Noţiuni introductive

2009-2010

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro

Spațiu liniar real

Un grup comutativ $(E,+)$ se numeşte *spațiu liniar* (*vectorial*) *real* dacă există o lege de compoziție externă „ $\cdot$ ", care asociază fiecărei perechi $(\alpha, x), \alpha \in \mathbf{R}, x \in E$ elementul $\alpha \cdot x \in E$, lege ce verifică următoarele axiome

(V_1) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \ \forall x, y \in E$

(V_2) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \ \forall \alpha, \ \beta \in \mathbf{R}, \forall x \in E$

(V_3) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \ \forall x \in E$

(V_4) $1 \cdot x = x, \ \forall x \in E$, unde 1 este elementul unitate din **R**.

Elementele spațiului liniar E se numesc *vectori*.

Exemple

- Mulțimea **R** a numerelor reale este un spațiu liniar real față de adunarea și înmulțirea obișnuită.

- *Spațiul n-dimensional real* este mulțimea **R**^{n} = $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad x_i \in \mathbf{R}\}$

Definim adunarea a două elemente din **R**^{n}:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

respectiv înmulțirea cu scalar a unui element din **R**^{n}:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n),\ \alpha \in \mathbf{R}$$

Elementul neutru fața de adunare este $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$.

R^n înzestrat cu cele două operații este un spațiu liniar real.

În modelarea matematică a situațiilor din viața reală, identificăm atributele (caracteristicile) unui obiect cu componentele unui vector:

- Pentru a decide dacă un pacient are sau nu cancer hepatic, studiile clinice arată că se iau în considerare anumite enzime serice cele mai importante din punct de vedere clinic fiind: alkaline phosphatase (FA), g-glutamyl transferase (gGT), leucine amino peptidase (LAP) și colesterol (C). Tabelul următor prezintă valorile acestor enzime în cazul a 2 pacienți:

	FA	gCT	LAP	C
P1	162	255	74	258
P2	422	488	183	292

Astfel celor doi pacienți li se asociază vectorii:

$P_1 = (162, 255, 74, 258)$ și $P_2 = (422, 488, 183, 292)$

și în problema de modelare vom lucra cu acești vectori.

- În baza de date **Iris flower** (R. A. Fisher 1936) florile de Iris au patru atribute: lățimea petalelor (PW), lungimea petalelor (PL), lățimea sepalelor (SW) și lungimea sepalelor (SL). Tabelul următor prezintă atributele a trei iriși:

	PW	PL	SW	SL
I1	2	14	33	50
I2	2	13	45	28
I3	24	56	31	67

Baza de date constă în 50 de exemplare din fiecare tip de floare de Iris: Iris setosa, Iris verginica și Iris versicolor și este foarte bine structurată, fiind folosită actualmente pentru verificarea unor noi algoritmi de clasificare. Celor 150 de exemplare li se asociază 150 de vectori din $\mathbf{R}^4$ și astfel:

$$I_1 = (2, 14, 33, 50)\,,\; I_2 = (2, 13, 45, 28)\,,\; I_3 = (24, 56, 31, 67)$$

- *Matricele cu* m linii şi n coloane $M_{m,n}(\mathbf{R})$ formează un spaţiu vectorial real.

În acelaşi context al modelării, considerând n obiecte cu p caracteristici, putem reprezenta aceste date sub forma unei matrice **X**, cu n linii şi p coloane.
Notaţia x_i^k utilizată *se* referă la a *i*-a caracteristică observată a obiectului numărul k din baza de date.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_i^1 & \dots & x_p^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^k & \dots & x_i^k & \dots & x_p^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & x_i^n & \dots & x_p^n \end{pmatrix}$$

Astfel datele cu pacienții de la gastroenterologie sunt reprezentate de matricea

$$G = \begin{pmatrix} 162 & 255 & 74 & 258 \\ 422 & 488 & 183 & 292 \end{pmatrix}$$

în timp ce datele despre irişi sunt reprezentate de

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 33 & 50 \\ 2 & 13 & 45 & 28 \\ 24 & 56 & 31 & 67 \end{pmatrix}$$

Baza unui spațiu liniar

Un sistem de vectori B $=\{e_1,\ldots,e_n\}$ este o *bază* a lui E dacă:

(B_1) B este un sistem de generatori ai spațiului vectorial E, adică orice vector $x\in E$ este o combinație liniară de vectorii $e_1,e_2,\ldots e_n$ (există numerele reale $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ astfel încât $x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot e_k$)

(B_2) B este un sistem de vectori liniar independenți adică:

relația $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot e_k=\theta_E$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ implică $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$.

Să rețin că dacă B $=\{e_1,\dots,e_n\}$ este o *bază* a lui E, elementul $x \in E$ se scrie în mod unic $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot e_k$, numerele reale $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ numindu-se *coordonatele* vectorului x în baza B.

Numărul de elemente ale bazei unui spațiu vectorial reprezintă dimensiunea acestui spațiu.

Exemple

- În $\mathbf{R}^n$, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ unde $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)$ ..., $e_n = (0,0,\ldots,1)$ formează o bază, numită *baza canonică*. Astfel:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot (1,0,\ldots,0) + x_2 \cdot (0,1,\ldots,0) + \ldots + x_n \cdot (0,0,\ldots,1) .$$

Uzual, un element din $\mathbf{R}^2$ se notează (x, y), $x, y \in \mathbf{R}$ în timp ce un element din $\mathbf{R}^3$ se notează (x, y, z), $x, y, z \in \mathbf{R}$.

În teoria economică se interpretează spațiul $\mathbf{R}^n$, ca fiind *spațiul complexelor de bunuri de consum*.. Dacă fiecare *bun de consum* este caracterizat de un anumit indice $k = 1,2,..n$, atunci un *complex de bunuri* este un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, unde componenta x_k reprezintă cantitatea în care se găseşte *bunul de consum k*.
Cantitatea *unitate* a *bunului de consum k* este $e_k = (0,\dots,1,\dots,0)$

Produs scalar

Fie E un spațiu vectorial real. Se numește *produs scalar* pe E o aplicație $\langle \, , \, \rangle : E \times E \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ care satisface următoarele proprietăți:

(S_1) $\langle \, , \, \rangle$ este biliniară:

$$\langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, z \rangle = \alpha \cdot \langle x, z \rangle + \beta \cdot \langle y, z \rangle \text{ și}$$

$$\langle x, \alpha \cdot y + \beta \cdot z \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle + \beta \cdot \langle x, z \rangle, \ \forall x, y, z \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

(S_2) $\langle \, , \, \rangle$ este pozitiv definită: $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E$ și $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta_E$

(S_3) $\langle \, , \, \rangle$ este simetrică: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in E$.

Exemple

- Pe **R**, considerat ca spațiu vectorial real, produsul scalar va fi definit ca produsul uzual.

- Pe **R**ⁿ, considerând elementele $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definim *produsul scalar euclidian* $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$.

- Calculați produsul scalar al vectorilor $x = (1, 3, -2, \sqrt{3})$ şi $y = (-4, 1, 2, 0)$

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot 0 = -5$$

În teoria economică un *sistem de prețuri* este vectorul $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, unde p_k este prețul unitar al *bunului de consum k*.

Prețul *complexului de bunuri* $x \in \mathbf{R}^n$, în raport cu sistemul de prețuri p, este dat de formula $\langle p, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k$.

- În compoziția chimică a unui medicament avem 4 substanțe A, B, C, D în cantitățile x_A, x_B, x_C, x_D și astfel medicamentul poate fi reprezentat de vectorul $x = (x_A, x_B, x_C, x_D)$. Prețul unitar pentru fiecare substanță în parte fiind p_A, p_B, p_C, p_D, putem introduce sistemul de prețuri $p = (p_A, p_B, p_C, p_D)$ care reprezintă valoarea materiilor prime din medicamentul considerat. Prețul medicamentului va fi:

$$\langle p, x \rangle = p_A \cdot x_A + p_B \cdot x_B + p_C \cdot x_C + p_D \cdot x_D$$

Inegalitatea Cauchy-Scwarz

- Într-un spațiu liniar real E înzestrat cu produs scalar avem:

$$\left|\langle x, y\rangle\right| \le \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle},\ \forall x, y \in E$$

Această inegalitate în $\mathbf{R}^n$ este un rezultat cunoscut din liceu:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2},\ \forall\, x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$$

Norma.
Spațiu liniar normat

Aplicația $\| \ \|$ definită pe un spațiu liniar real E se numește *normă* dacă verifică următoarele axiome:

(N_1) $\quad \|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$; $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = \theta_E$

(N_2) $\quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$

(N_3) $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Perechea $(E, \| \ \|)$ este un *spațiu liniar normat*.

Exemple

- Norma definită pe **R** este $\|x\| = |x|,\ x \in \mathbf{R}$;

- Pe **R**^{n} se pot defini mai multe norme şi anume:

  - $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (norma euclidiană);
  - $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
  - $\|x\|_\infty = \max\{|x_k|, 1 \le k \le n\}$.

Un spațiu liniar real cu produs scalar este un spațiu liniar normat deoarece:

- Dacă $\langle \, , \, \rangle$ este un produs scalar pe spațiul liniar real E, atunci expresia $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ definește o normă pe E.

În $\mathbf{R}^n$, norma corespunzătoare produsului scalar euclidian este dată de:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,, \text{ unde } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Norme echivalente

Două norme $\| \ \|_1$ şi $\| \ \|_2$ pe un spaţiu vectorial *E*, se numesc *echivalente*, dacă există constantele reale *a* şi *b*, astfel încât;

$$\forall x \in E \text{ avem } \quad a \cdot \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b \cdot \|x\|_1$$

- Norma euclidiană, $\| \ \|_1$ şi $\| \ \|_\infty$ definite anterior pe $\mathbf{R}^n$ sunt echivalente, deoarece pentru un $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ avem:

$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \|x\|_1 \le \sqrt{n} \cdot \|x\| \le n \cdot \|x\|_\infty$$

Spațiu metric

Spațiul metric este o pereche formată dintr-o mulțime oarecare, nevidă, X și o aplicație $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ numită *metrică* sau *distanță*, aplicație ce verifică următoarele axiome:

(d_1) $\forall x, y \in X$ avem $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$

(d_2) $\forall x, y \in X$ avem $d(x, y) = d(y, x)$

(d_3) $\forall x, y, z \in X$ avem *inegalitatea triunghiului:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Exemple

- Considerând o mulțime oarecare nevidă X, definim aplicația

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

Se verifică imediat că perechea (X,d) este un spațiu metric.

- Pe $\mathbf{R}$ se definește aplicația $d: \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$, $d(x,y)=|x-y|$, care este o metrică.

- $(\mathbf{R}^2, d)$, unde $d: \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}_+$, $d((x,y),(a,b))=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ este un spațiu metric.

Spațiile liniare normate sunt un caz particular de spații metrice:

- Un spațiu liniar normat $(E, \| \|)$ este un spațiu metric, aplicația $d : E \times E \rightarrow \mathbf{R}_+$ definită de $d(x, y) = \|x - y\|$ fiind o metrică.

Exemple

Folosind acest rezultat se pot defini următoarele metrici pe $\mathbf{R}^n$:

- $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ (distanța euclidiană);
- $d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} | x_k - y_k |$ (distanța *Manhattan*);
- $d_\infty(x, y) = \max_{1 \le k \le n} | x_k - y_k |$ (distanța Cebâșev).

Bila deschisă

Într-un spațiu metric (X,d) *bila deschisă* de centru $x_0 \in X$ şi rază r este mulțimea:

$$B(x_0, r) = \{x \in X,\ d(x, x_0) < r\}$$

Exemple

- În spațiul (X, d), prezentat anterior avem:

$$B(x_0,1)=\{\,x\in X, d(x,x_0)<1\}=\{x_0\}$$
$$B(x_0,2)=\{x\in X, d(x,x_0)<2\}=X\,.$$

- În (**R**, *d*) bila deschisă este

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R},\ |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)\ ,$$

în timp ce în ($\mathbf{R}^2$, *d*) avem:

$$B((a, b), r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ d((x, y), (a, b)) < r\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r\}\ ,$$

adică discul deschis de centru (a, b) şi rază *r*.

- Într-un spațiu liniar normat $\left(E, \|\ \|\right)$ *bila deschisă* de centru $x_0 \in E$ şi rază r este mulțimea $B(x_0, r) = \left\{x \in E,\ \|x - x_0\| < r\right\}$.

Clustering

În *Data Mining* **clusterizarea** este un proces de organizarea a obiectelor, care sunt asemănătoare (similare) dintr-un anumit punct de vedere. *Cluster-ul* este o mulțime de obiecte asemănătoare între ele și diferite de obiectele aparținând altui cluster.

Simplificând, în cazul datelor de la gastroenterologie putem spune că vectorii corespunzători pacienților cu cancer hepatic se afla în bila deschisă de centru $C_1(356,\ 350,\ 134,\ 228)$ în timp ce vectorii corespunzători pacienților ce nu au cancer hepatic sunt în bila deschisă de centru $C_2(184,\ 203,\ 95,\ 189)$. Nu se specifică raza bilelor!

Pentru a decide ce diagnostic au cei doi pacienți prezentați anterior calculăm $d(P_i, C_j), i, j \in \{1,2\}$:

$$d(P_1, C_1) = \sqrt{(165-356)^2 + (255-350)^2 + (74-134)^2 + (258-228)^2} = 223,62$$

$$d(P_1, C_2) = \sqrt{(165-184)^2 + (255-203)^2 + (74-95)^2 + (258-189)^2} = 90,92$$

Deoarece $d(P_1, C_2) < d(P_1, C_1)$ pacientul P_1 va aparține bilei de centru C_2.

De reținut:

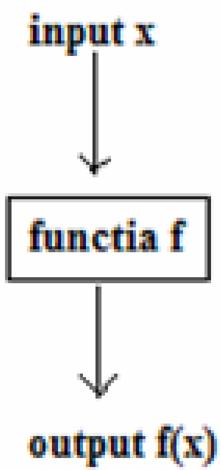
- Definiția spațiului liniar real; noțiunea de bază a unui spatiu liniar.
- Definiția produsului scalar.
- Definiția normei si a spațiului liniar normat
- Definiția spațiului metric
- Un spațiu liniar real normat este un spațiu metric.
- Definiția bilei deschise.

Tema

- Demonstrați că aplicația $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ este o normă pe $\mathbf{R}^n$.
- Pentru vectorii $x = (-1, 2, -5)$ și $y = (0, -4, 10)$ calculați normele studiate, produsul lor scalar și distanțele dintre aceștia.
- În $\mathbf{R}^2$ desenați bila cu centru în origine și de rază 2 în cazul celor trei distanțe definite.

Funcții

Funcțiile joaca un rol fundamental în matematica, științe, inginerie, economie.
Funcția este caracterizată de faptul că asociază un unic „output" fiecărui „input" admisibil
și o putem descrie metaforic ca o mașină sau o „black box" care transformă input-ul in output



Matematic, a defini o *funcție* (*aplicație*) f de la mulțimea A la mulțimea B înseamnă a asocia fiecărui element $x \in A$ un element unic determinat din B, notat $f(x)$, numit valoarea funcției f în x. (G.L.Dirichlet și N.I Lobacevski).

Se scrie $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$.

Mulțimea A este domeniul de definiție, iar B domeniul de valori ale lui f.

Două funcții $f : A \to B$, $f_1 : A_1 \to B_1$ sunt *egale* dacă: $A = A_1$, $B = B_1$ și $\forall x \in A$ avem $f(x) = f_1(x)$

Vom întâlni următoarele tipuri de funcții:

- *funcții reale de variabilă reală*: $f : A \to \mathbf{R}$, unde $A \subset \mathbf{R}$, funcții ce au fost studiate în liceu;

- *funcții reale de mai multe variabile reale*: $f : A \to \mathbf{R}$, unde $A \subset \mathbf{R}^n$

Exemple

- $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ funcție definită pe $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
- $f(x, y, z) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$ funcție definită pe $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

- *funcții vectoriale de variabilă reală* $f : A \to \mathbf{R}^m$, unde $A \subset \mathbf{R}$, date de

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in A$$

unde $f_k : A \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le m$; funcțiile f_k se numesc *componentele* lui *f*.
O funcție ce ia valori în $\mathbf{R}^m$ este de fapt un *m-uplu* de funcții reale de variabilă reală. $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Exemple:

$f : [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$ definită de $f(t) = \big((1+\cos t)\cdot\cos t, (1+\cos t)\cdot\sin t\big)$

$f : [0,10\pi] \to \mathbf{R}^3$ definită prin $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$;

- *funcții vectoriale de mai multe variabile reale* $f : A \to \mathbf{R}^m$, unde $A \subset \mathbf{R}^n$, date de

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in A,$$

unde $f_k : A \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le m$.

Exemple:

- $f(x, y) = (x + y, x \cdot y, x^2 + y^2)$ este o funcție cu valori în $\mathbf{R}^3$ și al cărei domeniu de definiție este $\mathbf{R}^2$

$f(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ este o funcție ce ia valori în $\mathbf{R}^3$ și al cărei domeniu de definiție este $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\} = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Şir de elemente

Un *şir de elemente* într-o mulţime *E* este o funcţie $f : \mathbf{N} \to E$; termenul general al şirului este $a_n = f(n)$.

Exemple

- $a_n = \sqrt[n]{2},\ n \geq 2$
- $(x_n, y_n) = \left(n \cdot (\sqrt[n]{5} - 1), \dfrac{n+1}{3^n} \right),\ n \geq 1$

Şir de funcții

A şi B fiind două mulțimi fixate, notăm cu $Hom(A, B)$ familia tuturor funcțiilor $f : A \to B$.

O aplicație $f : \mathbf{N} \to Hom(A, B)$, $f(n) = f_n$ se numeşte *şir de funcții.*

Exemple

$A = (-1, 1]$, $B = \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$;

$A = B = \mathbf{R}$, $g_n(x) = \dfrac{e^{nx} - 10}{x^2 \cdot e^{nx} + 1}$, $n \geq 1$.

Costul unei producții

În domeniul economic putem defini *costul* unei producții ca funcție de volumul acesteia. Uzual **costul** este definit ca fiind suma costurilor fixe cu costurile variabile. Costurile fixe nu depind de volumul producției în timp ce costurile variabile sunt funcții de volumul producției.

- De exemplu, pentru o linie de producție costul fix este de 4000lei.

Pentru unitatea de produs materialele folosite şi muncă depusă însumează 20lei.

Astfel $C(x)$ costul total de producție a x unități este: $C(x) = 4000 + 20 \cdot x$.

Funcție compusă

Considerând $f : A \to B_1$ și $g : B \to C$ cu $B_1 \subset B$, definim *funcția compusă* $g \circ f : A \to C$ prin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \; x \in A$$

Funcție surjectivă

Funcția $f: A \to B$ este *surjectivă* dacă pentru oricare $y \in B$ există $x \in A$, astfel încât $y = f(x)$.

- Pentru A și B două mulțimi nevide, definim *prima* și respectiv *a doua proiecție a mulțimii* $A \times B$, ca fiind funcțiile:

$$pr_1 : A \times B \to A,\ pr_1(a,b) = a$$
$$pr_2 : A \times B \to B,\ pr_2(a,b) = b$$

Astfel pentru un $a \in A$, arbitrar ales există elementele $(a,b) \in A \times B$, $b \in B$ pentru care $pr_1(a,b) = a$, deci prima proiecție a mulțimii $A \times B$ este o funcție surjectivă.

Funcție injectivă

O funcție $f : A \to B$ este *injectivă* dacă pentru $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, arbitrar aleși, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Pe baza echivalenței logice $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$, putem justifica injectivitatea lui f verificând dacă pentru $x_1, x_2 \in A$, oarecare, cu proprietatea $f(x_1) = f(x_2)$, avem $x_1 = x_2$.

- *Considerând o funcție oarecare* $f : A \to B$, construim funcția injectivă $g : A \to A \times B$ definită de $g(x) = (x, f(x))$.

Funcție bijectivă

Funcția $f : A \to B$ este *bijectivă* (*bijecție*) dacă este simultan injectivă și surjectivă (se spune că f stabilește o *corespondență biunivocă* de la A la B).

Dacă A este o mulțime nevidă și $B = \{b\}$, definim funcția $f : A \to A \times B$ prin $f(x) = (x, b)$, funcție ce este bijectivă.

Inversa unei funcții

Dacă funcția f este bijectivă, atunci putem defini *inversa* f^{-1} a lui f, ca fiind funcția

$$f^{-1} : B \to A,\ y \mapsto x,$$

x fiind unicul element din A, astfel încât $y = f(x)$.

Avem egalitățile:

$f \circ f^{-1} = 1_B$, unde $1_B : B \to B$, $1_B(y) = y$

$f^{-1} \circ f = 1_A$, unde $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$

Imaginea directă a unei mulțimi printr-o funcție

Fie $f : A \to B$; oricare ar fi submulțimea $A_1 \subset A$, submulțimea lui B

$$f(A_1) = \{y \in B \mid \exists x \in A_1 \text{ astfel încât } y = f(x)\}$$

se numește *imaginea directă* a lui A_1 prin f.

Exemple

- Calculați $f(\mathbf{R})$ în cazul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vom construi tabelul de variație al funcției date:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{(-x)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-2$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{x\cdot(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2-x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

x	$-\infty$			2			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\searrow$	2

Se observă că $f(\mathbf{R}) = [-2, \sqrt{5})$

- Determinați $f((0,e^4]\ )$ pentru funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left(\frac{-\infty}{0^+}\right)=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\cdot\sqrt{x}}$$, din $f'(x)=0$ obținem $x=e^2$.

x	0			e^2			e^4
$f'(x)$		+	+	0	-	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{4}{e^2}$

Astfel $f((0,e^4]\,) = (-\infty, \frac{2}{e}]$

În cazul unei funcții reale de variabila reală, $f(A_1)$ reprezintă proiecția pe axa Oy a graficului restricției funcției f la A_1 .

Putem spune că funcția $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă $f(A) = B$

Graficul funcției $f : A \to B$ este mulțimea:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$$

De reținut

- Definiția funcției
- Funcții reale - de variabilă reală,
  - de mai multe variabile reale
- Funcții vectoriale - de variabilă reală,
  - de mai multe variabile reale
- Funcție bijectivă, inversa unei funcții
- Imaginea unei mulțimi printr-o funcție
- Graficul unei funcții

Temă

- Determinați multimile $f_i(A_i),\ i \in \{1, 2\}$ dacă

$$f_1(x) = \frac{x}{2x^2+1}, \quad A_1 = (0, \infty)$$

$$f_2(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}, \quad A_2 = \mathbf{R}$$