Teoria aşteptării- laborator

Model de aşteptare cu un singur server

1. În timpul zilei la un ATM (automat bancar care permite retragerea de numerar si alte tranzacţii bancare electronice) avem în medie 24 de clienţi pe oră, adică 0.4 clienţi pe minut,
   - Care este numărul mediu de clienţi sosiţi într-o perioadă de 5 minute?
     $\lambda = 5 \cdot 0.4 = 2$ clienţi în intervalul de 5 minute
   - Sosirile având o repartiţie Poisson, calculaţi probabilităţile ca într-o perioadă de 5 minute să sosească 0,1,2,sau 3 clienţi.
     $P(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2^x \cdot e^{-2}}{x!}$;

```
>>i=1;P(1)=exp(-2);
>> for i=2:4 P(i)=P(i-1)*2/(i-1);end
>> P
P =
 0.1353    0.2707    0.2707    0.1804
```

x	$P(x)$
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804

   - Dacă avem mai mult de 3 clienţi în fiecare perioada de 5 minute, vom avea întârzieri. Care este probabilitatea să apară întârzieri?
     P(apariţia întârzierilor) = $P(x > 3) = 1 - P(x \le 3) = 1 - 0.8571 = 0.1429$

     Timpii de service au o repartiţie exponenţială, cu rata de 36 clienţi pe oră, adică 0.6 clienţi pe minut: $P(\text{timp service} \le t) = 1 - e^{-\mu t}$

   - Care este probabilitatea ca timpul de service să fie mai mic egal cu 1 minut?
     $\mu = 0.6$ clienţi pe minut; $P(\text{timpul de service} \le 1) = 1 - e^{-0.6 \cdot 1} = 0.4512$
   - Care este probabilitatea ca timpul de service să fie mai mic egal cu 2minute?
     $P(\text{timpul de service} \le 2) = 1 - e^{-0.6 \cdot 2} = 0.6988$
   - Care este probabilitatea ca timpul de service să fie mai mare de 2minute?
     $P(\text{timpul de service} > 2) = 1 - 0.6988 = 0.3012$

   Situaţia prezentată este de fapt un model de aşteptare cu un singur server, $M/M/1/FCFS$..
   Calculaţi caracteristicile numerice ale modelului:
   - probabilitatea ca să nu existe clienţi în sistem este $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0.4}{0.6} = 0.3333$
   - numărul mediu de clienţi la rând este $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{(0.4)^2}{0.6 \cdot (0.6 - 0.4)} = 1.3333$

- numărul mediu de clienți în sistem este $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.3333 + \frac{0.4}{0.6} = 2$
- timpul mediu de aşteptare este $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.3333}{0.4} = 3.3333$ minute
- timpul mediu pe care un client îl petrece în sistem este

  $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 3.3333 + \frac{1}{0.6} = 5$ minute
- probabilitatea ca service-ul să fie ocupat (probabilitatea ca un client sosit sa aştepte pentru a fi servit) este $P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.4}{0.6} = 0.6667$,
- probabilitatea să fie n clienți în sistem este $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 = \left(\frac{0.4}{0.6}\right)^n \cdot 0.3333$
- Calculați probabilitatea să avem 0,1,2, sau 3 clienți în sistem; care este probabilitatea să fie mai mulți de 3 clienți în sistem?

n	P_n
0	0.3333
1	0.2222
2	0.1481
3	0.0988

. $P(n > 3) = 1 - P(n \le 3) = 1 - 0.8024 = 0.1976$

```
>> P0=1-l/m
>> Lq=(l.^2)/(m*(m-l))
>> L=Lq+l/m
>> Wq=Lq/l
>> W=Wq+1/m
>> Pw=l/m

 >> i=1;Ps(i)=l/m*P0;for i=2:3 Ps(i)=((l/m).^i).*P0;end
>> Ps
```

2. Într-o bibliotecă universitară, la biroul de informații sosesc în medie 10 cititori pe oră, pentru a cere asistență, sosirile având o repartiție Poisson. Timpii de service au o repartiție exponențială şi rata de service este de 12 cereri de asistență rezolvate pe oră.
   - Care este probabilitatea ca să nu existe cereri de asistență în sistem?

     $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{10}{12} = 0.1667$
   - Care este numărul mediu de cereri ce aşteaptă să fie rezolvate?

     $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{(10)^2}{12 \cdot (12 - 10)} = 4.1667$
   - Care este timpul mediu de aşteptare este $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.4167$ ore
   - Care este timpul mediu pe care un cititor îl petrece la biroul de informații (timpul de aşteptare plus timpul de service)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.5 \text{ ore=30minute}$$

- Care este probabilitatea ca un nou venit să aştepte pentru a fi ajutat?

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{12} = 0.8333,$$

Model de aşteptare cu mai multe servere

3. Un birou de taxe şi impozite are două ghişee de lucru cu publicul. Sosirile au o repartiție Poisson, cu o rată medie de 14 persoane pe oră, timpii de service au o repartiție exponențială, rata de service fiind de 10 clienți pe oră. pentru fiecare ghişeu.

- Calculați caracteristicile numerice ale modelului:

$$k = 2, \frac{\lambda}{\mu} = \frac{14}{10} = 1.4$$

- Probabilitatea ca să nu existe clienți în sistem:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2\mu}{2\mu - \lambda}\right)} = \frac{1}{1 + 1.4 + \frac{(1.4)^2}{2} \cdot \frac{20}{20-14}} = 0.1765;$$

- Numărul mediu de clienți din rând

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^k \lambda\mu}{(k-1)!(k\mu - \lambda)^2} \cdot P_0 = \frac{(1.4)^2 \cdot 14 \cdot 10}{(20-14)^2} \cdot 0.1765 = 1.3451$$

- Numărul mediu de clienți în sistem $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.3453 + \frac{14}{10} = 2.7451$
- Timpul mediu pe care un client îl petrece la coadă: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.3453}{14} = 0.0961$ ore
- Timpul mediu pe care un client îl petrece în sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0961 + \frac{1}{10} = 0.1961 \text{ ore}$$

- Probabilitatea de aşteptare este

$$P_w = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \left(\frac{2\mu}{2\mu - \lambda}\right) \cdot P_0 = \frac{(1.4)^2}{2} \cdot \frac{20}{20-14} \cdot 0.1765 = 0.5765$$

- Probabilitatea să fie un client în sistem

$$P_1 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1}{1!} \cdot P_0 = 1.4 \cdot 0.1765 = 0.2471$$

- Probabilitatea să fie cel puțin 2 clienți în sistem

$$P(n \geq 2) = 1 - P(n \leq 1) = 1 - 0.4236 = 0.5764$$

```
>>l=14;m=10; a=l/m;
>> P0=1/(1+a+a^2/2*(2*m/(2*m-l)))
>> Lq=a^2*l*m/(2*m-l)^2*P0
>> L=Lq+a
>> Wq=Lq/l
```

```
>> W=Wq+1/m
>> Pw=1/2*a^2*(2*m/(2*m-l))*P0
>> P1=a*P0
```

- Presupunem că s-a extins sistemul la trei ghişee. Calculați caracteristicile numerice ale acestui model.

- Probabilitatea ca să nu existe clienți în sistem:

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda/\mu}{1!}+\frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}+\frac{(\lambda/\mu)^3}{3!}\cdot\left(\frac{3\mu}{3\mu-\lambda}\right)} = \frac{1}{1+1.4+\frac{(1.4)^2}{2}+\frac{(1.4)^3}{6}\cdot\frac{30}{30-14}} = 0.2360$$

- Numărul mediu de clienți din rând:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^3\lambda\mu}{2!(3\mu-\lambda)^2}\cdot P_0 = \frac{(1.4)^3\cdot 14\cdot 10}{2(30-14)^2}\cdot 0.2360 = 0.1771$$

- Numărul mediu de clienți în sistem: $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.5771$
- Timpul mediu pe care un client îl petrece la coadă: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.1771}{14} = 0.0127$ ore
- Timpul mediu pe care un client îl petrece în sistem :
- $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0127 + \frac{1}{10} = 0.1127$
- Probabilitatea de aşteptare:

$$P_w = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\cdot\left(\frac{3\mu}{3\mu-\lambda}\right)\cdot P_0 = \frac{(1.4)^3}{6}\cdot\frac{30}{16}\cdot 0.2360 = 0.2024$$

```
>>P0=1/(1+a+a^2/2+a^3/6*(3*m/(3*m-l)))
>> Lq=a^3*l*m/(2*(3*m-l)^2)*P0
>> L=Lq+a
>> Wq=Lq/l
>> W=Wq+1/m
>> Pw=1/6*a^3*(3*m/(3*m-l))*P0
```

- Alegeți între cele două modele, astfel încât cel mult 25% dintre clienți să fie în situația de a aştepta, în coadă.
  În cazul a două ghişee probabilitatea de aşteptare este $P_w = 0.5764$, ceea ce înseamnă că 57,64% dintre clienți vor sta la rând, în timp ce în cazul a trei ghişee avem $P_w = 0.2024$, adică 20.24% dintre clienți vor sta la rând. Alegem modelul cu trei ghişee.

Formulele lui Little

4. La cabinetul unui dentist rata sosirii pacienților este de 2.8 pacienți pe oră. Doctorul poate trata în medie 3 pacienți pe oră. Studiind timpul de aşteptare s-a constatat că un pacient aşteaptă în medie 30 de minute înainte de a fi consultat de medic.
   - Care este rata medie a sosirilor şi respectiv rata medie a service-ului în termeni de pacienți pe minut?
     $\lambda = 2.8, \mu = 3, W_q = 30$ minute

rata medie a sosirilor: $\lambda = \frac{2.8}{60} = 0.0466$ pacienți pe minut

rata medie a service-ului $\mu = \frac{3}{60} = 0.05$ pacienți pe minut

- Care este numărul mediu de pacienți în sala de aşteptare?

  $L_q = \lambda \cdot W_q = 0.0466 \cdot 30 = 1.4$

- Dacă un pacient intră în sala de aşteptare la ora 10.10, la ce oră va părăsi cabinetul?

  $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 30 + \frac{1}{0.05} = 50$ minute, deci pacientul va părăsi sistemul la ora 11.

5. Într-un service auto există un singur magazioner, care dă mecanicilor auto piesele de care au nevoie pentru fiecare reparație în parte. La acest depozit vin în medie 4 mecanici pe oră. În medie, magazionerul alocă fiecărui mecanic 6 minute, în care primeşte comanda şi găseşte piesele necesare.
   - Fiecare mecanic aşteaptă în medie 4 minute, ca magazionerul sa-i preia comanda. Calculați numărul mediu de mecanici la rând (L_q), numărul mediu de mecanici în depozit(L) şi timpul mediu petrecut de un mecanic în depozit (W).

     Vom exprima λ şi μ în termeni de „mecanici pe minut”

     $\lambda = \frac{4}{60} = 0.0667$ mecanici pe minut; $\mu = \frac{1}{6} == 0.1667$ mecanici pe minut

     $L_q = \lambda \cdot W_q = 0.0667 \cdot 4 = 0.2668$ (mecanici)

     $W = 4 + 1/0.1667 = 10$ minute

     $L = \lambda W = 0.0667 \cdot 10 = 0.6667$ (mecanici)
   - S-a experimentat varianta în care sunt doi magazioneri şi acum în medie un mecanic avea de aşteptat în medie 1 minut. Calculați în acest caz numărul mediu de mecanici la rând, numărul mediu de mecanici în depozit şi timpul mediu petrecut de un mecanic în depozit.

     $L_q = \lambda \cdot W_q = 0.0667 \cdot 1 = 0.0667$ (mecanici)

     $W = 1 + 1/0.1667 = 7$ minute

     $L = \lambda W = 0.0667 \cdot 7 = 0.4669$ (mecanici)
   - Dacă salariul unui mecanic pe oră este de 20$ şi salariul unui magazioner este de 12 $ pe oră, care dintre cele două modele este mai economic?

     - modelul cu un server:

       costul total = $20 \cdot 0.6667 + 12 \cdot 1 = 25.33\$$

     - modelul cu două servere:

       costul total = $20 \cdot 0.4669 + 12 \cdot 2 = 33.34\$$

Modelul M/G/1

6. Intr-un atelier mecanic sosesc în medie câte 2 comenzi de sudură pe ziua de lucru de 8 ore, după o repartiție Poisson. Timpii de service pentru sudură au o repartiție normală cu o medie de 3.2 ore şi o deviație standard de 2 ore. Ştiind că există un singur sudor, răspundeți la următoarele întrebări:
   - Care este numărul mediu de comenzi pe oră?

     $\frac{2}{8} = 0,25$ comenzi pe oră
   - Care este rata medie de service pe oră?

$$\frac{1}{3.2} = 0.3125 \text{ pe oră}$$

- Care este numărul mediu de comenzi ce aşteaptă să fie onorate?

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{0.25^2 \cdot 2^2 + \left(\frac{0.25}{0.3125}\right)^2}{2 \cdot \left(1 - \frac{0.25}{0.3125}\right)} = 2.225$$

- Care este timpul mediu de aşteptare la rând?

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.225}{0.25} = 8.9 \text{ ore}$$

- Care este timpul mediu din clipa în care soseşte o comandă şi până în momentul în care părăseşte service-ul?

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 8.9 + \frac{1}{0.3125} = 12.1 \text{ ore}$$

- Care este în procente timpul în care sudorul este ocupat?

$P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.25}{0.3125} = 0.80$, ceea ce înseamnă că 80% din timp sudorul este ocupat.

Modele de aşteptare cu mai multe servere, care nu admit rând de aşteptare

7. O firmă de taxiuri are doi dispeceri care primesc comenzile pentru taxiuri şi trimit taxiul la adresa indicată. Dacă amândoi dispeceri sunt ocupați, linia telefonică este ocupată şi se revine mai târziu sau se apelează altă firmă de taxiuri. Apelurile telefonice au o repartiție Poisson cu o medie de 40 de apeluri pe oră. Fiecare dispecer rezolvă în medie 30 de apeluri pe oră.
   - Care este procentual timpul în care ambii dispeceri sunt liberi?

     $\lambda = 40, \mu = 30$

     $$P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 \cdot \frac{1}{0!}}{\sum_{i=0}^{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = \frac{1}{1 + \frac{40}{30} + \left(\frac{40}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = 0.3103, \qquad 31.04\%$$

   - Care este procentual timpul în care ambii dispeceri sunt ocupați?

     $$P_2 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!}}{\sum_{i=0}^{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = \frac{0.8888}{3.2221} = 0.2759, \qquad 27.58\%$$

   - Care este probabilitatea ca să ai semnal de „ocupat”, dacă sunt folosiți 2,3 sau 4 dispeceri?

     $$P_2 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!}}{\sum_{i=0}^{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = \frac{0.8888}{3.2221} = 0.2759, \qquad 27.58\%$$

$$P_3 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!}}{\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = \frac{0.3951}{3.2221+0.3951} = 0.1092\,, \qquad 10.92\%$$

$$P_3 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!}}{\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \frac{1}{i!}} = \frac{0.3951}{3.2221+0.3951+0.1317} = 0.0351\,,\ 3.51\%$$

```
>>l=40;m=30;a=l/m;s=1+a+a^2/2;
>> P0=1/s
>> P2=a^2/2/s
>> P3=a^3/6/(s+a^3/6)
>> P4=a^4/24/(s+a^3/6+a^4/24)
```

- Dacă se doreşte ca cel mult un sfert dintre clienți să găsească serverul ocupat, de câți dispeceri este nevoie?
  Este nevoie de 3 dispeceri, caz în care 10.92% din clienți primesc semnalul de ocupat.

Modele de aşteptare cu populație finită

8. Un depozit are 10 camioane, care aduc marfa de la diverse fabrici şi livrează marfa la magazinele cu care are contracte. Fiecare camion vine la depozit de două ori în ziua de lucru de 8 ore, astfel rata sosirii unui camion este de 0.25 camion/oră. Rata medie a service-ului ce constă în descărcarea, respectiv încărcarea mărfii, este de 4 camioane pe oră. Ştiind că sosirile au o repartiție Poisson, iar timpii de service au o repartiție exponențială calculați următoarele caracteristici numerice:
   - probabilitatea de a nu fi niciun camion în zona de încărcare /descărcare a mărfii

$$N = 10, \lambda = 0.25, \mu = 4, \frac{\lambda}{\mu} = 0.0625$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1 + 10\cdot 0.0625 + 90\cdot(0.0625)^2 + 720\cdot(0.0625)^3 +$$

$$+5040\cdot(0.0625)^4 + 30240\cdot(0.0625)^5 + 151200\cdot(0.0625)^6 + 604800\cdot(0.0625)^7 +$$

$$+1814400\cdot(0.0625)^8 + 3628800\cdot(0.0625)^9 + 3628800\cdot(0.0625)^{10} = 2.2698$$

$$P_0 = \frac{1}{2.2698} = 0.4406$$

   - numărul mediu de camioane ce aşteaptă operațiile de încărcare /descărcare

$$L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}\cdot(1-P_0) = 0.4895$$

   - numărul mediu de camioane ce se află în sectorul de încărcare /descărcare

$$L = L_q + (1 - P_0) = 1.0490$$

- timpul mediu de aşteptare pentru începerea procesului de încărcare /descărcare

$$W_q = \frac{L_q}{(N-L)\cdot\lambda} == 0.2008 \text{ ore}$$

- timpul mediu de aşteptare în sistem

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.4508$$

```
>> suma =1;x=1;a=l/m;
>> for n=1:10 x=(11-n)*a*x;suma=suma+x;end
>> suma
>> P0=1/suma
>> Lq=10-(l+m)/l*(1-P0)
>> L=Lq+1-P0
>> Wq=Lq/((10-l)*l)
>> W=Wq+1/m
```

- care este costul operaţiilor pe oră, dacă 50$ este costul pe oră pentru fiecare camion şi 30$ pe oră este costul rampei de încărcare /descărcare?

  costul total = $50\$ \cdot L + 30\$ == 82.45\$$
- considerând că s-ar deschide a doua rampă de încărcare /descărcare, care ar costa încă 30$ pe oră cu cât ar trebui redus numărul mediu de camioane ce se află în sectorul de încărcare /descărcare, pentru a face deschiderea celei de a doua rampe profitabilă?

  costul total = $(50 \cdot L + 2 \cdot 30)\$ = 82.45\$ \Rightarrow L = 0.4490$ camioane

  Numărul mediu de camioane ce se află în sectorul de încărcare /descărcare ar trebui să nu depăşească 0.4490 camioane.
- E cazul să se extindă la două rampe? explicaţi.

  Fiecare camion vine de două ori pe zi la depozit, ceea ce înseamnă că aşteaptă $2 \cdot 0.2008 = 0.4016$ ore, adică aproximativ 24 minute pe zi.

  Dacă se deschide încă o rampă de încărcare /descărcare, costul rampelor va fi de $60\$$ pe oră. Dacă s-ar reduce substanţial timpul de aşteptare, costul pe oră ar putea fi mai mic decât cel actual.