Calcul stiintific
5.Functii continue

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro

Limite de functii

Fie (X,d) **şi** (X_1,d_1)**, două spaţii metrice,**
o funcţie $f : A \to X_1$**, unde** $A \subset X$ **şi** $x_0 \in A'$**;**
există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ **, dacă:**

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ **astfel încât** $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ **cu** $d(x, x_0) < \delta$
avem $d_1(f(x), l) < \varepsilon$.

există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă:

oricare ar fi bila $B_1(l, \varepsilon)$ există $B(x_0, \delta = \delta(\varepsilon))$

astfel încât avem:

$$f((A \setminus \{x_0\}) \cap B(x_0, \delta)) \subset B_1(l, \varepsilon).$$

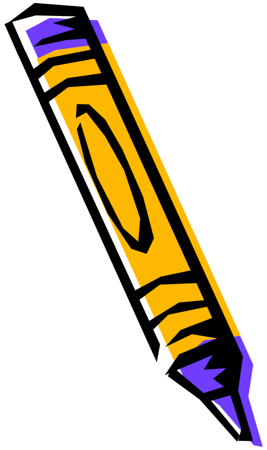
În cazul $(E, \| \ \|)$, $(E_1, \| \ \|_1)$ spații liniare normate și a funcției $f : A \to E_1$, $A \subset E$,

există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $x_0 \in A'$, dacă

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $\|x - x_0\| < \delta$,

avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.

exemplu

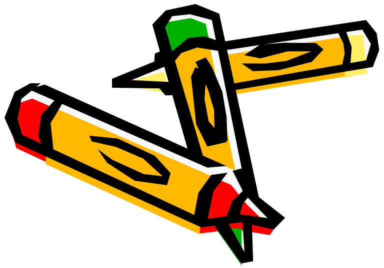


- Pentru a vizualiza rezultatul cunoscut:

  $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

  vom tabela pentru început funcția pentru valori la stânga și la dreapta lui zero, suficient de apropiate de zero.

  »x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;.0001;.001;.01;.1];(sin(x))./x



0.9983

1.0000

1.0000

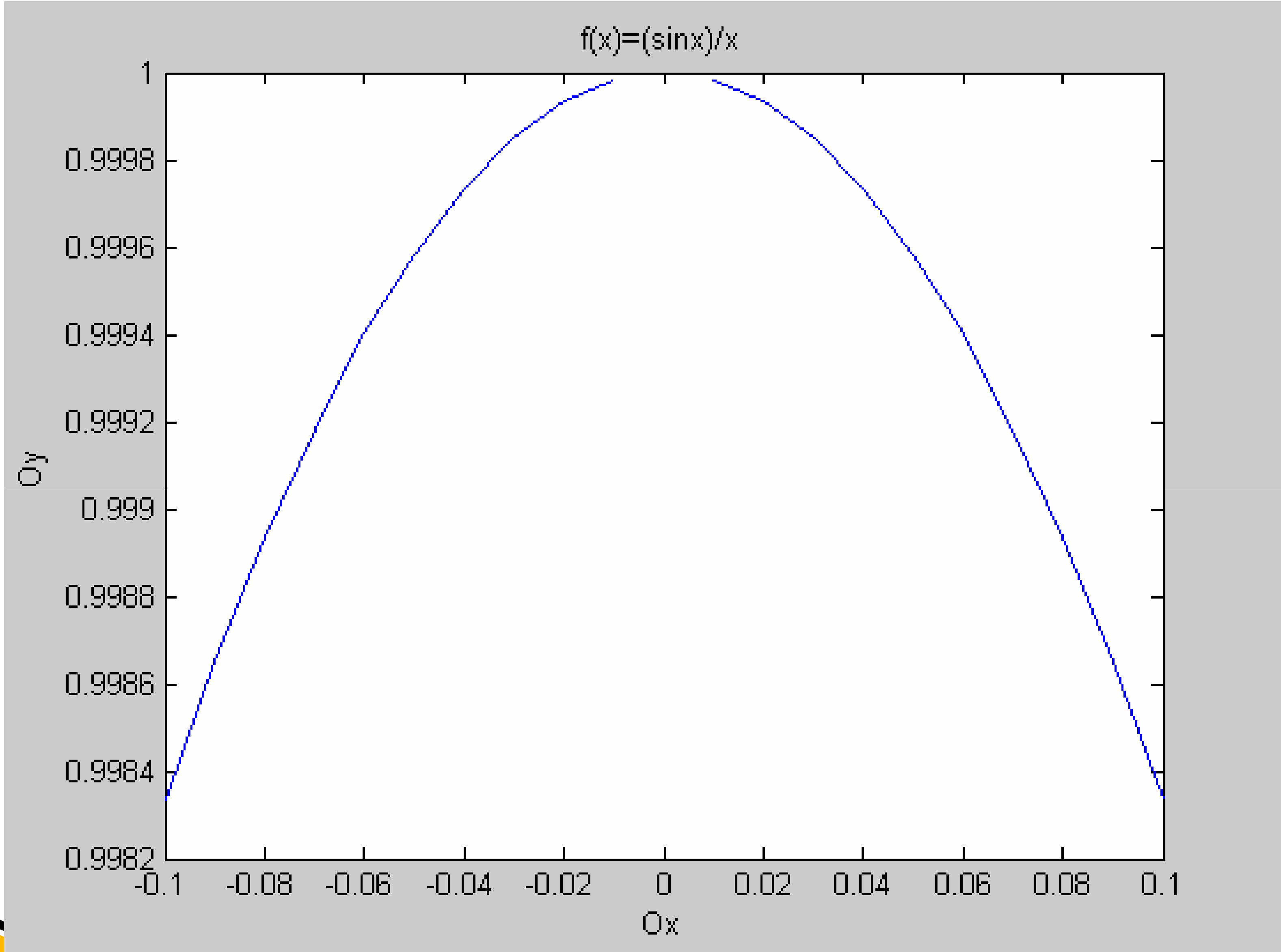
1.0000

1.0000

1.0000

1.0000

0.9983



f(x)=(sinx)/x
1
0.9998
0.9996
0.9994
0.9992
0.999
0.9988
0.9986
0.9984
0.9982
Oy
-0.1
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
Ox

criteriul lui Heine

- Fie (X,d) şi (X_1,d_1), două spaţii metrice, o funcţie $f : A \to X_1$, unde $A \subset X$ şi $x_0 \in A'$; următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
2. oricare ar fi şirul $(x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}$ convergent la x_0, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$

exemple

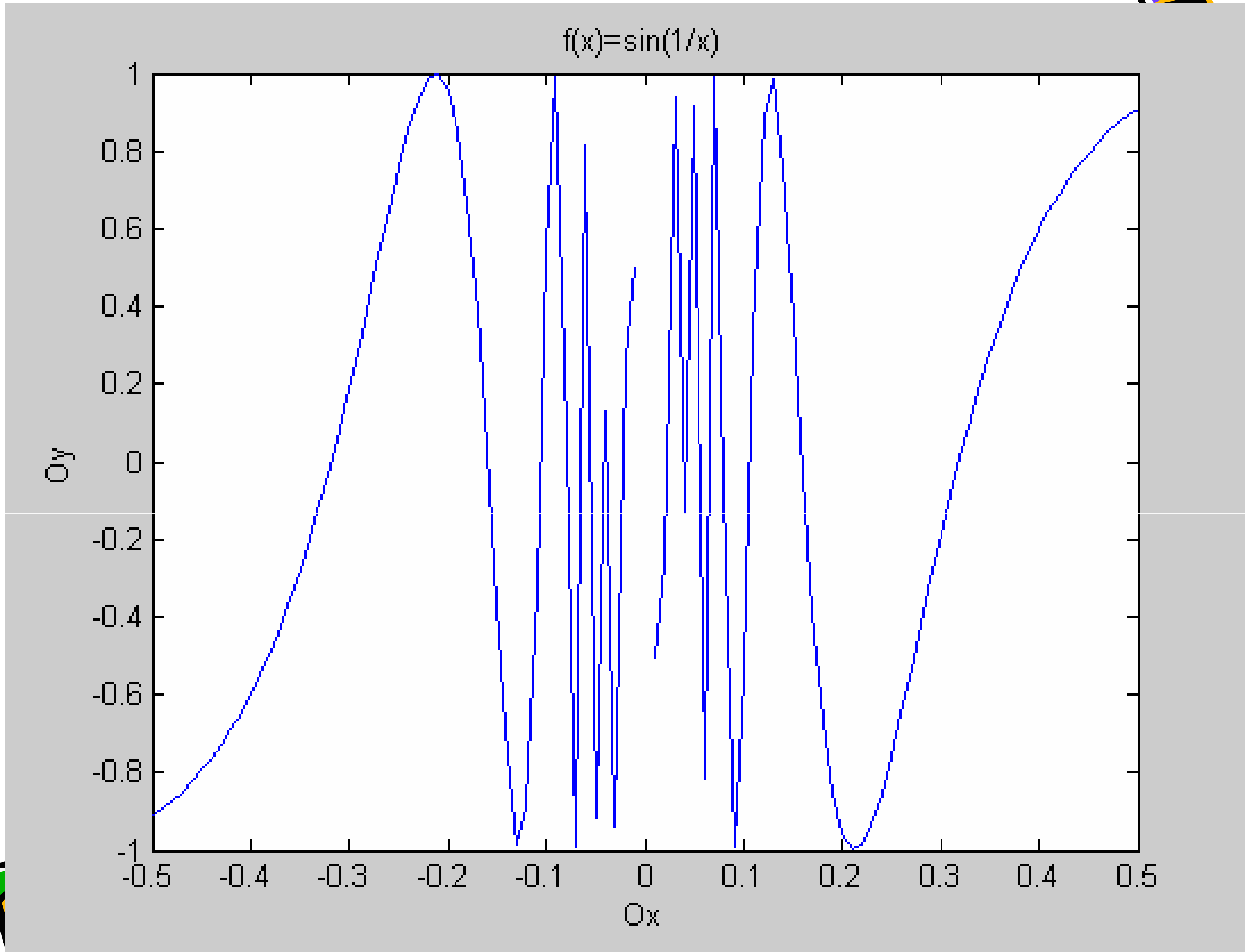
- Nu există $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$, deoarece considerând şirurile convergente la zero $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ şi $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, n \in \mathbf{N}$

  avem:

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin 2n\pi = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$$

$$f(y_n) = \sin \frac{1}{y_n} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(y_n) = 1 .$$

```
»x=[-.1;-.01;-.001;-.0001;.0001;.001;.01;.1];sin(1./x)
ans =
    0.5440
    0.5064
   -0.8269
    0.3056
   -0.3056
    0.8269
   -0.5064
   -0.5440.
```



f(x)=sin(1/x)
Oy
Ox
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

- nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

restricționăm funcția $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ la mulțimea

$\{(x,y) \mid y = m \cdot x\},\ m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ și avem:

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Restricția funcției depinde doar de parametrul real m deci nu există limita.

considerând şirurile convergente la $(0,0)$,

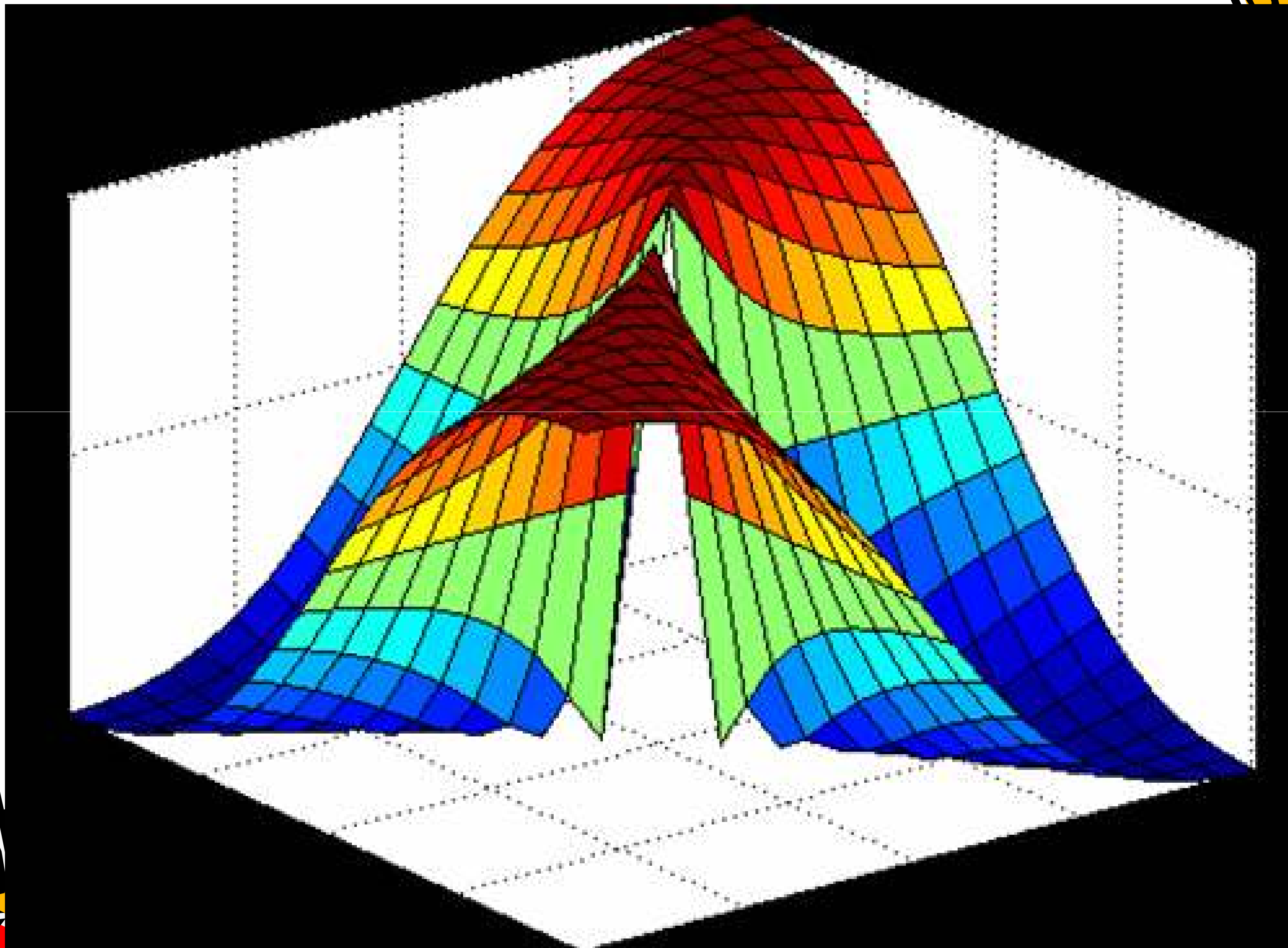
$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ şi } (x_n^{'}, y_n^{'}) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right),\ n \in \mathbf{N}^*$$

avem

$$f((x_n, y_n)) = \frac{1}{2},\ f((x_n^{'}, y_n^{'})) = \frac{2}{5},\ \forall n \in \mathbf{N}^* \quad ,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = \frac{1}{2} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} f((x_n^{'}, y_n^{'})) = \frac{2}{5}.$$



Fie (X,d) un spațiu metric, $(E,\|\ \|)$ un spațiu liniar normat funcțiile $f,g:A\to E$, unde $A\subset X$ și $x_0\in A'$.

Folosind criteriul lui Heine putem demonstra că:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha\cdot f)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, unde $\alpha:A\to\mathbf{R}$.

- Fie (X,d), (X_1,d_1), (X_2,d_2) spații metrice,
funcțiile $f : A \to X_1$, și $g : B \to X_2$, unde $A \subset X$, $B \subset X_1$, $f(A) \subset B$ și $x_0 \in A'$;
dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ și $\lim\limits_{y \to l} g(y) = l_1$, atunci există
$\lim\limits_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = l_1$

Calculul limitelor de functii

- Fie $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$ dată de $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, unde $f_k : A \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le m$.

  Dacă $x_0 \in A'$ avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \in \mathbf{R}^m$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f_k(x) = l_k, 1 \le k \le m$.

- Pentru funcțiile $f, g : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ ce au următoarele proprietăți:
  - $\left| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \le g(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$
  - $\lim\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \to x_0} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in A'$

avem $\lim\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \to x_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} = 0$$, deoarece

folosind inegalitatea $\frac{|a \cdot b|}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$ avem:

$$\frac{|x^2 \cdot y|}{x^2 + y^2} = \frac{|x \cdot y|}{x^2 + y^2} \cdot |x| \leq \frac{1}{2} \cdot |x|$$ şi $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \cdot |x| = 0 .$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4+x^4\cdot y^4)}{x^4+y^4}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4+x^4\cdot y^4)}{x^4+y^4} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cdot \frac{x^4+y^4+x^4\cdot y^4}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{x^4\cdot y^4}{x^4+y^4}\right) = 1$$

$$\frac{x^4\cdot y^4}{x^4+y^4} = \frac{x^2\cdot y^2}{x^4+y^4}\cdot x^2\cdot y^2 \le \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot y^2$$

Functii continue

Fie (X,d) și (X_1,d_1) două spații metrice, o funcție $f:A\to X_1$, unde $A\subset X$;

f este ***continuă*** în $x_0\in A\cap A'$ dacă

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x\in A$ cu $d(x,x_0)<\delta$ avem

$d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi este egală cu $f(x_0)$.

Dacă funcţia $f : A \to X_1$ este continuă în fiecare punct din A spunem că f este ***continuă pe*** A.

Fie $(E, \| \ \|)$, $(E_1, \| \ \|_1)$ spații liniare normate și funcția

$f : A \to E_1, A \subset E$;

f este continuă în $x_0 \in A \cap A'$, dacă

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $\|x - x_0\| < \delta$, avem

$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

exemplu

- Fie $(E, \| \ \|)$ spațiu liniar normat; norma $\| \ \| : E \to \mathbf{R}_+$ este o funcție continuă pe E:

  fie $\varepsilon > 0$, determinăm un $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta$ să avem $\left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \varepsilon$.

  deoarece $\left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \|x - x_0\|$, obținem $\delta = \varepsilon$.

Fie $f : A \to X_1$, $A \subset X$ şi $x_0 \in A' \setminus A$; dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

se poate construi funcţia $g : A \cup \{x_0\} \to X_1$, continuă în x_0,

dată de $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$,

prelungirea prin continuitate a lui f în x_0.

exemple

- Funcția $f_1 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to [-1,1]$, $f_1(x) = \sin\frac{1}{x}$ nu poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 0$, neexistând $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$.
- Funcția $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 0$, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Criteriul lui Heine

- Fie (X,d) şi (X_1,d_1), două spaţii metrice,
o funcţie $f: A \to X_1$, unde $A \subset X$ şi $x_0 \in A' \cap A$;
următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1. f este continuă în x_0;
2. oricare ar fi şirul $(x_n)_n \subset A$, convergent la x_0,
avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Fie (X,d) un spațiu metric, $(E,\| \|)$ un spațiu liniar normat funcțiile $f,g:A\rightarrow E$, unde $A\subset X$ şi $x_0 \in A\cap A'$.

- Dacă funcțiile f şi g sunt continue în x_0, atunci funcția $f+g$ este continuă în x_0;
- Dacă funcția f şi funcția $\alpha:A\rightarrow\mathbf{R}$ sunt continue în x_0, atunci funcția $\alpha\cdot f$ este continuă în x_0.

$C(A) = \{f : A \to E,\ f$ continuă pe $A\}$,
înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalar, este un spațiu vectorial real.

- Fie spațiile metrice (X,d), (X_1,d_1), (X_2,d_2), funcțiile $f:A\to X_1$, și $g:B\to X_2$, $A\subset X$, $B\subset X_1$, $f(A)\subset B$ dacă f este continuă în $x_0\in A\cap A'$ și g este continuă în $f(x_0)$, atunci $f\circ g$ este continuă în x_0.

Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.

multime compacta

Într-un spaţiu metric (X,d), mulţimea K este ***compactă*** dacă orice şir din K conţine un subşir convergent în K.

Într-un spaţiu metric (X,d) mulţimea $A \subset X$ este ***închisă*** dacă limita oricărui şir convergent din A aparţine lui A.

exemple

- Orice interval $[a,b]\subset\mathbf{R}$ este o mulțime compactă.
- În $\mathbf{R}^n$ o mulțime este compactă dacă și numai dacă este mărginită și închisă.

- Fie (X,d) ,(X_1,d_1) spații metrice (X,d) ,(X_1,d_1); dacă funcția $f : A \to X_1$, $A \subset X$ este continuă, atunci imaginea prin f a unei mulțimi compacte $K \subset A$, este o mulțime compactă.

exemplu

- Graficul unei funcții continue $f:[a,b]\to\mathbf{R}$,

$$G_f=\{(x,f(x))|x\in[a,b]\}$$

este o mulțime compactă.

Construim funcția vectorială $h:[a,b]\to\mathbf{R}^2$, $h(x)=(x,f(x))$, funcție ce este continuă.

$G_f=h([a,b])$, deci este compactă

- Dacă o funcție reală, definită pe o mulțime compactă K, dintr-un spațiu spațiu metric (X, d) este continuă pe K, atunci este mărginită pe K și își atinge marginile.

Funcția f își atinge ***marginea superioară***, respectiv ***inferioară*** dacă există $x_1, x_2 \in K$ astfel încât:

$f(x_1) = \sup\limits_{x \in K} f(x) = \sup f(K)$ și $f(x_2) = \inf\limits_{x \in K} f(x) = \inf f(K)$,

functie uniform continua

Fie (X,d) şi (X_1,d_1), două spații metrice;

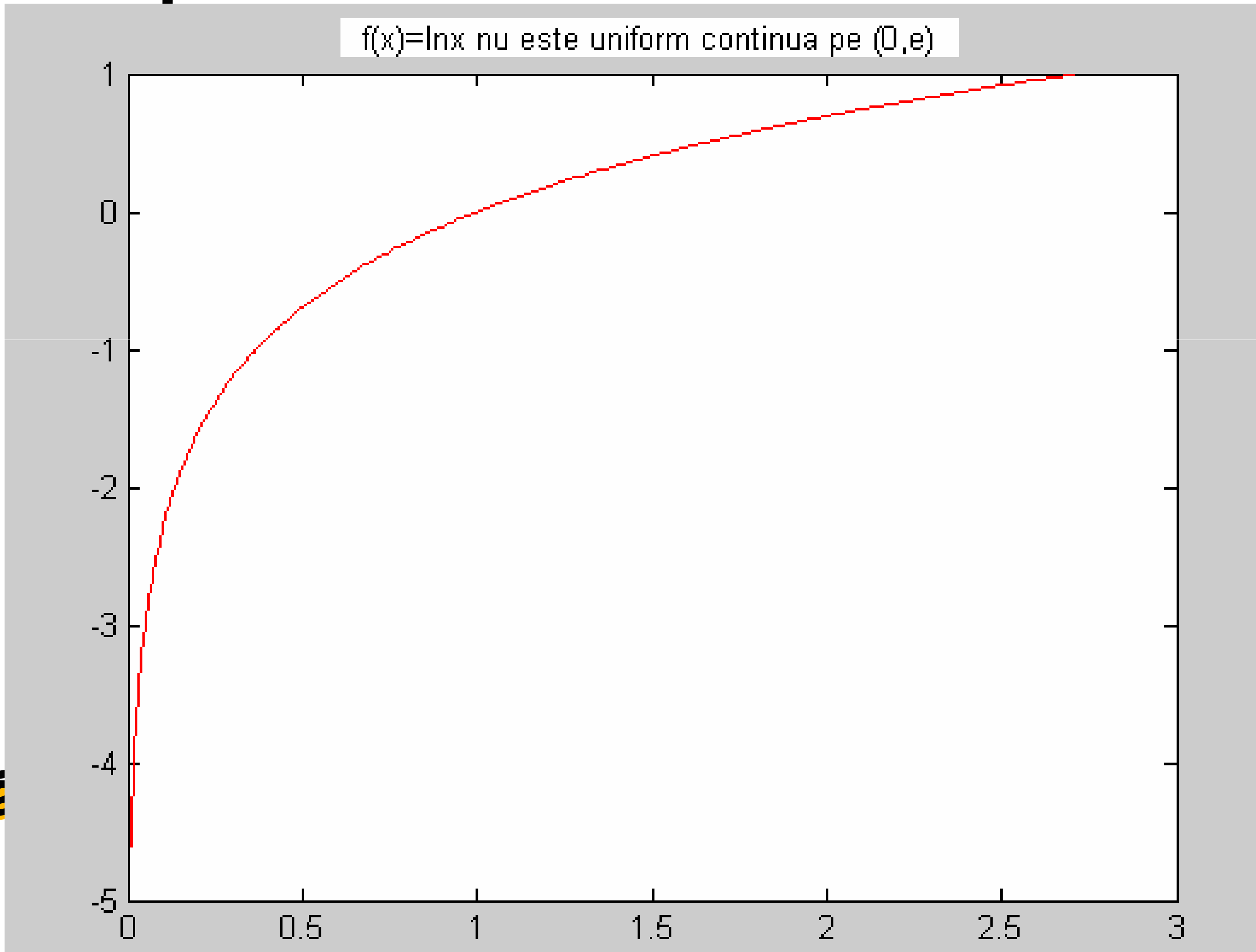
o funcție $f:X\to X_1$ este ***uniform continuă*** pe $A\subset X$

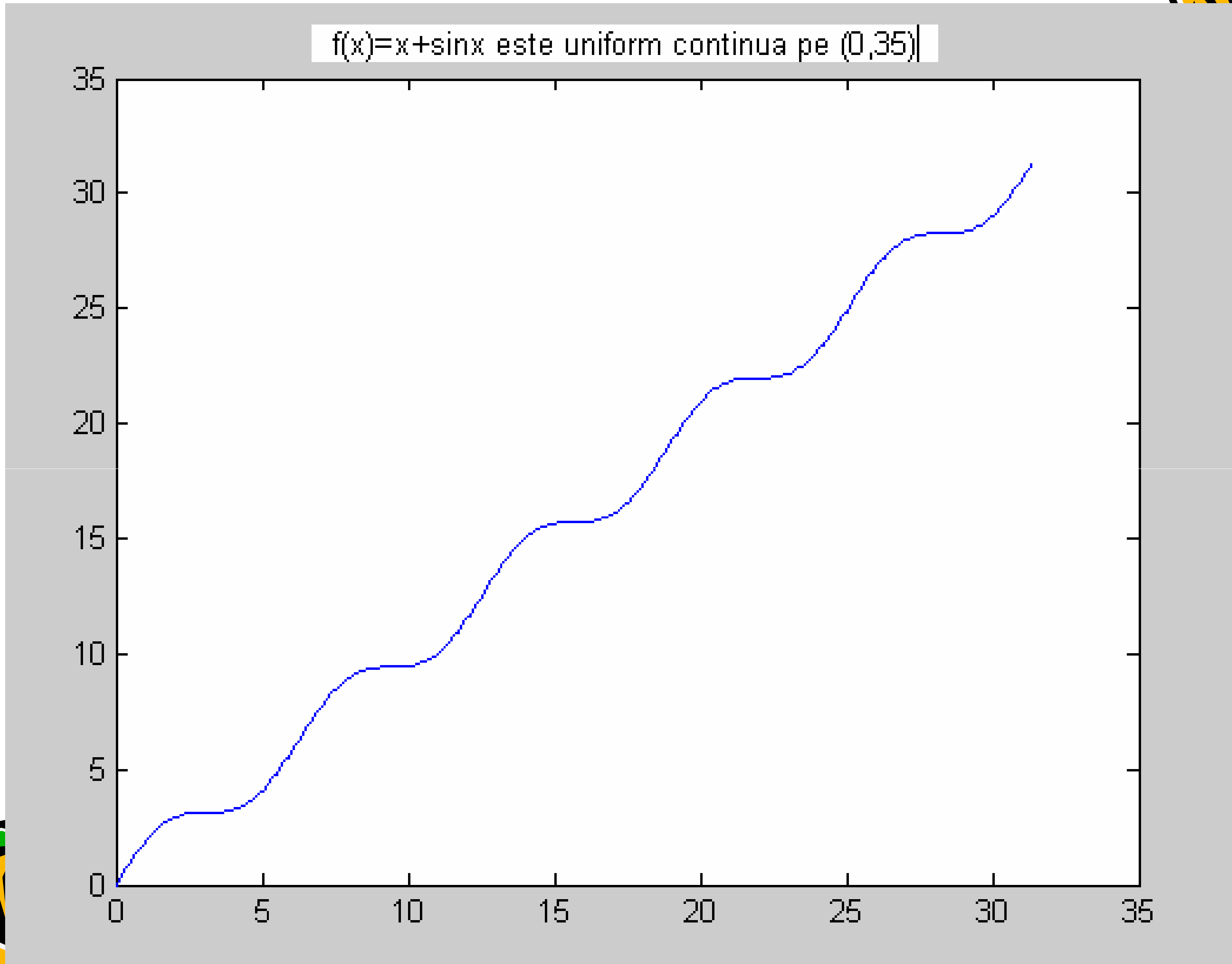
dacă:

$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x_1,x_2\in A$ cu $d(x_1,x_2)<\delta$

avem $d_1(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$.

exemple




f(x)=x+sinx este uniform continua pe (0,35)
35
30
25
20
15
10
5
0
0
5
10
15
20
25
30
35

O funcţie uniform continuă pe $\mathcal{A}$ este continuă în orice punct din $\mathcal{A}$

Reciproca nu este adevărată.

functie lipschitziana

Fie (X, d) şi (X_1, d_1), două spaţii metrice;

o funcţie $f : A \to X_1$, $A \subset X$ este funcţie ***lipschitziană***

dacă există $L > 0$ astfel încât

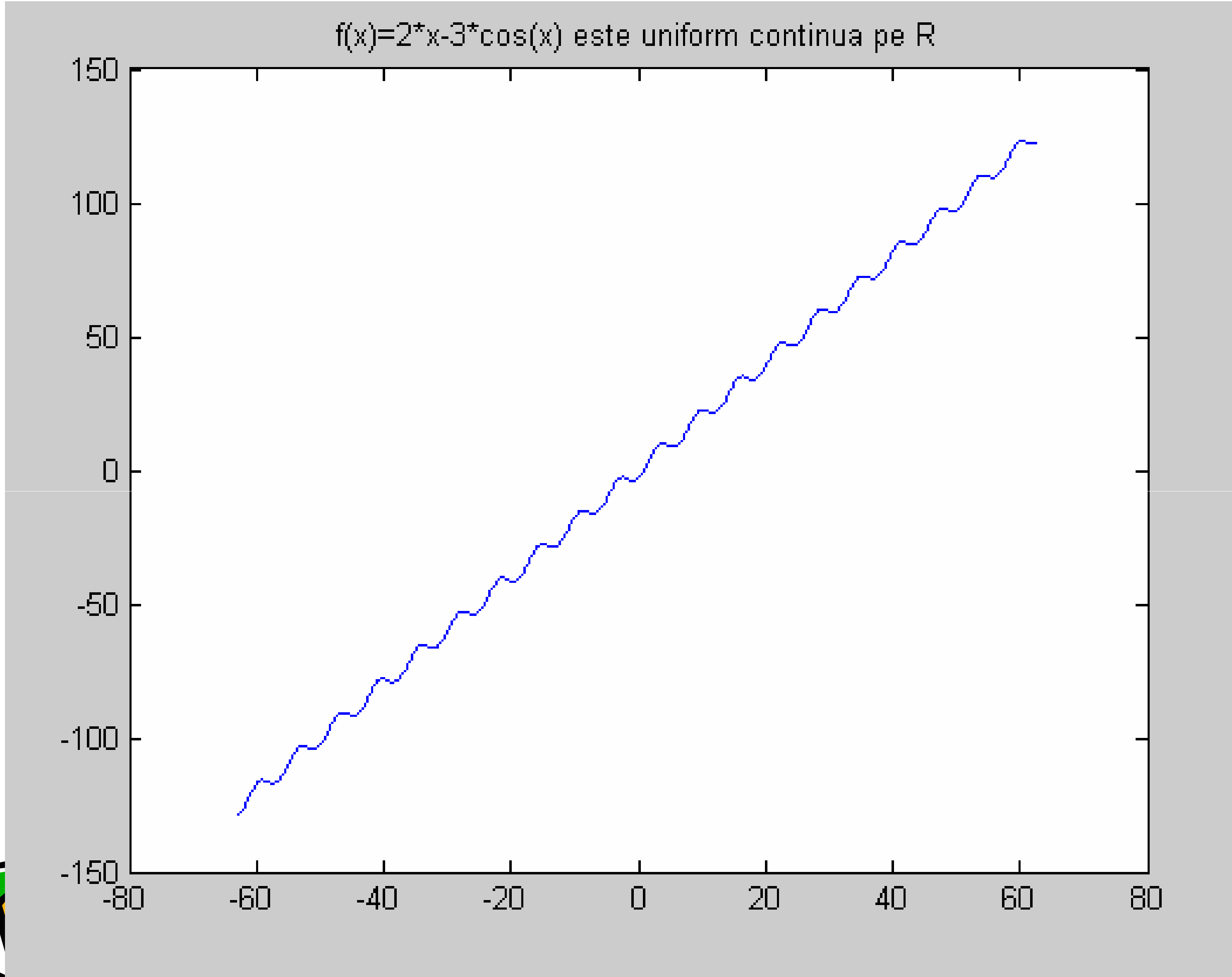
$d_1(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$.

exemplu

- O funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ derivabilă, cu derivata mărginită pe $A\subset\mathbf{R}$ este lipschitziană pe A.

- O funcție lipschitziană este uniform continuă

- Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = 2x - 3\cos x$ are derivata mărginită $|f'(x)| = |2 + 3\sin x| \leq 5$, este lipschitziană, deci uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

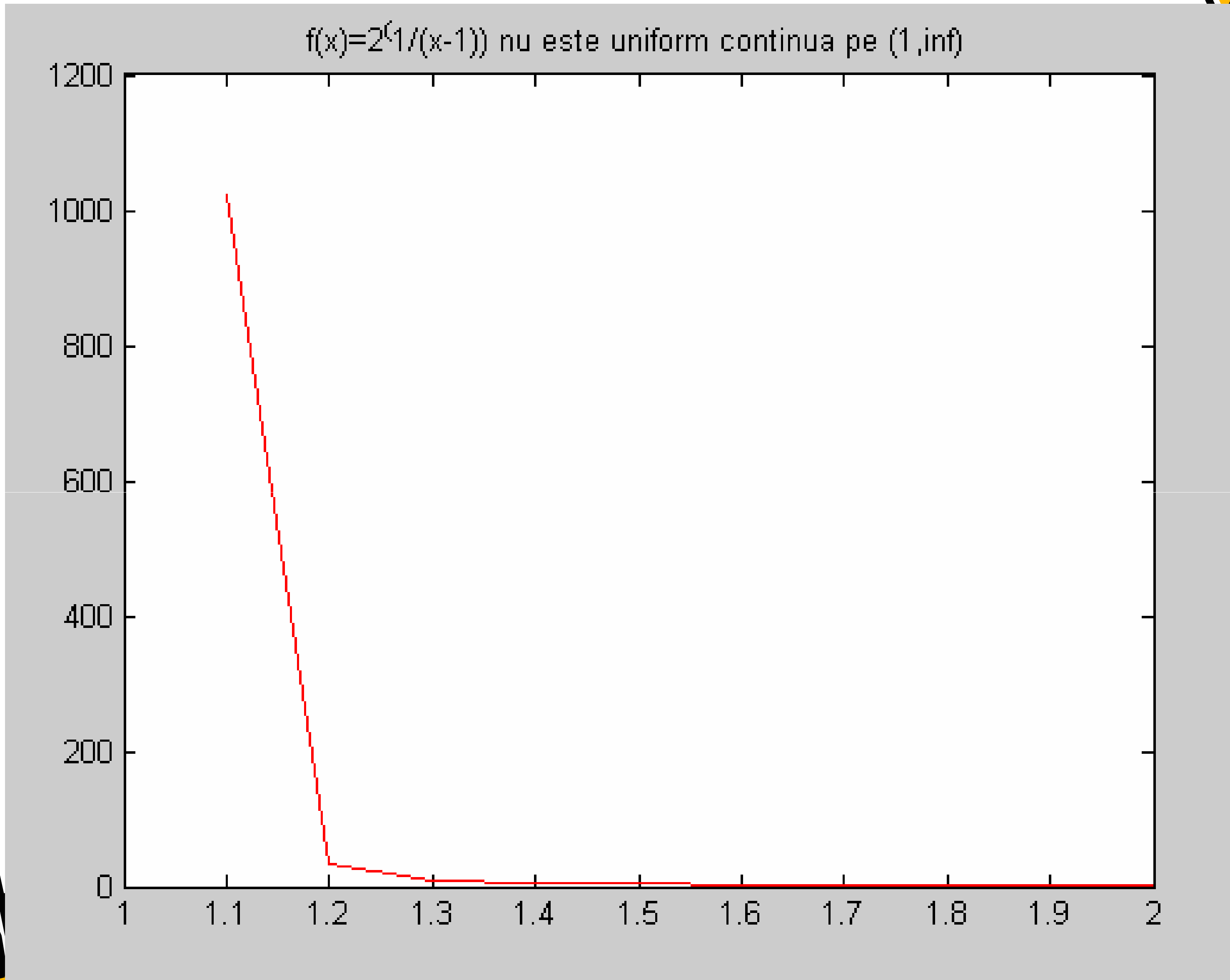

f(x)=2*x-3*cos(x) este uniform continua pe R
150
100
50
0
-50
-100
-150
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80

Dacă funcția $f : A \to X_1$, $A \subset X$ este uniform continuă pe A , atunci este uniform continuă pe orice submulțime $A_1 \subset A$.

- Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = 2x - 3\cos x$ este uniform continuă pe $(-10\pi, 10\pi) \subset \mathbf{R}$.

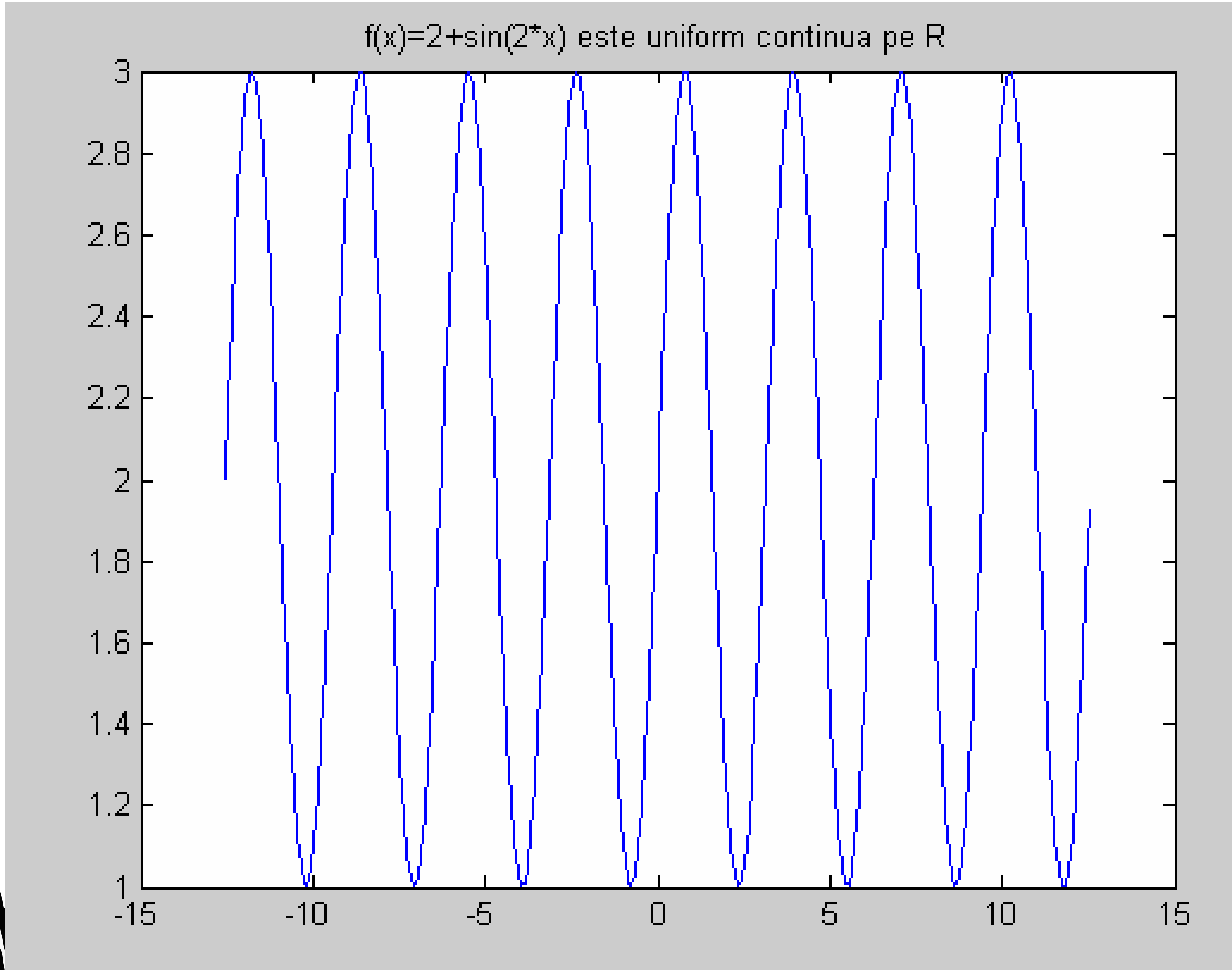
- O funcție $f:(a,b)\to \mathbf{R}$, $(a,b)\subset \mathbf{R}$, continuă pe (a,b) care admite asimptotă verticală $x=a$ sau $x=b$ nu este uniform continuă pe (a,b).

- Funcția $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$ nu este uniform continuă pe $(1,+\infty)$ deoarece $x=1$ este asimptotă verticală ($\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 2^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$).


f(x)=2^(1/(x-1)) nu este uniform continua pe (1,inf)
1200
1000
800
600
400
200
0
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2

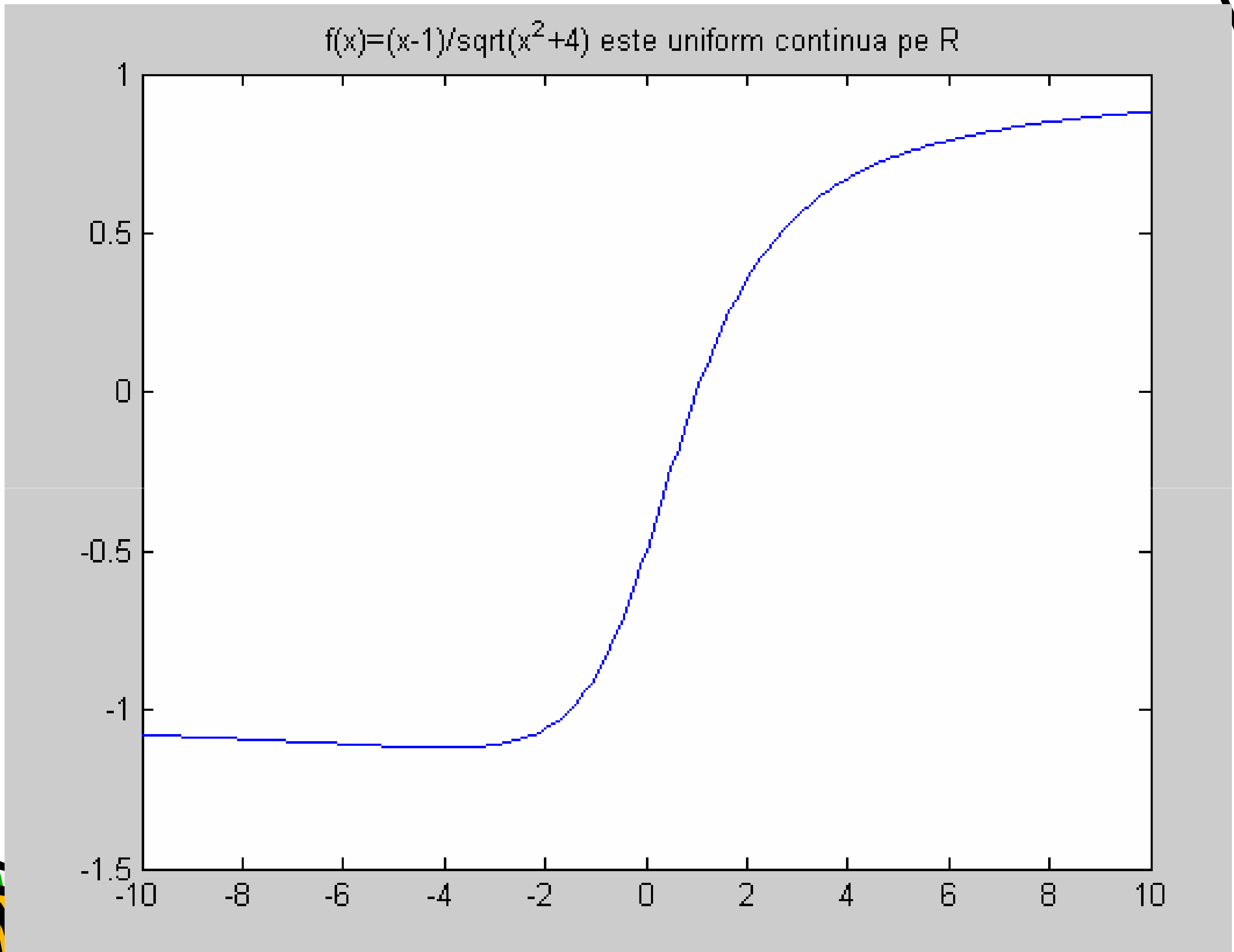
- O funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ periodică și continuă este uniform continuă pe **R**.

- Funcția $f:\mathbf{R}\to[1,3]$, definită prin $f(x)=2+\sin 2x$ este continuă, periodică, de perioadă $T=\pi$, deci uniform continuă pe **R**.


f(x)=2+sin(2*x) este uniform continua pe R
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
-15
-10
-5
0
5
10
15

- O funcție continuă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, al cărei grafic admite asimptote orizontale la $-\infty$ și la $+\infty$, este uniform continuă pe **R**.

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}$ este continuă pe **R** și admite asimptote orizontale $y=2$ la $+\infty$ și $y=-2$ la $-\infty$.

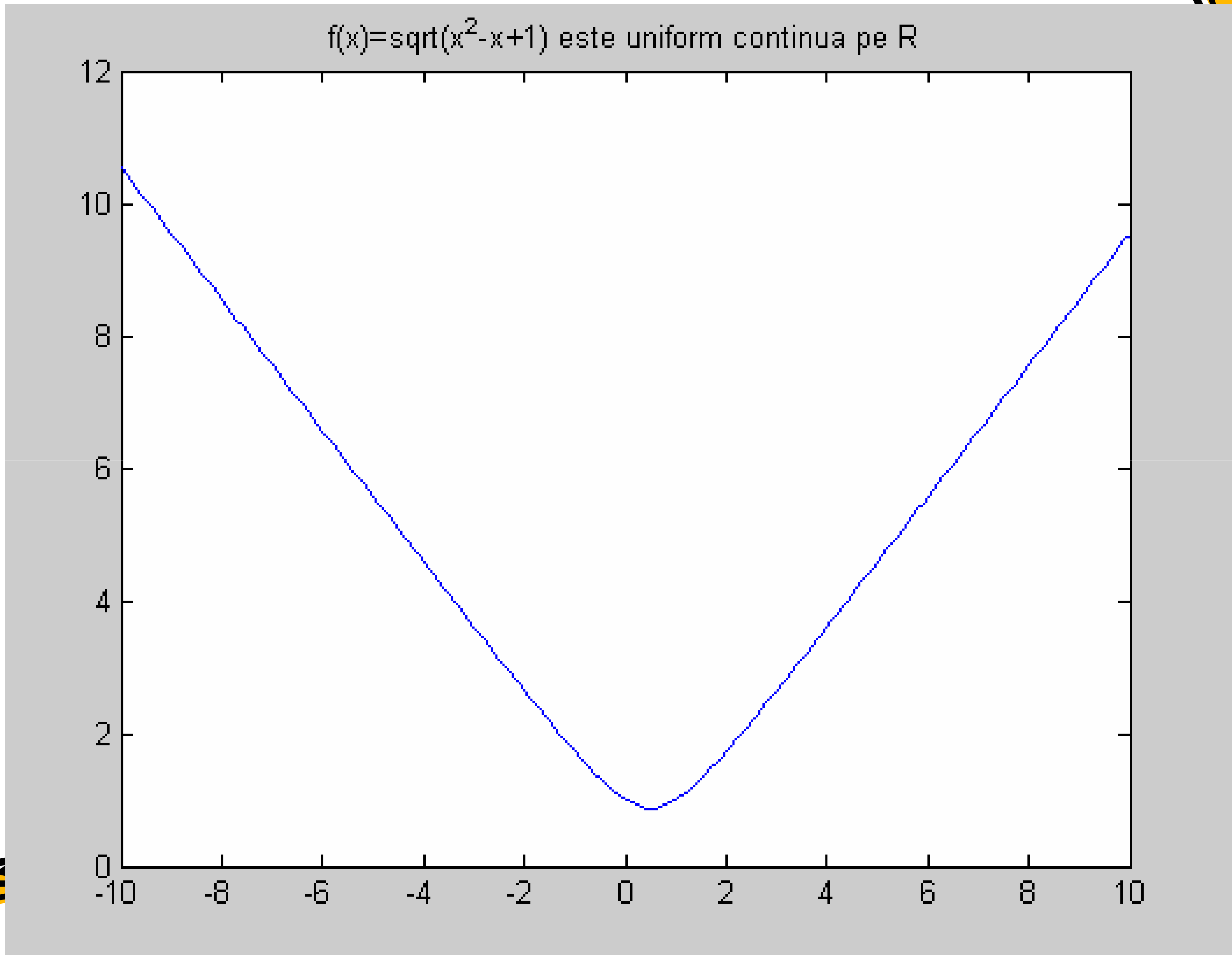

f(x)=(x-1)/sqrt(x2+4) este uniform continua pe R
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

- O funcție continuă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, al cărei grafic admite asimptote oblice la $-\infty$ și la $+\infty$, este uniform continuă pe **R**.

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ este continuă pe **R** și:

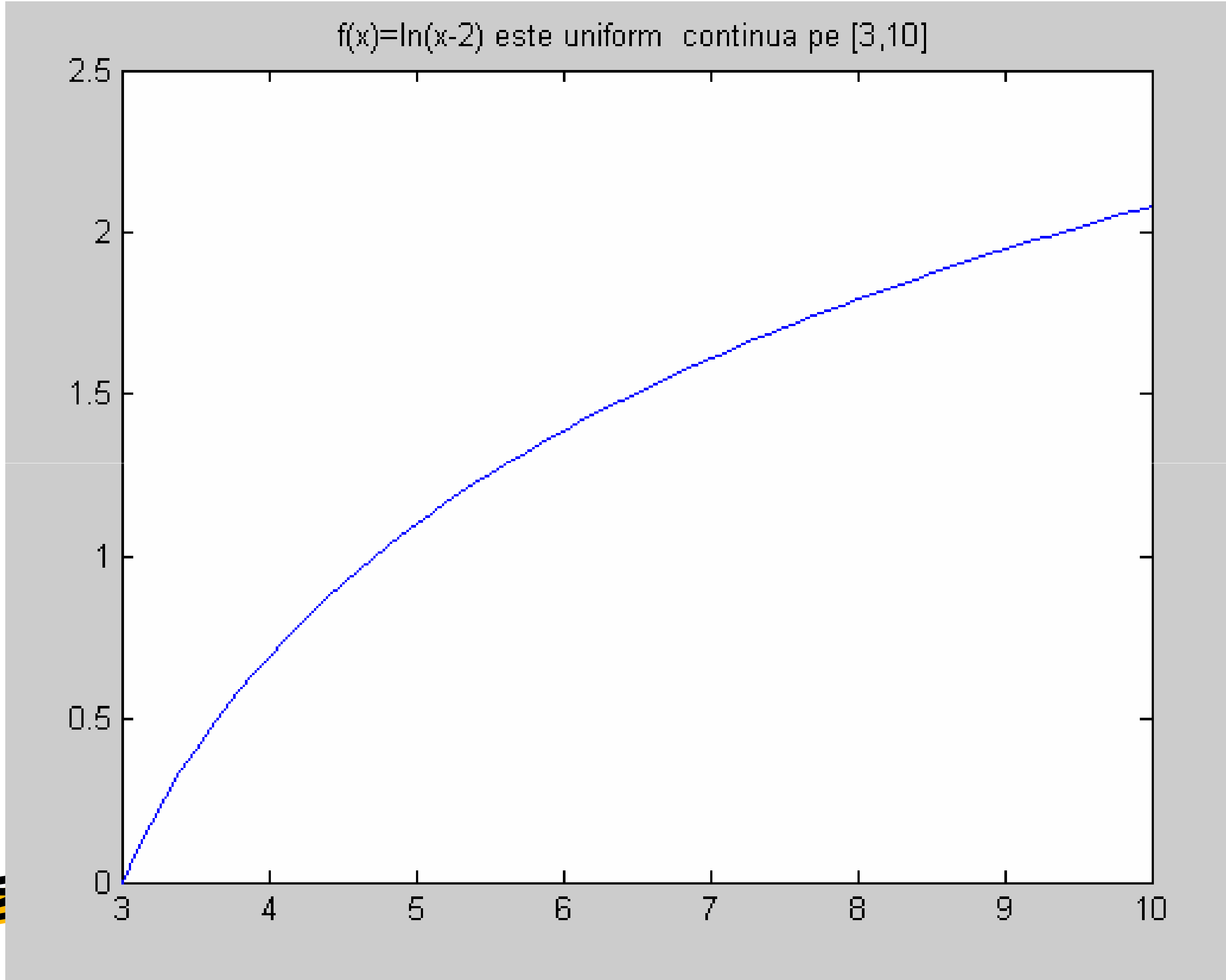
  $y=x-\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

  $y=-x+\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $-\infty$


f(x)=sqrt(x2-x+1) este uniform continua pe R
12
10
8
6
4
2
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

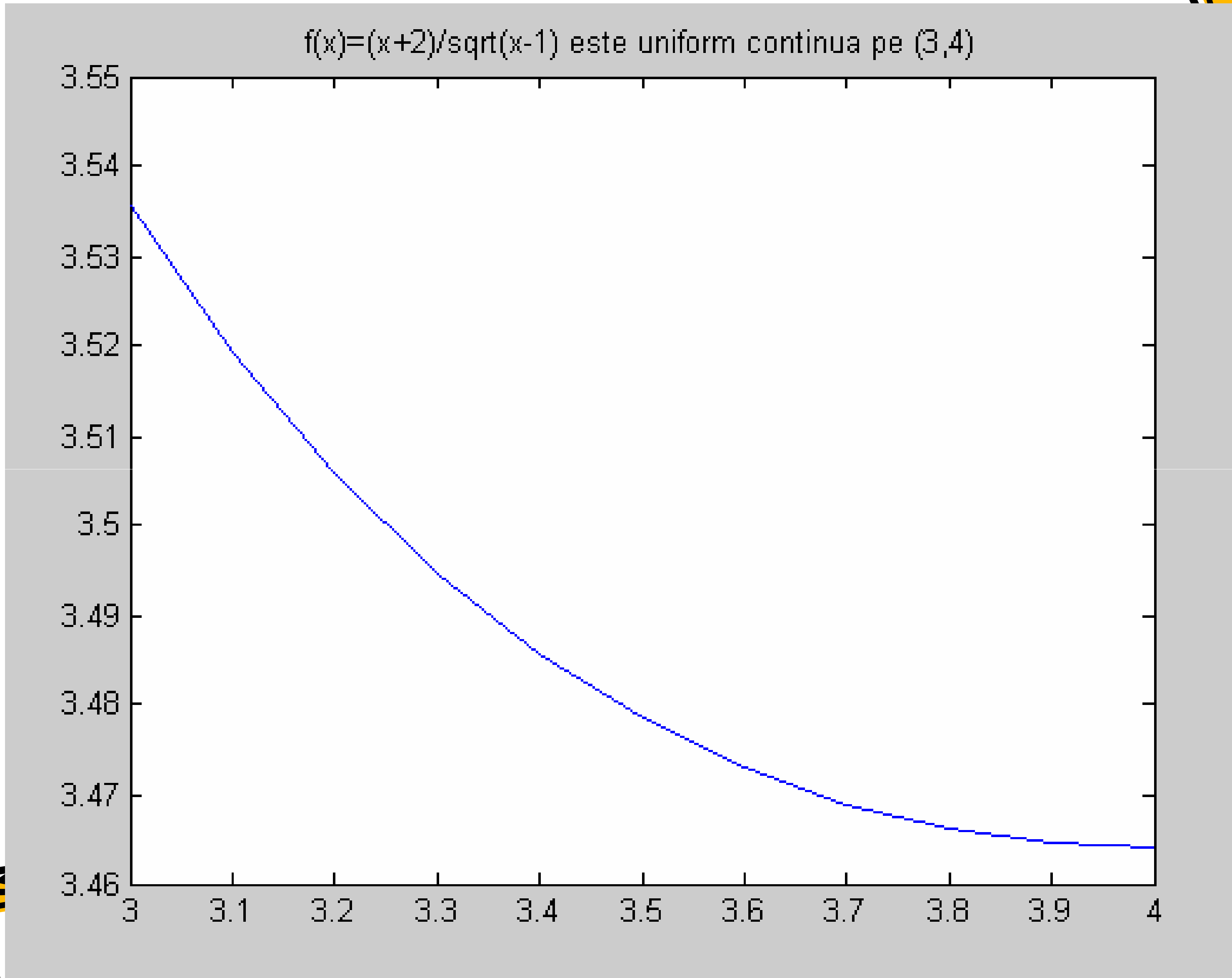
- Fie (X,d), (X_1,d_1) spații metrice și $K \subset X$ o mulțime compactă; dacă funcția $f : K \to X_1$ este continuă pe K, atunci este uniform continuă pe K.

- Funcția $f : (2,\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \ln(x-2)$ este uniform continuă pe $[3,10]$, fiind continuă pe acest compact.



f(x)=ln(x-2) este uniform continua pe [3,10]
2.5
2
1.5
1
0.5
0
3
4
5
6
7
8
9
10

- Funcția $f:(1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$ este continuă pe $[3,4]$, deci va fi uniform continuă pe această mulțime compactă, și pe orice submulțime a sa, adică și pe $(3,4)$.


f(x)=(x+2)/sqrt(x-1) este uniform continua pe (3,4)
3.55
3.54
3.53
3.52
3.51
3.5
3.49
3.48
3.47
3.46
3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
3.9
4

transfer de continuitate siruri de functii

- Fie (X,d) şi (X_1,d_1), două spații metrice; funcția limită unui şir de funcții $(f_n)_n$, $f_n : A \to X_1$ funcții continue pe $A \subset X$, uniform convergent pe A, este continuă pe A.

  Altfel spus:: limita uniformă a unui şir de funcții continue este o funcție continuă.

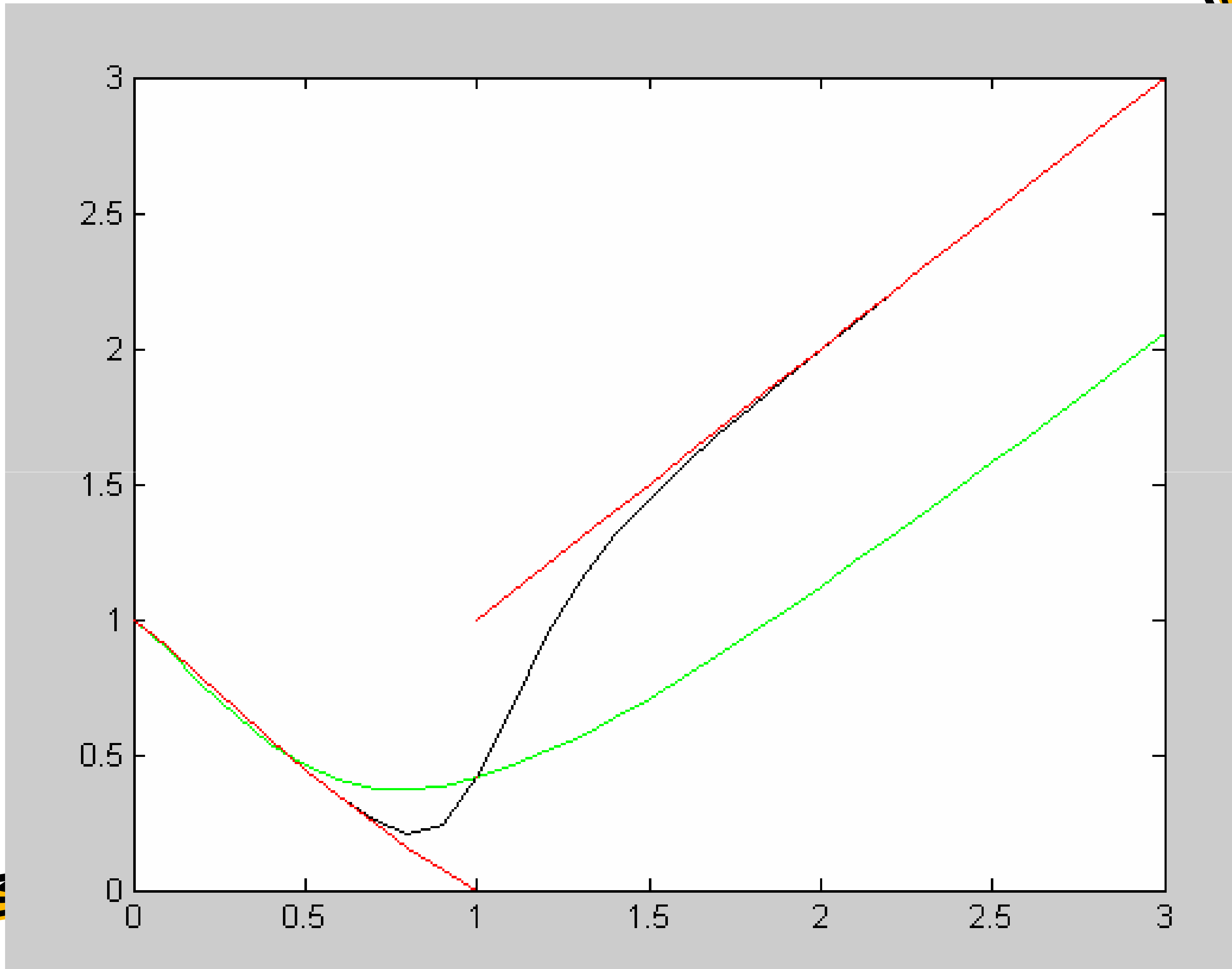
exemplu

- Funcția limită a șirului de funcții $(f_n)_n$, unde f_n :**R**→ **R**

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} - x + 1}{x^{2n} + \sqrt{1+x^2}} \text{ este } f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+1}{\sqrt{1+x^2}}, & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}, & x = 1 \\ x, & |x| > 1 \end{cases}$$

Acest șir nu este uniform convergent pe $[0,3]$, deoarece funcțiile f_n sunt continue pe $[0,3]$, dar funcția limită nu este.

```
>>x=0:.1:1;x1=1:.1:3;plot(x,(x.^3x+1)./(x.^2+sqrt(1+x.^2)),'g',x,(x.^11-x+1)./(x.^10+sqrt(1+x.^2)),'k',x,(1-x)./sqrt(1+x.^2),'r',x1,(x1.^3-x1+1)./(x1.^2+sqrt(1+x1.^2)),'g',x1,(x1.^11x1+1)./(x1.^10+sqrt(1+x1.^2)),'k',x1,x1,'r',1,1/(1+sqrt(2)),'r')
```



0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

transfer de continuitate serii de functii

- Fie (X,d) un spațiu metric, $(E,\|\ \|)$ un spațiu Banach și un șir de funcții $f_n : A \to E, n \in \mathbf{N}$, $A \subset X$;
dacă $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A și termenii ei sunt funcții continue pe A, atunci suma sa, s, este o funcție continuă pe A.

exemple

- am demonstrat cu criteriul lui Weierstrass convergența uniformă pe **R** a seriei de funcții $\sum_{n\geq 0} arctg \frac{2x}{x^2+n^6}$; funcțiile $f_n(x) = arctg \frac{2x}{x^2+n^6}$ sunt continue pe **R** și astfel putem afirma că suma seriei este o funcție continuă pe **R**.

Teorema Weierstrass

- Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci există un şir de polinoame $(P_n)_n$, care converge uniform la f pe $[a,b]$.

Ne situam în cazul intervalului $[0,1]$; transformarea $[a,b]\to[0,1]$ dată de $t=\dfrac{x-a}{b-a}$ păstrează polinoamele.

Se consideră polinoamele *Bernstein* asociate funcției f:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot C_n^m \cdot x^m \cdot (1-x)^{n-m},$$

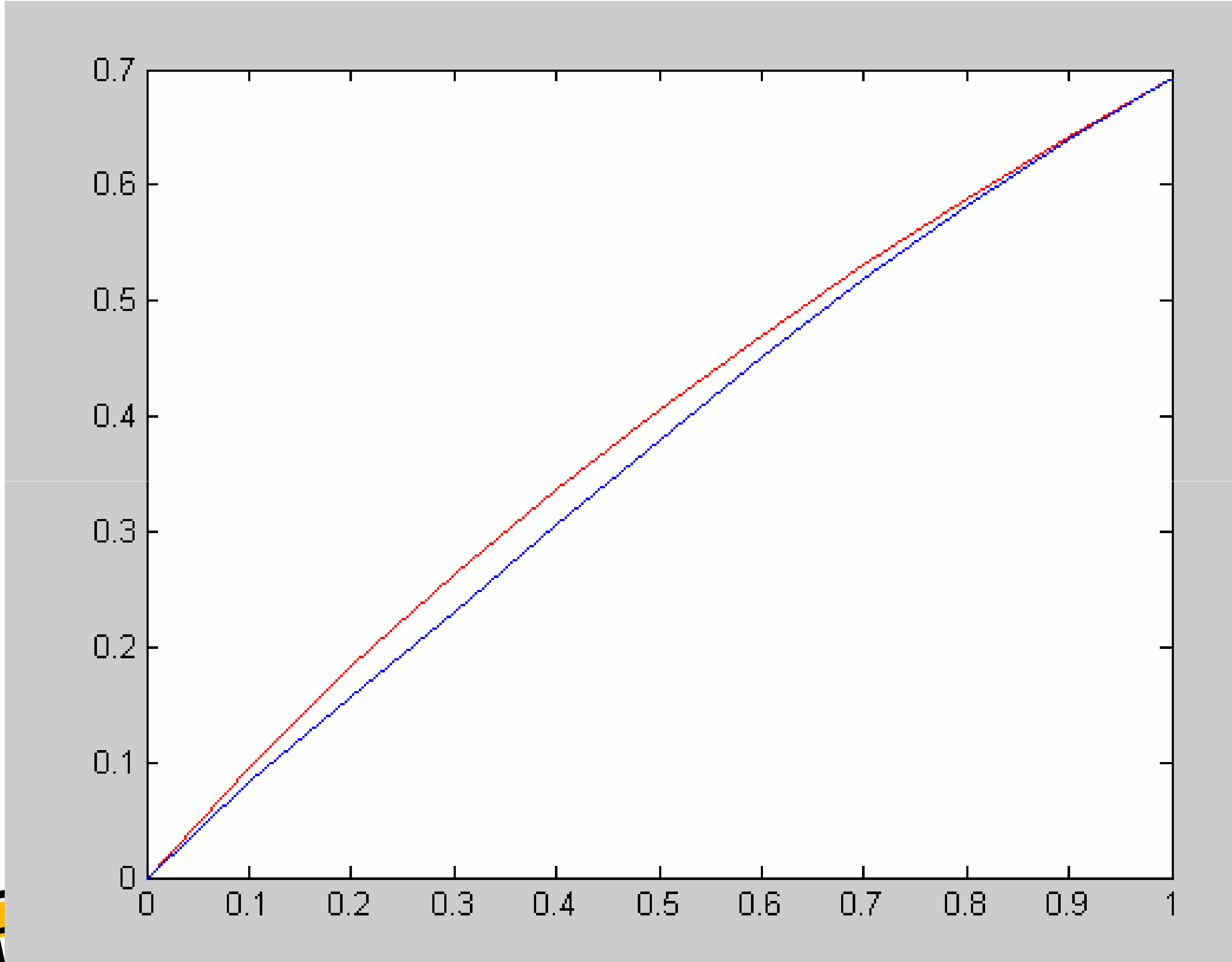
polinoame ce converg uniform la f, pe $[0,1]$.

exemplu

Pentru funcția $f(x) = \ln(1+x), x \in [0,1]$

polinomul Bernstein de gradul 5 este

$$B_5(x) = \sum_{m=0}^{5} \ln\left(1+\frac{m}{5}\right) \cdot C_5^m \cdot x^m \cdot (1-x)^{5-m}$$


0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Curbe

Funcția vectorială $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, continuă pe $[a,b]$ se numește ***curbă*** parametrizată în $\mathbf{R}^2$;

funcția vectorială continuă $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ este o ***curbă*** în $\mathbf{R}^3$

ecuatiile parametrice ale curbelor

$$\gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [a,b] \quad \textbf{respectiv} \quad \gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad t \in [a,b].$$

Imaginea $\gamma([a,b])=(\gamma)\subset\mathbf{R}^2$ se numeşte ***urma*** (*traiectoria*) curbei γ;

$\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ sunt ***capetele curbei***;
dacă $\gamma(a)=\gamma(b)$, γ este o ***curbă închisă***.

exemple

- Identificând $\mathbf{R}^2$ cu planul xOy, urma curbei

  $$\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

  este sfertul de cerc unitate (cu centru în origine, de raza 1) situat în primul cadran

  $$(\gamma) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

  Capetele curbei sunt punctele $(1,0), (0,1)$.

- Curba $\gamma:[0,2\pi]\to \mathbf{R}^3$, $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,3)$ este închisă având capetele $\gamma(0)=\gamma(2\pi)=(1,0,3)$;

  are ca urmă cercul $\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3,\ x^2+y^2=1,\ z=3\}$.

Pentru $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^m$, $m\in\{2,3\}$, curbă parametrizată fixată, putem defini $\gamma^-:[a,b]\to\mathbf{R}^m$, prin $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$, curbă numită ***opusa*** curbei γ.

Urmele curbelor γ şi γ^- coincid.

Dacă $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbf{R}^m$ şi $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbf{R}^m$ sunt două curbe parametrizate în $\mathbf{R}^m$, $m \in \{2,3\}$, cu proprietatea că $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ putem defini curba:

$\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,c] \to \mathbf{R}^m$, dată de: $(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), t \in [b,c] \end{cases}$

numit ***juxtapunerea*** curbelor γ_1 şi γ_2.

Urma lui $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea $(\gamma_1) \cup (\gamma_2)$.

Dacă $F : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ este o funcție continuă, mulțimea

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$$

este urma unei curbe în $\mathbf{R}^2$

$F(x,y) = 0$ se numește ecuația carteziană a curbei.

coordonate polare

Problema de rezolvat: a obține ecuațiile parametrice ale unei curbe definite prin ecuația carteziană.

ecuațiile ce leagă coordonatele carteziene (x, y) de coordonatele polare (r, t):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],\ r \geq 0$$

- scriem ecuația curbei în coordonate polare $r = \varphi(t)$;
- înlocuim pe r cu $\varphi(t)$ în formulele (*).

exemple

Mulțimea $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 = a^2\}$ este cercul cu centrul în origine, de rază 1.

Ecuația acestui cerc în coordonate polare este $r = a$;

ecuațiile parametrice ale cercului sunt:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]:$$

Pentru a scrie ecuațiile parametrice ale elipsei

$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\}$ folosim coordonate polare generalizate:

$$\begin{cases} x = a\cdot r\cdot \cos t \\ y = b\cdot r\cdot \sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

Ecuația elipsei în coordonate polare generalizate este $r=1$ și ecuațiile parametrice sunt:

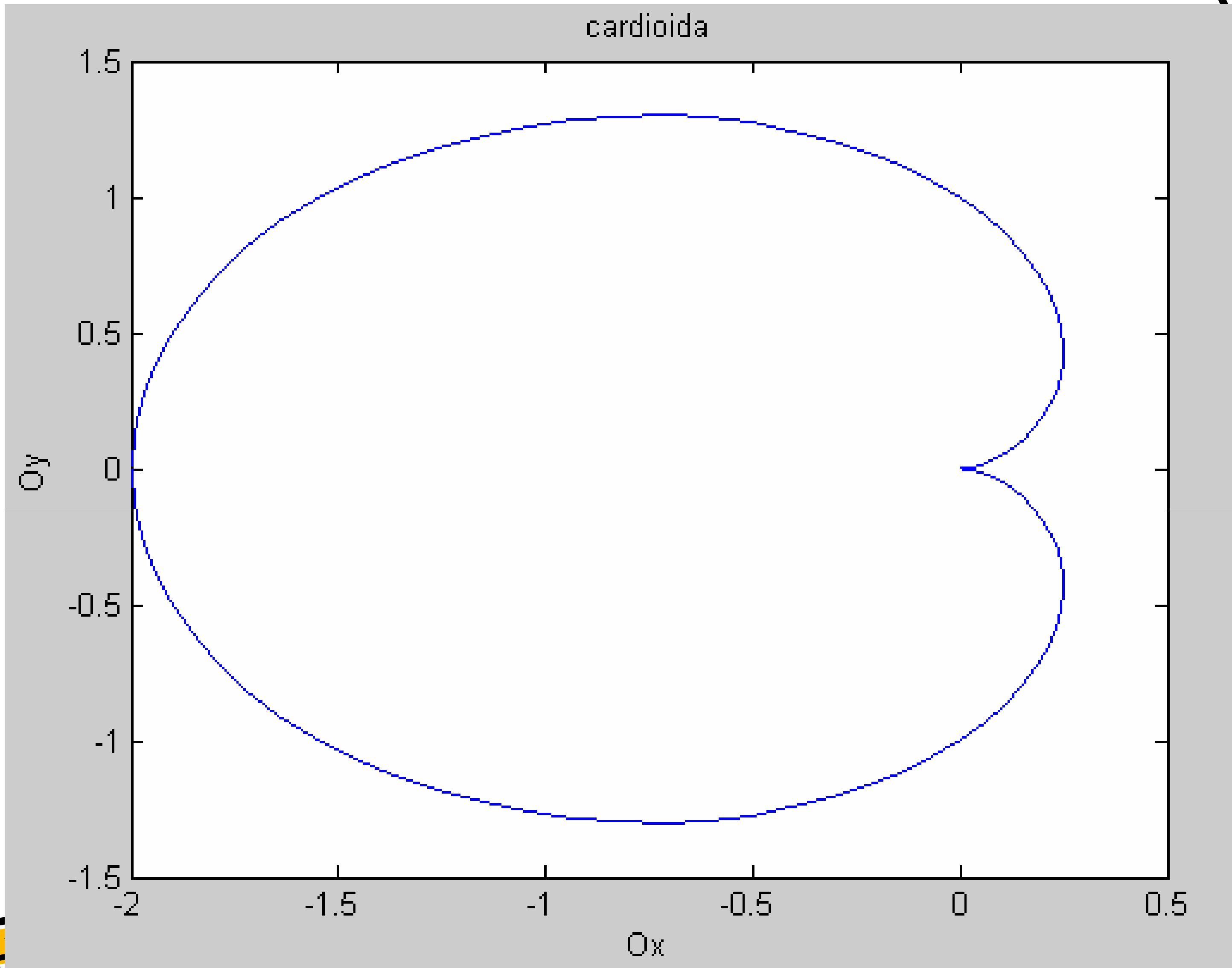
$$\begin{cases} x = a\cdot \cos t \\ y = b\cdot \sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

Ecuația *cardioidei* în coordonate polare este

$r = 1 + \cos t, \quad t \in [-\pi, \pi]$

şi astfel ecuațiile parametrice vor fi

$$\begin{cases} x = (1 + \cos t) \cdot \cos t \\ y = (1 + \cos t) \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi].$$



cardioida
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Oy
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Ox

problema

Mulțimea $M=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid \; x^2+y^2=a^2\}\subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime compactă.

Avem $M=\gamma([0,2\pi])$ unde $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$ definită de $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$.

Funcția vectorială γ este continuă, componentele sale $f,g:[0,2\pi]\to\mathbf{R}$ $f(t)=\cos t, g(t)=\sin t$ fiind funcții continue

Imaginea compactului $[0,2\pi]$ prin γ este o mulțime compactă.

Aplicatii liniare si continue

O aplicație $T : V \to V_1$ între două spații vectoriale reale V, V_1 este ***liniară*** dacă satisface relația

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot x') = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(x')\ ,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \ \forall x, x' \in V\ .$$

In cazul unei aplicații liniare T scriem Tx în loc de $T(x)$.

exemplu

Considerăm sistemul liniar de m ecuații cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

și definim o aplicație liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, dată de:

$$T(x_1,\ldots,x_n) = (a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n, \ldots, a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n).$$

problema rezolvării acestui sistem de ecuații devine:

fiind dat vectorul $(b_1,\dots,b_m)$, să găsim acei vectori $(x_1,\dots,x_n)$ care verifică relația $T(x_1,\dots,x_n)=(b_1,\dots,b_m)$.

(V, V_1) este mulțimea tuturor aplicațiilor liniare ce aplică pe V în V_1,

(V, V_1) formează un spațiu liniar față de corpul **R**, definind:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1 x + T_2 x, \forall x \in V$$

și

$$(\alpha \cdot T)(x) = \alpha \cdot Tx, \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Elementul nul al acestui spaţiu, notat O, se numeşte ***aplicaţia nulă*** şi este dat de formula:

$$Ox = \theta_{V_1},\ \forall x \in V.$$

considerăm spațiile vectoriale V, V_1 cu bazele $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$respectiv $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ și aplicația $T \in (V, V_1)$.

Elementul$x \in V$ poate fi scris în baza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$$

atunci:

$$y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot Tv_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} \cdot w_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot x_k\right) \cdot w_j$$

Din $y = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot w_j$ obținem

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot x_k ,1 \le j \le m$$

Aplicația T este caracterizată prin coeficienții a_{jk}.

Din formula ce dă legătura între coordonatele lui y și coordonatele lui x

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

obținem:

matricea asociată aplicației liniare T:

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

exemple

Matricea aplicației nule are toate elementele 0.

Matricea aplicației identitate este $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Unei aplicații liniare $T:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ i se asociază matricea

$$M_T = \left(Te_1, Te_2, \ldots, Te_n\right),$$

unde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este baza uzuală din $\mathbf{R}^n$, adică vectorii Te_i formează coloanele lui M_T.

Fiind date spațiile vectoriale V, V_1 și V_2, compunerea aplicațiilor liniare $T \in (V, V_1)$, $T_1 \in (V_1, V_2)$, $T_1 \circ T$ este tot o aplicație liniară.

Matricea asociată aplicației liniare $T_1 \circ T$ este produsul matricelor asociate aplicației liniare T_1, respectiv T, adică matricea $M_{T_1} \cdot M_T$.

aplicatie liniara si continua

Dacă $(E, \| \ \|)$ și $(E_1, \| \ \|_1)$ sunt spații liniare normate, aplicația liniară $T : E \to E_1$ este ***continuă*** în $x_0 \in E$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $\|x - x_0\| < \delta$ implică $\|Tx - Tx_0\|_1 < \varepsilon$.

- Aplicația liniară $T : E \to E_1$ este continuă pe E dacă şi numai dacă este continuă într-un singur punct.

Aplicația liniară $T : E \to E_1$ este ***mărginită*** dacă există un număr pozitiv M astfel încât $\|Tx\|_1 \le M \cdot \|x\|, \forall x \in E$.

- Condiția necesară și suficientă ca aplicația liniară $T : E \to E_1$ să fie continuă este ca T să fie *mărginită*.

- Orice aplicație liniară $T:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este continuă.

deoarece:

Dacă $x=(x_1,\dots,x_n)$ avem $Tx=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot x_k,\dots,\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\cdot x_k\right)$

unde (a_{ij}), $1\le j\le m, 1\le i\le n$ este matricea asociată

aplicației liniare T; evaluăm $\|Tx\|$

aplicăm inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot x_k\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) =$$

$$= \|x\|^2 \cdot \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2$$

şi astfel am determinat $M = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2}$.

Dacă $(E, \| \ \|)$ şi $(E_1, \| \ \|_1)$ sunt spaţii liniare normate, notăm cu L(E, E_1) mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare şi continue de la E la E_1.

Mulţimea L(E, E_1) este subspaţiu liniar al lui (E, E_1).

Putem defini o normă pe L(E, E_1) prin $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$.

Principiul contractiilor

Intr-un spațiu metric (X,d), o funcție $f: A \to X, A \subset X$ este o ***contracție*** dacă există $C \in (0,1)$, astfel încât:

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in E.$$

teorema de punct fix

- Dacă într-un spațiu metric complet, funcția $f : A \to X$, $A \subset X$ mulțime închisă, este o contracție, atunci f admite un punct fix unic $\bar{x}$, adică $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

  În plus, alegând x_0 un punct oarecare din A, șirul: $x_0, x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$ converge la $\bar{x}$ și avem:

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{C^n}{1 - C} \cdot d(x_0, f(x_0))$$

exemplu

Studiem convergența șirului definit prin relația de recurență:

$$x_0 = 7, x_{n+1} = \frac{4x_n^2 + 1}{5x_n}, n \geq 0,$$

folosind principiul contracțiilor:

Considerăm funcția $f:[10^{-5},\infty)\to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x)=\frac{4x^2+1}{5x};$$

Calculând $f'(x)=\frac{4}{5}-\frac{1}{5x^2}$, avem $|f'(x)|<\frac{4}{5}, \forall x\geq \frac{1}{10^5}$

şi din teorema creşterilor finite obținem:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq \frac{4}{5}\cdot |x_1-x_2|, \forall x_1, x_2\geq \frac{1}{10^5}$$

deci f este o contracție.

Şirul în studiu este şirul aproximaţiilor succesive din principiul contracţiilor, pentru funcţia $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{5x}$ şi converge la punctul fix al funcţiei:

$x=\dfrac{4x^2+1}{5x}$, în mulţimea $[10^{-5},\infty)$.

În concluzie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

tema

1. Studiați existența următoarelor limite:

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{arctg\, x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4};$$
- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4 \cdot y^4 + 1} - 1}{x^4 + y^4}$$

2. Se poate prelungi prin continuitate, în origine, funcția

$$h(x,y) = \left(1 + x^2 \cdot y^4\right)^{\frac{1}{x^4+y^8}} \quad ?$$

3. Precizați care din funcțiile următoare este uniform continuă, pe mulțimile indicate, justificând răspunsurile:

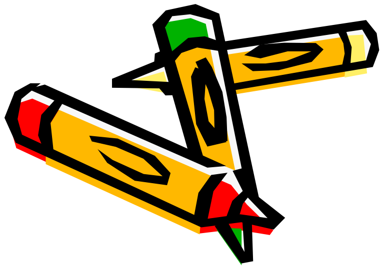
- $f_1(x) = x + arctgx,\ x \in \mathbf{R};$
- $f_5(x) = \sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbf{R};$
- $f_6(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{9-x^2}},\quad x \in (1,2);$
- $f_7(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-x+5},\ x \in \mathbf{R};$

4. Este şirul de funcţii $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este definită prin

$$f_n(x) = \frac{(x^2+2)\cdot e^{nx} - \ln(x+\sqrt{x^2+1})}{e^{nx+1}+\sqrt{x^2+1}}, n \in \mathbf{N},$$

uniform convergent pe $[-1,1]$?

5. Este suma seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot x^2}{n^5+x^4}$ o funcţie continuă pe $\mathbf{R}$?



6. Scrieți ecuațiile parametrice ale curbelor ale căror ecuații în coordonate carteziene sunt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\,\frac{y}{x};$$

$$x^2 + y^2 - y = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

7. Este mulțimea $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \}$ o mulțime compactă? Argumentați temeinic răspunsul.

8. Folosind principiul contracțiilor, studiați convergența șirului definit prin relația de recurență

$$x_0 = 3, x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 2x_n + 1}{5x_n}, n \geq 1$$