Noțiuni introductive – ştiinta managementului - laborator

I. Probleme reale de optimizare, rezolvate folosind calculul ştiinţific

- Fie $f: I \to \mathbf{R},\ I \subset \mathbf{R}$ o funcție de clasă C^2; punctul critic $x_0 \in \operatorname{int} I$ (soluție a ecuației $f'(x_0)=0$) este punct de extrem dacă $f''(x_0) \neq 0$ şi anume:
  - dacă $f''(x_0) < 0$ x_0 este punct maxim local
  - dacă $f''(x_0) > 0$ x_0 este punct minim local
  -

1 Un lanț de magazine alimentare este interesat de suprafața optimă a unui nou magazin, ce urmează a fi construit într-o anumită locație. S-a realizat un studiu asupra locației, bazat pe factori ca mărimea populației din locația respectivă, comenzile săptămânale cu mărfuri alimentare pe cap de locuitor, dezvoltându-se următorul model matematic care exprimă valoarea vânzărilor în mii de \$ (V) în funcție de aria magazinului x în măsurată în hectare.: V= $100x - 10x^2 - 150$ Determinați aria magazinului ce va maximiza vânzările. Care este valoarea maximă a vânzărilor corespunzătoare suprafeței magazinului.

2. Un fabricant de brânzeturi a constatat în urma unor studiu de piață că vânzările sale în orice magazin depind de suprafața rafturilor pe care se află produsele sale şi de traficul clienților în magazinul respectiv. Relația dintre valoarea săptămânală a vânzărilor în \$ (V), aria în metrii pătrați *x,* a rafturilor pentru produsele fabricantului şi numărul săptămânal al clienților C, exprimat în mii de clienți, este ilustrată de funcția:
$V = -20x^2 - 50C^2 - 60Cx + 220x - 340C + 610$
Presupunând că media săptămânală a clienților este 1000, ceea ce înseamnă $C = 1$, să stabilim care este suprafața optimă a rafturilor pentru maximizarea vânzărilor.

- Fie $f: D \to \mathbf{R}$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă, o funcție de clasă C^2; punctul critic $(a,b) \in D$ (soluție a sistemului $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$) este punct de extrem dacă determinantul matricii hessiene în (a,b) , $H_f(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$,

  este strict pozitiv. Astfel dacă $\det(H_f(a,b)) > 0$ şi
  - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, (a,b) este punct de minim local
  - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, (a,b) este punct de maxim local.

3. Un magazin de pantofi a realizat că valoarea cheltuielilor sale, calculată în mii de dolari poate fi aproximată printr-o funcție de două variabile: x_1 fiind valoarea investițiilor în

obiecte de inventar, în mii de dolari şi x_2 valoarea consumabilelor şi a publicităţii, în mii de dolari.

$$\mathrm{C}(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 - 6x_2^2 + 30x_1 + 24x_2 - 86$$

Găsiți valoarea maximă a cheltuielilor .

4. Preţurile a două produse p_1 şi p_2 sunt legate de cantităţile vândute x_1 şi x_2 prin relaţiile $\begin{cases} x_1 = 32 - 2p_1 \\ x_2 = 22 - p_2 \end{cases}$. Costul total (CT) de producţie şi vânzare ale celor două produse este legat de cantităţile vândute, prin funcţia $\mathrm{CT}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 73$.

   Dezvoltaţi un model matematic care să exprime profitul (P), ca funcţie de cantităţile vândute şi determinaţi preţurile şi cantităţile care maximizează profitul

- Extremele locale ale unei funcţii $f : D \to \mathbf{R}$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulţime deschisă, cu legătura $g(x, y) = 0$, ($g : D \to \mathbf{R}$, funcţie de clasă C^1) se află printre punctele care sunt soluţii ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$
$$g = 0$$

  Se verifică dacă punctele găsite în care $\frac{\partial g}{\partial y}$ nu se anulează sunt puncte de extrem pentru funcţia $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

.

5. O fabrică de mânuşi de basseball are două locaţii, costurile de producţie fiind diferite din cauza ratei locurilor de muncă vacante, taxelor locale, tipul echipamentelor, capacităţii, etc. Astfel fabrica A are costurile de producţie săptămânale în funcţie de numărul de mânuşi produse $\mathrm{C}_1(x_1) = x_1^2 - x_1 + 5$, unde x_1 este volumul producţiei săptămânale în mii de unităţi. Costurile de producţie săptămânale pentru fabrica B sunt date de $\mathrm{C}_2(x_2) = x_2^2 + 2x_2 + 3$, unde x_2 este volumul producţiei săptămânale în mii de unităţi. Targetul fabricii este producerea a 8000de mânuşi săptămânal, la cel mai mic preţ de cost posibil.

   Formulaţi modelul matematic ce poate fi utilizat pentru a determina numărul de mânuşi ce urmează a fi produs de fiecare fabrică, în fiecare săptămână. Calculaţi numărul optim de mânuşi produs de fiecare fabrică.

6. S-a determinat profitul total (P) al unei manufacturi ce fabrică două produse ca fiind funcţia $P = -x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1 + 16x_2 + 500$, unde x_1 reprezintă mii de unităţi din primul produs şi x_2 reprezintă mii de unităţi din al doilea produs. Numărul de unităţi de produse este restricţionat de faptul că pentru următoarea lună sunt disponibile doar 12 kg dintr-un ingredient folosit la ambele produse. Pentru fabricarea fiecărei mii de unităţi din cele două produse sunt necesare 2 kg din ingredientul respectiv.

   Dezvoltaţi modelul matematic ce poate fi utilizat pentru a determina câte mii unităţi din cele două produse pot fi fabricate în următoarea lună. Câte mii de unităţi din fiecare produs ar trebui fabricate pentru a maximiza profitul?

II. Programare liniară-metoda grafică

1. Firma Y produce printre altele două binecunoscute îngrăşăminte chimice pentru peluze „Green Lawn" şi „Lawn Care", ale căror substanţe de bază sunt K40 şi K50. Pentru săptămâna următoare sunt disponibile 900kg de K40 şi 400kg de K50.Pentru 1 kg de „Green Lawn" se folosesc $\frac{3}{5}kg$ K40 şi $\frac{2}{5}kg$ K50, în timp ce pentru 1Kg de „Lawn Care" se folosesc $\frac{3}{4}kg$ K40 şi $\frac{1}{4}kg$ K50. În plus limita de valabilitate a materialului de ambalaj restricționează producție de „Lawn Care" la cel mult 500Kg. Profitul pentru fiecare kilogram din cele două sortimente este de 3$.
   Scrieți modelul de programare liniară pentru această problemă. Găsiți soluția optimă. Câte kilograme din fiecare produs trebuie fabricate? Care este profitul maxim?

2. O firmă de brokeraj administrează portofolii de valori pentru clienți săi. Un nou client a cerut sa-i fie administrat un portofoliu de investiții de 500 000$. Ca strategie inițială clientul doreşte o combinație de două fonduri de investiții:

Fond	preț/ acțiune	returnare anuală estimativă/acțiune	indicele de risc/acțiune
US Oil	25$	3$	0.50
Hub propr.	50$	5$	0.25

   Indicele de risc este un rating al riscului celor două învestiții şi se vede clar că Hub proprietăți este investiția mai puțin riscantă. Clientul este interesat de cea mai mare returnare anuală posibilă, precizând că nu acceptă mai mult de 1000 de acțiuni la US Oil, datorită indicelui mare de risc, şi ca riscul total pe întreg portofoliul să nu depăşească 700. Câte acțiuni din fiecare firmă va cumpăra firma de brokeraj pentru a satisface condițiile impuse de client.

3. Firma Greentree oferă servicii de cazare şi masă pentru animalele de companie pentru perioade determinate. Mâncarea pentru câini este obținută prin amestecul a două produse existente pe piață în scopul obținerii unei diete echilibrate. Prezentăm în tabelul următor datele referitoare la compoziția celor două produse.

produsul	cost/ uncie = 35g	proteine%	grăsimi%
X	0.06$	30	15
Y	0.05$	20	30

   Ştiind că nutriționistul firmei cere ca fiecare câine să primească minim 5 uncii de proteine şi 3 uncii de grăsimi, detrminați mixtura celor două produse, care să aibă cel mai mic cost.

4. O firmă de investiții Innis Inv. administrează fonduri pentru mici companii şi clienți persoane fizice. Pentru un nou client Innis a fost autorizată să învestească 1,2 mil$ în două fonduri A şi B . Fiecare acțiune din fondul A costă 50$, are o rată anuală de returnare de 10%; fiecare acțiune din fondul B costă 100$, are o rată anuală de returnare de 4%. Clientul doreşte ca venitul anual din această investiție să fie de 60000$ şi minimizarea

riscurilor. Conform studiilor făcute de Innis fiecare acțiune din fondul A indicele de risc 8 în timp ce fiecare acțiune din fondul B are indicele de risc 3. Clientul a specificat că doreşte să investească în contul B cel puțin 300000$.

Determinați câte acțiuni din fiecare fond urmează să fie achiziționate pentru a minimiza indicele total de risc. Care este venitul anual returnat, generat de acest mod de investire? Clientul doreşte să-si maximizeze venitul anual returnat; în acest caz cum vor fi investite fondurile?

5. Bryant's Pizza este un producător de pizza congelată. Compania are un profit de 1$ pentru fiecare pizza obişnuită produsă şi de 1.5$ pentru pizza specială. Fiecare pizza include o combinație de cocă cu un amestec de topping. In mod curent firma are 150 de livre(1 pound=1 livră=453g) de mixtură pentru cocă şi 50livre de amestec de topping. Pentru pizza obişnuită se folosesc o livră de cocă şi $\frac{1}{4}$ livre de amestec de topping în timp ce pentru pizza specială se folosesc o livră de cocă şi $\frac{1}{2}$ livre de amestec de topping. Bazându-ne pe istoricul vânzărilor Bryant's Pizza poate vinde cel puțin 50 de pizza obişnuite şi cel puțin 25 de pizza speciale.

   Care este cantitatea din cele două sortimente ce trebuie produsă pentru a maximiza profitul? Scrieți problema de programare liniară în forma standard. Găsiți soluțiile optimale Care sunt valorile şi care este interpretarea variabilelor surplus şi variabilelor de reducere?

6. Firmă X, ce vinde maşini second-hand a angajat un serviciu de marketing care să-i dezvolte o strategie de publicitate pentru maşinile sale. Firma de marketing a recomandat pentru campania promoțională spoturi publicitare atât la radio local cât şi la televiziunea locală şi anume:
   - cel puțin 30 de spoturi publicitare difuzate la radio şi tv
   - la radio să se difuzeze maximum 25 de spoturi publicitare ale firmei
   - numărul de spoturi publicitare la radio nu poate fi mai mic decât numărul de spoturi publicitare la tv.

   Postul local de televiziune a cerut 1200$ pentru un anunț publicitar, în timp ce postul local de radio a cerut 300$ pentru un anunț.

   Bugetul de publicitate al firmei X este de 25500$

   Firma de marketing consideră că un anunț televizat are în medie un rating de 600 persoane în timp ce un anunț la radio are în medie un rating de 200 persoane.

   Patronul firmei X doreşte o împărțire judicioasă a numărului de anunțuri la radio şi televiziune, pentru a maximiza numărul de persoane ce receptează această campanie publicitară.

   Determinați numărul recomandat de anunțuri la radio şi respectiv la tv..

III. Programare liniară-metoda simplex

1. Old Winery din Ilinois produce trei sortimente de vinuri germane: Heidelberg dulce, Heidelberg demi sec şi Heidelberg extra-sec, din două tipuri de struguri, A şi B. Cheltuilile de producție şi profitul sunrt prezentate în următorul tabel:

vinuri	struguri A	struguri B	zahăr (kg)	muncă (ore)	profit/litru
H-dulce	14	14	1	2	1$
H demisec	28	0	0.5	3	1.20$
H extrasec	0	28	0	1	2$

Ştiind că Old Winery are disponibili pentru săptămâna viitoare 2100 kg struguri A, 2100 kg struguri struguri B, 40 kg zahăr şi 225 ore de muncă, să stabilim ce cantităţi de vin va produce pentru a-si maximiza profitul. Verificaţi rezultatul obţinut folosind Matlab Interpretaţi variabilele de reducere:
Indicaţie:

x_1 - nr de litri de Hdulce; x_2 - nr de litri de Hdemisec, x_3 - nr de litri de H extrasec

$$\max: 1\cdot x_1 + 1.2\cdot x_2 + 2\cdot x_3$$
$$14x_1 + 28x_2 \le 2100$$
$$14x_1 + 28x_3 \le 2100$$
$$1\cdot x_1 + 0.5\cdot x_3 \le 40$$
$$2x_1 + 3x_2 + 1\cdot x_3 \le 225$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

```
>> f=[-1;-1.2;-2]
>> A=[14 28 0;14 0 28;1 0 0.5;2 3 1]
>> b=[2100;2100; 40;225]
>> lb=zeros(3,1)
>> [x,fval,exitflag,output] = linprog(f,A,b,[],[],lb)
Optimization terminated.
x =
    0.0000
   50.0000
   75.0000
fval =
 -210.0000
```

2. Firma X produce saci de plastic pentru uz casnic: saci de gunoi menajer de 60l saci de gunoi menajer de 90l şi saci pentru frunze şi iarbă de 100l. Procesul de fabricaţie constă în trei etape: tăierea, sigilarea şi ambalarea. Tabelul următor arată timpul de producţie necesar fiecărei operaţii pentru fiecare tip de sac şi timpul de producţie disponibil pentru fiecare operaţie în parte:

tipul de sac	timp tăiere sec/cutie	timp sigilare sec/cutie	timp ambalare sec/cutie
60l	2	2	3
90l	3	2	4
100l	3	3	5
timp disponobil	2ore	3 ore	4 ore

Profitul firmei este de 0.10$ pentru fiecare cutie cu saci de 60l, 0.15$ pentru fiecare cutie cu saci de 90l şi 0.20$ pentru cutia cu saci de 100l. Pentru a obţine profitul maxim care este producţia fiecărui tip de sac .

Rezolvaţi utilizând algoritmul simplex problemele 3-6 din paragraful al doilea. Verificaţi-vă rezultatele folosind Matlab