (a,b) \rightarrow \mathbf{R}$, $(a,b) \subset \mathbf{R}$, continuă pe (a,b) care admite asimptotă verticală $x = a$ sau $x = b$ nu este uniform continuă pe (a,b) .

- Funcția $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ nu este uniform continuă pe $(1, +\infty)$ deoarece $x = 1$ este asimptotă verticală ($\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$).

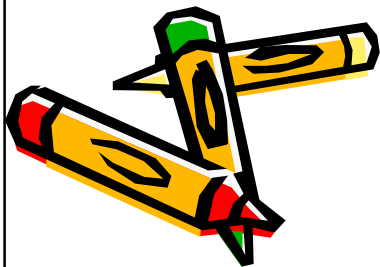
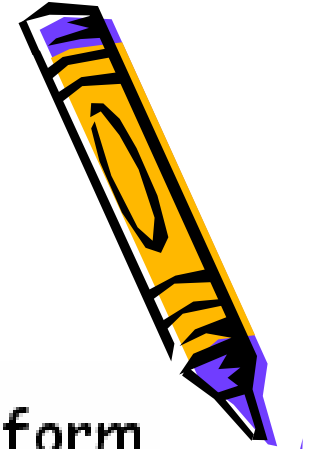


$f(x)=2^{1/(x-1)}$ nu este uniform continua pe $(1, \infty)$

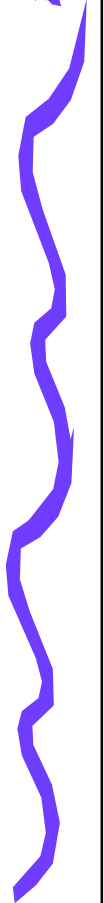
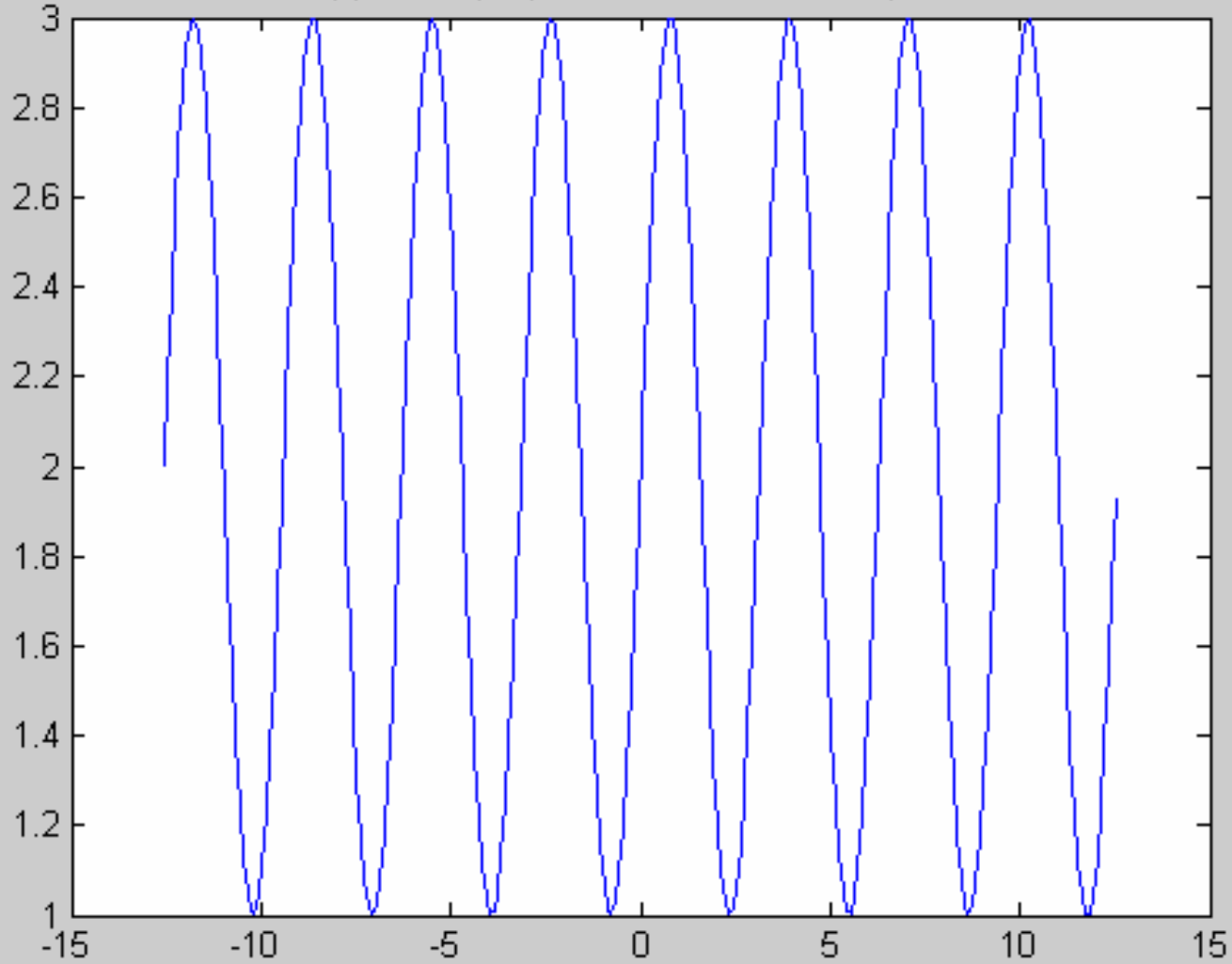


□ O funcție $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ periodică și continuă este uniform continuă pe \mathbf{R} .

- Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow [1,3]$, definită prin $f(x) = 2 + \sin 2x$ este continuă, periodică, de perioadă $T = \pi$, deci uniform continuă pe \mathbf{R} .



$f(x)=2+\sin(2*x)$ este uniform continua pe \mathbb{R}

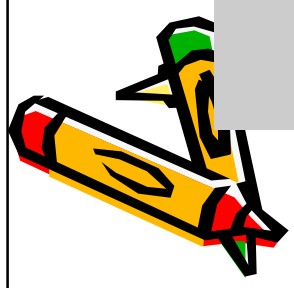
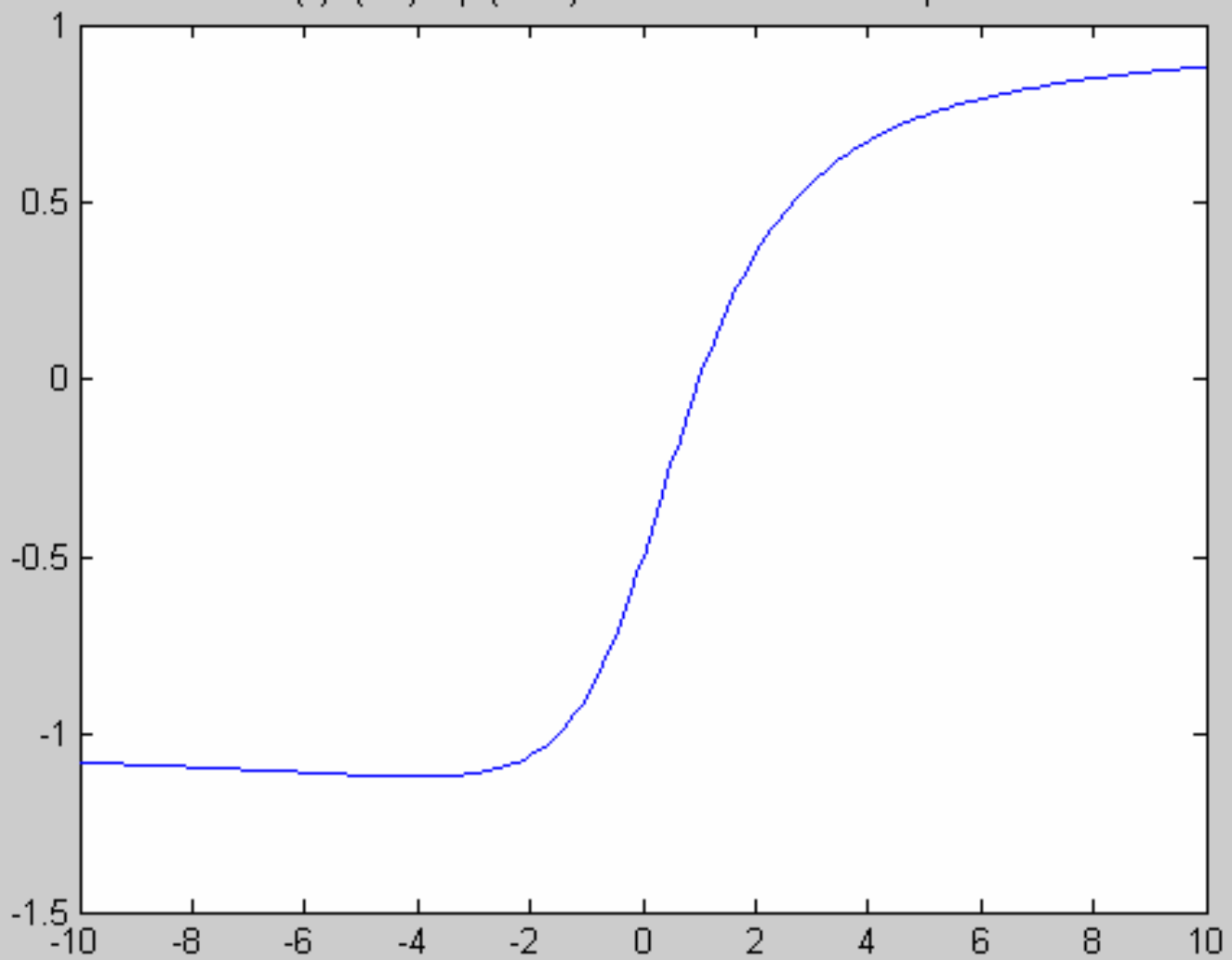




- O funcție continuă $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, al cărei grafic admite asimptote orizontale la $-\infty$ și la $+\infty$, este uniform continuă pe \mathbf{R} .
- Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}$ este continuă pe \mathbf{R} și admite asimptote orizontale $y = 2$ la $+\infty$ și $y = -2$ la $-\infty$.



$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$ este uniform continua pe \mathbb{R}





□ O funcție continuă $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, al cărei grafic admite asimptote oblice la $-\infty$ și la $+\infty$, este uniform continuă pe \mathbf{R} .

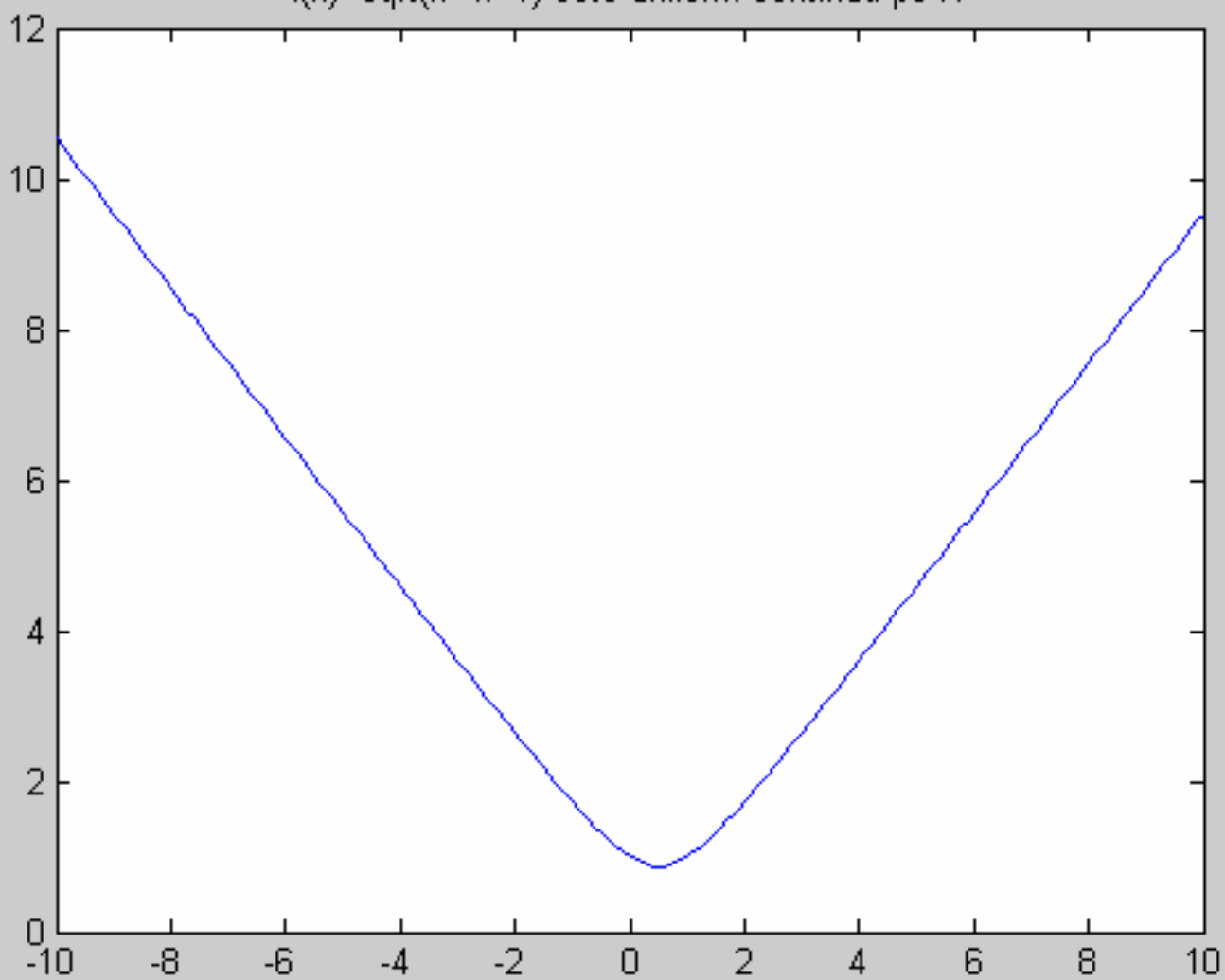
• Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ este continuă pe \mathbf{R} și:

$y = x - \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

$y = -x + \frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $-\infty$



$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ este uniform continua pe \mathbb{R}

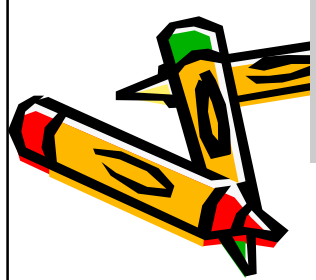
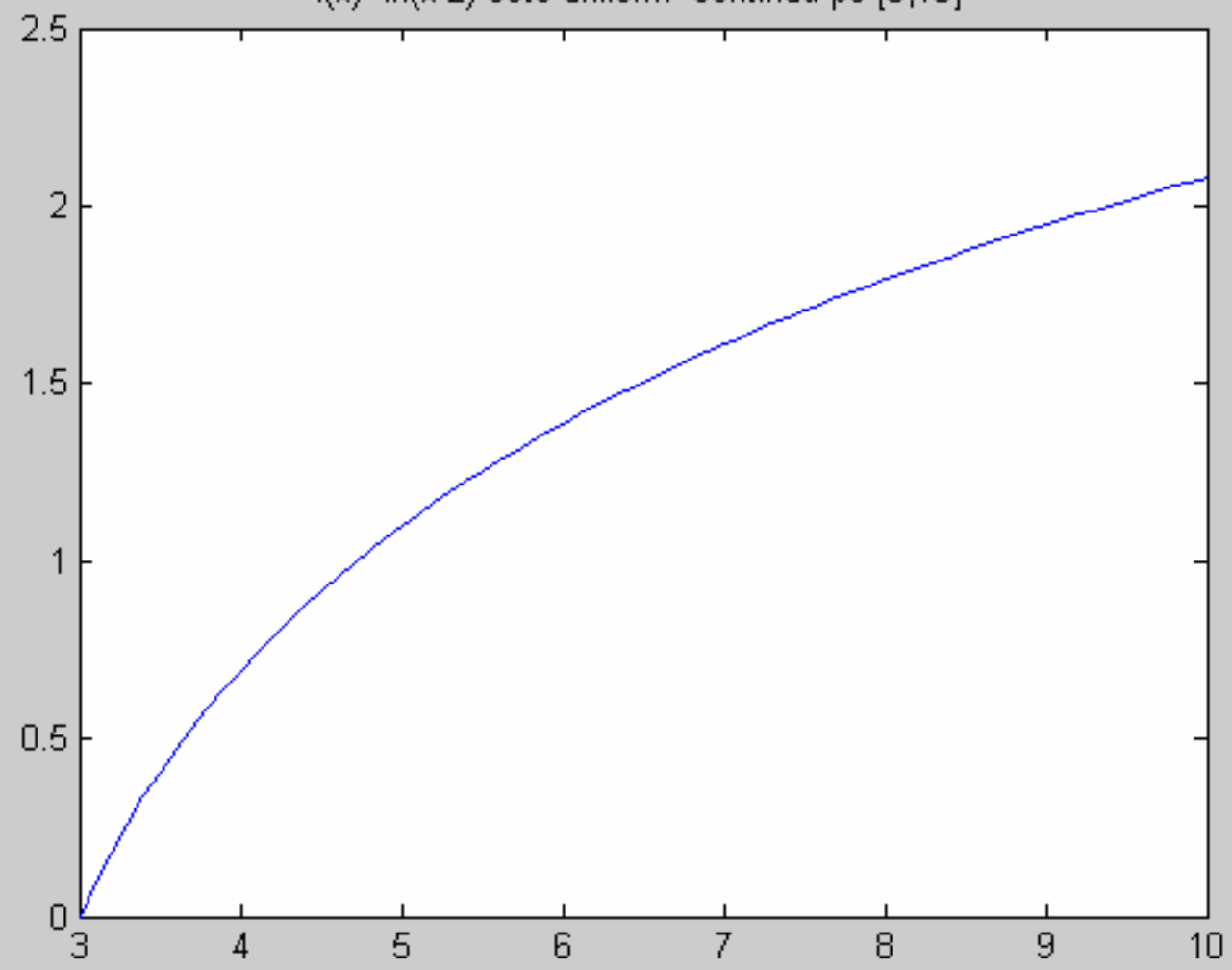




- Fie (X, d) , (X_1, d_1) spații metrice și $K \subset X$ o mulțime compactă; dacă funcția $f: K \rightarrow X_1$ este continuă pe K , atunci este uniform continuă pe K .
- Funcția $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \ln(x-2)$ este uniform continuă pe $[3, 10]$, fiind continuă pe acest compact.



$f(x)=\ln(x-2)$ este uniform continua pe $[3,10]$

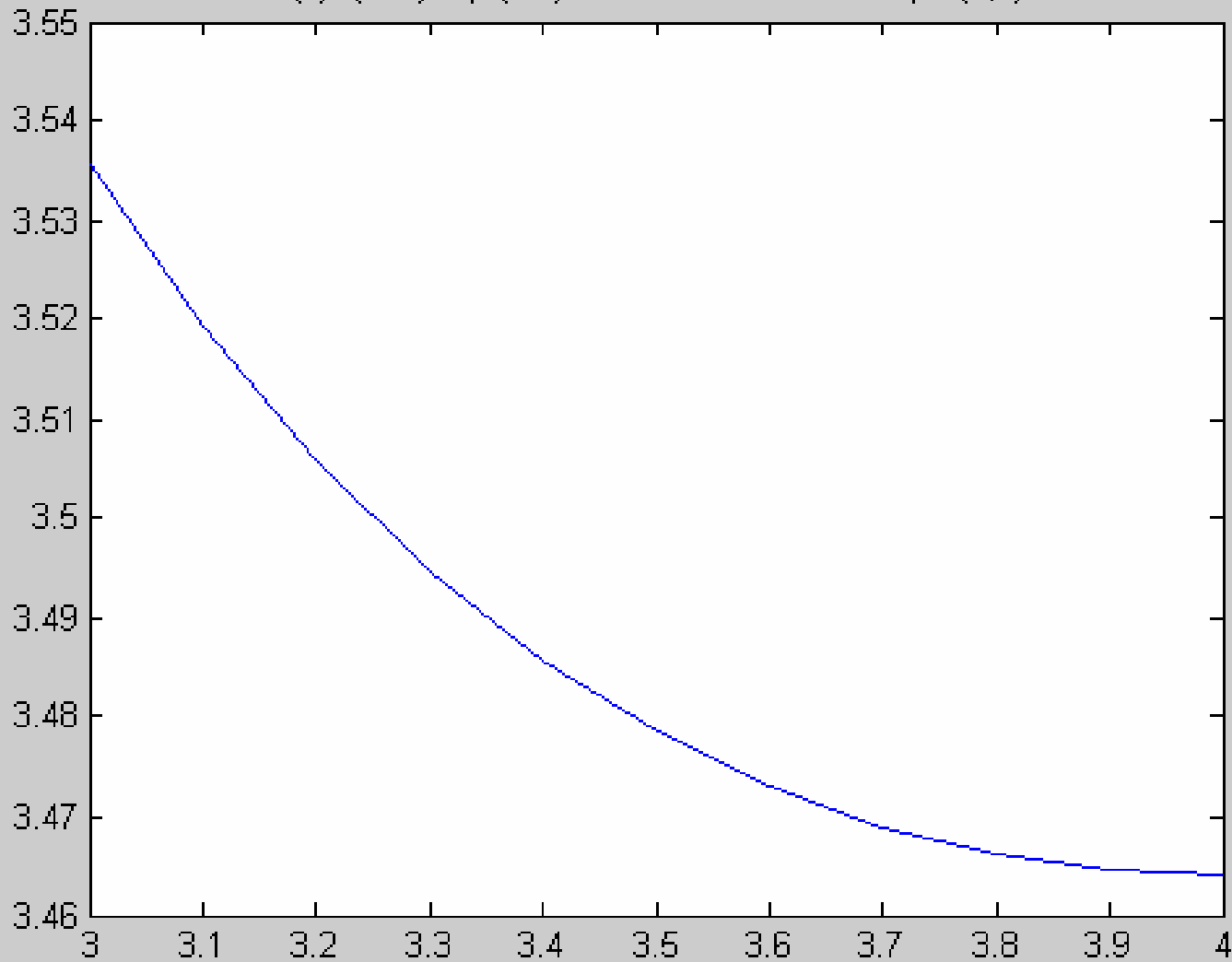




- Funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$ este continuă pe $[3,4]$, deci va fi uniform continuă pe această mulțime compactă, și pe orice submulțime a sa, adică și pe $(3,4)$.



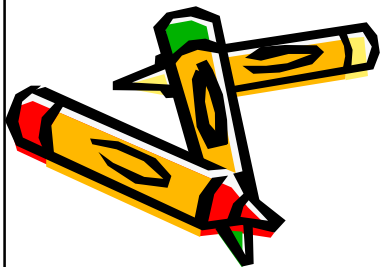
$f(x) = (x+2)/\sqrt{x-1}$ este uniform continua pe $(3,4)$



transfer de continuitate siruri de functii

- Considerăm două spații metrice (X, d) și (X_1, d_1) ; funcția limită a unui șir de funcții $(f_n)_n$, $f_n: A \rightarrow X_1$ continue pe $A \subset X$, uniform convergent pe A , este continuă pe A .

Altfel spus: limita uniformă a unui șir de funcții continue este o funcție continuă.

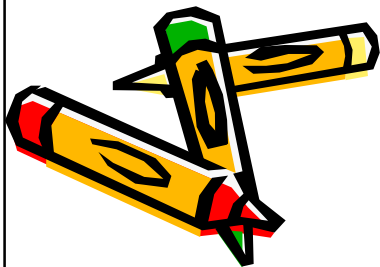


exemplu

- Funcția limită a șirului de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} - x + 1}{x^{2n} + \sqrt{1+x^2}} \text{ este } f(x) = \begin{cases} \frac{-x+1}{\sqrt{1+x^2}}, & |x| < 1 \\ \frac{1}{1+\sqrt{2}}, & x = 1 \\ x, & |x| > 1 \end{cases}$$

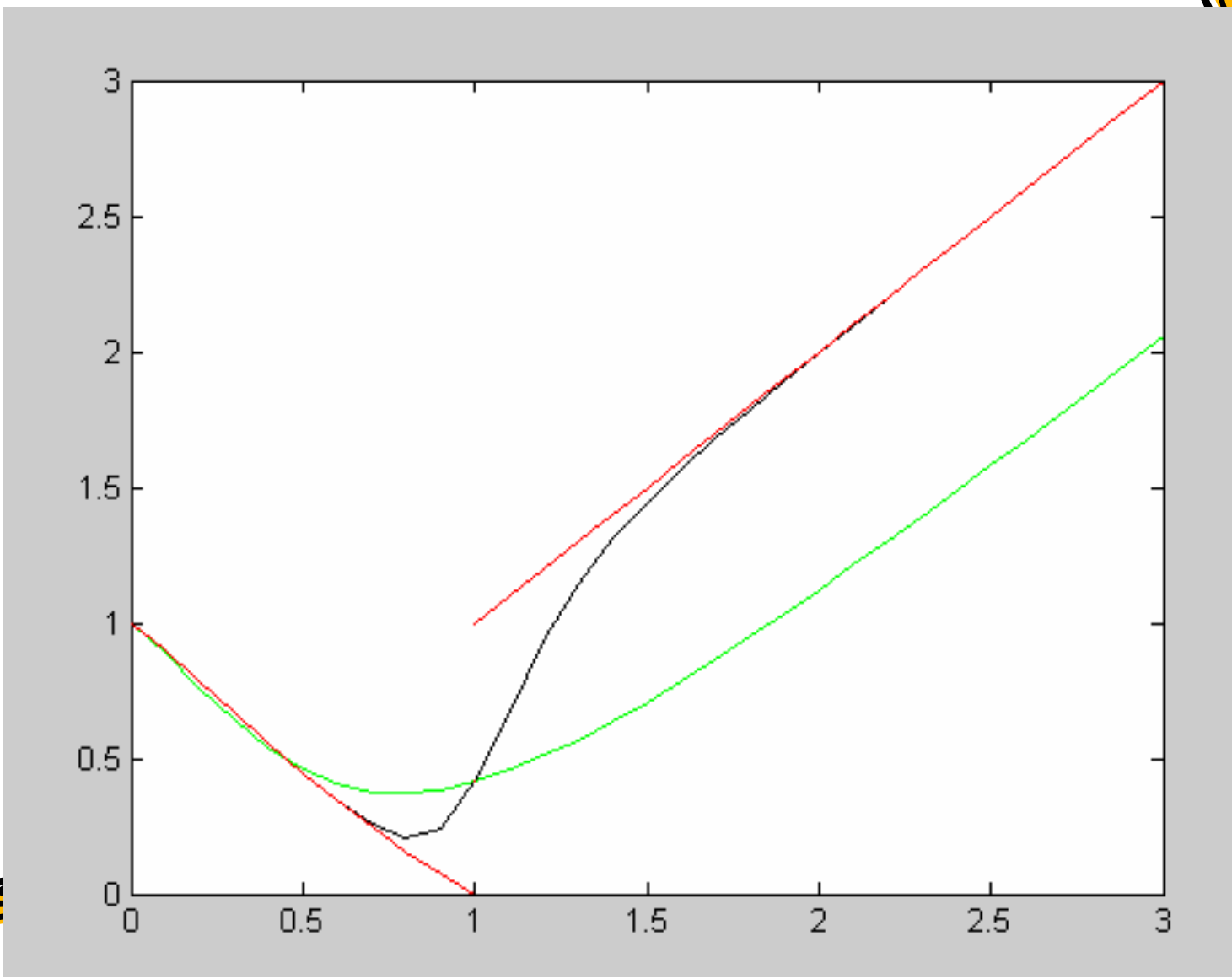
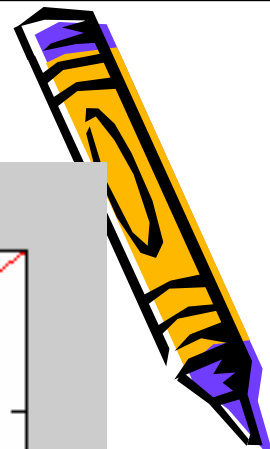
Acest șir nu este uniform convergent pe $[0,3]$, deoarece funcțiile f_n sunt continue pe $[0,3]$, dar funcția limită nu este.





```
>>x=0:1:1;x1=1:1:3;plot(x,(x.^3x+1)./(x.^2+sqrt(1+x.^2)),'g',x,(x.^1  
1-x+1)./(x.^10+sqrt(1+x.^2)),'k',x,(1-x)./sqrt(1+x.^2),'r',x1,(x1.^3-  
x1+1)./(x1.^2+sqrt(1+x1.^2)),'g',x1,(x1.^11x1+1)./(x1.^10+sqrt(1+x1.  
^2)),'k',x1,x1,'r',1,1/(1+sqrt(2)),'r')
```

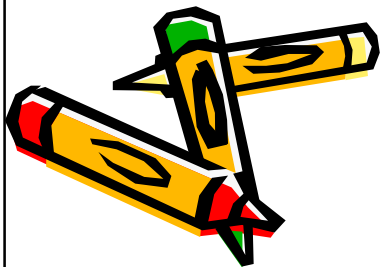




transfer de continuitate serii de functii

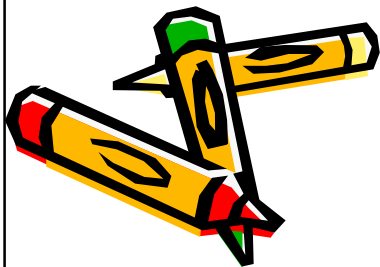


- Fie (X, d) un spațiu metric, $(E, \| \cdot \|)$ un spațiu Banach și un șir de funcții $f_n : A \rightarrow E, n \in \mathbf{N}, A \subset X$;
dacă $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A și termenii ei sunt funcții continue pe A , atunci suma sa, s , este o funcție continuă pe A .



exemple

- am demonstrat cu criteriul lui Weierstrass convergența uniformă pe \mathbf{R} a seriei de funcții $\sum_{n \geq 0} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^6}$;
funcțiile $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^6}$ sunt continue pe \mathbf{R} și astfel putem afirma că suma seriei este o funcție continuă pe \mathbf{R} .

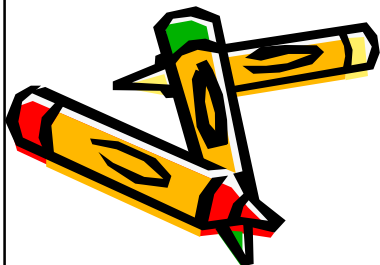


Teorema Weierstrass

- Dacă $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci există un șir de polinoame $(P_n)_n$, care converge uniform la f pe $[a,b]$.

Ne situam în cazul intervalului $[0,1]$; transformarea $[a,b] \rightarrow [0,1]$

dată de $t = \frac{x-a}{b-a}$ păstrează polinoamele.





Se consideră polinoamele *Bernstein* asociate funcției f :

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot C_n^m \cdot x^m \cdot (1-x)^{n-m},$$

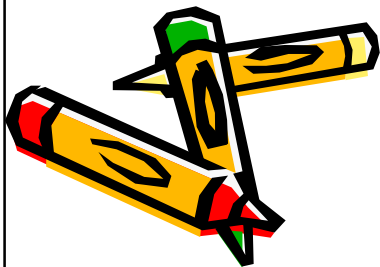
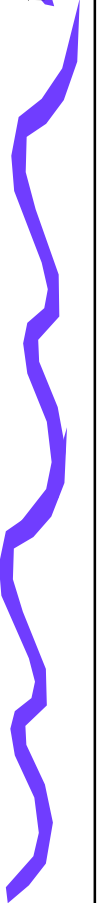
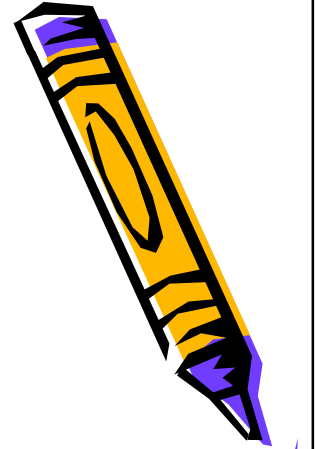
polinoame ce converg uniform la f , pe $[0,1]$.

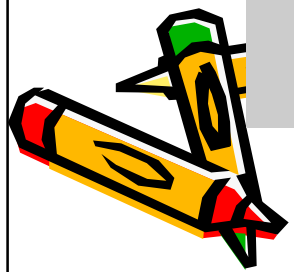
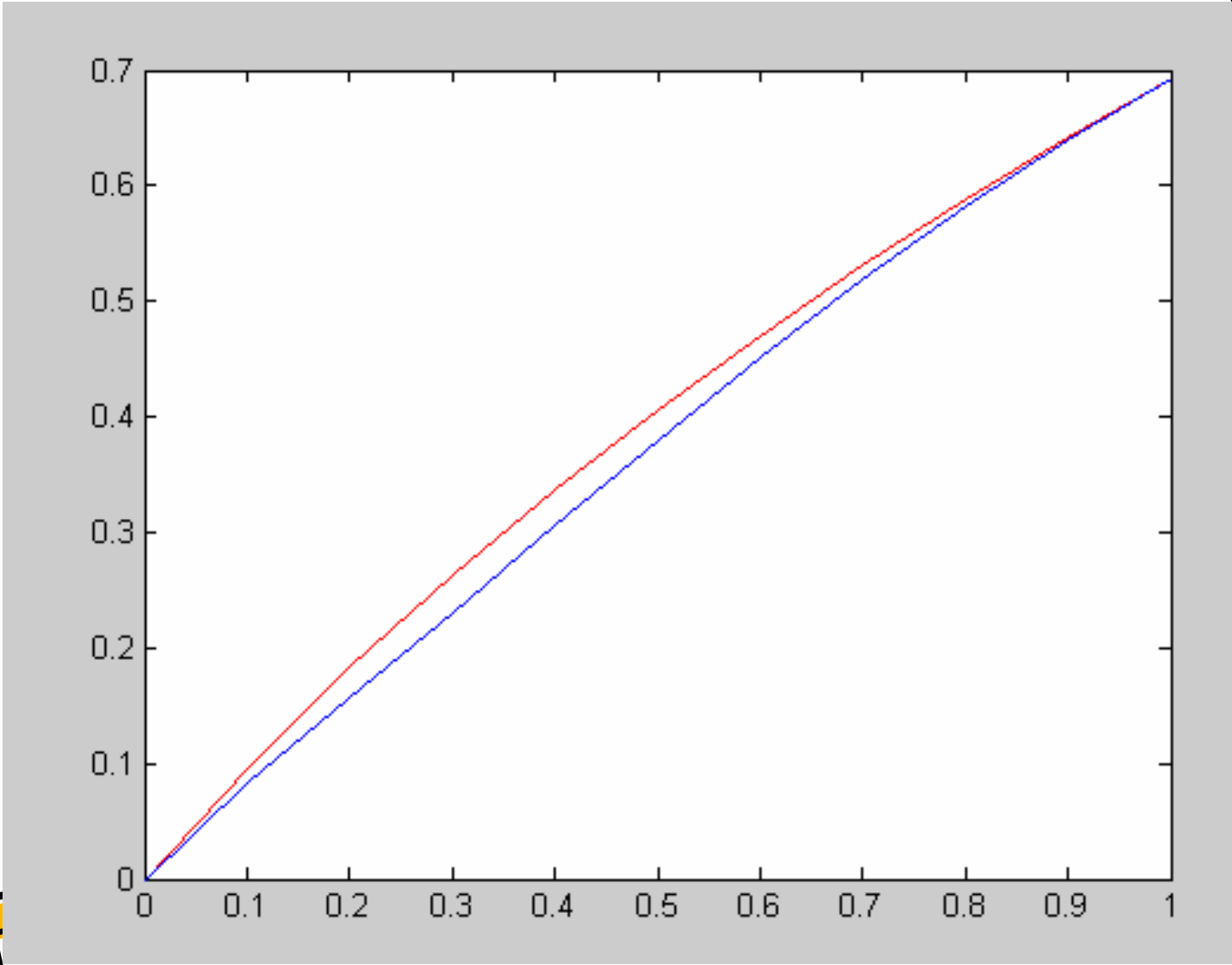


exemplu

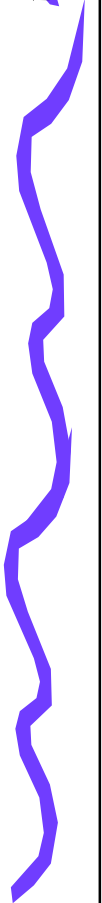
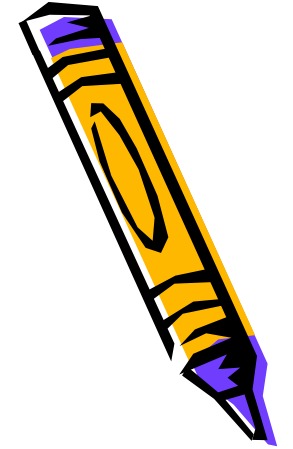
Pentru funcția $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in [0,1]$
polinomul Bernstein de gradul 5 este

$$B_5(x) = \sum_{m=0}^5 \ln\left(1 + \frac{m}{5}\right) \cdot C_5^m \cdot x^m \cdot (1-x)^{5-m}$$



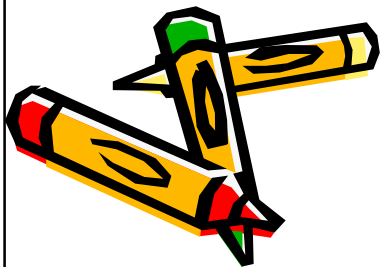


Curbe



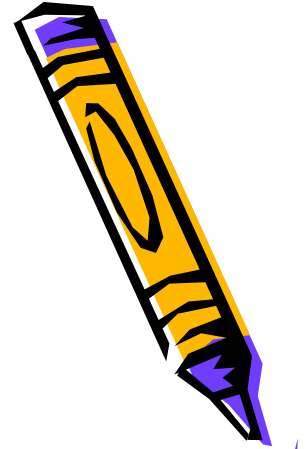
Funcția vectorială $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, continuă pe $[a, b]$ se numește **curbă** parametrizată în \mathbf{R}^2 ;

funcția vectorială continuă $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ este o **curbă** în \mathbf{R}^3



ecuațiile parametrice ale curbelor

$$\gamma: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad \text{respectiv} \quad \gamma: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in [a, b].$$





Imaginea $\gamma([a,b]) = (\gamma) \subset \mathbf{R}^2$ se numește *urma* (*traiectoria*)
curbei γ ;

$\gamma(a)$ și $\gamma(b)$ sunt *capetele curbei*,
dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ este o *curbă închisă*.



exemple

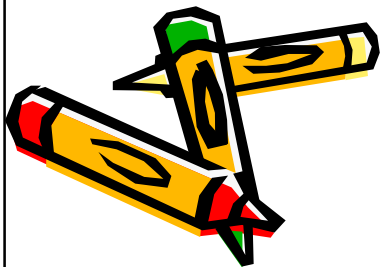
- Identificând \mathbf{R}^2 cu planul xOy , urma curbei

$$\gamma: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2, \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

este sfertul de cerc unitate (cu centru în origine, de raza 1) situat în primul cadran

$$(\gamma) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Capetele curbei sunt punctele $(1,0), (0,1)$.





- Curba $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 3)$
este închisă având capetele $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0, 3)$;
are ca urmă cercul $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 = 1, z = 3\}$.





Pentru $\gamma:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}^m$, $m\in\{2,3\}$, curbă parametrizată fixată, putem defini $\gamma^-:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}^m$, prin $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$, curbă numită *opusa* curbei γ .

Urmele curbelor γ și γ^- coincid.



Dacă $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^m$ și $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbf{R}^m$ sunt două curbe parametrizate în \mathbf{R}^m , $m \in \{2, 3\}$, cu proprietatea că $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ putem defini curba:

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \rightarrow \mathbf{R}^m, \text{ dată de: } (\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), t \in [b, c] \end{cases}$$

numit *juxtapunerea* curbelor γ_1 și γ_2 .

Urma lui $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea $(\gamma_1) \cup (\gamma_2)$.





Dacă $F: A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ este o funcție continuă, mulțimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

este urma unei curbe în \mathbf{R}^2

$F(x, y) = 0$ se numește ecuația carteziană a curbei.

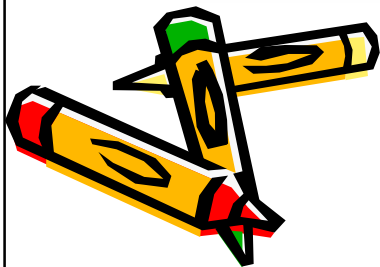


coordonate polare

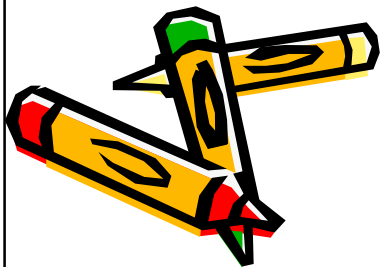
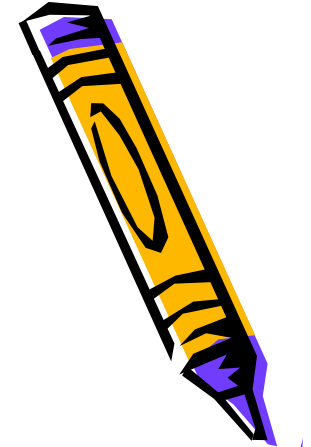
Problema de rezolvat: a obține ecuațiile parametrice ale unei curbe definite prin ecuația carteziană.

ecuațiile ce leagă coordonatele carteziene (x, y) de coordonatele polare (r, t) :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], r \geq 0$$



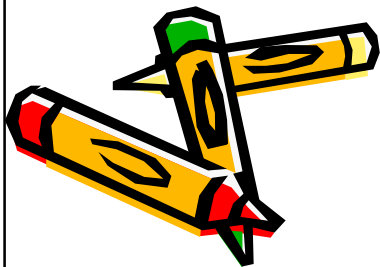
- scriem ecuația curbei în coordonate polare $r = \varphi(t)$;
- înlocuim pe r cu $\varphi(t)$ în formulele (*).



exemple

Mulțimea $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$ este cercul cu centrul în origine, de rază a . Ecuația acestui cerc în coordonate polare este $r = a$ și astfel ecuațiile parametrice ale cercului sunt:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$





Pentru a scrie ecuațiile parametrice ale elipsei

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ folosim coordonate polare

generalizate:

$$\begin{cases} x = a \cdot r \cdot \cos t \\ y = b \cdot r \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ecuația elipsei în coordonate polare generalizate este

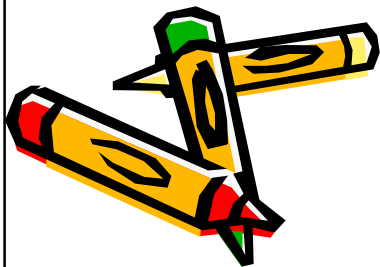
$r = 1$ și ecuațiile parametrice sunt:

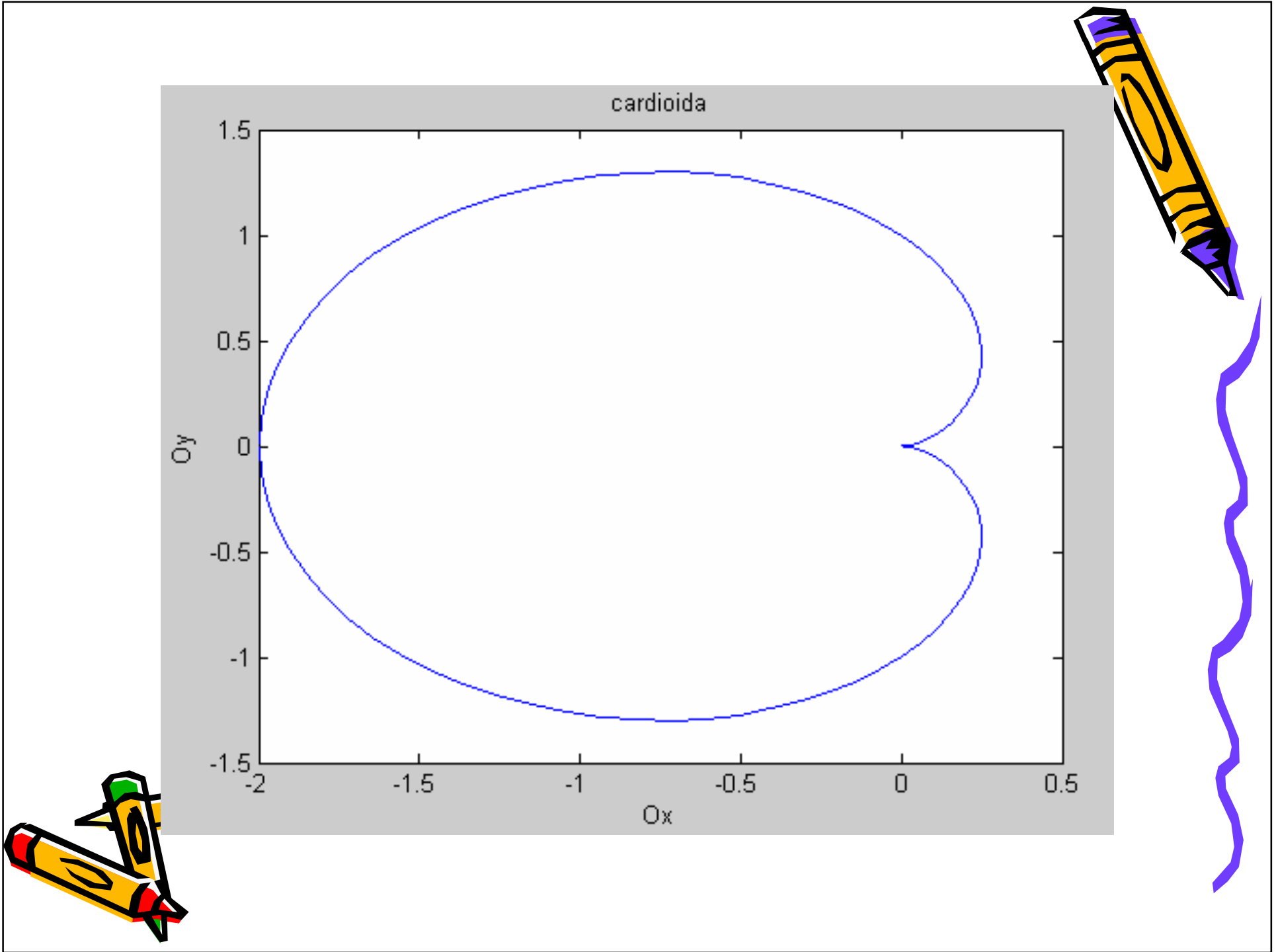
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Ecuția *cardioidei* în coordonate polare este
 $r = 1 + \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$
și astfel ecuațiile parametrice vor fi

$$\begin{cases} x = (1 + \cos t) \cdot \cos t \\ y = (1 + \cos t) \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi].$$





problema

Mulțimea $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\} \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime compactă.

Avem $M = \gamma([0, 2\pi])$ unde $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ definită de
 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Funcția vectorială γ este continuă, componentele sale
 $f, g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ $f(t) = \cos t, g(t) = \sin t$ fiind funcții continue
Imaginea compactului $[0, 2\pi]$ prin γ este o mulțime compactă.



Aplicatii liniare si continue



O aplicație $T: V \rightarrow V_1$ între două spații vectoriale reale V, V_1 este *liniară* dacă satisface relația

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot x') = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(x'), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall x, x' \in V.$$

În cazul unei aplicații liniare T scriem Tx în loc de $T(x)$.



exemplu

Considerăm sistemul liniar de m ecuații cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

și definim o aplicație liniară $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, dată de:

$$T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n, \dots, a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n).$$





problema rezolvării acestui sistem de ecuații devine:

fiind dat vectorul (b_1, \dots, b_m) , să găsim acei vectori (x_1, \dots, x_n) care verifică relația $T(x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_m)$.





$(\mathcal{L}(V, V_1))$ este mulțimea tuturor aplicațiilor liniare ce aplică pe V în V_1 ,

$(\mathcal{L}(V, V_1))$ formează un spațiu liniar față de corpul \mathbf{R} , definind:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x, \forall x \in V$$

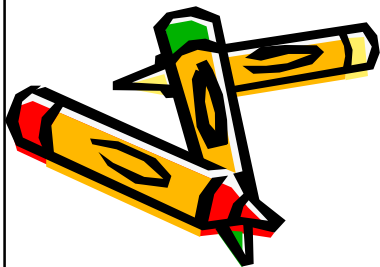
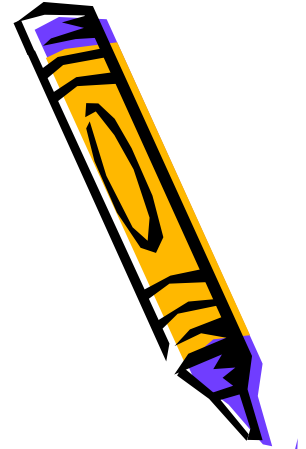
și

$$(\alpha \cdot T)(x) = \alpha \cdot Tx, \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$



Elementul nul al acestui spațiu, notat O , se numește *aplicația nulă* și este dat de formula:

$$Ox = \theta_{\mathbb{V}_1}, \forall x \in V.$$





considerăm spațiile vectoriale V, V_1 cu bazele $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ respectiv $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ și aplicația $T \in (V, V_1)$.

Elementul $x \in V$ poate fi scris în baza $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$$x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot v_k$$

atunci:

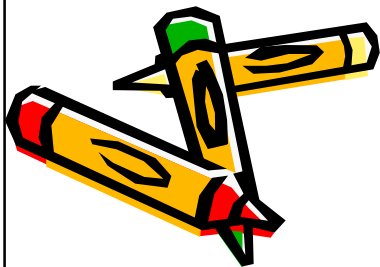


$$y = Tx = T \left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot v_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot T v_k =$$

$$\sum_{k=1}^n x_k \cdot \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} \cdot w_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot x_k \right) \cdot w_j$$

Din $y = \sum_{j=1}^m y_j \cdot w_j$ obținem

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot x_k, 1 \leq j \leq m$$





Aplicația T este caracterizată prin coeficienții a_{jk} .

Din formula ce dă legătura între coordonatele lui y și coordonatele lui x

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n$$

.....

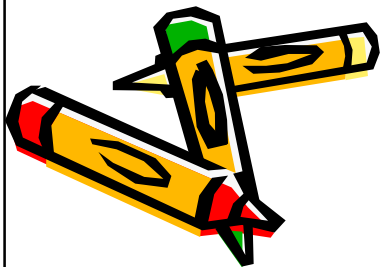
$$y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

obținem:



matricea asociată aplicației liniare T :

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



exemple

Matricea aplicației nule are toate elementele 0.

Matricea aplicației identitate este $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.





Unei aplicații liniare $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ i se asociază matricea

$$M_T = (Te_1, Te_2, \dots, Te_n),$$

unde $\{e_1, \dots, e_n\}$ este baza uzuală din \mathbf{R}^n , adică vectorii

Te_i formează coloanele lui M_T .





Fiind date spațiile vectoriale V, V_1 și V_2 , compunerea aplicațiilor liniare $T \in (V, V_1)$, $T_1 \in (V_1, V_2)$, $T_1 \circ T$ este tot o aplicație liniară.

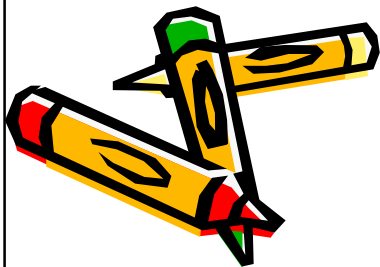
Matricea asociată aplicației liniare $T_1 \circ T$ este produsul matricelor asociate aplicației liniare T_1 , respectiv T , adică matricea $M_{T_1} \cdot M_T$.



aplicatie liniara si continua



Dacă $(E, \| \cdot \|)$ și $(E_1, \| \cdot \|_1)$ sunt spații liniare normate, aplicația liniară $T: E \rightarrow E_1$ este **continua** în $x_0 \in E$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $\|x - x_0\| < \delta$ implică $\|Tx - Tx_0\|_1 < \varepsilon$.



- Aplicația liniară $T : E \rightarrow E_1$ este continuă pe E dacă și numai dacă este continuă într-un singur punct.



Aplicația liniară $T: E \rightarrow E_1$ este *mărginită* dacă există un număr pozitiv M astfel încât $\|Tx\|_1 \leq M \cdot \|x\|, \forall x \in E$.



- Condiția necesară și suficientă ca aplicația liniară $T : E \rightarrow E_1$ să fie continuă este ca T să fie *mărginită*.





□ Orice aplicație liniară $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ este continuă.

deoarece:

Dacă $x = (x_1, \dots, x_n)$ avem
$$Tx = \left(\sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot x_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{mk} \cdot x_k \right)$$

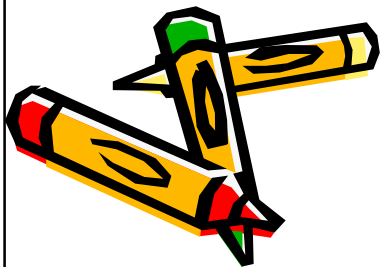
unde (a_{ij}) , $1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n$ este matricea asociată aplicației liniare T ; evaluăm $\|Tx\|$



aplicăm inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot x_k \right)^2 \leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) = \\ &= \|x\|^2 \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2\end{aligned}$$

și astfel am determinat $M = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2}$.





Dacă $(E, \| \cdot \|)$ și $(E_1, \| \cdot \|_1)$ sunt spații liniare normate, notăm cu $L(E, E_1)$ mulțimea tuturor aplicațiilor liniare și continue de la E la E_1 .

Mulțimea $L(E, E_1)$ este subspațiu liniar al lui (E, E_1) .

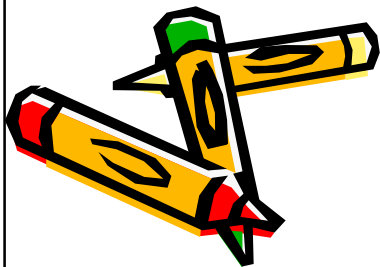
Putem defini o normă pe $L(E, E_1)$ prin $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$.



Principiul contractiilor

Intr-un spațiu metric (X, d) , o funcție $f: A \rightarrow X$, $A \subset X$ este o **contractie** dacă există $C \in (0, 1)$, astfel încât:

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in E.$$

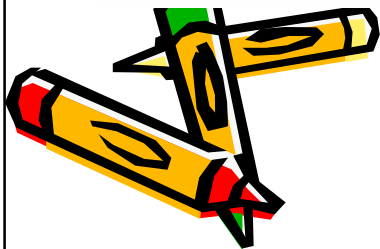


teorema de punct fix

- Dacă într-un spațiu metric complet, funcția $f: A \rightarrow X$, $A \subset X$ mulțime închisă, este o contracție, atunci f admite un punct fix unic \bar{x} , adică $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

În plus, alegând x_0 un punct oarecare din A , șirul:
 $x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$ converge la \bar{x} și avem:

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{C^n}{1-C} \cdot d(x_0, f(x_0))$$

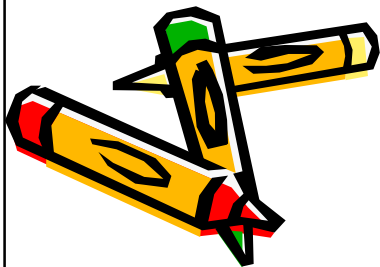
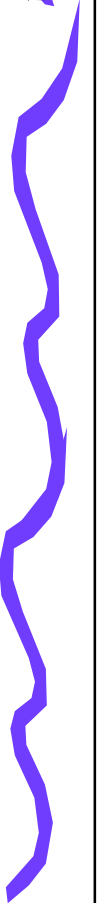
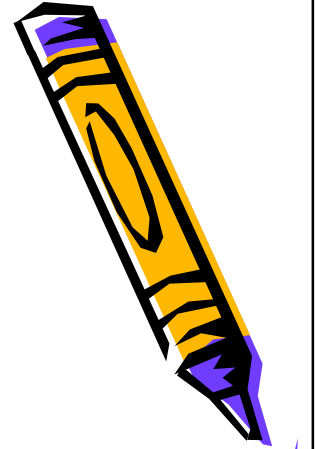


exemplu

Studiem convergența șirului definit prin relația de recurență:

$$x_0 = 7, x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n}, n \geq 0,$$

folosind principiul contracțiilor:



Considerăm funcția $f: [10^{-5}, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{4x^2 + 1}{5x};$$

Calculând $f'(x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5x^2}$, avem $|f'(x)| < \frac{4}{5}, \forall x \geq \frac{1}{10^5}$

și din teorema creșterilor finite obținem:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \geq \frac{1}{10^5}$$

deci f este o contracție.





Șirul în studiu este șirul aproximațiilor succesive din principiul contractiilor, pentru funcția $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{5x}$

și converge la punctul fix al funcției:

$$x = \frac{4x^2 + 1}{5x}, \text{ în mulțimea } [10^{-5}, \infty).$$

În concluzie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

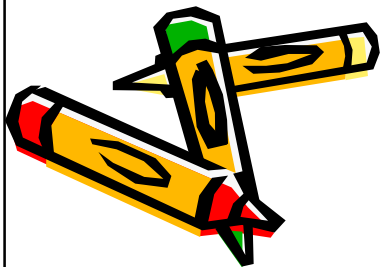


Tema 3.2

1. Studiați existența următoarelor limite:

$$o \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{arctg} x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4};$$

$$o \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^4 \cdot y^4 + 1} - 1}{x^4 + y^4}$$



2. Se poate prelungi prin continuitate, în origine, funcția

$$h(x, y) = \left(1 + x^2 \cdot y^4\right)^{\frac{1}{x^4 + y^8}} \quad ?$$

3. Precizați care din funcțiile următoare este uniform continuă, pe mulțimile indicate, justificând răspunsurile:

- o $f_1(x) = x + \operatorname{arctg}x, x \in \mathbf{R};$
- o $f_5(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbf{R};$
- o $f_6(x) = \frac{1}{x\sqrt{9 - x^2}}, x \in (1, 2);$
- o $f_7(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - x + 5}, x \in \mathbf{R};$



4. Este șirul de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este definită prin

$$f_n(x) = \frac{(x^2 + 2) \cdot e^{nx} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{e^{nx+1} + \sqrt{x^2 + 1}}, n \in \mathbf{N},$$

uniform convergent pe $[-1, 1]$?

5. Este suma seriei $\sum_{n \geq 1} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot x^2}{n^5 + x^4}$ o funcție continuă pe \mathbf{R} ?

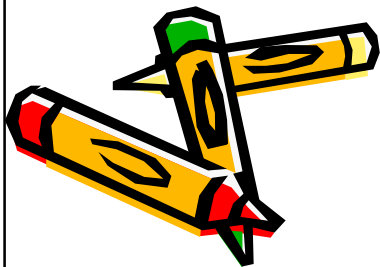


6. Scrieți ecuațiile parametrice ale curbelor ale căror ecuații în coordonate carteziane sunt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$x^2 + y^2 - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7. Este mulțimea $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ o mulțime compactă? Argumentați temeinic răspunsul.





8. Folosind principiul contractiilor, studiați convergența șirului definit prin relația de recurență

$$x_0 = 3, x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 2x_n + 1}{5x_n}, n \geq 1$$

