3. Funcții continue

3.1. Considerând spațiile liniare normate $(E, \| \ \|)$, $(E_1, \| \ \|_1)$ şi funcția $f : A \to E_1$, $A \subset E$, vom spune că există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $x_0 \in A'$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $\|x - x_0\| < \delta$, avem $\|f(x) - l\|_1 < \varepsilon$.

- *Următoarele afirmații sunt echivalente:*
  1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
  2. *oricare ar fi şirul* $(x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}$ *convergent la* x_0*, avem* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$

  (*criteriul lui Heine*).

- Nu există $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$, deoarece considerând şirurile convergente la zero $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ şi $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbf{N}$, avem: $f(x_n) = \sin 2n\pi = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$ şi

  $f(y_n) == \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = 1$.

- Nu există $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$, deoarece restricționând funcția $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ la $y = m \cdot x, m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ avem $f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$

  Restricția funcției depinde doar de parametrul real m şi astfel putem afirma că nu există limita. Într-adevăr considerând şirurile convergente la $(0,0)$, $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ şi $(x_n^{'}, y_n^{'}) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$ avem $f((x_n, y_n)) = \frac{1}{2}$, $f((x_n^{'}, y_n^{'})) = \frac{2}{5}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce implică

  $\lim\limits_{n \to \infty} f((x_n, y_n)) = \frac{1}{2}$, respectiv $\lim\limits_{n \to \infty} f((x_n^{'}, y_n^{'})) = \frac{2}{5}$.

În continuare ne vom ocupa de calculul limitelor de funcții, în anumite cazuri particulare şi anume cazul funcțiilor vectoriale de variabilă reală şi cazul funcțiilor reale de două, eventual trei variabile reale.

- *Fie funcția* $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$ *dată de* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, *unde* $f_k : A \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le m$. *Avem* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, ..., l_m) \in \mathbf{R}^m$ *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{x \to x_0} f_k(x) = l_k, 1 \le k \le m$.

- *Pentru funcțiile* $f, g : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ *ce au următoarele proprietăți*:

  - $|f(x_1, x_2, ..., x_n)| \le g(x_1, x_2, ..., x_n), \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$
  - $\lim\limits_{(x_1, ..., x_n) \to x_0} g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in A'$

avem $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to x_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} = 0$, deoarece

$\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şi $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0$;

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y^3}{x^4+y^4} = 0$, deoarece folosind inegalitatea $\dfrac{|a\cdot b|}{a^2+b^2} \le \dfrac{1}{2}$ avem:

$\dfrac{x^2\cdot y^3}{x^4+y^4} = \dfrac{x^2\cdot y^2}{x^4+y^4}\cdot|y| \le \dfrac{1}{2}\cdot|y|$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{2}\cdot|y| = 0$.

Exerciţii propuse

1. Studiaţi existenţa următoarelor limite: $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\cdot y^3}{x^6+y^6}$

2. Calculaţi limitele următoare:

- $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-1}\cdot\sin\dfrac{1}{x^2-1}$;
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^4+y^4+1}-1}{x^4+y^4}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^4\cdot y^4+1}-1}{x^4+y^4}$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{arctg\, x^2\cdot y^2}{x^2+y^2}$.

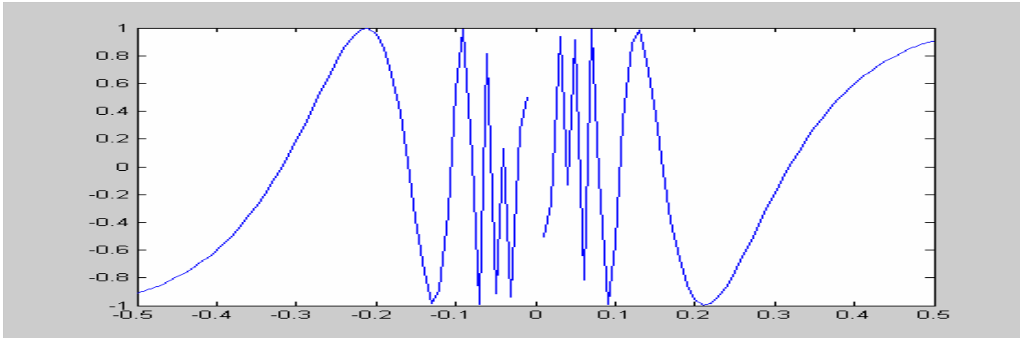
Să vizualizam în **MATLAB**, câteva limite importante, realizând astfel nu numai reamintirea unor formule cunoscute, ci şi perceperea efectivă a acestor rezultate:

- Pentru a ilustra că nu există $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$, vom tabela funcţia pentru valori pozitive şi negative, în jurul lui zero, şi apoi vom desena graficul funcţiei:

```
» x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;-.00001;-.000001;.000001;.00001;.0001;.001;.01;.1];sin(1./x)
        ans =
         0.5440
         0.5064
        -0.8269
         0.3056
        -0.0357
         0.3500
        -0.3500
        0.0357
        -0.3056
        0.8269
        -0.5064
        -0.5440.
```

Din tabel se observă că funcţia ia valori diferite în jurul originii
Să desenăm graficul funcţiei pe $(-0.5, 0.5)$

»x=-.5:.01:.5;y=sin(1./x);plot(x,y)

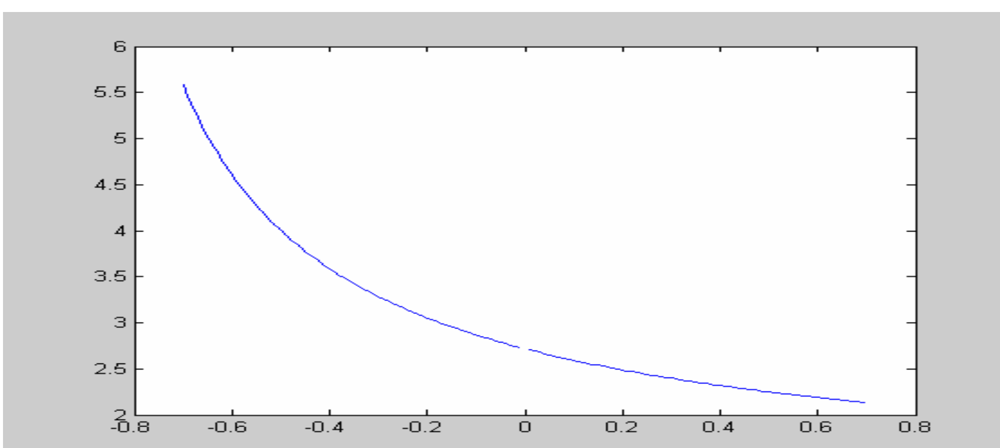


- Pentru a vizualiza rezultatul cunoscut $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, vom tabela pentru început funcția pentru valori la stânga şi la dreapta lui zero, suficient de apropiate de zero.

```
» x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;-.00001;-.000001;.000001;.00001;.0001;.001;.01;.1];
(1+x).^(1./x)
        ans =
        2.8680
        2.7320
        2.7196
        2.7184
        2.7183
         2.7183
        2.7183
        2.7183
        2.7181
        2.7169
        2.7048
        2.5937
```

Se observă din tabel, că pe intervalul $(-0.0001, 0.0001)$ valoarea funcției este aproximativ e.
Să desenăm şi graficul restricției funcției la intervalul $(-0.7, 0.7)$

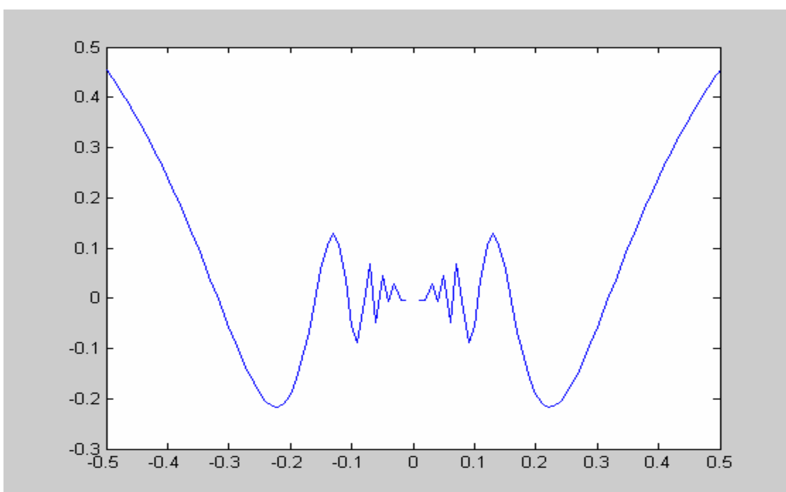
```
» x=-.7:.01:.7; plot(x,(1+x).^(1./x))
```



- Să vizualizăm alt rezultat cunoscut: $\lim_{x \to o} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$, tabelând funcția pentru valori cât mai apropiate de zero şi desenând apoi graficul acesteia pe (-0.5,0.5).

```
x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;-.00001;-.000001;.000001;.00001;.0001;.001;.01;.1];x.*sin(1./x)
          ans =
          -0.0544
          -0.0051
          0.0008
          -0.0000
           0.0000
          -0.0000
          -0.0000
          0.0000
          -0.0000
           0.0008
          -0.0051
           -0.0544

» x=-.5:.01:.5;plot(x,x.*sin(1./x))
```



Symbolic Math calculează limite de funcții reale de variabile reale: declarăm că lucrăm cu expresii simbolice de x şi dacă avem de calculat $\lim_{x \to a} f(x)$, vom scrie limit(f,a)

- Să calculăm:

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x}; \quad \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x}$$

```
» syms x
» f=x*sin(1/x);limit(f,0)
ans =
          0

» g=tan(x)/x;limit(g,0)
ans =
          1
```

```
» h=cos(1/x);limit(h,0)
ans =
        -1 .. 1

F=log(x-1)/(x^2-4);limit(F,2)
ans =
        ¼

G=log(x)/x;limit(f,0)

ans =
        NaN
```

în acest ultim exemplu, răspunsul corect este $-\infty$, Symbolic Math răspunzând NaN= Not a Number.

3.2. Considerând spațiile liniare normate $(E,\| \ \|)$, $(E_1,\| \ \|_1)$ şi funcția $f : A \to E_1$, $A \subset E$, vom spune că f este **continuă** în $x_0 \in A \cap A'$ dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi este egală cu $f(x_0)$. Dacă funcția f este continuă în fiecare punct din A, spunem că f este *continuă pe* A.

Să considerăm funcțiile $f, g : A \to E_1$, unde $A \subset E$ şi $x_0 \in A \cap A'$:

- *Dacă funcțiile f şi g sunt continue în x_0, atunci funcția $f + g$ este continuă în x_0.*
- *Dacă funcția f şi funcția $\alpha : A \to \mathbf{R}$ sunt continue în x_0, atunci funcția $\alpha \cdot f$ este continuă în x_0.*
- *Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.*

Într-un spațiu metric (X, d), mulțimea K este **compactă** dacă orice şir din K conține un subşir convergent. în K.

- *În $\mathbf{R}^n$ o mulțime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.*

Funcțiile continue pe mulțimi compacte prezintă un interes deosebit:

- *Imaginea prin f a unei mulțimi compacte este o mulțime compactă.*
- *Dacă o funcție reală, definită pe o mulțime compactă K este continuă pe K, atunci este mărginită pe K şi îşi atinge marginile.*

Spunem că o funcție $f : A \to \mathbf{R}$ este **uniform continuă** pe $A \subset \mathbf{R}$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $|x_1 - x_2| < \delta$ să avem $|(f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
Se observă că o funcție uniform continuă pe A este continuă în orice punct din A, reciproca nefiind adevărată.

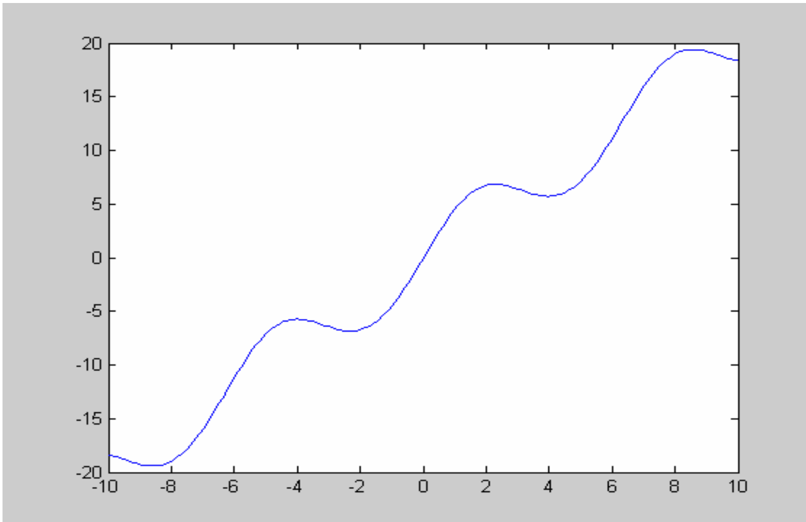
Spunem că o funcție $f : A \to \mathbf{R}$ este funcție **lipschitziană** pe $A \subset \mathbf{R}$ dacă există $L > 0$ astfel încât $|(f(x_1) - f(x_2)| \le L \cdot |x_1 - x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in A$.

- O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă, cu derivata mărginită pe $A \subset \mathbf{R}$ este lipschitziană pe A.

- *O funcție lipschitziană este uniform continuă .*

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=2x+3\sin x$ are derivata mărginită $|f'(x)|=|2+3\cos x|\leq 5$, este lipschitziană, deci uniform continuă pe **R.**

```
» x=-10:.1:10;plot(x,2*x+3*sin(x))
```

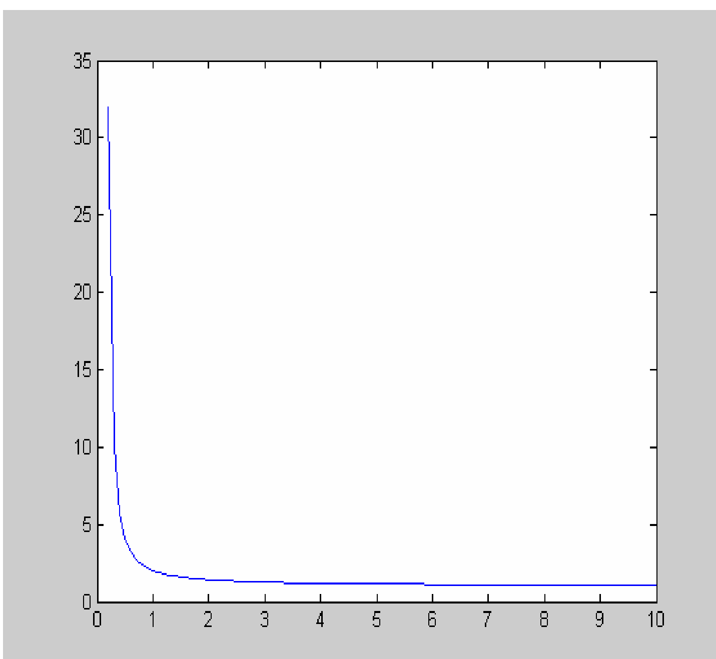


-

- *O funcție $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $(a,b)\subset\mathbf{R}$, continuă pe (a,b) care admite asimptotă verticală $x=a$ sau $x=b$ nu este uniform continuă pe (a,b).*

- Funcția $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ nu este uniform continuă pe $(0,+\infty)$ deoarece $x=0$ este asimptotă verticală ($\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty$).

```
»x=0.2:.1:10;plot(x,2.^(1./x))
```

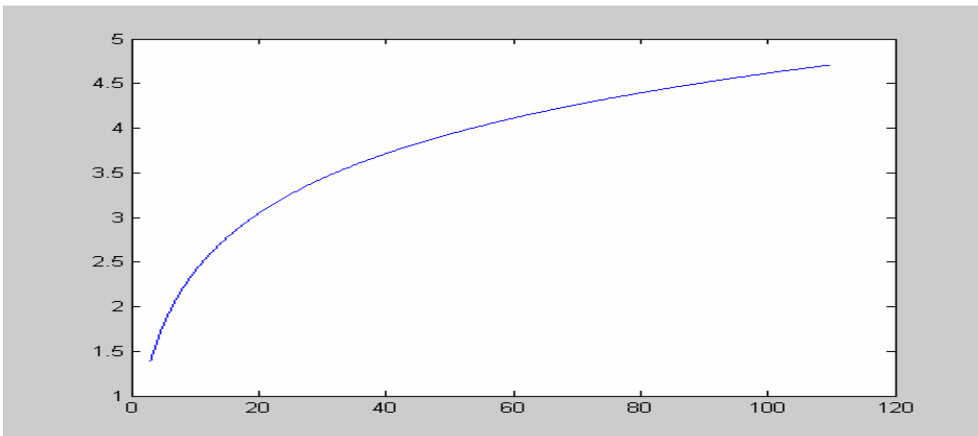


În continuare vom prezenta o teorema importantă, care ne spune că pe o mulțime compactă noțiunile de continuitate şi uniform continuitate coincid

- *Dacă o funcție $f:K\to\mathbf{R}$, unde $K\subset\mathbf{R}$ este o mulțime compactă, este continuă pe K, atunci este uniform continuă pe K.*

  - Funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\ln(x+1)$ este uniform continuă pe $[3,10]$, fiind continuă pe acest compact.

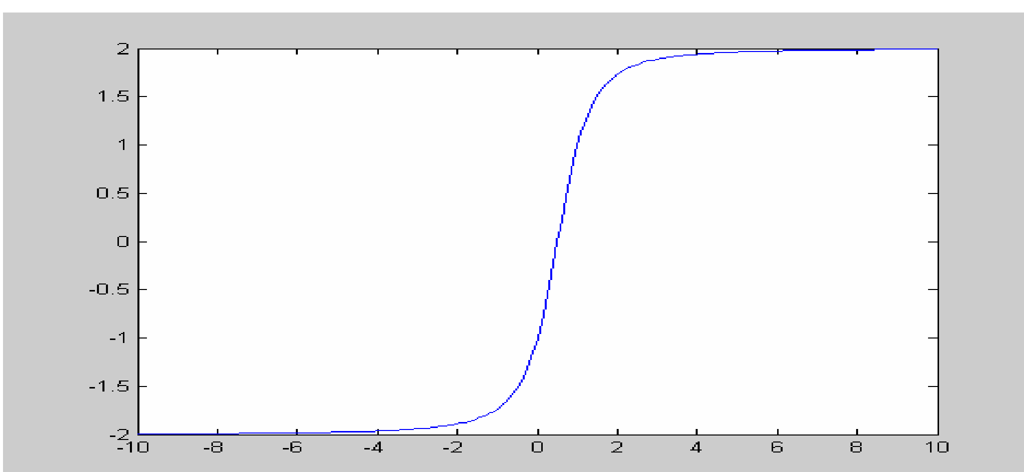
```
» x=3:.1:110;plot(x,log(x+1))
```



- *O funcție continuă pe* **R**, *ce admite asimptote orizontale sau oblice la $\pm\infty$ este uniform continuă pe* **R.**

  - Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+9}}$ este continuă pe axa reală şi are $y=2$ asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $y=-2$ la $-\infty$, aşadar este uniform continuă pe **R.**

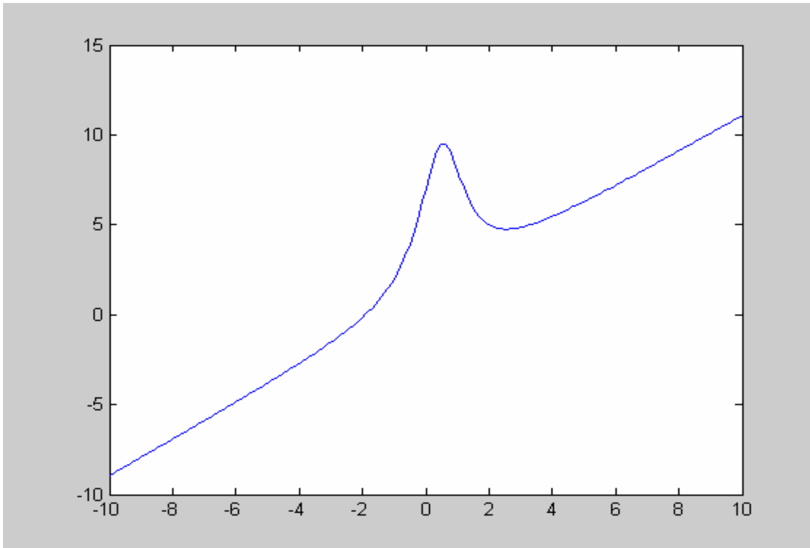
```
»x=-10:.1:10;plot(x,(2*x-1)./sqrt(x.^2-x+1))
```



  - Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{x^3+7}{x^2-x+1}$ este continuă pe **R** şi are ca asimptotă oblică la

$\pm\infty$ dreapta $y = x + 1$, deci este uniform continuă

»x=-10:.1:10;plot(x,(x.^3+7)./(x.^2-x+1))



Am considerat că fiecare funcție exemplu este necesar a fi însoțită de graficul său, pentru o mai bună înțelegere a noțiunii de uniform continuitate.

Exerciții propuse

Stabiliți care din funcțiile următoare este uniform continuă pe mulțimile indicate, justificând temeinic răspunsul:

$f_1(x) = 4x + arctg2x,\ x \in \mathbf{R};$

$f_2(x) = \ln(x-2), x \in (2,10)$; $f_2(x) = \ln(x-2), x \in [3,4]$;

$f_3(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}},\ x \in [0,1]$;

$f_4(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{4x^2+1}},\ x \in \mathbf{R};$

$f_5(x) = \sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbf{R}.$

În încheiere studiem transferul de continuitate la șiruri și serii de funcții:

❑ *Funcția limită unui şir de funcții continue* $(f_n)_n$, $f_n : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, *uniform convergent pe* A, *este continuă pe* A. (*transfer de continuitate*).

- pentru şirul de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este definită de $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1} \cdot e^x - x + 1}{x^{2n} + \sqrt{x^2+4}},\ x \in \mathbf{R};$

funcția limită este

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2+4}},|x|<1\\ \dfrac{2-e^{-1}}{1+\sqrt{2}},x=-1\\ \dfrac{e}{1+\sqrt{2}},x=1\\ xe^x,|x|>1\end{cases},$$

funcție ce este discontinuă în ± 1, deci discontinuă pe [-2,2]; funcțiile f_n sunt continue pe [-2,2] şi astfel rezultă că şirul considerat nu converge uniform la f pe [-2,2]

O proprietate asemănătoare avem în cazul seriilor uniform convergente:

- *Considerând un şir de funcții continue $(f_n)_n$, $f_n : A\to \mathbf{R}$, $A\subset \mathbf{R}$, daca seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A atunci suma sa, s, este o funcție continuă pe A.*

- În 2.2 am demonstrat cu criteriul lui Weierstrass convergența uniformă pe **R** a seriei de funcții $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\cdot x^2}{x^4+n^4}$; funcțiile $f_n(x)=\frac{(-1)^n\cdot x^2}{x^4+n^4}$ sunt continue pe **R** şi astfel putem afirma că suma seriei este o funcție continuă pe **R.**

În particular seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n\cdot(x-x_0)^n$ defineşte o funcție continuă

$f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbf{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$, dacă $R<+\infty$

şi respectiv $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$, dacă $R=+\infty$.

Exerciții propuse

- Este şirul de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este definită prin
  $f_n(x)=\dfrac{(x^2+2)\cdot x^{2n}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^{2n+1}+\sqrt{x^2+1}}$, $n\in\mathbf{N}$,
  uniform convergent pe $[-3,3]$?
- Este suma seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{2\cdot x^2}{n^8+x^4}$ o funcție continuă pe **R?**

3.3. Funcția vectorială $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ $\gamma(t)=(f(t),g(t))$, continuă pe $[a,b]$, se numeşte **curbă** parametrizată în $\mathbf{R}^2$, în timp ce funcția vectorială continuă $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^3$ $\gamma(t)=(f(t),g(t),h(t))$ este o **curbă** parametrizată în $\mathbf{R}^3$

Definim o **reprezentare parametrică** a curbei prin:

$\gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}\ t\in[a,b]$ respectiv $\gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases}\ t\in[a,b]$.

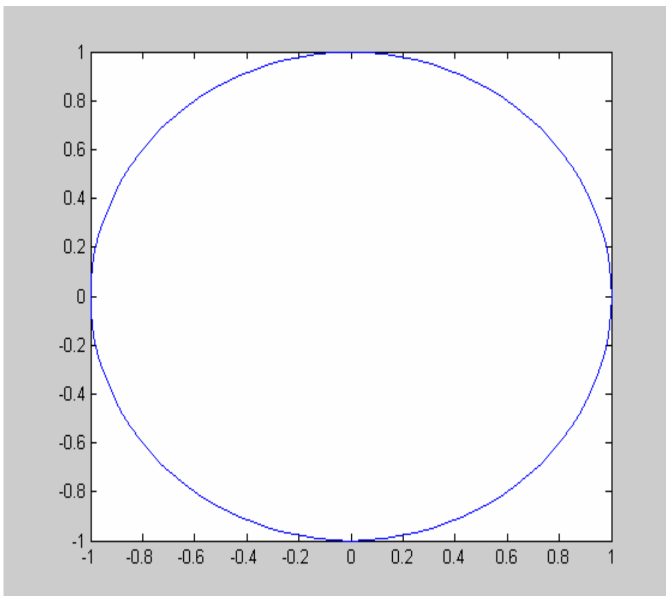
Imaginea $\gamma([a,b]) = (\gamma) \subset \mathbf{R}^2$ se numeşte **urma** curbei γ, $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc *capetele curbei*; dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ este o **curbă închisă**.

Pentru a desena, utilizând **MATLAB**, urma unei curbe γ din $\mathbf{R}^2$, de ecuații parametric $\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$ (*), folosim următoarea sintaxă:

```
»t=a:h:b; plot(f(t),g(t))
```

- Identificând $\mathbf{R}^2$ cu planul xOy, urma curbei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$, definită prin $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ este cercul unitate (cu centru în origine, de raza 1) : $(\gamma) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$. Este o curbă închisă deoarece $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1,0)$.
-

```
»t=0:pi/50:2*pi;plot(cos(t),sin(t))
```



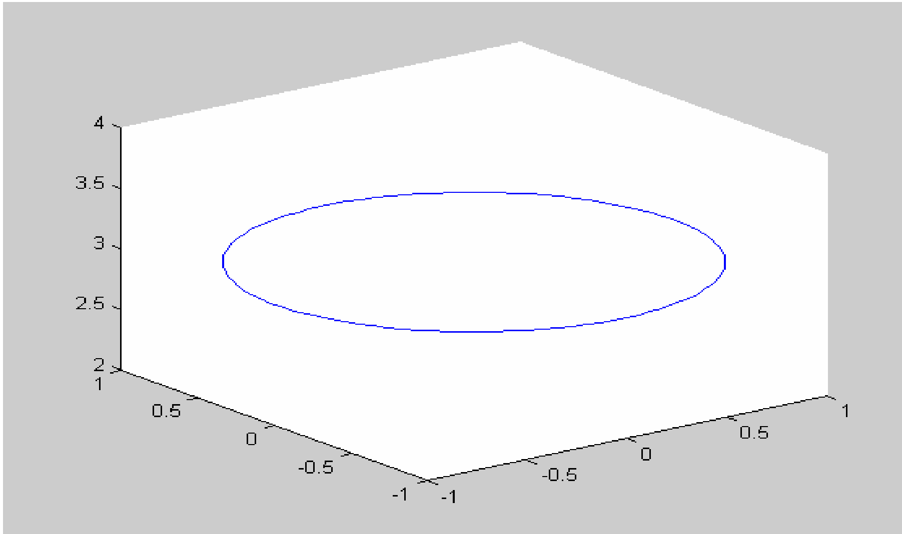
Pentru a desena utilizând **MATLAB**, urma unei curbe γ din $\mathbf{R}^3$, de ecuații parametrice

$\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$, folosim următoarea sintaxă:

```
»t=a:h:b; plot3(f(t),g(t),h(t)).
```

- Curba $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^3$, definită de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 3)$ are ca urmă cercul $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 3\}$.

```
»t=0:pi/50:2*pi;plot3(cos(t),sin(t),3*t.^0)
```



Considerăm că merită reținută maniera de a scrie ecuațiile parametrice ale cercului pentru a putea folosi funcția plot3; dacă am scrie $z = 3$, am obține următorul rezultat:

```
»t=0:pi/50:2*pi;plot3(cos(t),sin(t),3)
??? Error using ==> plot3
Vectors must be the same lengths.
```

Pentru $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, $m \in \{2,3\}$, curbă parametrizată fixată, putem defini $\gamma^- : [a,b] \to \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$, prin $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$, curbă numită **opusa** curbei γ. Remarcăm că urmele curbelor γ şi γ^- coincid.

Dacă $F : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ este o funcţie continuă, mulțimea
$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | F(x, y) = 0\}$
este urma unei curbe în $\mathbf{R}^2$ şi $F(x, y) = 0$ se numeşte ecuația carteziană a curbei.

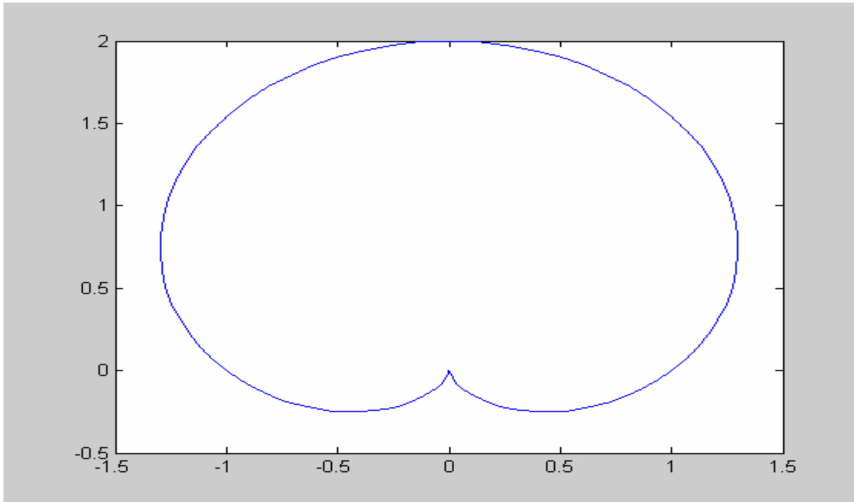
Să obținem ecuațiile parametrice ale unei curbe definite prin ecuația carteziană. Folosind ecuațiile ce leagă coordonatele carteziene (x, y) de **coordonatele polare** (r,t):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi], r \geq 0 \qquad (*)$$

scriem într-o primă etapă ecuația curbei în coordonate polare $r = \varphi(t)$, apoi înlocuim pe r cu $\varphi(t)$ în formulele (*).

- Mulțimea $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 | \ x^2 + y^2 = 9 \}$ este cercul cu centrul în origine, de rază 3. Ecuația acestui cerc în coordonate polare este $r = 3$ şi astfel ecuațiile parametrice ale cercului sunt $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos t \\ y = 3 \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$.
- Să scriem ecuațiile parametrice ale curbei de ecuație carteziană $x^2 + y^2 - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  Înlocuind coordonatele carteziene cu cele polare obținem:
  $r^2 - r \sin t = r$, adică $r = 1 + \sin t$ şi astfel avem
  $$\begin{cases} x = (1 + \sin t) \cdot \cos t \\ y = (1 + \sin t) \cdot \sin t \end{cases}, \quad t \in [0,2\pi]$$

```
»t=0:pi/50:2*pi;plot((1+sin(t)).*cos(t),(1+sin(t)).*sin(t))
```



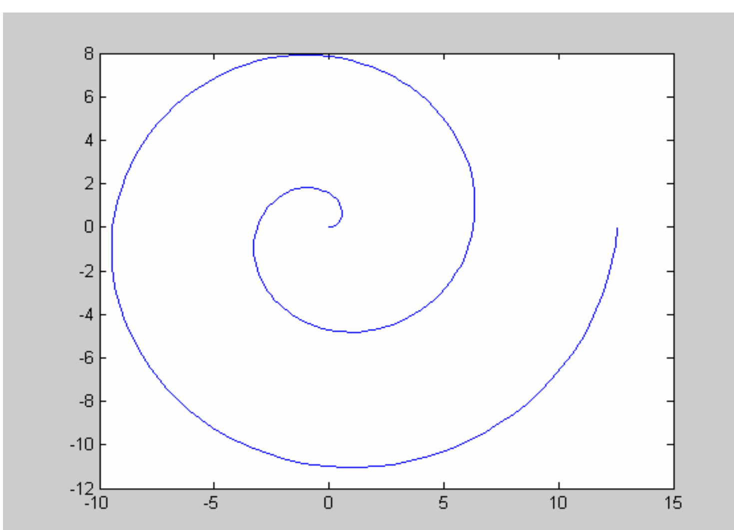
- Pentru a scrie ecuațiile parametrice ale elipsei $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 |\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}$ folosim **coordonate polare generalizate**: $\begin{cases} x=a\cdot r\cdot\cos t \\ y=b\cdot r\cdot \sin t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

  Ecuația elipsei în coordonate polare generalizate este $r=1$ și ecuațiile parametrice sunt $\begin{cases} x=a\cdot\cos t \\ y=b\cdot \sin t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

În cazul în care este dată ecuația curbei în coordonate polare $r=\varphi(t)$ este mai simplu să scriem ecuațiile parametrice ale curbei, având doar de înlocuit în ecuațiile (*) r cu $\varphi(t)$.

- Ecuația spiralei lui Arhimede în coordonate polare este $r=t,\quad t\in[0,4\pi]$ și astfel ecuațiile parametrice vor fi $\begin{cases} x=t\cdot\cos t \\ y=t\cdot \sin t\end{cases}$ $t\in[0,4\pi]$.

  »t=0:pi/50:4*pi;plot(t.*cos(t),t.*sin(t))

- 

Exerciții propuse

1. Desenați urma curbei, de ecuații parametrice $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad t \in [0,10\pi] \\ z = t \end{cases}$

2. Scrieți ecuațiile parametrice ale curbelor ale căror ecuații în coordonate carteziene sunt:
   - o $\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\dfrac{y}{x}$;
   - o $\sqrt{x^2 + y^2} \cdot arctg\dfrac{y}{x} = 1$;

   şi desenați in **MATLAB** aceste curbe.

3. Scrieți ecuațiile parametrice ale următoarelor curbe ale căror ecuații în coordonate polare sunt date; desenați utilizând **MATLAB** urmele acestor curbe
   - o $r = \dfrac{1}{t}$, $t \in [\dfrac{1}{3},10]$ (*spirala hiperbolică*);
   - o $r = 1 - 2\sin t$, $t \in [0,2\pi]$.

3.4. Revedeți din manualul de algebră de clasa a XII-a noțiunea de **aplicație liniară**
Unei aplicații liniare $T:$ $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ i se asociază matricea

$$M_T = (Te_1, Te_2, ..., Te_n),$$

unde $\{e_1,...,e_n\}$ este baza uzuală din $\mathbf{R}^n$, adică vectorii Te_i formează coloanele lui M_T şi astfel studiul aplicațiilor liniare în spații finit dimensionale se reduce astfel la studiul matricelor corespunzătoare.

Dacă $(E,\| \ \|)$ şi $(E_1,\| \ \|_1)$ sunt spații liniare normate, aplicația liniară $T: E \to E_1$ este **continuă** în $x_0 \in E$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $\|x - x_0\| < \delta$ implică $\|Tx - Tx_0\|_1 < \varepsilon$.

Aplicația liniară $T: E \to E_1$ este **mărginită** dacă există un număr pozitiv M astfel încât $\|Tx\|_1 \le M \cdot \|x\|, \forall x \in E$.

❑ *Condiția necesară şi suficientă ca aplicația liniară $T: E \to E_1$ să fie continuă este ca T să fie mărginită.*

şi astfel:

❑ *Orice aplicație liniară $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este continuă.*

3.5. Intr-un spațiu metric (X,d), o funcție $f: A \to X, A \subset X$ este o contracție dacă există $C \in (0,1)$, astfel încât:

$$d(f(x_1), f(x_2)) \le C \cdot d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in E.$$

- O funcție $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabilă cu derivata mărginită de 1 este o contracție.

❑ *Dacă într-un spaţiu metric complet* (X,d), *funcţia* $f:A\to X$, *unde mulţimea* $A\subset X$ *este închisă, este o contracţie, atunci* f *admite un punct fix unic* $\bar{x}$, *adică* $f(\bar{x})=\bar{x}$.
În plus, alegând x_0 *un punct oarecare din* A, *şirul:* $x_0, x_1=f(x_0),...,\ x_{n+1}=f(x_n),...$ *converge la* $\bar{x}$ *şi avem:* $d(x_n,\bar{x})\le \frac{C^n}{1-C}\cdot d(x_0,f(x_0))$. (*Banach –metoda aproximaţiilor succesive* a lui *Picard*).

- Să studiem folosind principiul contracţiilor, convergenţa şirului definit prin relaţia de recurenţă $x_0=17,\ x_{n+1}=\frac{3x_n^2+1}{5x_n},\ n\ge 0$.

  Considerăm funcţia $f:[10^{-5},\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\frac{3x^2+1}{5x}$; funcţia nu este definită în $x=0$, pentru a folosi principiul contracţiilor domeniul de definiţie trebuie să fie o mulţime închisă şi astfel am ales intervalul $[10^{-5},\infty)$.

  Calculând $f'(x)=\frac{3}{5}-\frac{1}{5x^2}$, avem $|f'(x)|<\frac{3}{5},\ \forall x\ge\frac{1}{10^5}$ şi din aplicarea teoremei creşterilor finite obţinem: $|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{3}{5}\cdot|x_1-x_2|,\ \forall x_1,x_2\ge\frac{1}{10^5}$, deci f este o contracţie. Şirul în studiu este şirul aproximaţiilor succesive din principiul contracţiilor, pentru funcţia $f(x)=\frac{3x^2+1}{5x}$ şi converge la punctul fix al funcţiei, pe care-l determinăm rezolvând ecuaţia: $x=\frac{3x^2+1}{5x}$, în mulţimea $[10^{-5},\infty)$. În concluzie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  Să scriem un program, pentru a aproxima cu două zecimale exacte, limita şirului definit prin relaţia de recurenţă $x_0=17,\ x_{n+1}=\frac{3x_n^2+1}{5x_n},\ n\ge 0$, folosind principiul contracţiilor –metoda aproximaţiilor succesive:

  Evaluăm $|\bar{x}-x_n|\le\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}\cdot|x_0-f(x_0)|$; avem $x_1=f(17)=\frac{868}{85}$; $|x_1-x_0|=\frac{577}{85}$ şi astfel

  $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}\cdot|x_0-f(x_0)|=\frac{577}{34}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$ şi astfel:

```
»n=2;x=(577/34).*(3/5).^n, while x>0.001 n=n+1;x=(577/34).*(3/5).^n;end
» [n]
        ans =
                20
» termen(1)=17; for i=2:20 termen(i)=(3/5)*termen(i-1)+1/(5*termen(i-1));end
» termen(20)
        ans =
                0.7071
```

  Să verificăm că schimbând primul termen într-un asemenea şir limita rămâne neschimbată şi anume fie $x_0=1,\ x_{n+1}=\frac{3x_n^2+1}{5x_n},\ n\ge 0$; acum avem $x_1=f(x_0)=\frac{4}{5}$, $|x_1-x_0|=\frac{1}{5}$ şi evaluăm

$$|\bar{x}-x_n| \le \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{2}$$

```
» n=2;x=(1/2).*(3/5).^n, while x>0.001 n=n+1;x=(1/2).*(3/5).^n;end
» [n]
        ans =
                13
» termen(1)=1; for i=2:20 termen(i)=(3/5)*termen(i-1)+1/(5*termen(i-1));end
» termen(13)
        ans =
                0.7071
```

Exerciții propuse

1. Scrieți un program pentru a aproxima cu două zecimale exacte limita şirului definit prin relația de recurență $x_0 = 6, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 + 3}{7x_n}, n \ge 0$, folosind principiul contracțiilor–metoda aproximațiilor succesive