Cercetări operaționale
Noțiuni introductive

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro

Ştiinţa managementului, o ramură a cercetărilor operationale

Cercetările operaționale, „**Operation Research** (OR)" constituie o ramură interdisciplinară a matematicilor aplicate care utilizează modelarea matematică, statistica şi algoritmii pentru a obține soluții optime pentru probleme complexe.

Stiința managementului, „**Management Science** (MS)” este o abordare a deciziei manageriale bazată pe metode științifice, cum ar fi modelarea matematică.

Merită reținut că termenul de "Management Science (MS)" se referă la problemele managementului afacerilor în timp ce „Operations Research (OR)" este strâns legat de teoria optimizării modelelor din realitatea înconjurătoare.

Specialiştii în OR folosesc statistica, teoria probabilităților, teoria aşteptării, teoria jocurilor, teoria grafurilor, teoria deciziilor, şi optimizări.

Datorită naturii computaționale ale acestor discipline, Informatica Computer Science) este o componentă importantă

Bazele Cercetărilor operaţionale au fost puse în perioada celui de-al doilea război mondial când echipe de cercetători de diverse specializări (matematicieni, ingineri) au rezolvat cu metode ştiinţifice, probleme de strategie şi tactică militară. După război, Cercetările operaţionale s-au dezvoltat în aplicaţii nemilitare.

Un moment semnificativ în această dezvoltare se consideră a fi apariţia metodei **simplex** de rezolvare a problemelor de programare liniară (George Dantzig, 1947).

Problem solving

„**Problem solving**" este procesul ce identifică diferențele dintre între stadiul actual și stadiul dorit al afacerilor, încercând să rezolve aceste diferențe, proces ce presupune:

Problem solving

- luarea deciziei (**decision making**) care constă în:
- structurarea problemei
    1. identificarea şi definirea problemei
    2. determinarea unui set de soluții alternative
    3. determinarea criteriilor care vor fi folosite pentru a evalua soluțiile alternative.
- analizarea problemei
    4. evaluarea soluțiilor alternative
    5. alegerea unei soluții

Problem solving

- implementarea soluției alese
- evaluarea rezultatelor, care constă în a răspunde la întrebarea „soluția aleasă este satisfăcătoare?"

Exemplu-procesul de luare a deciziilor

Presupunem că sunteți din Craiova, student în an terminal, în preajma licenței și că vă doriți o carieră satisfăcătoare. Ați făcut demersuri necesare angajării și ați fost acceptat de către trei firme aflate în locații diferite.

Problema constă în alegerea acelui job care să vă asigure drumul spre o cariera mulțumitoare.

Mulțimea de soluții alternative este formată din cele trei oferte de angajare:

- acceptarea postului oferit de o firmă din Craiova
- acceptarea postului oferit de o firmă din Bucureşti
- acceptarea postului oferit de o firmă din Cluj-Napoca

Să stabilim care sunt **criteriile de evaluare** ale alternativelor:

- salariul aferent
- posibilitatea de a avansa
- locația firmei.

Dacă am considera un singur criteriu de evaluare, de exemplu salariul, avem de a face cu „ **a single criterion decision problem**”.
În acest caz vom alege firma ce oferă cel mai mare salariu.

În cazul în care luăm în considerare toate cele trei criterii prezentate, avem „**a multicriteria decision problem**”. Evaluarea se complică în cazul posibilităților de avansare şi a locației firmei deoarece se bazează pe factori subiectivi.
Vom face aceste evaluări folosind **date categoriale**: slab, satisfăcător, mediu, bun, excelent.

Date pentru evaluarea unei oferte de serviciu.

Alternativa	Salariu	Posibilități de avansare	Locația firmei
Craiova	300 Euro/lună	bune	excelent
Bucureşti	600 Euro/lună	mediu	bun
Cluj-Napoca	500 Euro/lună	satisfăcătoare	satisfăcătoare

Etapa de alegere a alternativei convenabile prezintă reale dificultăți deoarece pe de o parte criteriile nu au aceeaşi importanță, iar pe de altă parte nici o alternativă nu este cea mai bună în raport cu toate criteriile.

Vom prezenta ulterior metode de abordare a probleme. Deocamdată considerăm că în cazul nostru alternativa 1 pare a fi cea mai bună.

În **luarea deciziilor**, *„decision making"* ne vom ocupa de problemele întâlnite de managerii reali puşi în situația de a lua decizii.

Această etapă constă în structurarea problemei şi analizarea acesteia.

Faza de analiză din luarea deciziei are două aspecte: calitativ şi cantitativ.

Analiza calitativă se bazează pe experiența și raționamentul managerului.

Dacă acesta nu are experiență în probleme similare sau dacă problema este complexă, **analiza cantitativă** este esențială.

In abordarea cantitativă analistul se concentrează pe datele cantitative asociate cu problema și dezvoltă expresii matematice ce descriu obiectivele, restricțiile (constrângerile) și alte relații existente în problemă.

Analiza cantitativă este absolut necesară în procesul de luare a unei decizii în următoarele cazuri:

- problema este complexă;
- problema este importantă fiind în joc o sumă mare de bani
- problema este nouă, managerul neavând experiența necesară pentru a o rezolva
- problema este repetitivă și utilizând abordarea cantitativă managerul va face economie de timp și de efort.

O etapă dificilă în procesul de luare a unei decizii este transformarea unei probleme din realitate într-o problemă bine definită, care să permită o abordare cantitativă.

De exemplu clasica problemă de inventar necesită o definire clară în termeni de obiective specifice şi restricţii de operare.

Colaborarea cu utilizatorul este esenţială pentru a defini adecvat problema.

Modelele sunt reprezentări ale obiectelor sau ale situațiilor reale. Menționăm trei tipuri de modele:

- **modele iconice**, *„iconic models*" sunt replici fizice ale obiectelor reale (de exemplu macheta unui avion, macheta unei construcții sau un camion jucărie).

- **modele analogice**, „ *analog models*" sunt modelele ce nu au aceeaşi înfăţişare fizică cu obiectul ce urmează a fi modelat, dar în fond reprezintă acelaşi lucru (de exemplu poziţia acului de la vitezometrul unui automobil reprezintă viteza vehiculului sau poziţia mercurului termometrului reprezintă temperatura)

- **modelele matematice** reprezintă problema printr-un sistem de simboluri și relații matematice (de exemplu profitul obținut din vânzarea unui produs se calculează înmulțind profitul pe unitatea de produs cu cantitatea vândută)

Herbert A Simon, deținător al premiului Nobel pentru economie, specialist în teoria deciziilor spunea că modelele matematice nu trebuie să fie identice cu realitatea ci cât mai apropiate de aceasta și să conducă la rezultate mai bune decât cele obținute prin logica bunului simț.

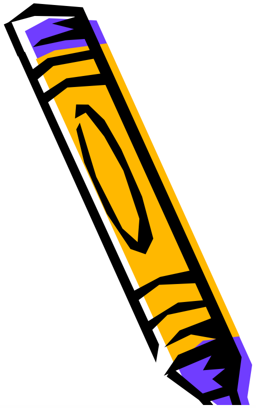
Intr-o problemă managerială avem:

- un obiectiv specific, cum ar fi maximizarea profitului sau minimizarea costurilor
- o mulțime de restricții (constrângeri) cum ar fi capacitățile de producție.

Astfel un model matematic reuşit este acela care exprimă cu acurateţe prin relaţii matematice obiectivul şi restricţiile.

Expresia matematică ce descrie obiectivul problemei se numeşte **funcţie obiectiv**.

Exemplu



Considerăm un produs prin vânzarea căruia se obține un profit de 10 lei pe unitatea de produs. Notând cu x numărul de unități vândute, profitul total obținut prin vânzarea celor x unități este:

$$P = 10 \cdot x$$

Funcția obiectiv este $P = 10 \cdot x$ şi urmează a fi maximizată.

Pentru producerea unei unități de produs este nevoie de 5 ore şi într-o săptămână avem 40 de ore lucrătoare.

Notând cu x numărul de unități produse săptămânal obținem restricția:

$$5 \cdot x \leq 40$$

Problema constă în a decide câte unități pot fi produse în fiecare săptămână pentru maximizarea profitului.

Modelul matematic al exemplului prezentat

Maximizați $P = 10 \cdot x$ (funcția obiectiv)

cu restricțiile:

$$5 \cdot x \le 40 \text{ și } x \ge 0$$

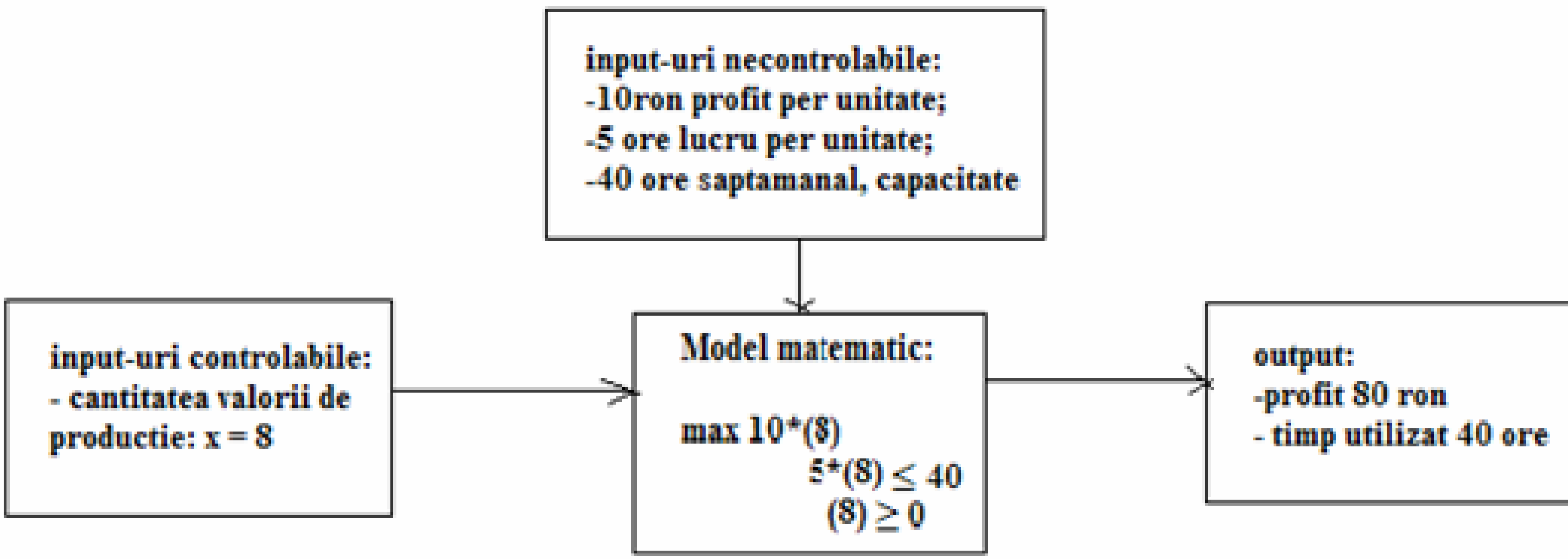
Soluția optima este $x = 8$.

Exemplul prezentat este un model de **programare liniară**, tehnică asupra căreia vom reveni.

Există două tipuri de date de intrare, (input-uri), care influențează atât funcția obiectiv cât și restricțiile:

- **datele necontrolabile**, *„uncontrollable inputs”* provin din mediul înconjurător și nu pot fi influențate de cel ce ia decizia, *„decision maker”*;
- **datele controlabile**, *„controllable inputs”* sunt decizii alternative ale managerului și sunt cunoscute sub numele de **variabile de decizie**, *„decision variables”* ale modelului.

Graficul fluxului modelului



Model determinist

Se poate întâmpla ca un input necontrolabil să poată fi transformat în input controlabil. În exemplul nostru capacitatea de lucru săptămânală (40 ore) poate fi modificată prin angajarea unui număr mai mare de muncitori şi organizarea lucrului în două schimburi.

Un **model determinist** este un model matematic în care input-urile necontrolabile sunt cunoscute şi nu pot varia. Taxele şi impozitele percepute de stat nu pot fi influențate de manager şi astfel un model matematic ce are ca input-uri necontrolabile taxe şi impozite percepute de stat este un model determinist.

Model stochastic

Există input-uri necontrolabile incerte, supuse variațiilor cum ar fi cererea unui anumit produs.
Un model matematic ce are input-uri necontrolabile supuse variațiilor este un **model stochastic**.

Dacă în modelul prezentat anterior numărul de ore necesare pentru producerea unei unități de produs poate varia între 3 şi 6, depinzând de calitatea materiilor prime folosite, modelul ar deveni un model stochastic.

Pregătirea datelor

Pregătirea datelor (valorilor input-urilor necontrolabile) cerute de model este următorul pas în analiza cantitativă.
Este un proces relativ complicat deoarece în cele mai multe cazuri se lucrează cu baze mari de date.

În general valorile input-urilor necontrolabile nu sunt disponibile imediat şi astfel analistul foloseşte nişte notaţii generale pentru dezvoltarea modelului.

Exemplu

Notând:

- $c =$ profitul per unitate,
- $a =$ timpul de producție per unitate,
- $b =$ capacitatea de producție în ore,

modelul prezentat anterior va fi:

Maximizați $P = c \cdot x$ (funcția obiectiv)
cu restricțiile:

$$a \cdot x \leq b \text{ și } x \geq 0$$

Soluția optimă a modelului

Următorul pas al analizei cantitative îl constituie găsirea **soluției optime** a modelului.

Analistul va alege acele variabile de decizie ce duc la cel mai convenabil output al modelului, variabile ce constituie **soluția optimă a modelului**.

In cazul exemplului prezentat vom determina valoarea cantității de produse care maximizează profitul, satisfăcând restricțiile impuse.

Dezvoltarea unui model şi aflarea soluției acestuia sunt două etape strâns legate.

Dacă încercăm să construim un model matematic ce redă cu acuratețe situația reală, şansele de a găsi soluția optimă sunt de cele mai multe ori inexistente.

În concluzie în general se preferă un model mai simplu, ce permite obținerea unei soluții optime, chiar dacă aceasta este o aproximare rudimentară a celei mai bune decizii.

Atât analistul, cât şi managerul sunt interesați cât de buna este de fapt soluția găsită.

Testarea si validarea se realizează utilizând probleme ale căror soluții sunt cunoscute.

Dacă sunt identificate eventuale minusuri, cum ar fi lipsa de acuratețe, este necesar fie modificarea modelului, fie introducerea altor date de intrare.

În final, pe baza soluției optimale a modelului matematic se pregăteşte un **raport managerial**, care să fie uşor de înțeles de factorii de decizie. Acest raport conține decizia recomandată şi alte indicații pertinente.

Managerul va urmări evoluția deciziei implementate. Uneori procesul real poate cere extinderi sau rafinări ale modelului matematic.

Exemple

- **Costul şi volumul al producției**

Costul unei producții este funcție de volumul acesteia.

Uzual **costul** este definit ca fiind suma costurilor fixe cu costurile variabile. Costurile fixe nu depind de volumul producției în timp ce costurile variabile sunt funcții de volumul producției. De exemplu, pentru o linie de producție costul fix este de 4000 lei. Pentru unitatea de produs materialele folosite şi muncă depusă însumează 20 lei. Modelul cost/volum al producției va fi:

$$C(x) = 4000 + 20 \cdot x \tag{1}$$

unde $C(x)$ este costul total de producție a x unități.

Dacă $C(x)$ reprezintă costul producerii a x_0 unități, costul producerii al celei de-a x_0+1 unități este $C(x_0+1)-C(x_0)$.

Costul marginal estimează efectele produse de mici variații ale unor cantități ce apar în acest fenomen economic şi se defineşte ca fiind:

$$C'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{C(x_0+h)-C(x_0)}{h}$$

- **Venitul şi volumul al vânzărilor**

Suntem interesaţi de venitul ce va fi obţinut, asociat cu vânzarea unui număr de unităţi de produs. Presupunând că unitatea de produs se vinde cu 100 lei, venitul total va fi

$$R(x) = 100 \cdot x \qquad (2)$$

unde x este volumul vânzărilor în unităţi. $R(x)$ reprezintând venitul asociat cu vânzarea a x unităţi.

Venitul marginal este definit ca fiind rata de schimb a venitului total în funcţie de volumul vânzărilor:

$$R'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{R(x_0 + h) - R(x_0)}{h}$$

În cazul modelului nostru venitul marginal este de 100 şi nu depinde de volumul vânzărilor.

- **Profit şi (volum al producției plus volum al vânzărilor)**

Unul din cele mai importante criterii în luarea deciziilor este **profitul**.

Presupunând că se produce doar ce poate fi vândut, volumul producției va fi egal cu volumul vânzărilor.
Vom combina ecuațiile (1) şi (2) pentru a dezvolta un model ce determină profitul asociat cu volume specifice de producție şi vânzare.

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) = \\ &= 100 \cdot x - (4000 + 20 \cdot x) = -4000 + 80 \cdot x \end{aligned} \qquad (3)$$

Folosind ecuația (3) putem determina profitul asociat unui volum de producție x.

Presupunând că o prognoză indică vânzarea a 40 unități de produs, decizia de a produce şi a vinde aceste 40 unități va duce la următorul profit

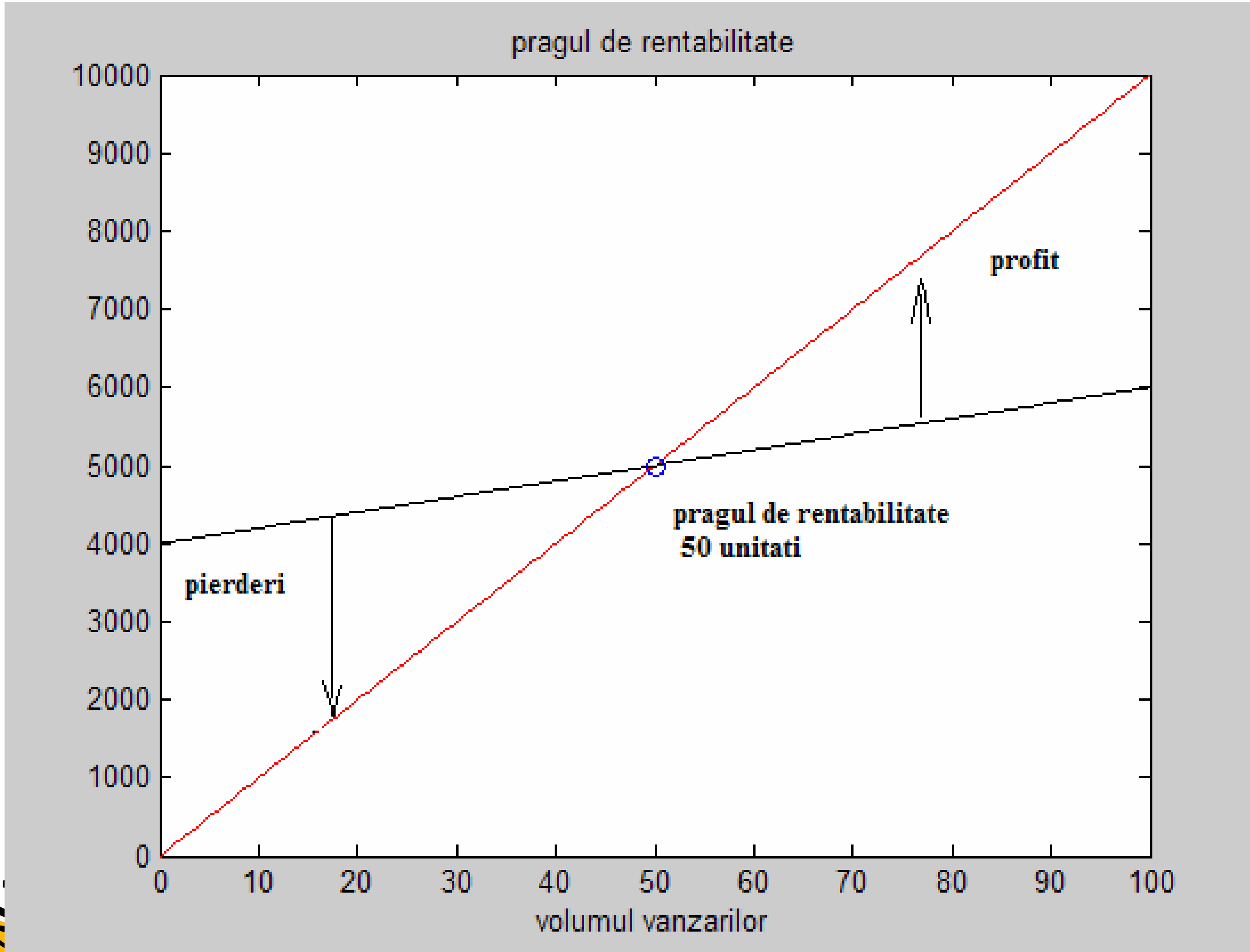
$$P(40) = -4000 + 80 \cdot 40 = -800 ,$$

adică o pierdere de 800 lei.
În aceste condiții managerul poate decide oprirea fabricării acestui produs.
Dacă vor fi cerute la vânzare 500 unități de produs profitul va fi

$$P(500) = -4000 + 80 \cdot 500 = 36000$$

şi s-ar părea că profitul este suficient de mare pentru a justifica producția şi vânzarea.

In general volumul de producție pentru care veniturile din vânzări egalează costurile se numeşte **prag de rentabilitate**, „ ***break-even point***".



pragul de rentabilitate
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
profit
pragul de rentabilitate
50 unitati
pierderi
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
volumul vanzarilor

Pragul de rentabilitate este punctul în care volumul vânzărilor acoperă totalul costurilor fixe si variabile. Toate vânzările care se fac peste pragul de rentabilitate vor genera profit în timp ce scăderea vânzărilor sub acest prag va produce pierderi.

Programare liniară

In matematică problemele de programare liniară sunt probleme de optimizare în care funcția obiectiv și restricțiile sunt liniare.
Este de menționat faptul că soluțiile ce urmează a fi găsite sunt numere reale.
Programarea liniară este utilizată în rezolvarea problemelor de optimizare pe termen mediu și lung, așa numitele probleme strategice și tactice.

Domeniile de aplicație sunt variate:

- din punct de vedere al naturii problemelor abordate: planificarea și controlul producției, distribuția în rețele
- din punct de vedere al sectoarelor industriale: industria manufacturieră, energetică (petrol, gaz, electricitate. energie nucleară), transporturi (aeriene, rutiere, feroviare), telecomunicații, finanțe,etc

Pentru a formula matematic o problema de programare liniară, să presupunem cu două variabile de decizie, avem de parcurs următoarele etape:

- Identificarea variabilelor de decizie (acele variabile a căror valoare urmează a fi determinată) şi notarea lor cu x_1 şi x_2.
- Identificarea mulțimii restricțiilor şi exprimarea acestora prin inegalități ce au ca termeni variabilele de decizie. Aceste restricții sunt condițiile inițiale date.
- Identificarea funcției obiectiv ca o aplicație liniară de variabilele de decizie.
- Adăugarea condițiilor de non-negativitate în cazul în care valorile negative ale variabilelor de decizie nu au o interpretare valabilă

Exemplu

Un agricultor are H hectare de pământ arabil pe care poate produce grâu sau porumb. El are o cantitate E de îngrăşăminte şi I de insecticide. Grâul necesită E_1 îngrăşăminte la hectar şi I_1 insecticide la hectar, în timp ce porumbul necesită E_2 respectiv I_2.

Fie P_1 preţul de vânzare al grâului şi P_2 preţul de vânzare al porumbului.

Numărul optim de hectare plantate cu grâu şi porumb, pentru a obţine cel mai mare venit net, va fi exprimat ca o problemă de programare liniară:

Numărul de hectare plantate cu grâu respectiv cu porumb, notate cu x_1 și x_2 sunt variabilele de decizie.

Funcția obiectiv este profitul net $P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2$:

maximizați $P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2$ (maximizați venitul net) cu următoarele restricții:

$$x_1 + x_2 \le H$$

$$E_1 \cdot x_1 + E_2 \cdot x_2 \le E$$

$$I_1 \cdot x_1 + I_2 \cdot x_2 \le I$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

In cazul a *n* variabile de decizie $x_1, x_2, \ldots, x_n$, funcția obiectiv este o aplicație liniară de forma

$$z = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$$

Dacă putem găsi valorile variabilelor de decizie ce optimizează funcția obiectiv, vom spune că aceste valori ale lui $x_i, i = 1, \ldots n$ sunt soluția optimală a problemei de programare liniară.

Aplicații tipice de programare liniară

- O firma manufacturieră doreşte să-şi planifice producția şi să dezvolte o politică de inventariere care să satisfacă viitoarele cerințe de piață. Obiectivul este de a minimiza producția totală şi costurile de inventar, satisfăcând complet cererea pieței. Restricțiile sunt date de cerere şi de capacitatea de producție.

- Un analist financiar are de ales un portofoliu de investiții dintr-o varietate de stocuri şi alternative de investiții corespunzătoare. Problema constă în stabilirea portofoliului ce maximizează câştigul investiției. Restricțiile sunt determinate de venitul total alocat acestor investiții şi de plafonul maxim al investiției într-un anumit domeniu.

- Un manager de marketing doreşte să aloce bugetul destinat publicităţii în diferite mijloace media: radio, televiziune, ziare, reviste, internet. El doreşte să găsească soluţia ce maximizează eficienţa publicităţii. Restricţiile sunt date de valoarea bugetului alocat publicităţii şi de disponibilitatea mijloacelor media.

- O companie are magazine de desfacere în mai multe oraşe din ţară. Tinând seama de cererile locale, se încearcă stabilirea cantităţilor de produse ce vor fi expediate fiecărui magazin, astfel încât costurile totale de transport să fie minimizate. Restricţiile sunt date de cantitatea de produse furnizate fiecărui magazin.

Programare liniară
Metoda grafică

Metoda grafică se aplică in rezolvarea problemelor de programare liniară cu două variabile de decizie x_1 şi x_2.

Mulţimea valorilor variabilelor x_1 şi x_2, ce îndeplinesc condiţiile restricţiilor se numeşte **mulţimea soluţiilor admisibile.** Primul pas al metodei constă în determinarea acestei mulţimi:

Presupunând că avem restricțiile $x_1 \geq 0$ și $x_2 \geq 0$, ne vom situa in primul cadran al planului.

Restricțiile sunt de forma $a_j \cdot x_1 + b_j \cdot x_2 \leq c_j$ sau $a_j \cdot x_1 + b_j \cdot x_2 \geq c_j$, $j = 1, \ldots, p$.

Vom desena dreapta $a_j \cdot x_1 + b_j \cdot x_2 = c_j$, dreaptă ce împarte planul în două regiuni, R_1^j și R_2^j. Dacă originea satisface restricția dată, regiunea ce conține originea va fi cea căutată.

Intersecția acestor regiuni este mulțimea soluțiilor admisibile.

Metoda de aflare a soluției optime se bazează pe următoarea propoziție:

Soluția optimă a unei probleme de programare liniară, dacă există, se află în vârfurile (colțurile) mulțimii soluțiilor admisibile.

În terminologia programării liniare aceste vârfuri se numesc **puncte extreme** ale mulțimii soluțiilor admisibile.

Aflarea soluției optime

- se reprezintă grafic mulțimea soluțiilor admisibile;
- se calculează coordonatele punctelor extreme ale acestei regiuni;
- se calculează valoarea funcției obiectiv în aceste puncte extreme;
- se identifică punctul extrem în care valoarea funcției este maximă, (respectiv minimă, în funcție de problemă);
- coordonatele acestui punct sunt valorile optimale.

Probleme de programare liniară ce maximizează funcția obiectiv

1. Firma X este specializată pe producția genților de voiaj.
Managerul firmei dorește să producă două noi modele: genți de preț mediu și genți de lux.
Distribuitorul firmei a fost încântat de inițiativă și a acceptat să cumpere producția pe trei luni ale acestor modele.

Producerea fiecărei genți necesită următoarele operații :
- croirea și vopsirea materialului
- coaserea materialului
- finisarea produsului
- verificarea și ambalarea.

Managerul analizând fiecare operație a concluzionat că:

- pentru o geantă standard (de preț mediu) este nevoie de 42 minute pentru croirea și vopsirea materialului, 30 minute pentru coaserea materialului, o oră pentru finisare și 6 minute pentru verificare și ambalare.

- pentru o geantă lux este nevoie de o oră pentru croirea și vopsirea materialului, 50 minute pentru coaserea materialului, 40 minute pentru finisare și 15 minute pentru verificare și ambalare

Timpi de producție

Produs	Croire/vopsire	Coasere	Finisare	Ambalare
geantă standard	42 min	30 min	60 min	6 min
geantă de lux	60 min	50 min	40 min	15 min

Obiectivul firmei: maximizarea profitului total.

Pentru a construi modelul matematic vom nota cu x_1 numărul de genți standard și x_2 numărul de genți de lux. Firma realizează un profit de $10\$$ pentru o geantă standard și un profit de $9\$$ pentru o geantă de lux. Profitul total, pe care îl notăm cu z va fi:

$$z = 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$$

Problema constă în alegerea variabilelor x_1 și x_2 pentru care să obținem cel mai mare profit z.

In terminologia specifică programării liniare x_1 şi x_2 sunt **variabilele de decizie** şi z, care este funcție de variabilele de decizie este **funcția obiectiv.**

Scopul firmei X este să maximizeze funcția obiectiv.

$$\max z = \max(10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2)$$

Orice combinație a numărului de genți standard şi a numărului de genți de lux este o soluție a problemei.

Soluțiile admisibile sunt acele soluții care satisfac toate restricțiile.

Soluția admisibilă care duce la cel mai mare profit este **soluția optimală**.

Firma X dispune de 630 ore pentru croit/vopsit, 600 ore pentru coasere, 708 ore pentru finisare, 135 ore pentru verificare/ambalare şi astfel obţinem restricţiile:

$$\frac{7}{10}\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \le 630$$

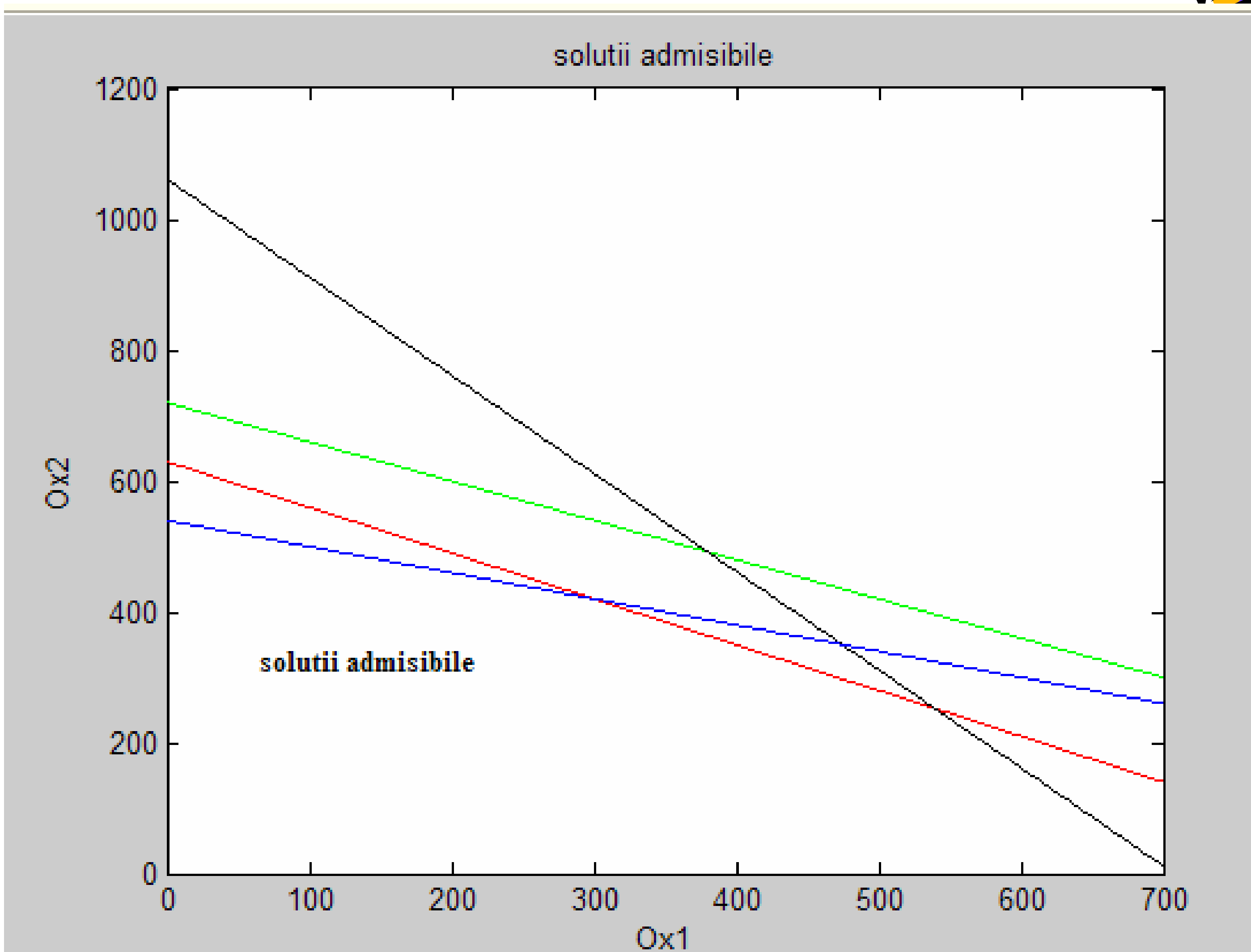
$$\frac{1}{2}\cdot x_1 + \frac{5}{6}\cdot x_2 \le 600$$

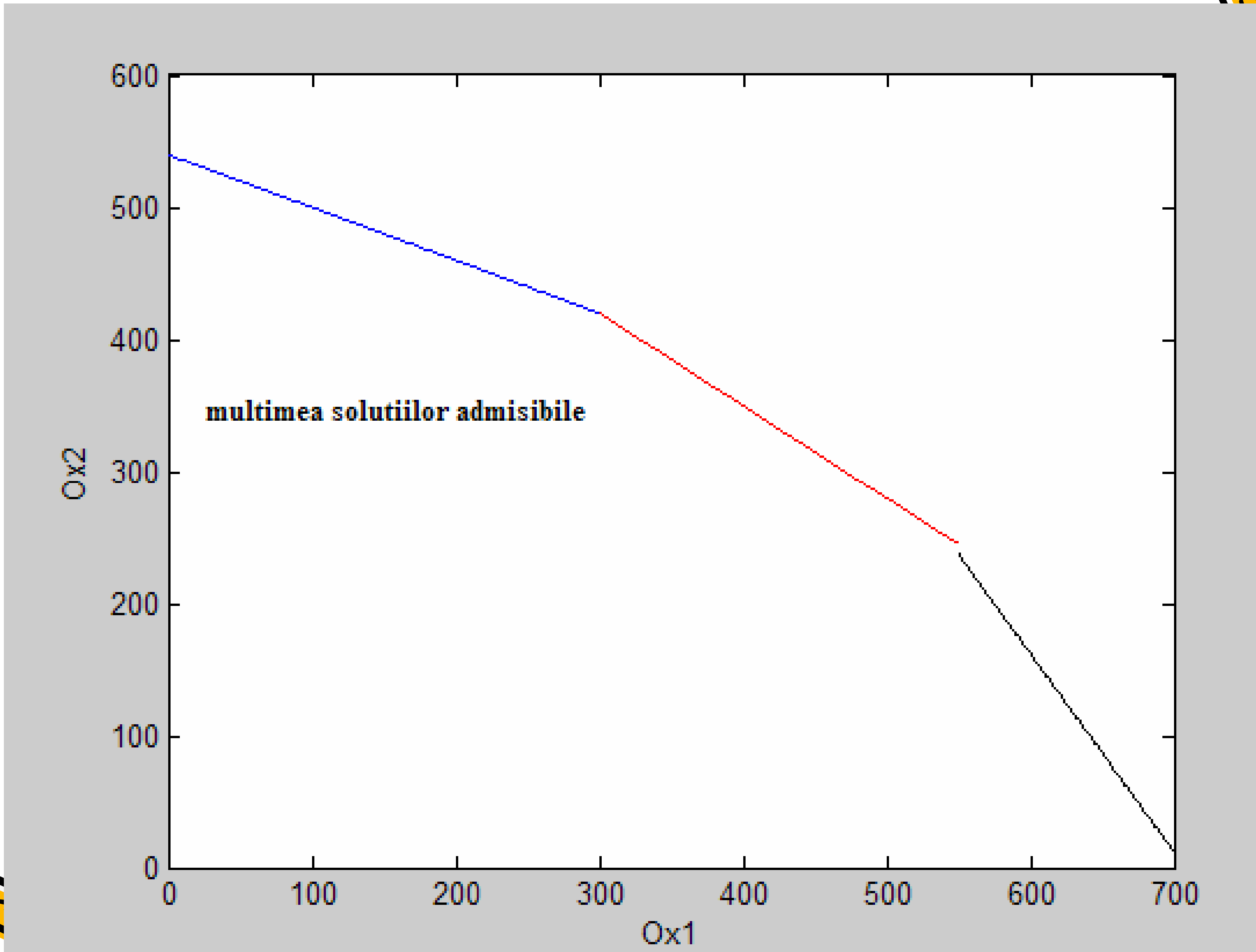
$$1\cdot x_1 + \frac{2}{3}\cdot x_2 \le 708$$

$$\frac{1}{10}\cdot x_1 + \frac{1}{4}\cdot x_2 \le 135$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Mulțimea soluțiilor admisibile



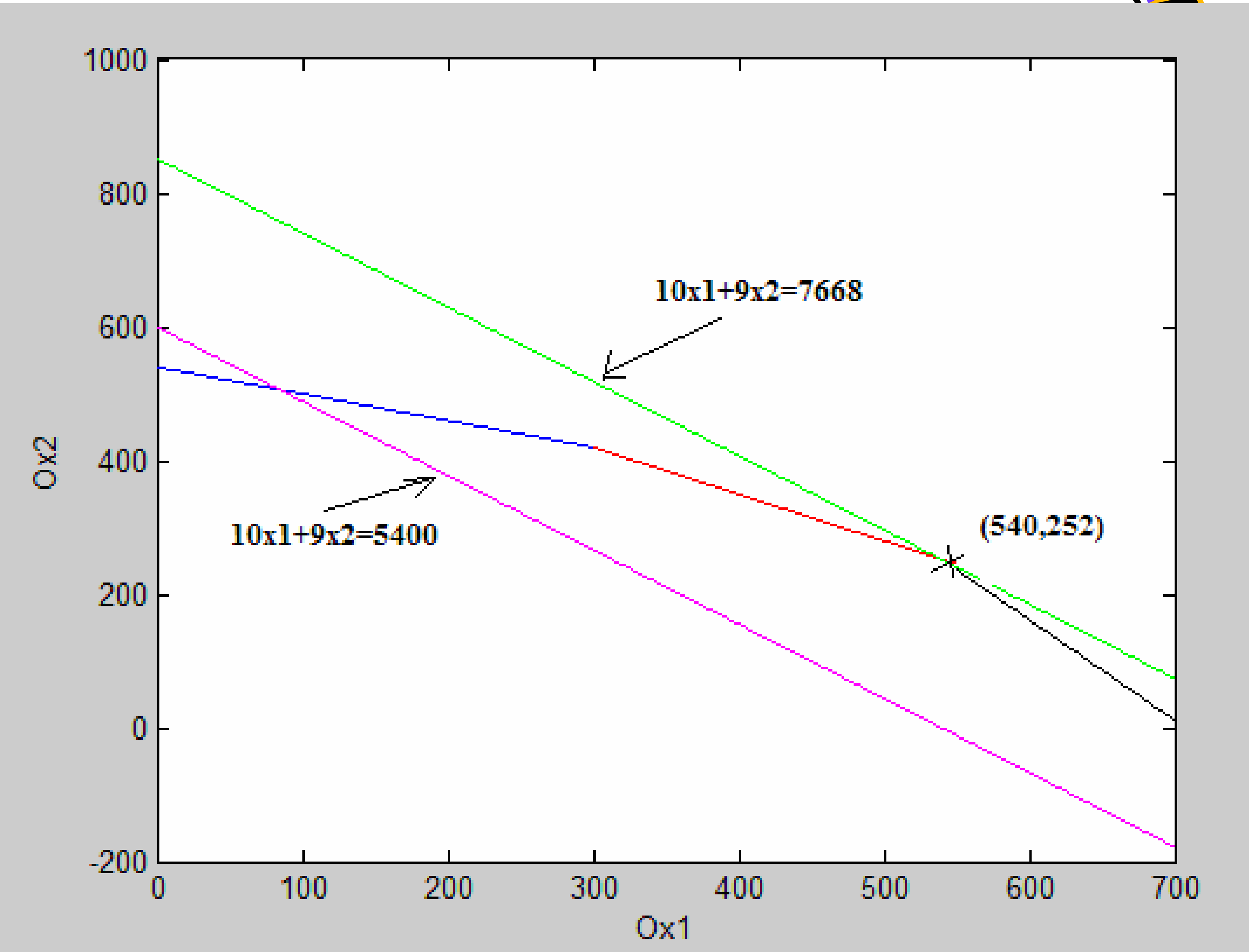

multimea solutiilor admisibile
Ox2
Ox1
0
100
200
300
400
500
600
700

Vom desena dreptele ce reprezintă graficul funcției obiectiv, pentru diferite valori ale lui z.

Una din aceste drepte are un singur punct comun cu mulțimea soluțiilor admisibile, punct ce va da soluția optimală a problemei.

Ecuația dreptei ce reprezintă profitul este $x_2 = -\frac{10}{9}x_1 + \frac{1}{9}z$

Desenăm drepte de coeficient unghiular $-\frac{10}{9}$.


10x1+9x2=7668
10x1+9x2=5400
(540,252)
Ox2
Ox1
1000
800
600
400
200
0
-200
0
100
200
300
400
500
600
700

Utilizând metoda grafică obținem că punctul optimal se află la intersecția dreptelor

$$\frac{7}{10} \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 630$$

$$x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 = 708$$

și prin rezolvarea sistemului obținem $x_1 = 540$, $x_2 = 252$

Astfel prin producerea a 540 genți standard și 252 genți de lux se obține un profit maxim de 7668\$.

Firma X este interesată de timpii de producție (în ore) în acest caz:

- croirea şi vopsirea materialului: $\frac{7}{10}\cdot 540+252=630$
- coaserea materialului: $\frac{1}{2}\cdot 540+\frac{5}{6}\cdot 252=480$
- finisarea produsului: $540+\frac{2}{3}\cdot 252=708$
- verificarea şi ambalarea: $\frac{1}{10}\cdot 540+\frac{1}{4}\cdot 252=117$

Aceste calcule arată managerului că în departamentul de coasere rămân 120 ore nefolosite, în timp ce in departamentul de verificare/asamblare sunt 18 ore nefolosite, ore ce sunt de fapt timpi morți.

Uneori în problema de programare liniară se adaugă noi variabile corespunzătoare acestor timpi morți, cunoscute în terminologia specializată că variabile de reducere „ **slack variables**".

Funcția obiectiv nu se schimbă, deoarece aceste variabile nu contribuie la valoarea profitului, deci au coeficientul zero.

După introducerea acestor variabile, avem următorul model matematic:

$$\max: \quad 10 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4$$

$$\begin{aligned}
&\frac{7}{10} \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot s_1 = 630 \\
&\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{5}{6} \cdot x_2 \qquad + 1 \cdot s_2 = 600 \\
&1 \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 + \qquad + 1 \cdot s_3 = 708 \\
&\frac{1}{10} \cdot x_1 + \frac{1}{4} \cdot x_2 + \qquad 1 \cdot s_4 = 135 \\
&x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Un model de programare liniară, ale cărui restricții sunt egalități este scris în forma **standard**.

Pentru soluția optimală $x_1 = 540$, $x_2 = 252$, valorile variabilelor de reducere sunt:

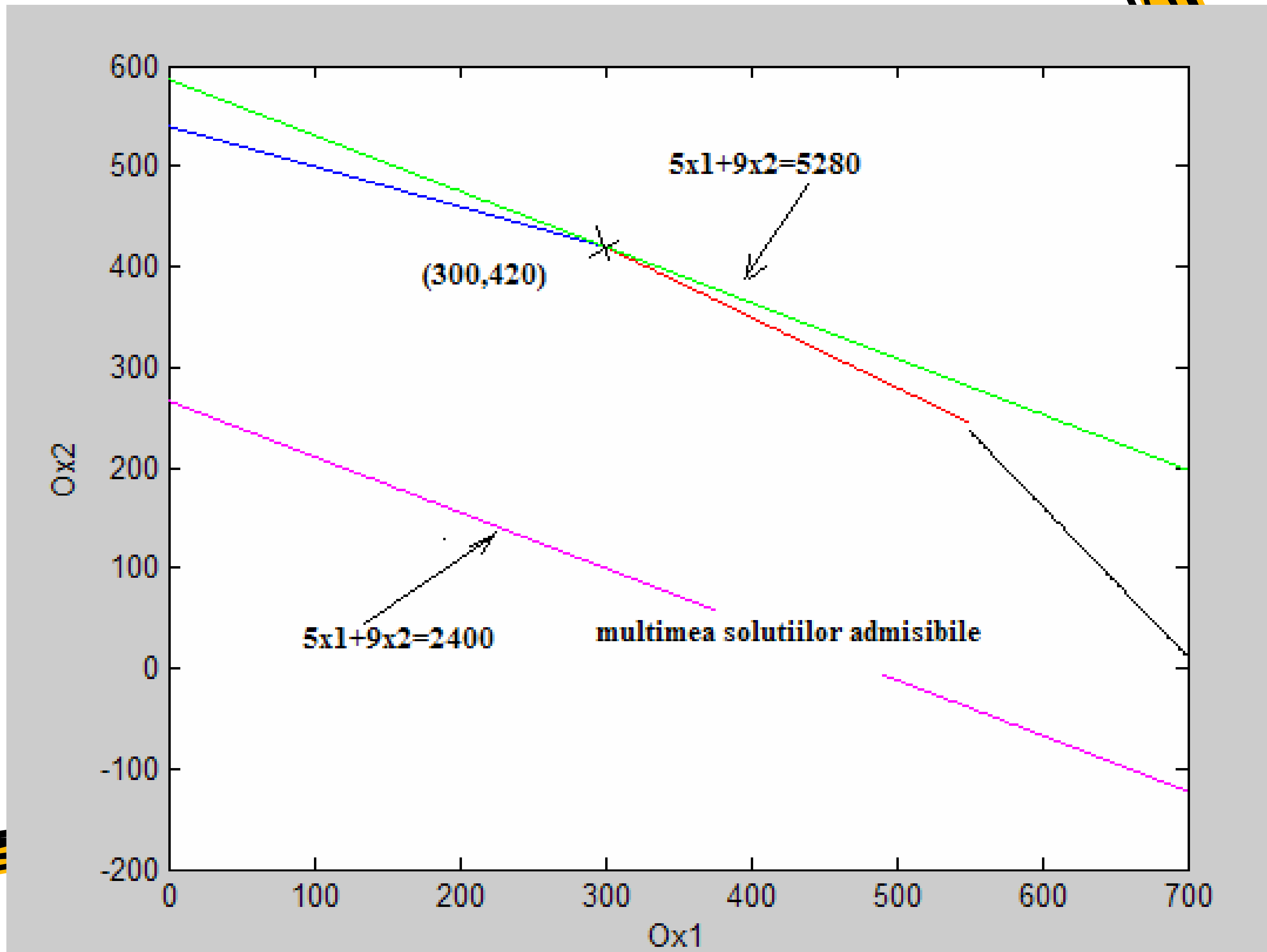
$$s_1 = 0,\ s_2 = 120,\ s_3 = 0,\ s_4 = 18$$

Presupunem că profitul adus de o geantă standard este de 5$, in timp ce profitul adus de o geantă de lux rămâne neschimbat, restricțiile privitoare la timpii de lucru fiind aceași.

Astfel în modelul matematic se schimba doar funcția obiectiv:

$$\max z = \max(5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2)$$

Mulțimea soluțiilor admisibile rămâne aceeași, deoarece restricțiile sunt neschimbate.



5x1+9x2=5280
(300,420)
5x1+9x2=2400
multimea solutiilor admisibile
Ox2
Ox1

Soluția optimă se află la intersecția dreptelor

$$\frac{7}{10}\cdot x_1 + 1\cdot x_2 = 630$$

$$\frac{1}{10}\cdot x_1 + \frac{1}{4}\cdot x_2 = 135$$

şi este $x_1 = 300, x_2 = 420$

În problema prezentată mulțimea soluțiilor admisibile are 5 puncte extreme.

Formal, putem observa că soluția optimă a unei probleme de programare liniară poate fi găsita în punctele extreme ale mulțimii soluțiilor admisibile.

Astfel este suficient să calculăm şi să comparăm profitul în aceste puncte extreme pentru a afla soluția optimală.

2. Firma X este specializată pe producția a două produse chimice. Profitul estimat la vânzarea unei tone din produsul *A* este 25$, în timp ce la vânzarea unei tone din produsul *B* profitul este 30$.

Numărul de ore necesar pentru producerea unei tone din produsul *A*, respectiv *B* în cele trei departamente de producție sunt prezentate în tabelul următor:

departamentul de producție	substanța *A*	substanța *B*
I	1.50	3.00
II	2.00	1.00
III	0.25	0.25

Directorii departamentelor au estimat numărul de ore disponibile în fiecare departament luna viitoare:

- departamentul I: 450 ore;
- departamentul II: 350 ore;
- departamentul III: 50 ore;

Obiectivul firmei constă în maximizarea profitului total.

Pentru a construi modelul matematic vom nota cu x_1 numărul de tone din produsul A şi x_2 numărul de tone din produsul B.

Profitul total, pe care îl notăm cu z va fi:

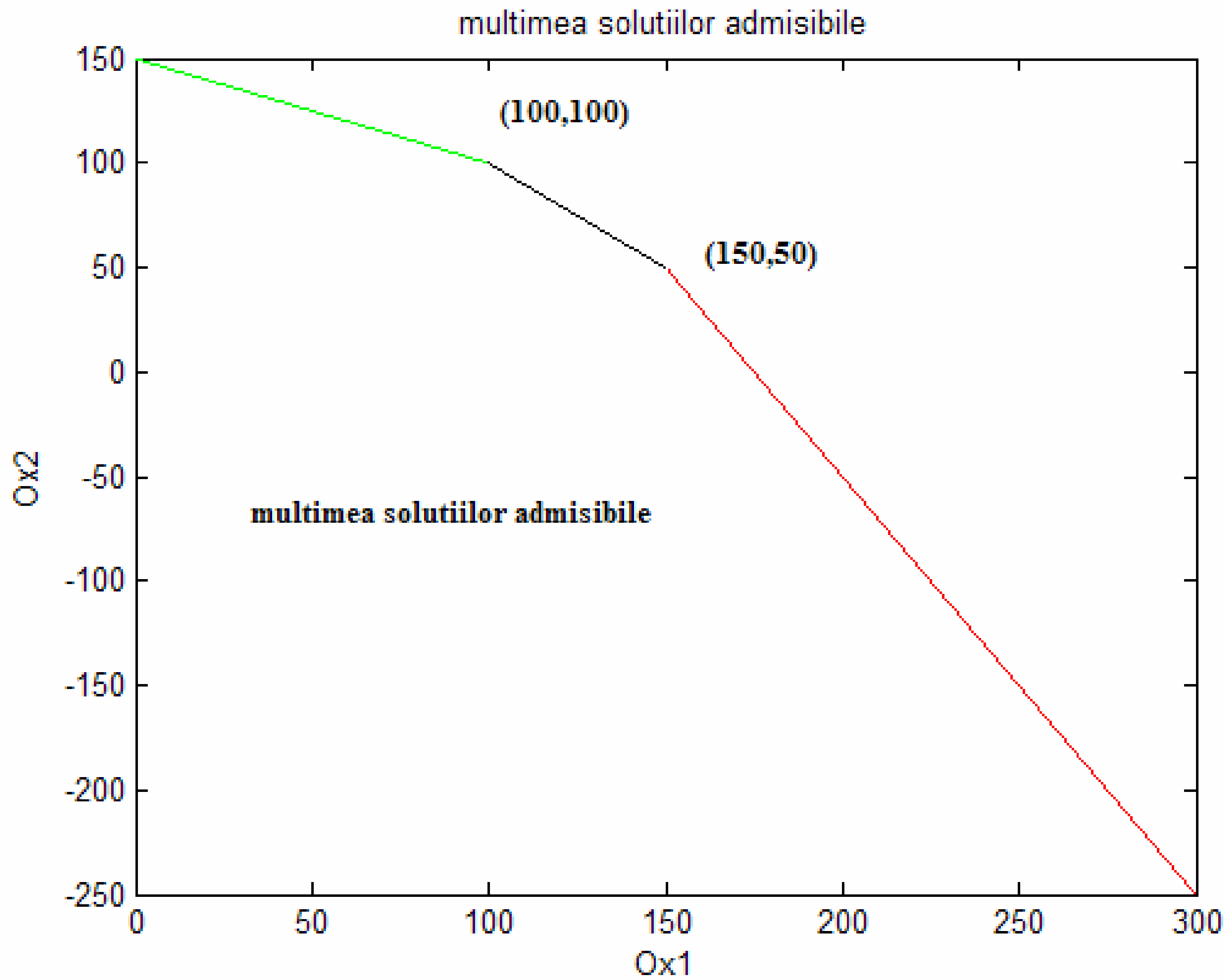
$$z = 25 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2$$

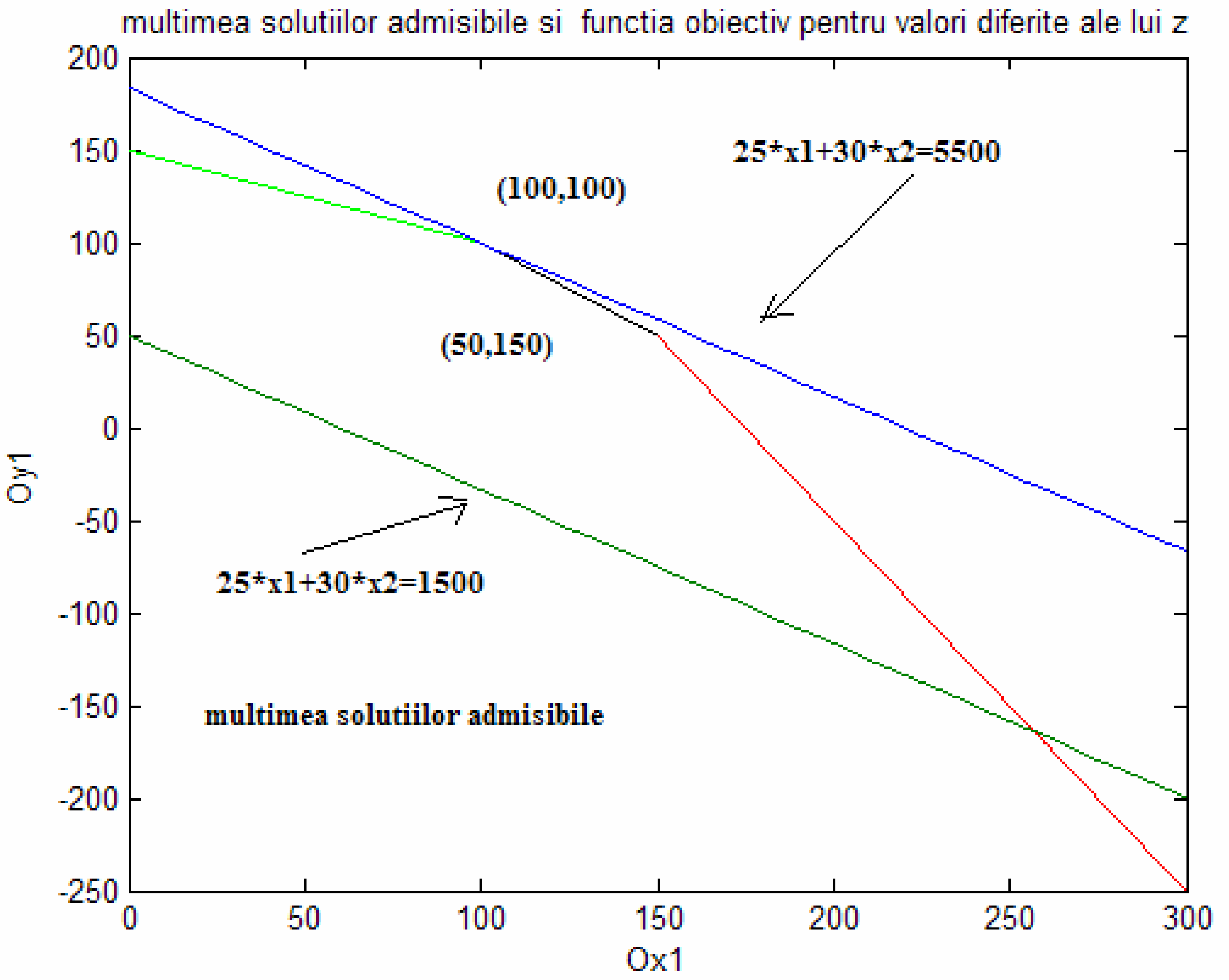
Problema constă în alegerea variabilelor x_1 şi x_2 pentru care obţinem cel mai mare profit z.

x_1 şi x_2 sunt variabilele de decizie

z este funcţia obiectiv.

Scopul firmei X este să maximizeze funcţia obiectiv.


multimea solutiilor admisibile
(100,100)
(150,50)
multimea solutiilor admisibile
Ox2
Ox1
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-250
0
50
100
150
200
250
300



multimea solutiilor admisibile si functia obiectiv pentru valori diferite ale lui z
25*x1+30*x2=5500
(100,100)
(50,150)
25*x1+30*x2=1500
multimea solutiilor admisibile
Oy1
Ox1
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-250
0
50
100
150
200
250
300

Utilizând metoda grafică obținem că punctul optimal se află la intersecția dreptelor

$$1.5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 450$$
$$0.25 \cdot x_1 + 0.25 \cdot x_2 = 50$$

și prin rezolvarea sistemului obținem $x_1 = 100$, $x_2 = 100$.

Astfel prin producerea a 100 tone din produsul *A* și a 100 tone din produsul *B* se obține un profit maxim de 5500$.

Firma X este interesată de timpii de producție (în ore) în acest caz:

- departamentul I: $1.5 \cdot 100 + 3 \cdot 100 = 450$
- departamentul II:: $2 \cdot 100 + 1 \cdot 100 = 300$
- departamentul III: $0.25 \cdot 100 + 0.25 \cdot 100 = 50$

Aceste calcule arată managerului că în departamentul II rămân 50 ore nefolosite, ore ce sunt de fapt timpi morți.

După introducerea variabilelor de reducere, avem următorul model matematic:

$$Max: \quad 25 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3$$

$$1.5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot s_1 = 450$$

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \qquad + 1 \cdot s_2 = 350$$

$$0.25 \cdot x_1 + 0.25 \cdot x_2 + \qquad + 1 \cdot s_3 = 50$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Pentru soluția optimală $x_1 = 100$, $x_2 = 100$, valorile variabilelor „slack" sunt:

$$s_1 = 0,\ s_2 = 50,\ s_3 = 0$$

În problema prezentată mulțimea soluțiilor admisibile are 2 puncte extreme (vârfuri), care se află printre soluțiile sistemelor:

$$\begin{cases} 1.5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = 450 \\ 2\cdot x_1 + x_2 = 350 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 133.(3), x_2 = 83.(3)$$

$$\begin{cases} 1.5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = 450 \\ 0.25\cdot x_1 + 0.25 x_2 = 50 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 100$$

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + x_2 = 350 \\ 0.25\cdot x_1 + 0.25 x_2 = 50 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 150, x_2 = 50$$

Din desenele prezentate se observă că punctul $(133.(3), 83.(3))$ nu aparține mulțimii soluțiilor admisibile

Astfel este suficient să calculăm şi să comparăm profitul în punctele extreme ale mulțimii soluțiilor admisibile pentru a afla soluția optimală.

Calculând:

$$z(100,100) = 5500$$

$$z(150,50) = 5250$$

obținem soluția optimală $x_1 = 100$, $x_2 = 100$.

Problemă de programare liniară ce minimizează funcția obiectiv

O fabrică de produse chimice vinde două dintre produsele sale, ca materii prime pentru două companii ce produc săpunuri de baie şi detergenți pentru rufe.
Bazându-se pe analiza inventarului curent şi pe potențialele cereri pentru luna următoare, managerii au estimat că producția combinată a produselor 1 şi 2 trebuie să fie cel puțin de 350kg.
Pe de alta parte un client important a comandat 125kg din produsul 1.

Produsul 1 necesită două ore timp de procesare pentru 1 kg, în timp ce pentru 1 kg,din produsul 2 timpul de procesare este de o oră.
Pentru luna următoare este disponibil un timp de procesare de 600 ore.
Producția unui kilogram din produsul 1 costă 2$, în timp ce producția unui kilogram din produsul 2 costă 3$
Obiectivul managerilor este să satisfacă cererile cu un cost total de producție minim.

Variabilele de decizie sunt:

x_1 = numărul de kg fabricate din produsul 1;

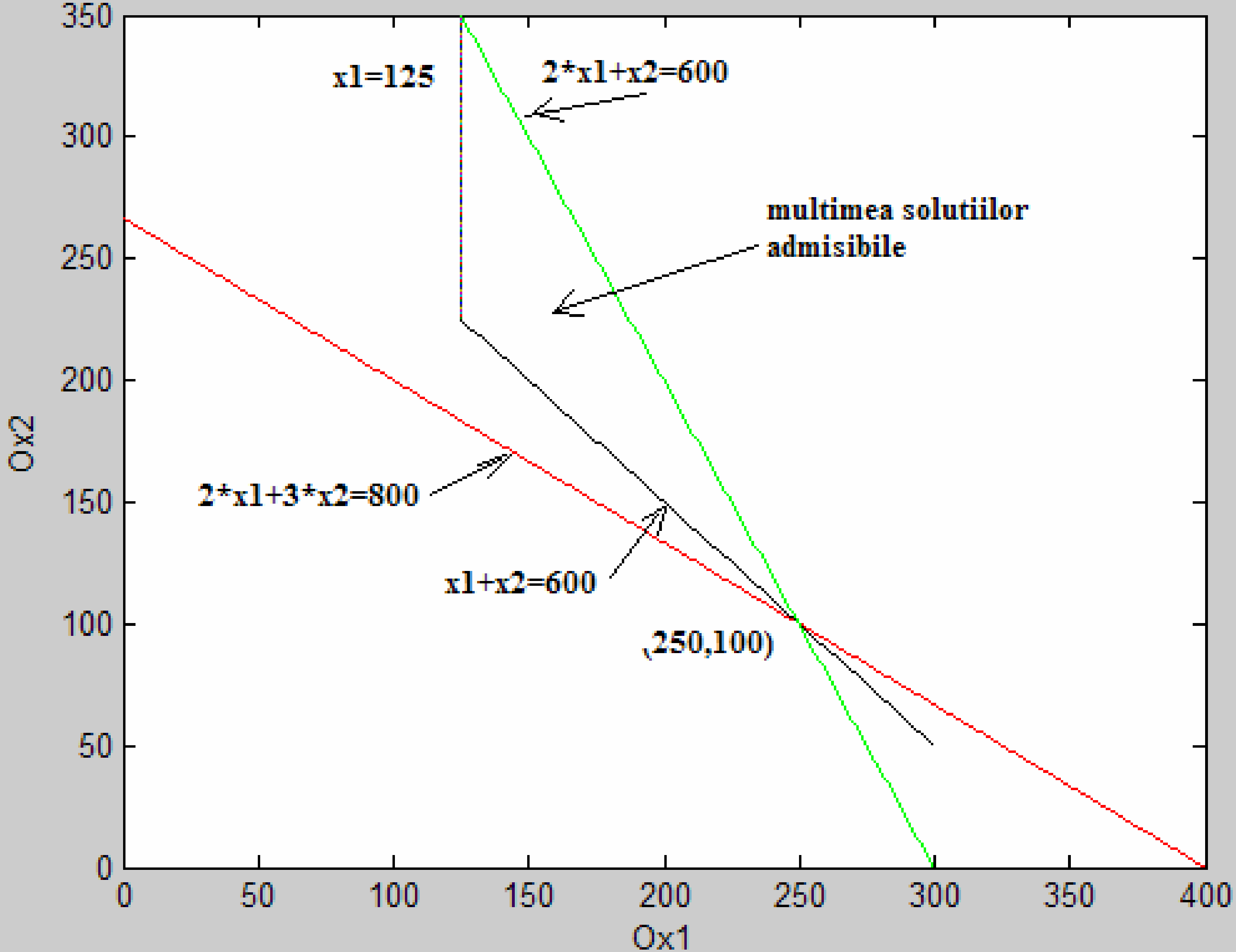
x_2 = numărul de kg fabricate din produsul 2;

Funcția obiectiv este minimizarea costului producției totale:

$$\min(2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)$$

restricțiile impuse:

- pentru satisfacerea cererii clientului important x_1 trebuie să fie cel puțin 125\$ $x_1 \geq 125$
- producția combinată a celor doua sortimente este cel puțin 350kg:
  $$x_1 + x_2 \geq 350$$
- capacitatea de producție este de cel mult 600 ore: $2 \cdot x_1 + x_2 \leq 600$
- restricțiile de non-negativitate: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$


x1=125
2*x1+x2=600
multimea solutiilor admisibile
2*x1+3*x2=800
x1+x2=600
(250,100)
Ox2
Ox1
350
300
250
200
150
100
50
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400

Punctele de extrem ale acestei regiuni sunt:

$(250,100)$; $(125,225)$; $(125,350)$

Prezentăm valorile funcției $f(x_1,x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$ în aceste puncte:

$$f(250,100) = 800$$
$$f(125,225) = 925$$
$$f(125,350) = 1300$$

În concluzie minimul funcției este în punctul $(250,100)$, valoarea sa fiind 800.

Analiza completă a soluției costului minim arată că producția dorită de 350kg a fost obținută utilizând timpul de producție disponibil de $2*250+1*100 = 600$ ore.

Restricția ce definește cererea produsului 1 a fost satisfăcută cu $x_1 = 250$ kg, ceea ce înseamnă că a depășit nivelul minim impus cu 125kg.

Această producție excedentară este considerată în limbajul uzual al programării liniare ca fiind un **surplus**.

Variabile de surplus

Pentru a obține o problemă de programare liniară standard, variabilele de surplus apar în funcția obiectiv având coeficientul zero. Inegalitățile ce definesc restricțiile le vom transforma in egalități adăugând variabilele de surplus cu semnul minus, în timp ce variabilele de reducere se adaugă cu semnul plus:

$$\begin{array}{l}
\min(2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3) \\
x_1 \qquad -1 \cdot s_1 = 125 \\
x_1 + x_2 \qquad -1 \cdot s_2 = 350 \\
2 \cdot x_1 + x_2 \qquad +1 \cdot s_3 = 600 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{array}$$

In concluzie:

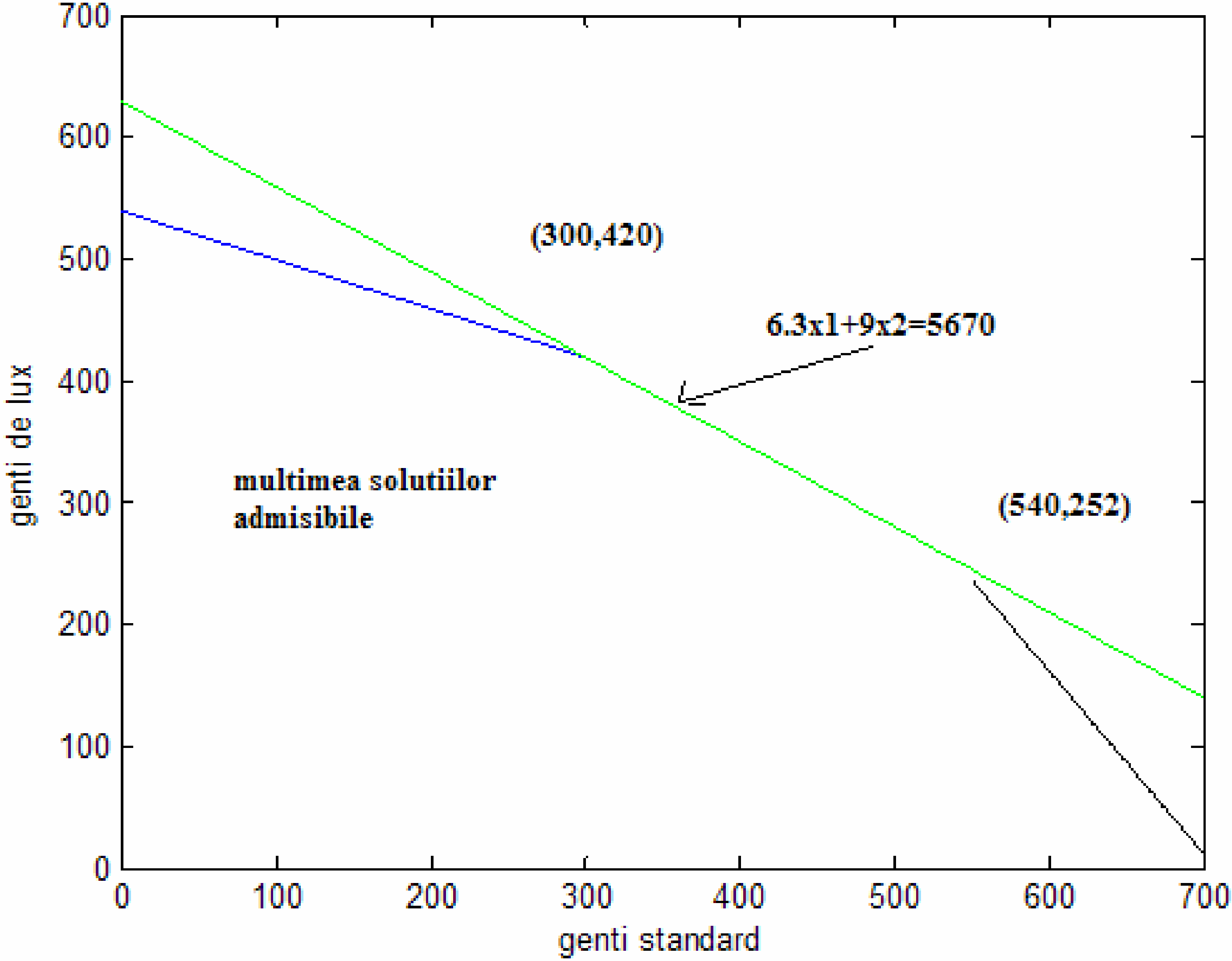
- restricție de tipul $a_i \cdot x_1 + b_i \cdot x_2 \leq c_i$ necesită o variabilă de reducere,
- o restricție de tipul $a_i \cdot x_1 + b_i \cdot x_2 \geq c_i$ necesită o variabilă de surplus.

Soluții optimale alternative

Considerăm cazul particular când graficul funcției obiectiv coincide cu una din dreptele ce constituie frontiera mulțimii soluțiilor admisibile.
În acest caz există mai multe soluții pentru optimizarea funcției obiectiv, aşa numitele **soluții optimale alternative**.

Exemplu

Reluăm exemplul cu genţile de voiaj, considerând aceleaşi restricţii.
Modificarea constă în faptul că profitul pentru geanta standard este 6.3$ şi astfel funcţia obiectiv va fi $f(x_1, x_2) = 6.3 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$.
Cele două puncte extreme ale mulţimii soluţiilor admisibile sunt $(300,420)$ şi $(540,252)$
Valoarea funcţiei obiectiv în aceste puncte este aceeaşi
$f(300, 420) = f(540, 252) = 5670$



(300,420)
6.3x1+9x2=5670
multimea solutiilor admisibile
(540,252)
genti de lux
genti standard
0
100
200
300
400
500
600
700

In plus orice punct de pe dreapta $6.3 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 5670$ cuprins între punctele $(300, 420)$ şi $(540, 252)$ este o soluție optimală pentru funcția obiectiv.

O problemă de programare liniară cu soluții optimale alternative este situația ideală pentru cel desemnat să ia deciziile deoarece îi oferă o largă gamă de soluții optime.

Soluții inexistente

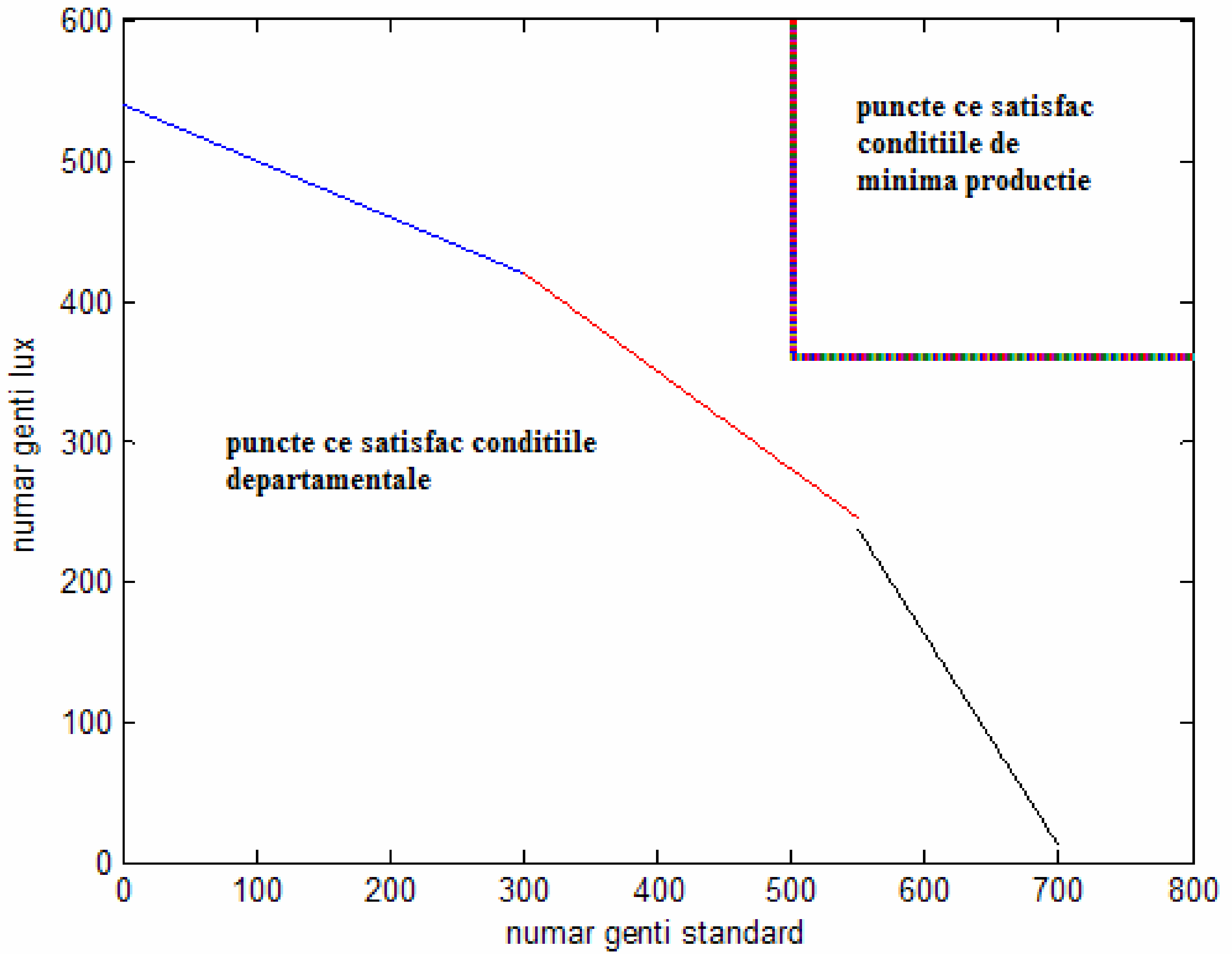
În practică apar probleme cu soluții nerealizabile, deoarece managerul firmei are pretenții prea mari sau sunt impuse prea multe restricții.

In cazul în care într-o problemă de programare liniară mulțimea soluțiilor admisibile este vidă spunem ca nu există soluții ale respectivei probleme.

Reluăm exemplul cu gențile de voiaj adăugând noi cerințe:

Exemplu

Presupunem că managerul a cerut fabricarea a cel puțin 500 de genți standard și cel puțin 360 genti de lux.



600
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
numar genti lux
numar genti standard
puncte ce satisfac conditiile de minima productie
puncte ce satisfac conditiile departamentale

În termenii acestei probleme inexistența soluțiilor poate fi astfel explicată factorilor de decizie:

având în vedere resursele existente (timpul de producție pentru croire/vopsire, coasere, finisare și ambalare) nu este posibilă producerea a 500 de genți standard și 360 genți de lux.

Pe de altă parte putem indica ce modificări trebuie aduse pentru a face posibilă producerea celor 500 de genți standard și 360 genți de lux.

Cîteva aplicații ale programării liniare

Marketing

În *marketing* alegerea tipului de publicitate este o asemenea aplicație. Managerii care se ocupa de marketing, având la dispoziție o suma totală fixă pentru publicitate trebuie să decidă ce variante publicitare aleg şi în ce proporție: ziare, reviste, radio, televiziune şi mail-uri personalizate.

Funcția obiectiv este maximizarea audienței.

Restricțiile sunt date de politica companiei, cerințele contractelor şi disponibilitatea mijloacelor media.

- Compania Y va construi un cartier rezidențial pe malul unui lac. Ei se adresează familiilor cu venit peste mediu și care locuiesc în regiunea respectivă. Compania a angajat o firmă Z să se ocupe de campania publicitară a acestui proiect.

  În urma analizării mediilor publicitare și a pieței ce urmează a fi acoperită, firma a recomandat ca în prima lună să fie utilizate 5 moduri de a face publicitate. La sfârșitul acestei luni pe baza rezultatelor obținute se va reevalua strategia.

Datele se referă la numărul de familii interesate de proiect, costul fiecărui tip de publicitate, timpul maxim de utilizare a fiecărui tip de publicitate şi rating-ul acestora.

Aceste măsurători au luat în considerare profilul audienței (vârstă, venit, educație), imaginile prezentate şi calitatea publicității.

mediul de publicitate	număr de potențiali cumpărători	cost/pe reclamă	timp maxim disponibil/ pe lună	unități de prezentare
tv/ziua 1min	1000	1500 $	15	65
tv/seara 30sec	2000	3000 $	10	90
ziar (o pagină)	1500	400 $	25	40
revistă săpt. (1/2 pag. color)	2500	2500 $	4	60
radio: știrile ora 16, 30sec	300	300 $	30	20

Firma Y are un buget pentru campania publicitară din prima lună de 30000$. În plus cere ca să fie folosite cel puțin 10 posturi tv, să aibă cel puțin 50000 de potențial cumpărători şi să nu se cheltuiască mai mult de 18000$ pentru reclama televizată.

Ce plan de campanie publicitară va recomanda firma Z?

Variabilele de decizie sunt:

- x_1 numărul de timpi în care este utilizat tv/zi
- x_2 numărul de timpi în care este utilizat tv/seara
- x_3 numărul de timpi în care este utilizat ziarul
- x_4 numărul de timpi în care este utilizată revista săptămânală
- x_5 numărul de timpi în care este utilizat radio-ul

Funcția obiectiv constă în maximizarea timpilor de publicitate

$$\text{Max:} \quad 65x_1 + 90x_2 + 40x_3 + 60x_4 + 20x_5$$

Restricțiile sunt date de constrângerile impuse:

timpii disponibili

$$\begin{aligned} x_1 &\le 15 \\ x_2 &\le 10 \\ x_3 &\le 25 \\ x_4 &\le 4 \end{aligned}$$

bugetul

$$1500x_1 + 3000x_2 + 400x_3 + 1000x_4 + 100x_5 \le 30000$$

restricțiile pentru tv

$$x_1 + x_2 \ge 10$$

$$1000x_1 + 2000x_2 + 1500x_3 + 2500x_4 + 300x_5 \ge 50000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Soluțiile acestei probleme sunt:

media	frecvență	buget
tv/zi	10	15000
ziar	25	10000
ziar săptămânal	2	2000
radio	30	3000
	total	30000

şi astfel obținem:

- total audiență 61500
- unități de expunere 2370

Finanțe

În *finanțe*, programarea liniară este aplicată în cazul selecției de portofolii, strategiilor mixte ce implică alegerea mijloacelor de finanțare ale companiilor și nu numai.

Selecția de portofolii este situația în care managerul trebuie să aleagă investiții specifice din mai multe variante posibile.

Funcția obiectiv este de obicei maximizarea rentabilității estimate sau minimizarea riscului.

Exemplu

- Considerăm cazul unei companii americane, de fonduri mutuale care a obținut 100000$ din vânzarea unor acțiuni și caută oportunități de investire a acestor bani. Analiștii financiari recomandă investiții în industria petrolieră sau a oțelului și în obligațiuni guvernamentale. Investițiile și ratele de rentabilitate sunt prezentate în tabelul următor:

investiția	rate de rentabilitate prognozate %
Atlantic Oil	7.3
Pacific Oil	10.3
Midwest Steel	6.4
Huber Steel	7.5
Obligațiuni guvernamentale	4.5

Compania a impus următoarele linii directoare în investiții:

- nu se vor investi mai mult de 50000$ în niciuna dintre industrii;
- obligațiunile guvernamentale trebuie să reprezinte cel puțin 25% din investițiile în industria oțelului;
- investițiile în Pacific Oil care au cea mai bună rată de rentabilitate, dar prezintă risc înalt să nu depășească 60% din totalul investițiilor în industria petrolieră.

Compania este interesată de maximizarea rentabilității estimate în condițiile restrictive prezentate mai sus.

Modelul matematic este o problemă de programare liniară:

Notăm:

- x_1 dolari investiți în Atlantic Oil;
- x_2 dolari investiți în Pacific Oil
- x_3 dolari investiți în Midwest Steel
- x_4 dolari investiți în Huber Steel
- x_5 dolari investiți în obligațiuni guvernamentale

Utilizând ratele de rentabilitate prezentate anterior funcția obiectiv va fi:

$$Max: \quad 0.073 \cdot x_1 + 0.103 \cdot x_2 + 0.064 \cdot x_3 + 0.075 \cdot x_4 + 0.045 \cdot x_5$$

restricții:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100000 \quad \text{(fonduri disponibile)}$$

$$x_1 + x_2 \le 50000 \quad \text{(maximum în industria petrolieră)}$$

$$x_3 + x_4 \le 50000 \quad \text{(maximum în industria oțelului)}$$

$$x_5 \ge 0.25 \cdot (x_3 + x_4) \quad \text{(minimum de obligațiuni guvernamentale)}$$

$$x_2 \le 0.6 \cdot (x_1 + x_2) \quad \text{(restricții pentru Pacific Oil)}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Prin rezolvarea acestei probleme s-au obținut următoarele rezultate:

investiția	cantitate $	rentabilitate estimată $
Atlantic Oil	20000	1460
Pacific Oil	30000	3090
Huber Steel	40000	3000
Obligațiuni guvernamentale	10000	450
	100000	8000

Repartizarea forței de muncă

Repartizarea forței de muncă este o problemă serioasă ce apare când managerul este obligat să facă modificări de personal, pentru o anume perioadă de timp.

De cele mai multe ori personalul dovedeşte flexibilitate şi poate fi repartizat la alt departament, managerul fiind interesat de cea mai bună alocare a forței de muncă.

Exemplu

- *Compania X* fabrică două produse cu un profit pe unitate de 10$, respectiv 9$. Cerințele de forța de muncă pe unitatea de produs și numărul total de ore de lucru disponibile ale personalului din cele patru departamente sunt prezentate în următorul tabel:

dept.	nr ore necesare pe unitate de produs 1	nr ore necesare pe unitate de produs 2	număr ore disponibile
1	0.65	0.95	6500
2	0.45	0.85	6000
3	1.00	0.70	7000
4	0.15	0.30	1400

Considerând următoarele variabile de decizie:

- x_1 numărul de unități din produsul 1,
- x_2 numărul de unități din produsul 2.

putem formula următoarea problemă de programare liniară:

$$Max: \quad 10x_1 + 9x_2$$

$$0.65 \cdot x_1 + 0.95 \cdot x_2 \leq 6500$$

$$0.45 \cdot x_1 + 0.85 \cdot x_2 \leq 6000$$

$$1.00 \cdot x_1 + 0.70 \cdot x_2 \leq 7000$$

$$0.15 \cdot x_1 + 0.30 \cdot x_2 \leq 1400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Soluția optimală este de 5744 unități din primul produs, 1795 unități din al doilea produs ceea ce duce la un profit maxim de 73590$.

În acest caz departamentele 3 şi 4 vor produce la capacitate maximă în timp ce departamentul 1 rămâne cu 1062 ore de muncă nefolosite şi departamentul 2 cu 1890 ore de muncă nefolosite.

Estimăm că profitul total ar creşte daca forța de muncă ar fi redistribuită şi orele de muncă neîntrebuințate să fie transferate la departamentele ce lucrează la întreaga capacitate.

Să presupunem că se pot face transferări ale angajaților între anumite departamente ținând cont de competențe și specificul muncii, conform tabelului următor:

din dept.	posibil la dept 1	posibil la dept. 2	posibil la dept. 3	posibil la dept. 4	maximum de ore transferabile
1	-	da	da	-	400
2	-	-	da	da	800
3	-	-	-	da	100
4	da	da	-	-	200

De exemplu linia 1 arată că anumiți angajați din departamentul 1 au competențele necesare pentru a putea fi transferați în departamentele 2 și 3.

Ultima coloană arată maximum de ore ce por fi transferate din departamentul 1 (400).

Când forța de muncă, datorită competențelor sale este flexibilă nu putem spune imediat câte ore de muncă pot fi atribuite sau transferate în fiecare departament. În acest scop vom introduce următoarele variabile de decizie pentru modelul de programare liniară:

- b_i este numărul de ore alocate fiecărui departament i pentru i=1,2,3,4.
- t_{ij} este numărul de ore transferat de la departamentul i la departamentul j.

Restricțiile relativ la capacitatea de lucru în departamente devin:

$$0.65 \cdot x_1 + 0.95 \cdot x_2 \leq b_1$$

$$0.45 \cdot x_1 + 0.85 \cdot x_2 \leq b_2$$

$$1.00 \cdot x_1 + 0.70 \cdot x_2 \leq b_3$$

$$0.15 \cdot x_1 + 0.30 \cdot x_2 \leq b_4$$

Pentru a determina forța de muncă alocată va trebui să ținem seama de numărul orelor de muncă inițial alocate fiecărui departament plus numărul de ore transferate departamentului minus numărul orelor ce vor fi transferate din departament altui departament.

Spre exemplu:

$b_1 =$ numărul de ore inițial existent în dept.1 + numărul de ore transferate în dept.1- numărul de ore transferate din dept.1

Astfel ținând seama de numărul de ore inițial disponibile și de situația prezentată în ultimul tabel putem scrie:

$$b_1 = 6500 + t_{41} - t_{12} - t_{13}$$

adică

$$b_1 - t_{41} + t_{12} + t_{13} = 6500$$

Restricții asemănătoare vom scrie și pentru următoarele departamente:

$$b_2 - t_{12} - t_{42} + t_{23} + t_{24} = 6000$$

$$b_3 - t_{13} - t_{23} + t_{34} \qquad = 7000$$

$$b_4 - t_{24} - t_{34} + t_{41} + t_{42} = 1400$$

Numărul de ore de muncă transferabile este limitat şi astfel este necesar impunerea unor restricții referitoare la capacitatea de transfer:

$$
\begin{aligned}
&t_{12} + t_{13} \le 400\\
&t_{23} + t_{24} \le 800\\
&t_{34} \qquad\quad \le 100\\
&t_{41} + t_{42} \le 100
\end{aligned}
$$

Modelul nostru de programare liniară are două variabile referitoare la numărul de unități fabricate din fiecare produs, x_1, x_2, patru variabile referitoare la numărul de ore de muncă alocate fiecărui departament b_1, b_2, b_3, b_4 şi şapte variabile de transfer $t_{12}, t_{13}, t_{23}, t_{24}, t_{34}, t_{41}, t_{42}$. În total sunt 12 restricții.

Soluțiile problemei propuse sunt: profitul firmei poate creşte la 84011\$ folosind transferul forței de muncă.

Soluția optimală de 6825 unități din produsul 1 şi 1751 unități din produsul 2 se obține dacă:

$t_{13} = 400$ ore sunt transferate de la dept. 1 la dept. 3

$t_{23} = 751$ ore sunt transferate de la dept. 2 la dept. 3

$t_{24} = 49$ ore sunt transferate de la dept. 2 la dept. 4

$t_{34} = 100$ ore sunt transferate de la dept. 3 la dept. 4

În felul acesta vom avea:

departamentul	număr de ore de muncă efectuate
1	6100
2	5200
3	8051
4	1549

Acest model de programare liniară atribuie muncitorii şi numărul de ore de muncă în cea mai profitabilă variantă.

Algoritmul simplex

Algoritmul simplex a fost creat în 1947 de George Danzig, matematician american, şi este considerat de către revista *Computing in Science and Engineering* ca fiind între primii 10 algoritmi de top ai secolului al XX-lea.

Mulțimea inegalităților liniare dintr-o problemă de programare liniară poate fi privită din punct de vedere geometric ca definind un poliedru n-dimensional.

Pentru a găsi valoarea optimă a funcției obiectiv, se pleacă de la un vârf oarecare şi cu fiecare iterație se merge la un vârf adiacent pentru a creşte valoarea funcției obiectiv la fiecare pas.

Metoda simplex este o procedură algebrică.

Ne ocupăm doar de aspectele algoritmului său de aplicare.

Exemplu

2. Firma X este specializată pe producția a două produse chimice. Profitul estimat la vânzarea unei tone din produsul *A* este 25$, în timp ce la vânzarea unei tone din produsul *B* profitul este 30$. Numărul de ore necesar pentru producerea unei tone din produsul *A*, respectiv *B* în cele trei departamente de producție sunt prezentate în tabelul următor:

departamentul de producție	substanța *A*	substanța *B*
I	1.50	3.00
II	2.00	1.00
III	0.25	0.25

Directorii departamentelor au estimat numărul de ore disponibile în fiecare departament luna viitoare:

- departamentul I: 450 ore;
- departamentul II: 350 ore;
- departamentul III: 50 ore;

Obiectivul firmei constă în maximizarea profitului total.

modelul de programare liniară este următorul:

$$\max z = \max(25 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2)$$

$$1.5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 450$$

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 350$$

$$0.25 \cdot x_1 + 0.25 \cdot x_2 \leq 50$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Forma standard a problemei se obține prin adăugarea variabilelor de reducere:

$$\mathit{Max:}\quad 25x_1 + 30x_2 + 0\cdot s_1 + 0\cdot s_2 + 0\cdot s_3$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 + 1\cdot s_1 & & & = 450 \\
2x_1 + 1\cdot x_2 & + 1\cdot s_2 & & = 350 \\
\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 & & + 1\cdot s_3 & = 50
\end{array}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Avem de rezolvat un sistem de 3 ecuații cu 5 necunoscute,
ceea ce înseamnă de cele mai multe ori o infinitate de soluții.
Metoda simplex este o metodă algebrică care găseşte cea mai bună soluție în acest caz.
Natural soluțiile care sunt negative sunt eliminate.

În general forma standard a problemei are n variabile (variabilele de decizie, variabilele de reducere, variabilele de surplus) şi m ecuații liniare, $n > m$. Vom determina o soluție de bază egalând $n-m$ variabile cu zero şi rezolvând sistemul de m ecuații (restricțiile problemei) şi m necunoscute.
Sistemul este unic determinat datorită introducerii variabilelor de reducere.

Este necesară construirea unui tablou simplex inițial, pentru care vom adopta următoarele notații:

- c_j coeficientul variabilei *j* în funcția obiectiv;
- b_i valoarea din membrul drept al celei de a *i*-a restricții;
- a_{ij} coeficientul asociat variabilei *j* în a *i*-a restricție.

c_1	c_2	...	c_n	
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Pentru problema de programare liniară din exemplul prezentat tabloul simplex inițial va fi:

25	30	0	0	0	
3/2	3	1	0	0	450
2	1	0	1	0	350
1/4	1/4	0	0	1	50

Uneori punem în evidență și variabilele, ai căror coeficienți apar în tabel:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
25	30	0	0	0	
3/2	3	1	0	0	450
2	1	0	1	0	350
1/4	1/4	0	0	1	50

Este uşor de identificat soluția de bază admisibilă:

- Coloanele corespunzătoare variabilelor de bază au singura componentă nenulă egală cu unitatea. Aceste coloane poartă numele de coloane unitare sau vectori unitari.
- Linia din tabel care are 1 în coloana unitate corespunzătoare unei variabile de bază este asociată acestei variabile.
- Valoarea variabilei de bază este dată de b_i, valoarea liniei asociată variabilei principală.

În exemplul ce-l studiem linia 3 din tabelul simplex este asociată cu variabila de bază s_3 şi avem:

$$s_3 = b_3 = 50$$

Linia 2 este asociată variabilei s_2 şi avem

$$s_2 = b_2 = 350$$

Pentru îmbunătățirea soluției inițiale de bază admisibile vom genera o nouă soluție admisibilă (punct de extrem) care va conduce la o valoare mai bună a funcției obiectiv. Astfel vom modifica mulțimea variabilelor de bază în modul următor:

1. Vom adăuga două coloane noi tabloului simplex inițial:

   - coloana *Baza* ce are drept componente variabilele principale;
   - coloana c_{ij} care are drept componente coeficienții variabilelor principale din funcția obiectiv.

În exemplul nostru vom avea:

bază	c_{ij}	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
		25	30	0	0	0	
s_1	0	$3/2$	3	1	0	0	450
s_2	0	2	1	0	1	0	350
s_3	0	$1/4$	$1/4$	0	0	1	50

2. Vom adăuga tabelului obținut două linii noi:

- z_j reprezintă valoarea funcției obiectiv pentru $x_j = 1$; z_j este suma produselor elementelor din coloana c_{ij} cu elementele corespunzătoare din coloana j a matricei.
- $c_j - z_j$ este valoarea schimbării funcției obiectiv.

3. Vom alege dintre variabilele secundare pe aceea căreia îi corespunde cea mai mare valoare din linia $c_j - z_j$ și aceasta va constitui *coloana pivot*.

4. Vom alege ca *linie pivot* linia căreia îi corespunde cea mai mică valoare $\frac{b_i}{a_{ij}}, a_{ij} > 0$ unde *j* este coloana pivot. Linia pivot corespunde variabilei principale care va fi înlocuită. Elementul aflat la intersecția liniei pivot cu coloana pivot se numește *elementul pivot*

În exemplul nostru vom avea:

$$z_1 = 0 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot 2 + 0 \cdot \frac{1}{4} = 0 \quad \text{şi} \quad c_1 - z_1 = 25$$

$$z_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{4} = 0 \quad \text{şi} \quad c_2 - z_2 = 30$$

$$z_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{şi} \quad c_3 - z_3 = 0$$

$$z_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{şi} \quad c_4 - z_4 = 0$$

$$z_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{şi} \quad c_5 - z_5 = 0$$

bază	c_{ij}	x_1 25	x_2 30	s_1 0	s_2 0	s_3 0	
s_1	0	3/2	3	1	0	0	450
s_2	0	2	1	0	1	0	350
s_3	0	1/4	1/4	0	0	1	50
z_j		0	0	0	0	0	**0**
$c_j - z_j$		25	30	0	0	0	**profit**

În ultima coloană pe linia lui z_j am calculat profitul asociat valorii variabilelor principale:

$$\text{Profit} = 25 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 350 + 0 \cdot 50 = 0$$

Evaluând situația observăm că o tonă din produsul A (x_1) face să crească valoarea profitului cu 25, în timp ce o tonă din produsul B (x_2) crește profitul cu 30. Deoarece contribuția variabilei x_2 la creșterea profitului este mai mare, vom introduce pe x_2 ca variabilă în bază.

bază	c_{ij}	x_1 25	x_2 30	s_1 0	s_2 0	s_3 0		$\frac{b_i}{a_{i2}}$
s_1	0	$3/2$	3	1	0	0	450	150
s_2	0	2	1	0	1	0	350	350
s_3	0	$1/4$	$1/4$	0	0	1	50	200
z_j		0	0	0	0	0	**0**	
$c_j - z_j$		25	30	0	0	0	**profit**	

A doua coloană a matricei A (cea corespunzătoare variabilei x_2) este coloana pivot, prima linie este linia pivot și $a_{12} = 3$ este *elementul pivot*.

In general se efectuează câteva calcule elementare pentru a transforma coloana variabilei ce intră în bază, într-o coloană unitară ce are componenta in locul elementului pivot.

Tabloul simplex va fi astfel transformat încât să fie un sistem de ecuații echivalent cu cel inițial:

- împărțim fiecare element din linia pivot prin elementul pivot
- obținem zerouri pentru toate celelalte componente ale coloanei pivot adunând sau scăzând un multiplu potrivit a noii linii pivot

După efectuarea acestor operații valoarea noii soluții principale apare in coloana *b* a tabelului.

În exemplul nostru înmulțim linia pivot cu $\frac{1}{3}$ şi astfel vom obține ecuația echivalentă:

$$\frac{1}{2}\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \frac{1}{3}\cdot s_1 + 1\cdot s_2 + 0\cdot s_3 = 150$$

Coeficienții acestei ecuații constituie noua linie pivot.

Pentru a egala cu zero componenta lui x_2 de pe linia 2, vom scădea linia pivot din linia 2, obținând astfel ecuația echivalentă:

$$(2x_1 + x_2 + 1\cdot s_2) - (\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}\cdot s_1) = 350 - 150 \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - \frac{1}{3}\cdot s_1 + 1\cdot s_2 = 200$$

Avem astfel un nou tablou simplex:

bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
c_{ij}		25	30	0	0	0	
x_2	30	$1/2$	1	$1/3$	0	0	150
s_2	0	$3/2$	0	$-1/3$	1	0	200
s_3	0	$1/8$	0	$-1/12$	0	1	$50/4$

Tabloul este corespunzător următorului sistem de ecuații:

$$\frac{1}{2}\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \frac{1}{3}\cdot s_1 = 150$$

$$\frac{3}{2}\cdot x_1 + \quad -\frac{1}{3}\cdot s_1 + 1\cdot s_2 = 200$$

$$\frac{1}{8}\cdot x_1 + \quad -\frac{1}{12}\cdot s_1 + \quad +1\cdot s_3 = \frac{50}{4}$$

Presupunând că variabilele secundare x_1 şi s_1 sunt nule vom avea $x_2 = 150, s_2 = 200, s_3 = \frac{50}{4}$, profitul obținut fiind

$$\text{Profit} = 30 \cdot 150 + 0 \cdot 200 + 0 \cdot \frac{50}{4} = 4500.$$

În concluzie, inițial soluția de bază era: $x_1 = x_2 = 0, s_1 = 450, s_2 = 350, s_3 = 50$ cu profitul corespunzător egal cu zero.

După o iterație a metodei simplex avem o nouă soluție de bază $x_1 = 0, x_2 = 150, s_1 = 0, s_2 = 200, s_3 = \frac{50}{4}$, profitul fiind 4500.

Vom continua cu o nouă iterație, având de calculat în acest scop z_j și $c_j - z_j$.

$$z_1 = 30 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot \frac{1}{8} = 15$$

$$z_2 = 30 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 30$$

$$z_3 = 30 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{12} \right) = 10$$

$$z_4 = 30 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$z_5 = 30 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

bază c_{ij}		x_1 25	x_2 30	s_1 0	s_2 0	s_3 0		$\frac{b_i}{a_{i1}}$
x_2	30	$1/2$	1	$1/3$	0	0	150	300
s_2	0	$3/2$	0	$-1/3$	1	0	200	$400/3$
s_3	0	$1/8$	0	$-1/12$	0	1	$50/4$	100
z_j		15	30	10	0	0	**4500**	
$c_j - z_j$		10	0	-10	0	0	**profit**	

Se observă că noua variabilă de bază va fi x_1 şi că s_3 va părăsi baza, elementul pivot fiind $a_{31} = \frac{1}{8}$.

Vom face calculele necesare pentru a transforma pe x_1 într-un vector unitar, cu a treia componentă egală cu unitatea:

- multiplicăm fiecare element al liniei pivot cu 8;
- multiplicăm noua linie pivot cu $\frac{1}{2}$ şi o scădem din linia 1 pentru a obține $a_{11} = 0$
- multiplicăm noua linie pivot cu $\frac{3}{2}$ şi scădem rezultatul din linia 2 pentru a obține $a_{21} = 0$

bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
c_{ij}		25	30	0	0	0	
x_2	30	0	1	$2/3$	0	-4	100
s_2	0	0	0	$2/3$	1	-12	50
x_1	25	1	0	$-2/3$	0	8	100
z_j		25	30	$10/3$	0	80	**5500**
$c_j - z_j$		0	0	$-10/3$	0	-80	**profit**

Soluția optimală a unei probleme de programare liniară este atinsă dacă elementele liniei $c_j - z_j$ sunt nule sau negative.

În exemplul nostru am obținut soluția optimală $x_1 = x_2 = 100$, caz în care se atinge profitul maxim de $5500\$$.

Problema este rezolvabilă în Matlab.

Sunt absolut necesare câteva precizări;

În Matlab se calculează direct doar minimul funcției obiectiv, ceea ce înseamnă că în cazul nostru vom calcula minimul funcției $-f$.

Valoarea minimă a funcției $-f$, luată cu semnul minus este valoarea maximă a functiei noastre f.

Declarăm funcția $g = -f$, ca vector coloană a cărui componente sunt coeficienții variabilelor de decizie.

```
>> g=[-25;-30];
```

Restricțiile sunt de forma $A \cdot x \leq b$ și astfel declarăm matricea A și vectorul coloană

```
>> A=[1.5 3;2 1;0.25 0.25];b=[450; 350;50];
```

Este obligatoriu să precizăm condițiile de non-negativitate a celor două variabile de decizie:

```
>> lb=zeros(2,1)
```

Cerem rezolvarea problemei de programare liniară, unde x= (x_1, x_2) , gval este valoarea minimă a funcției g,

valoarea exitflag dă o descriere a găsirii valorii extreme gval și anume:

1 înseamnă o soluție unică x$_{min}$= (x_1, x_2)

0 înseamnă că s-a atins numărul maxim de iterații, făra a obține un rezultat

-1 înseamnă că funcția de ieșire închide algoritmul

```
>> [x,gval,exitflag,output] = linprog(g,A,b,[],[],lb)
```

```
>> g=[-25;-30];
>> A=[1.5 3;2 1;0.25 0.25];b=[450; 350;50];
>> lb=zeros(2,1)
>> [x,gval,exitflag,output] = linprog(g,A,b,[],[],lb)

Optimization terminated.
x =
  100.0000
  100.0000

gval =
 -5.5000e+003
exitflag =
     1
output =
      iterations: 5
       algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
         message: 'Optimization terminated.'
```

Exemplu

- O fabrică produce trei tipuri de parchet *A, B, C* , fabricarea constând în trei operații de bază Tabelul următor prezintă numărul orelor necesare fiecărei operații pe unitatea de produs, numărul orelor disponibile și profitul pe unitatea de produs.

Obiectivul fabricii constă în maximizarea profitului total.

Tipul de parchet	operația I (ore)	operația II (ore)	operația III (ore)	profit/unitate
A	2	2	4	40$
B	5	5	2	30$
C	10	3	2	20$
Timp disponibil	900	400	600	

Avem trei variabile de decizie:

- x_1 numărul de unități de tip *A*
- x_2 numărul de unități de tip *B*
- x_3 numărul de unități de tip *C*.

Modelul matematic este:

$$Max: 40x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$2x_1 + 5x_2 + 10x_3 \le 900$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 400$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 600$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Forma standard a problemei se obține prin adăugarea variabilelor de reducere:

$$Max: 40x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3$$

$$2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 1 \cdot s_1 = 900$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + \quad + 1 \cdot s_2 + \quad = 400$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \quad + 1 \cdot s_3 = 600$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Prezentăm tabloul simplex inițial:

Bază		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		$\frac{b_i}{a_{i1}}$
c_{ij}		40	30	20	0	0	0		
s_1	0	2	5	10	1	0	0	900	450
s_2	0	2	5	3	0	1	0	400	200
s_3	0	4	2	2	0	0	1	600	150
z_j		0	0	0	0	0	0	**0**	
$c_j - z_j$		40	30	20	0	0	0	profit	

Se observă că x_1 va fi noua variabila de bază care va înlocui pe s_3; linia a 3-a este linia pivot și prima coloană este coloana pivot.

După prima iterare tabloul simplex va fi următorul

Bază		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		$\dfrac{b_i}{a_{i1}}$
c_{ij}		40	30	20	0	0	0		
s_1	0	0	4	9	1	0	$-1/2$	600	150
s_2	0	0	4	2	0	1	$-1/2$	100	25
x_1	40	1	$1/2$	$1/2$	0	0	$1/4$	150	300
z_j		40	20	20	0	0	10	**6000**	
$c_j - z_j$		0	10	0	0	0	-10	profit	

x_2 va fi noua variabila de bază care va înlocui pe s_2;
linia a 2-a este linia pivot şi a doua coloană este coloana pivot.

După a doua iterație avem următorul tablou simplex:

Bază		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
c_{ij}		40	30	20	0	0	0	
s_1	0	0	0	7	1	-1	0	500
x_2	30	0	1	$1/2$	0	$1/4$	$-1/8$	25
x_1	40	1	0	$1/4$	0	$-1/8$	$5/16$	137.5
z_j		40	30	25	0	$5/2$	$35/4$	**6250**
$c_j - z_j$		0	0	-5	0	$-5/2$	$-35/4$	profit

Elementele liniei $c_j - z_j$ fiind nule sau negative este atinsă soluția optimală a problemei:

$x_1 = 137.5$; $x_2 = 25$; $x_3 = 0$, profitul maxim fiind 6250.

După a doua iterație avem următorul tablou simplex:

Bază		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
c_{ij}		40	30	20	0	0	0	
s_1	0	0	0	7	1	-1	0	600
x_2	30	0	1	$1/2$	0	$1/4$	$-1/8$	25
x_1	40	1	0	$1/4$	0	$-1/8$	$5/16$	137,5
z_j		40	30	25	0	$5/2$	$35/4$	**6250**
$c_j - z_j$		0	0	-5	0	$-5/2$	$-35/4$	profit

Elementele liniei $c_j - z_j$ fiind nule sau negative este atinsă soluția optimală a problemei:

$x_1 = 137.5$; $x_2 = 25$; $x_3 = 0$, profitul maxim fiind 6250.

```
>> f=[-40;-30;-20];
>> A=[2 5 10;2 5 3; 4 2 2]; b=[900;400;600];
>> lb=zeros(3,1)
>> [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,[],[],lb)
Optimization terminated.
x =
  137.5000
   25.0000
    0.0000
fval =
 -6.2500e+003
exitflag =
     1
output =
       iterations: 6
        algorithm: 'large-scale: interior point'
     cgiterations: 0
          message: 'Optimization terminated.'
```

Am rezolvat un anumit tip de problemă de programare liniară, în care restricțiile sunt de tipul

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n \le c_i$$

În problemele reale apar atât acest tip de restricții cât și restricții - inegalități de tipul mai mare, egal, adică:

$$b_{j1} \cdot x_1 + b_{j2} \cdot x_2 + \ldots + b_{jn} \cdot x_n \ge d_j.$$

Pentru restricțiile $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n \le c_i$ adăugăm o variabilă de reducere pentru a obține o restricție de tip egalitate.

Coeficienții variabilelor de reducere din funcția obiectiv sunt zero.

În problemele reale apar şi restricţii - inegalităţi de tipul mai mare, egal, adică:

$$b_{j1} \cdot x_1 + b_{j2} \cdot x_2 + \ldots + b_{jn} \cdot x_n \geq d_j .$$

Pentru restricţiile $b_{j1} \cdot x_1 + b_{j2} \cdot x_2 + \ldots + b_{jn} \cdot x_n \geq d_j$ scădem variabilele surplus pentru a obţine o restricţie de tip egalitate, variabile de coeficient zero în funcţia obiectiv.

Pentru a obţine forma tablou se adaugă variabilele artificiale, al căror coeficient în funcţia obiectiv este $-M_j$, unde M_j este un număr pozitiv de valoare cât mai mare.

Variabilele artificiale intră în soluţia iniţială de bază, admisibilă.

Exemplu

- Firma X importă componente electronice pentru asamblarea a două modele diferite de computere: HT Deskpro Computer şi HT Portable Computer, fiind interesată în dezvoltarea unui program de producție săptămânală a celor două modele. HT Deskpro generează un profit de 50$ pentru o unitate de produs în timp ce HT Portable generează un profit de 40$.

  Pentru săptămâna următoare sunt disponibile cel mult 150 ore pentru asamblare. Fiecare unitate de HT Deskpro necesită un timp de asamblare de 3 ore, în timp ce o unitate de HT Portable necesită 5 ore pentru asamblare.

Firma are în inventar display-uri doar pentru 20 de unități de HT Portable, ceea ce înseamnă că pot fi asamblate maxim 20 de computere de acest tip.

În atelier sunt disponibili $300m^2$ pentru noua producție, pentru producerea unui Deskpro fiind necesari $8m^2$ din atelier și pentru un Portable $5m^2$.

Managementul firmei dorește ca producția totală pentru ambele modele să fie de minim 25 de unități și să obțină profit maxim.

Primul pas constă în formularea modelului de programare liniară:

Avem două variabile de decizie:

- x_1 numărul de unități de Deskpro
- x_2 numărul de unități de Portable.

Modelul matematic este următorul:

Max: $50x_1 + 40x_2$

$3x_1 + 5x_2 \le 150$ (timpul de asamblare)

$x_2 \le 20$ (display pentru Portable)

$8x_1 + 5x_2 \le 300$ (capacitatea depozitului)

$x_1 + x_2 \ge 25$ producția totala minimă)

$x_1, x_2 \ge 0$

Forma standard a problemei se obține prin adăugarea variabilelor de reducere şi a celei de surplus.

$$\text{Max: } 50x_1 + 40x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4$$

$$\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 + 1 \cdot s_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 150 \\
x_2 \qquad + 1 \cdot s_2 \qquad\qquad\qquad &= 20 \\
8x_1 + 5x_2 \qquad\qquad + 1 \cdot s_3 \qquad &= 300 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad - s_4 &= 25 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 &
\end{aligned}$$

Avem un sistem de 4 ecuații cu 6 necunoscute.

Dacă am presupune pentru început $x_1 = x_2 = 0$ am obține $s_1 = 150, s_2 = 20, s_3 = 30, s_4 = -25$ ceea ce ar contrazice condițiile de pozitivitate a problemei.

Problema constă în faptul că în acest caz reprezentarea în forma standard şi reprezentarea în forma tablou nu sunt echivalente.

Vom folosi un artificiu matematic ce ne va permite să găsim soluția de bază admisibilă formată din variabilele de reducere s_i, şi noi variabile *artificiale* a_j. Aceste variabile a_j se numesc *artificiale* deoarece nu au nicio legătură cu problema inițială de programare liniară, fiind utilizate doar pentru a putea demara metoda simplex.

În exemplul ce-l studiem soluția de bază admisibilă este formată din variabilele de reducere s_1, s_2, s_3 și noua variabilă *artificială* a_4, care este introdusă în a 4-a ecuație.

Obținem astfel reprezentarea sistemului de ecuații în forma:

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 5x_2 + 1\cdot s_1 && = 150\\
&\quad x_2 \quad + 1\cdot s_2 && = 20\\
&8x_1 + 5x_2 \quad + 1\cdot s_3 && = 300\\
&x_1 + x_2 \quad - s_4 + a_4 && = 25\\
&x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, a_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Putem găsi o soluție de bază admisibilă considerând $x_1 = x_2 = s_4 = 0$ şi astfel soluția completă ar fi:

$$x_1 = x_2 = 0,\ s_1 = 150,\ s_2 = 20,\ s_3 = 300,\ s_4 = 0,\ a_4 = 25\,.$$

Să reținem că această soluție admisibilă pentru forma tablou a problemei de programare liniară nu este întotdeauna o soluție admisibilă pentru problema reală.

Situația nu este atât de complicată, precum pare, deoarece avem nevoie de o soluție admisibilă pentru problema reală doar în ultima iterație a algoritmului simplex.

Aşadar, dacă reuşim să eliminăm variabilele artificiale din soluția de bază, înainte de obținerea soluției optimale, problema este rezolvată.

În acest scop vom atribui fiecărei variabile artificiale un coeficient negativ foarte mare în valoare absolută, în funcția obiectiv și astfel prezența unei variabile artificiale în soluția de bază duce la o valoare substanțial mai mică a funcției obiectiv, ceea ce determină eliminarea variabilei din soluția de bază.

Revenind la aplicația studiată considerăm un număr foarte mare notat *M* și funcția obiectiv:

$$Max: \quad 50x_1 + 40x_2 + 0\cdot s_1 + 0\cdot s_2 + 0\cdot s_3 + 0\cdot s_4 - M\cdot a_4$$

Tabloul simplex inițial va fi:

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_4		$\frac{b_i}{a_{i1}}$
c_{ij}		50	40	0	0	0	0	$-M$		
s_1	0	3	5	1	0	0	0	0	150	50
s_2	0	0	1	0	1	0	0	0	20	...
s_3	0	8	5	0	0	1	0	0	300	$75/2$
a_4	$-M$	1	1	0	0	0	-1	1	25	25
z_j		$-M$	$-M$	0	0	0	M	$-M$	**$-25M$**	
$c_j - z_j$		$50+M$	$40+M$	0	0	0	$-M$	0	profit	

Deoarece $c_1 - z_1 = 50 + M$ este valoarea cea mai mare de pe linia $c_j - z_j$, prima coloană va fi coloana pivot. Calculând $\dfrac{b_i}{a_{i1}}$ obținem că linia a 4-a este linia pivot și astfel x_1 va înlocui în soluția de bază variabila artificială a_4.

După prima iterație:

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	a_4	
c_{ij}		50	40	0	0	0	0	$-M$	
s_1	0	0	2	1	0	0	3	-3	75
s_2	0	0	1	0	1	0	0	0	20
s_3	0	0	-3	0	0	1	8	-8	100
x_1	50	1	1	0	0	0	-1	1	25
z_j		50	50	0	0	0	-50	50	**1250**
$c_j - z_j$		0	-10	0	0	0	50	$-M-50$	profit

Variabilele artificiale sunt necesare pentru stabilirea soluției de bază admisibile şi după ce au fost eliminate din soluția de bază pot fi scoase din tabloul simplex.

Iterațiile necesare pentru eliminarea variabilelor artificiale alcătuiesc *prima fază* a metodei simplex.

Prima fază se încheie odată cu eliminarea tuturor variabilelor artificiale şi obținerea unei soluții de bază pentru problema reală.

În exemplul nostru prin eliminarea coloanei corespunzătoare variabilei artificiale a_4 obținem următorul tablou simplex la încheierea primei faze:

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		$\frac{b_i}{a_{i6}}$
c_{ij}		50	40	0	0	0	0		
s_1	0	0	2	1	0	0	3	75	25
s_2	0	0	1	0	1	0	0	20	...
s_3	0	0	-3	0	0	1	8	100	$25/2$
x_1	50	1	1	0	0	0	-1	25	25
z_j		50	50	0	0	0	-50	**1250**	
$c_j - z_j$		0	-10	0	0	0	50	profit	

Coloana corespunzătoare lui s_4 este coloana pivot şi linia corespunzătoare lui s_3 este linia pivot, ceea ce înseamnă că s_4 va înlocui s_3 în soluția de bază. Tabloul simplex devine:

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		$\frac{b_i}{a_{i2}}$
c_{ij}		30	40	0	0	0	0		
s_1	0	0	$25/8$	1	0	$-3/8$	0	$75/2$	12
s_2	0	0	1	0	1	0	0	20	20
s_4	0	0	$-3/8$	0	0	$1/8$	1	$25/2$	$100/3$
x_1	50	1	$5/8$	0	0	$1/8$	0	$75/2$	60
z_j		50	$250/8$	0	0	$50/8$	0	**1875**	
$c_j - z_j$		0	$70/8$	0	0	$-50/8$	0	profit	

Coloana pivot este coloana corespunzătoare lui x_2 în timp ce linia pivot este linia corespunzătoare lui s_1, variabila x_2 înlocuind în soluția de bază variabila s_1.

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	
c_{ij}		50	40	0	0	0	0	
x_2	40	0	1	$8/25$	0	$-3/25$	0	12
s_2	0	0	0	$-8/25$	1	$3/25$	0	8
s_4	0	0	0	$3/25$	0	$3/25$	1	17
x_1	50	1	0	$-5/25$	0	$5/25$	0	30
z_j		50	40	$14/5$	0	$26/5$	0	**1980**
$c_j - z_j$		0	0	$-14/5$	0	$-26/5$	0	profit

Criteriul de optimalitate fiind îndeplinit, $c_j - z_j \le 0, \forall j$ şi variabila artificială fiind eliminată am obţinut soluţia optimă: $x_1 = 30, x_2 = 12$ profitul fiind de 1980.

Dacă una sau mai multe variabile artificiale rămân în soluţia de bază când este îndeplinit criteriul de optimalitate atunci problema nu are soluţii admisibile.

Problema este rezolvabilă în Matlab, făcând câteva modificări deoarece funcția linprog calculează doar minimul unei funcții obiectiv, în cazul în care restricțiile sunt de forma $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n \le c_i$:

- calculăm minimul funcției $g=-f$;
- inegalitatea $x_1 + x_2 \ge 25$ este echivalentă cu $-x_1 - x_2 \le 25$

```
>> g=[-50;-40];
>> A=[3 5;0 1; 8 5; -1 -1];
>> b=[150;20;300;-25]
>> lb=zeros(2, 1);
>> [x,gval,exitflag,output] = linprog(g,A,b,[ ],[ ])
Optimization terminated.
x =
   30.0000
   12.0000
gval =
 -1.9800e+003
exitflag =
     1
output =
      iterations: 6
       algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
         message: 'Optimization terminated.'
```

Exemplu

- O fabrică produce trei tipuri de parchet *A, B, C* , fabricarea constând în trei operații de bază .Tabelul următor prezintă numărul orelor necesare fiecărei operații pe unitatea de produs, numărul orelor disponibile şi profitul pe unitatea de produs.

Tipul de parchet	operația I (ore)	operația II (ore)	operația III (ore)	profit/unitate
A	2	2	4	40$
B	5	5	2	30$
C	10	3	2	20$
Timp disponibil	900	400	600	

Managementul firmei impune producția a cel puțin 20 de unități din parchetul de tip *C* şi obiectivul fabricii constă în maximizarea profitului total.

Modelul matematic al problemei de programare liniară este:

$$Max: 40x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

$$2x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 900$$
$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 400$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600$$
$$x_3 \geq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

unde x_1 este numărul de unități de tip *A*, x_2 numărul de unități de tip *B* şi x_3 numărul de unități de tip *C*.

Forma standard a problemei se obține prin adăugarea variabilelor de reducere şi a variabilei surplus:

$$Max: 40x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 1 \cdot s_1 \qquad\qquad\qquad\qquad & = 900 \\
2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + \qquad + 1 \cdot s_2 + \qquad\quad & = 400 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \qquad\qquad\qquad + 1 \cdot s_3 & = 600 \\
x_3 \qquad\qquad\qquad - 1 \cdot s_4 & = 20 \\
x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 &
\end{aligned}$$

Pentru a putea scrie forma tablou este necesară introducerea variabilei artificiale a_4, al cărei coeficient în funcția obiectiv este $-M$, M număr strict pozitiv, foarte mare, în a 4-a ecuație.

$$Max: 40x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + 0 \cdot s_4 - M \cdot a_4$$

$$\begin{array}{llllllll}
2x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 1 \cdot s_1 & & & & = 900 \\
2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + & +1 \cdot s_2 + & & & = 400 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + & & +1 \cdot s_3 & & = 600 \\
\qquad\qquad x_3 & & & -1 \cdot s_4 + 1 \cdot a_4 & = 20
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4, a_4 \geq 0$$

Putem găsi o soluție de bază admisibilă considerând $x_1 = x_2 = x_3 = s_4 = 0$ și astfel soluția completă ar fi:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ s_1 = 900,\ s_2 = 400,\ s_3 = 600,\ s_4 = 0,\ a_4 = 20$

Avem următorul tablou simplex:

Bază		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	a_4		$\frac{b_i}{a_{i3}}$
c_{ij}		40	30	20	0	0	0	0	$-M$		
s_1	0	2	5	10	1	0	0	0	0	900	90
s_2	0	2	5	3	0	1	0	0	0	400	400/3
s_3	0	4	2	2	0	0	1	0	0	600	300
a_4	$-M$	0	0	1	0	0	0	-1	1	20	20
z_j		0	0	$-M$	0	0	0	M	$-M$	$-20M$	
$c_j - z_j$		40	30	$20+M$	0	0	0	$-M$	M	profit	

Deoarece am ales un număr $M > 0$ foarte mare, putem afirma că cea mai mare valoare de pe linia z_j este $20 + M$ şi astfel coloana corespunzătoare lui x_3 este coloana pivot.

Calculând $\frac{b_i}{a_{i3}}$ obținem linia pivot ca fiind linia corespunzătoare variabilei artificiale a_4. Variabila x_3 va înlocui variabila artificială a_4 şi astfel am încheiat faza întâi a metodei.

În noul tablou simplex vom elimina coloana corespunzătoare lui a_4.

Bază		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		$\frac{b_i}{a_{i1}}$
c_{ij}		40	30	20	0	0	0	0		
s_1	0	2	5	0	1	0	0	−10	700	350
s_2	0	2	5	0	0	1	0	−3	340	170
s_3	0	4	2	0	0	0	1	−2	560	140
x_3	20	0	0	20	0	0	0	1	20	...
z_j		0	0	20	0	0	0	20	**400**	
$c_j - z_j$		40	30	0	0	0	0	−20	profit	

Variabila x_1 va înlocui variabila de reducere s_3 în soluția de bază :

Bază		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4		$\frac{b_i}{a_{i2}}$
c_{ij}		40	30	20	0	0	0	0		
s_1	0	0	4	0	1	0	$-1/2$	9	420	105
s_2	0	0	4	0	0	1	$-1/2$	2	60	15
x_1	40	1	$1/2$	0	0	0	$1/4$	$-1/2$	140	280
x_3	20	0	0	1	0	0	0	1	20	...
z_j		40	20	20	0	0	10	10	**6000**	
$c_j - z_j$		0	10	0	0	0	-10	-10	profit	

Variabila x_2 va înlocui variabila de reducere s_2 în soluția de bază:

Bază	c_{ij}	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
		40	30	20	0	0	0	0	
s_1	0	0	0	0	1	-1	0	7	360
x_2	30	0	1	0	0	$1/4$	$-1/8$	$1/2$	15
x_1	40	1	0	0	0	$-1/8$	$5/16$	$-3/4$	$265/2$
x_3	20	0	0	1	0	0	0	1	20
z_j		40	30	20	0	$5/2$	$35/4$	5	**6150**
$c_j - z_j$		0	0	0	0	$-5/2$	$-35/4$	-5	profit

În concluzie planificarea producerii a 132.5 unități de parchet de tipul *A*, a 15 unități de parchet de tipul *B* şi a 20 unități de parchet de tipul *C* va asigura obținerea profitului maxim de 6150$, cu respectarea tuturor restricțiilor impuse de situația reală.

Prezentăm rezolvarea în Matlab a problemei:

```
>> f=[-40;-30;-20]
>> A=[2 5 10;2 5 3;4 2 2 ;0 0 -1]
>> b=[900;400;600;-20]
>> lb=zeros(3, 1);
>> [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,[ ],[ ])
Optimization terminated.
x =
  132.5000
   15.0000
   20.0000
fval =
 -6.1500e+003
exitflag =
     1
output =
      iterations: 5
       algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
         message: 'Optimization terminated.'
```

În cazul unei restricții sub forma unei egalități, adăugăm o variabilă artificială pentru obținerea formei tablou, al cărei al cărei coeficient în funcția obiectiv este $-M$, unde M este un număr pozitiv de valoare cât mai mare.

Variabila artificială intră în soluția inițială de bază, admisibilă.

Minimizarea funcției obiectiv

Problema minimizării unei funcții obiectiv într-o problemă de programare liniară poate fi transformată într-o problemă de maximizare prin înmulțirea funcției cu -1.
Prin rezolvarea acestei noi probleme vom găsi soluția optimă pentru problema de minimizare.

Exemplu

- O fabrică de produse chimice vinde două dintre produsele sale, ca materii prime pentru două companii ce produc săpunuri de baie şi detergenţi pentru rufe.

Bazându-se pe analiza inventarului curent şi pe potenţialele cereri pentru luna următoare, managerii au estimat că producţia combinată a produselor 1 şi 2 trebuie să fie cel puţin de 350kg.

Pe de alta parte un client important a comandat 125kg din produsul 1.

Produsul 1 necesită două ore timp de procesare pentru 1 kg, în timp ce pentru 1 kg,din produsul 2 timpul de procesare este de o oră.

Pentru luna următoare este disponibil un timp de procesare de 600 ore.

Producţia unui kilogram din produsul 1 costă 2$, în timp ce producţia unui kilogram din produsul 2 costă 3$

Obiectivul managerilor este să satisfacă cererile cu un cost total de producţie minim.

x_1 este numărul de tone fabricate din produsul 1

x_2 numărul de tone fabricate din produsul 2.

$$\min: \quad 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$$

$x_1 \geq 125$ (cererea pentru primul produs)

$x_1 + x_2 \geq 350$ (producția totală)

$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 600$ (capacitatea de producție)

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Această problemă se transformă într-o problemă de aflarea maximum-ului unei funcții obiectiv:

$$\max: \quad -2\cdot x_1 - 3\cdot x_2$$

$$x_1 \geq 125$$

$$x_1 + x_2 \geq 350$$

$$2\cdot x_1 + x_2 \leq 600$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Prezentăm forma tablou a problemei:

$$\begin{aligned}
&\max: \quad -2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 0\cdot s_1 + 0\cdot s_2 + 0\cdot s_3 - M\cdot a_1 - M\cdot a_2 \\
&x_1 \quad -1\cdot s_1 + \quad +1\cdot a_1 \quad = 125 \\
&x_1 + x_2 \quad -1\cdot s_2 \quad +1\cdot a_2 = 350 \\
&2\cdot x_1 + x_2 \quad +1\cdot s_3 \quad = 600 \\
&x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2		$\frac{b_i}{a_{i1}}$
c_{ij}		-2	-3	0	0	0	$-M$	$-M$		
a_1	$-M$	1	0	-1	0	0	1	0	125	125
a_2	$-M$	1	1	0	-1	0	0	1	350	350
s_3	0	2	1	0	0	1	0	0	600	300
z_j		$-2M$	$-M$	M	M	0	$-M$	$-M$	-475M	
$c_j - z_j$		$-2+2M$	$-3+M$	$-M$	$-M$	0	0	0	profit	

În prima iterație x_1 este adus in bază prin eliminarea variabilei artificiale a_1.

În continuare putem elimina coloana corespunzătoare lui a_1.

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_2		$\frac{b_i}{a_{i3}}$
c_{ij}		-2	-3	0	0	0	$-M$		
x_1	-2	1	0	-1	0	0	0	125	125
a_2	$-M$	0	1	1	-1	0	1	225	350
s_3	0	0	1	2	0	1	0	350	175
z_j		-2	$-M$	$2-M$	M	0	$-M$	-250-225M	
$c_j - z_j$		0	$-3+M$	$-2+M$	$-M$	0	0	profit	

s_1 va înlocui în bază pe s_3 şi avem următorul tabel simplex:

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_2		$\frac{b_i}{a_{i2}}$
c_{ij}		-2	-3	0	0	0	$-M$		
x_1	-2	1	$1/2$	0	0	1	0	300	600
a_2	$-M$	0	$1/2$	0	-1	-1	1	50	100
s_1	0	0	$1/2$	1	0	1	0	175	350
z_j		-2	$-1-M/2$	0	M	$M-2$	$-M$	-600-50M	
$c_j - z_j$		0	$-2+M/2$	0	$-M$	$2-M$	0	profit	

x_2 va înlocui în bază variabila artificială a_2, ceea ce ne permite eliminarea coloanei corespunzătoare variabilei a_2.

Bază		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
c_{ij}		-2	-3	0	0	0	
x_1	-2	1	0	0	1	2	250
x_2	-3	0	1	0	-2	-2	100
s_1	0	0	0	1	1	2	125
z_j		-2	-3	0	4	2	-800
$c_j - z_j$		0	0	0	-4	-2	profit

Prin fabricarea a 250 t din primul produsul 1 şi a 100 t din al doilea produs se va obține un cost minim de 800$.

Prezentăm rezolvarea în Matlab a problemei:

```
>> f=[2;3]
>> A=[-1 0;-1 -1;2 1]
>> b=[-125;-350;600]
>> lb=zeros(2, 1);
>> [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,[],[])
Optimization terminated.
x =
  250.0000
  100.0000
fval =
  800.0000
exitflag =
     1
output =
      iterations: 5
       algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
         message: 'Optimization terminated.'
```

Soluții inexistente

Soluțiile inexistente ale unei probleme de programare liniară se referă la situația în care nu există soluții care să satisfacă toate restricțiile problemei.

La metoda grafică nu exista mulțimea soluțiilor admisibile.

În cazul problemelor de programare liniară în care toate restricțiile sunt de forma

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n \leq c_i$$

există întotdeauna soluții.

În rest, în cazul metodei simplex, dacă în soluția finală au mai rămas variabile artificiale rezultă inexistența soluțiilor.

Soluții alternative optimale

Soluțiile alternative optimale, pot fi recunoscute la metoda grafică deoarece funcția obiectiv este paralelă cu o dreaptă ce este imaginea unei anumite restricții.

În cazul în care lucrăm cu metoda simplex, apariția valorii zero pe linia $c_j - z_j$ în dreptul cel puțin a uneia din variabilele ce nu fac parte din bază indică soluții alternative optimale.