Şiruri

2009-2010

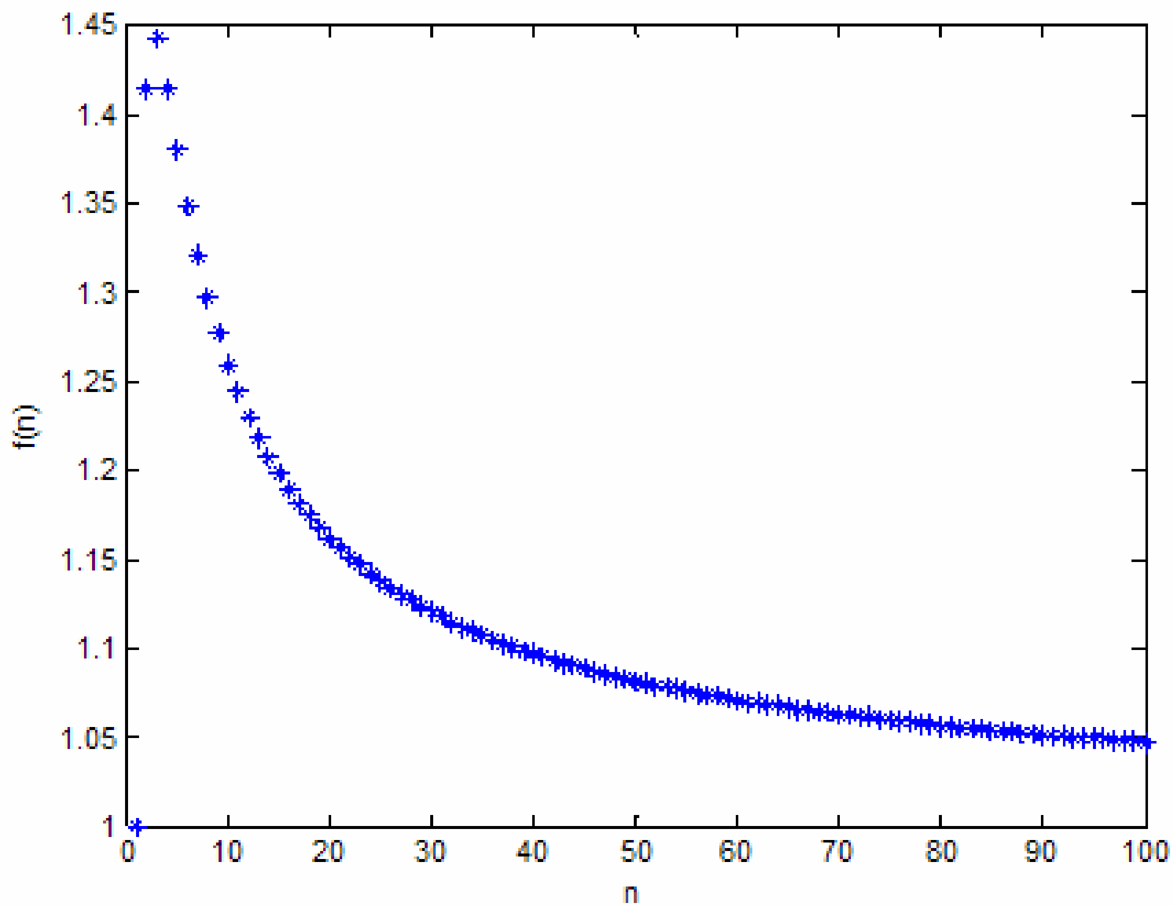
Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro

Şir de elemente

Un *şir de elemente* în X , unde (X,d) este spatiu metric, este o funcție $f:\mathbf{N}\to X$;
termenul general al şirului este $x_n = f(n)$.

Exemplu

- Prezentăm primii 100 de termeni ai şirului $x_n = \sqrt[n]{n},\ n \geq 1$



Şir convergent

În spaţiul metric (X, d), un şir $(x_n)_n$ este *convergent* dacă există $x \in X$ cu proprietatea:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon \text{ avem } d(x_n, x) < \varepsilon .$$

Definiția șirului convergent poate fi scrisă cu ajutorul bilelor, și anume:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \ \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon \ \text{ avem } x_n \in B(x, \varepsilon).$$

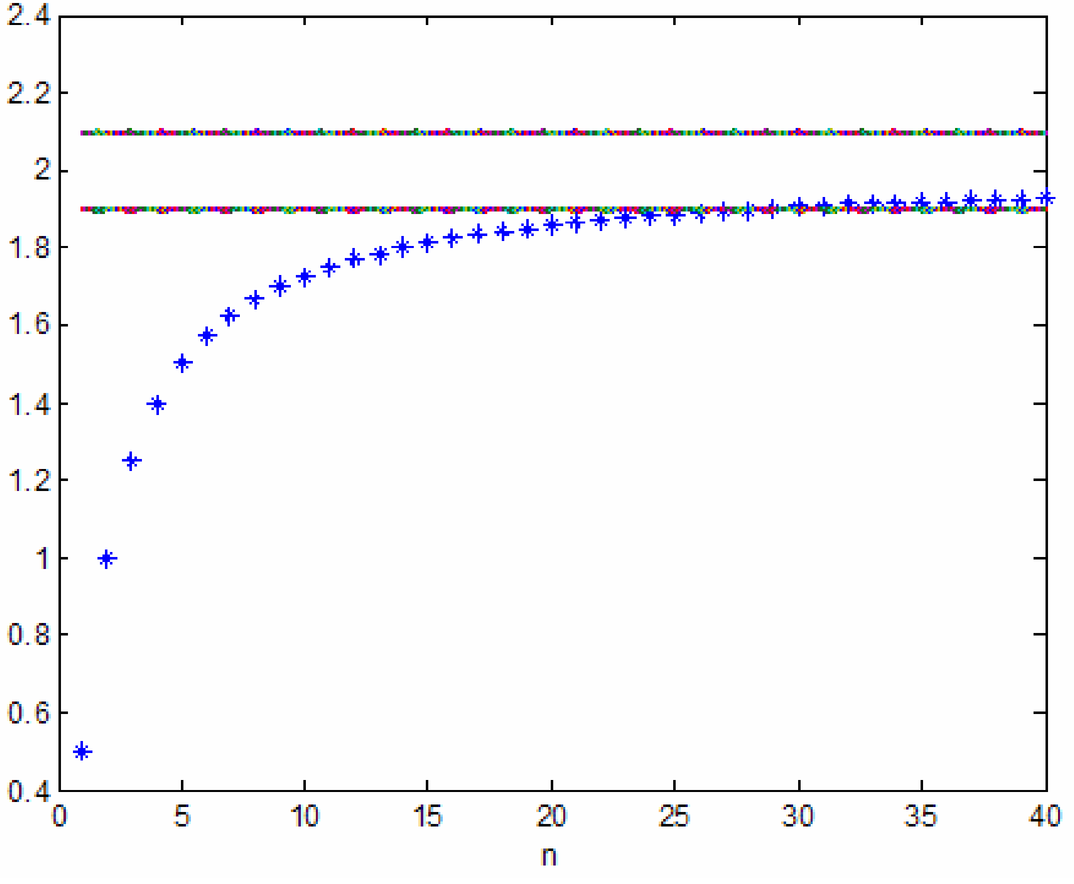
Astfel, oricât de mică ar fi raza unei bile deschise cu centru în $x \in X$, există un rang (care depinde de mărimea razei), începând de la care toți termenii șirului se află în bila respectivă.

Exemple

- Să calculăm câți termeni ai șirului $x_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$, $n \geq 1$ se află în afara intervalului $(1.9, 2.1)$. Reamintim că acest interval este bila de centru 2 și rază 0.1 din **R**. Având $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$ putem utiliza definiția șirului de numere reale convergent în cazul $\varepsilon = 0.1$. Determinăm rangul începând de la care avem inegalitatea $\left|\dfrac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \dfrac{1}{10}$ și anume:

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow n > 27$$

ceea ce înseamnă că în afara intervalului considerat avem 27 termeni ai șirului.



2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0
5
10
15
20
25
30
35
40
n

- Să calculăm câţi termeni ai şirului $\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)_n \subset \mathbf{R}^2$ se află în afara bilei cu centru în origine şi de rază $\frac{1}{100}$.

Deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0)$, folosind definiţia limitei unui şir pentru $\varepsilon = \frac{1}{100}$, determinăm rangul începând de la care termenii şirului se află în interiorul bilei.

Rezolvăm inegalitatea $d\left(\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right), (0,0)\right) = \sqrt{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} < \frac{1}{100}$ şi obţinem

$n > 100 \cdot \sqrt{5} \simeq 223.6$,

ceea ce înseamnă că începând cu al 224-lea termen toţi termenii şirului se află în bila cu centru în origine şi de rază 1; în afara se află 223 termeni.

Proprietățile sirurilor convergente in spații metrice

Dacă şirul $(x_n)_n$ *converge* către limita $x \in X$, această este unică şi scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Un şir din spațiul metric (X, d) este *mărginit* dacă toți termenii săi sunt conținuți într-o bilă deschisă din X.

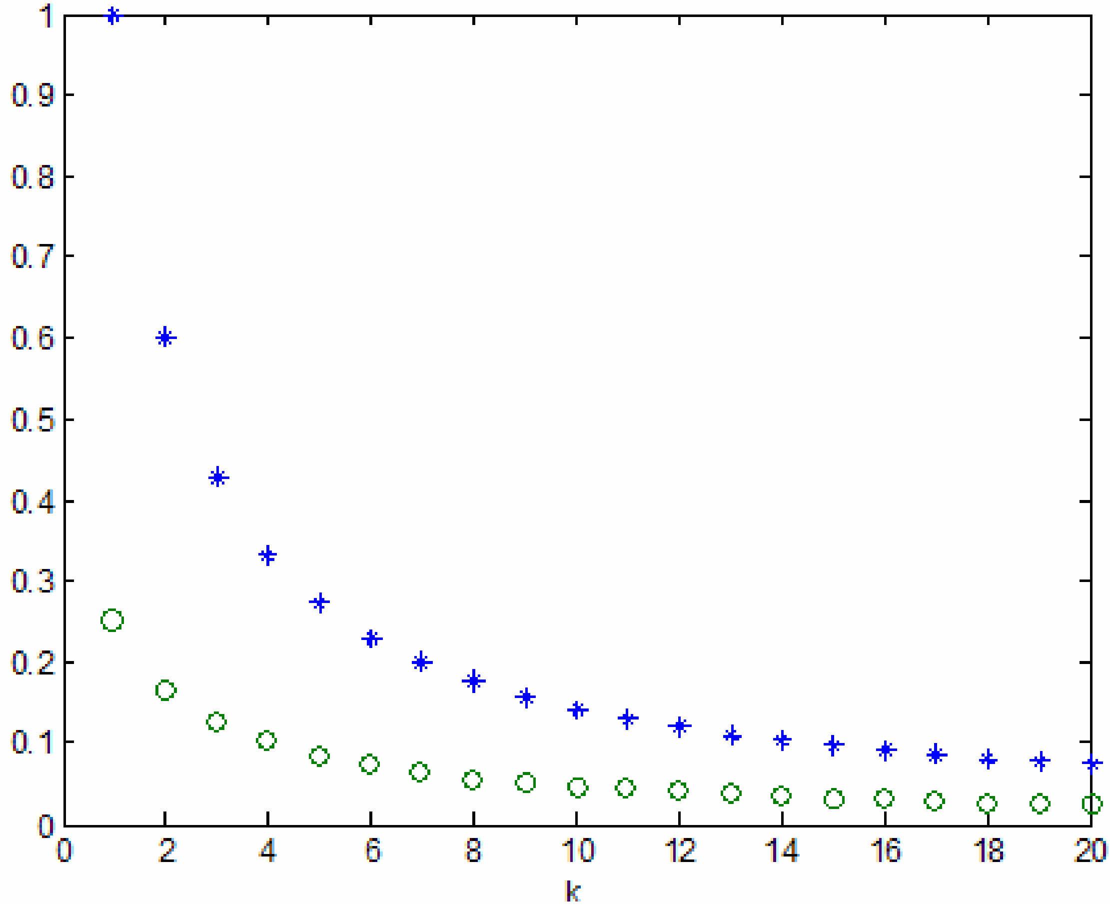
- Orice şir convergent este mărginit.

Pentru un şir $(x_n)_n \subset X$, fixând un şir crescător de numere naturale $k_0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ şi considerând şirul $(x_{k_n})_n$, definim astfel un *subşir* al şirului $(x_n)_n$, adică o selecţie „ordonată" a termenilor şirului $(x_n)_n$.

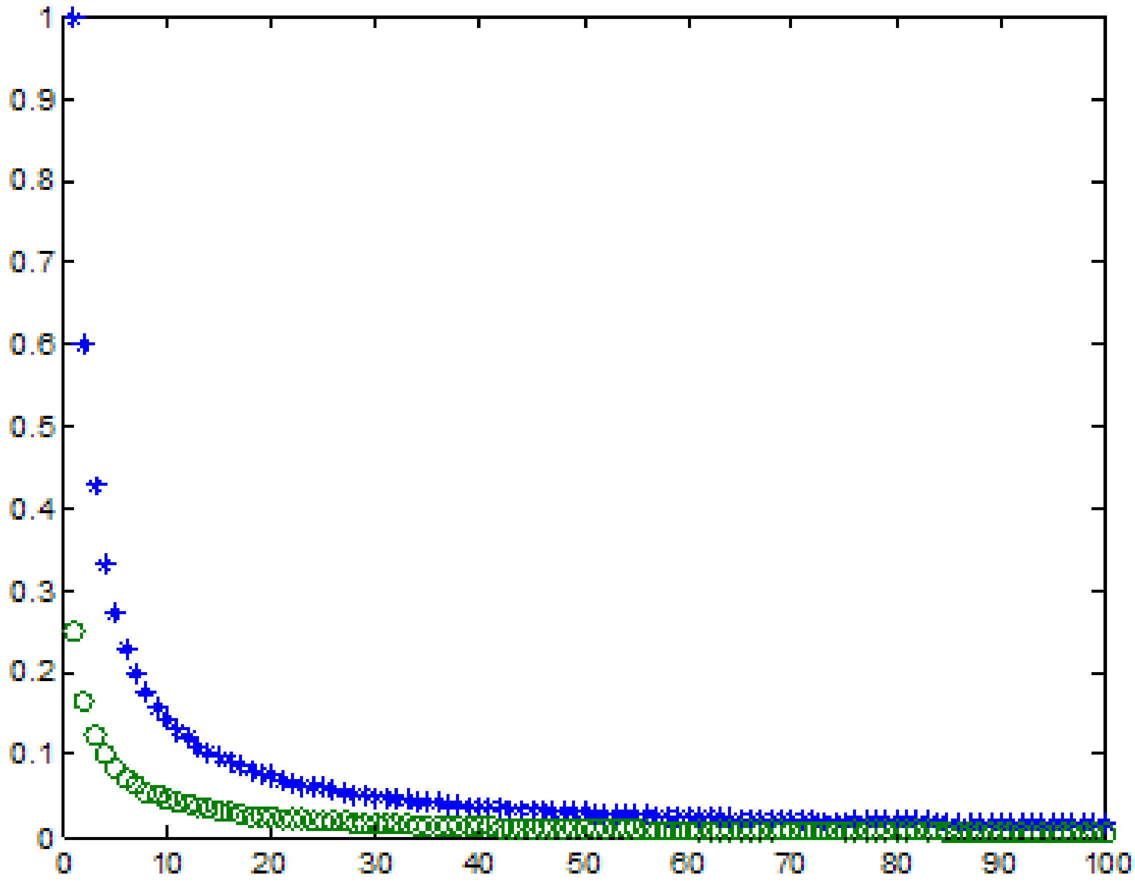
- Subşirul termenilor pari ai şirului $(x_n)_n$ este $(x_{2n})_n$ unde $k_n = 2n$.
- În cazul şirului $x_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{n+1}$, avem subşirul termenilor pari $x_{2k} = \dfrac{3}{2k+1}$, $k \in \mathbf{N}$

şi subşirul termenilor impari $x_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+2}$, $k \in \mathbf{N}$.

»k=1:20;plot(k,3./(2*k+1),'*',k,1./(2*k+2),'o')



»k=1:100;plot(k,3./(2*k+1),'*',k,1./(2*k+2),'o')



În general se observă că $n \le k_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Bazându-ne pe această observație se poate demonstra că:

- Orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită.

Şiruri convergente in spații normate

Un caz particular de spații metrice sunt spațiile liniare normate.
Într-un spațiu liniar normat $(E, \| \|)$ un şir $(x_n)_n$ este *convergent* dacă

există $x \in E$ cu proprietatea:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \ \text{astfel încât} \ \forall n \geq n_\varepsilon \ \text{avem} \ \|x_n - x\| < \varepsilon .$$

Proprietățile şirurilor convergente prezentate anterior rămân valabile într-un spațiu liniar normat $(E, \| \|)$.

În plus şirurile convergente au şi alte proprietăți referitoare la operațiile definite pe E şi respectiv la normă:

- Suma a două şiruri convergente $(x_n)_n, (y_n)_n \subset E$, adică şirul $(x_n + y_n)_n \subset E$ este convergent; dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ atunci $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

- Înmulțind un şir convergent $(x_n)_n \subset E$ cu un număr real α, obținem un şir convergent $(\alpha \cdot x_n)_n \subset E$ şi avem: $\lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \cdot x$

- Înmulțind un şir convergent $(x_n)_n \subset E$ cu un şir convergent de numere reale $(\alpha_n)_n \subset$ **R**, obținem un şir convergent $(\alpha_n \cdot x_n)_n \subset E$ şi în plus $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \cdot x$.

- Dacă $(x_n)_n \subset E$ este un şir convergent atunci $(\|x_n\|)_n \subset$ **R** este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\| = \|x\|.$$

Şir Cauchy

Într-un spaţiu metric (X, d) un şir $(x_n)_n$ se numeşte şir Cauchy dacă:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall p \in \mathbf{N} \text{ avem } d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$$

adică, de la un anumit rang încolo, orice doi termeni sunt suficient de "apropiaţi", în sensul distanţei *d*.

Exemple

- Şirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2^k}{2^k}$ este un şir Cauchy; pentru a argumenta această afirmație este suficient să majorăm $|x_{n+p} - x_n|$ cu un şir $(a_n)_n$ ce nu depinde de p, şir ce converge la zero; rangul n_ε, începând de la care termenii şirului sunt suficient de apropiați, este acel n_ε cu proprietatea $a_n < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$. Aşadar:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin 2^k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}$$

şi astfel $a_n = \frac{1}{2^n}$

- Şirul $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg} k!}{k!}$ este un şir Cauchy deoarece:

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\operatorname{arctg} k!}{k!} \right| \le \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \le \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k \cdot (k-1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) < \frac{\pi}{2n}$$

Proprietățile şirurilor Cauchy

- Orice şir convergent din *X* este şir *Cauchy*.

Menționăm că reciproca nu este în general adevărată.

- Intr-un spațiu metric orice şir *Cauchy* este mărginit.

- Intr-un spațiu metric un şir *Cauchy* ce conține un subşir convergent este convergent, având aceeaşi limită.

Punct de acumulare

Într-un spaţiu metric (X,d) considerăm o mulţime arbitrară $A \subset X$;
punctul $x_0 \in X$ (ce poate să aparţină sau nu lui A) se numeşte *punct de acumulare* al mulţimii A, dacă există un şir $(x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}$ convergent la x_0.
Vom nota $x_0 \in A'$.

Exemple

$$A_1 = (-1,1] \Rightarrow A_1' = [-1,1];$$

$$A_2 = \mathbf{Q} \Rightarrow A_2' = \mathbf{R}$$

$$A_3 = \{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbf{N}\} \Rightarrow A_3' = \{0\}$$

Teorema Bolzano-Weierstrass

- Orice mulțime de numere reale mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare.

O consecință imediată a acestei teoreme este *lema lui Cesaro*.

- Orice șir mărginit de numere reale conține un subșir convergent.

- În **R**, orice şir Cauchy este convergent.

Să argumentăm acest rezultat important:
un şir Cauchy fiind mărginit, conține un subşir convergent
şi un şir Cauchy ce conține un subşir convergent este un şir convergent.

Şiruri în spațiul real p-dimensional

Considerăm spațiul $\mathbf{R}^p$, $p > 1$, cu metrica euclidiană.

Un şir din $\mathbf{R}^p$ este o funcție vectorială de variabilă reală

$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^p$, $f(n) = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$

şi astfel şirul $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)_n$ are p şiruri componente

$(x_n^k)_n \subset \mathbf{R}$, $1 \le k \le p$.

Studiul convergenței unui şir din $\mathbf{R}^p$ se reduce la studiul componentelor sale:

- Un şir $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)_n \subset \mathbf{R}^p$ este mărginit, respectiv Cauchy respectiv convergent, dacă şi numai dacă cele p şiruri componente sunt mărginite, respectiv Cauchy, respectiv convergente.

Demonstrația acestei afirmații se bazează pe inegalitatea:

$$|x_k - y_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x_k - y_k)^2} \le \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|, \quad x_k, y_k \in \mathbf{R},\ 1 \le k \le p.$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n},\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2},n\cdot\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\right)=\left(1,\frac{1}{e},\ln 3\right)$$

- Să calculăm distanța de la $A(1,-1,0)$ la $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+2}{2^n},\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n,\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right)$

  Avem: $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+2}{2^n},\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n,\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right)=\left(0,e,0\right)$ și astfel:

  $$d(A,L)=\sqrt{(1-0)^2+\left(-1-e\right)^2+(0-0)^2}=\sqrt{e^2+2e+2}$$

Spații metrice complete

O clasă importantă de spații metrice o constituie spațiile metrice complete.
Un spațiu metric în care orice şir *Cauchy* este convergent se numeşte *spațiu metric complet*.

Un spațiu liniar normat care privit ca spațiu metric este spatiu metric complet se numeşte spațiu *Banach*.

Exemple

- **R** este spațiu metric complet.

- Fiind dat $(x_n)_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^p)_n$ un şir *Cauchy* din **R**^{p}, cele *p* şiruri componente sunt şiruri *Cauchy* în **R**, deci convergente, rezultând astfel convergența şirului $(x_n)_n$ şi putem afirma că **R**^{p} este un spațiu complet.

Proprietăți specifice şirurilor de numere reale

- Dacă şirurile de numere reale $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente şi în plus $x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (*trecerea la limită în inegalități*).

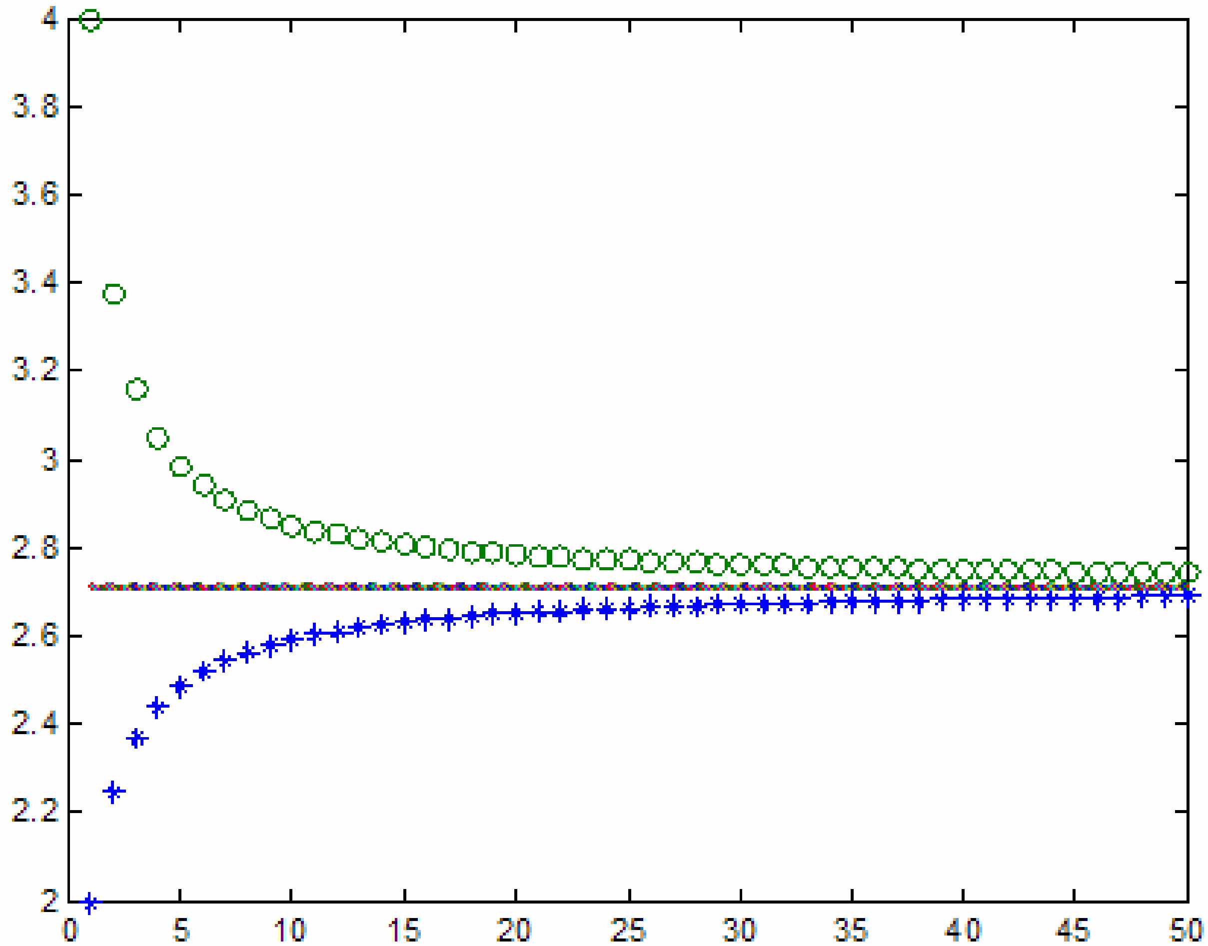
- Un şir de numere reale $(x_n)_n$ monoton crescător $(x_n \le x_{n+1}, \forall n \in \mathbf{N})$ şi mărginit superior (există $M \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}$) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n, n \in \mathbf{N}\}$.

Exemple

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na]}{n}=a,\ a\in\mathbf{R}$, pe baza trecerii la limită în inegalitatea $\dfrac{na-1}{n}<\dfrac{[na]}{n}\le\dfrac{na}{n}$.

- Şirul $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ este crescător şi mărginit superior de 3, deci este convergent şi $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$.

- Şirul $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ este descrescător şi pozitiv deci convergent şi $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}>e$



4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

Aplicație practică

- Solventul rămas în precipitat după decantare conține impuritatea în concentrație c_0 și astfel considerând că volumul de solvent rămas este v, cantitatea de impuritate este $c_0 v$.

Spălând precipitatul cu un volum v_1 de solvent pur concentrația de impuritate în solvent va deveni c_1.

Făcând bilanțul de materiale, în ipoteza că echilibrul între solventul adăugat și cel remanent se stabilește imediat, vom avea $v \cdot c_0 = (v + v_1) \cdot c_1$, rezultând

$$c_1 = \frac{v \cdot c_0}{v + v_1}.$$

O a doua spălare, utilizând un volum v_2 de solvent va duce la scăderea concentrației la c_2

și vom obține $c_2 = \dfrac{v \cdot c_1}{v + v_2} = \dfrac{v}{v + v_2} \dfrac{v \cdot c_0}{v + v_1}$

Dacă volumul de solvent total folosit pentru n spălări este egal cu V și este același la fiecare spălare,

adică $v_n = \dfrac{V}{n}$, vom obține concentrația de impuritate în solvent, după n spălări c_n ca fiind:

$$c_n = c_0 \cdot \left(\frac{v}{v + \frac{V}{n}} \right)^n$$

Se demonstrează că şirul este descrescător. Fiind un şir de termeni pozitivi este convergent şi astfel rezultă că impuritatea nu poate fi complet îndepărtată prin utilizarea unui volum dat de solvent.

$$c = \lim_{n\to\infty} c_0 \cdot \left(\frac{v}{v + \frac{V}{n}} \right)^n = c_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{v \cdot n}{v \cdot n + V} \right)^n = c_0 \cdot e^{-\frac{V}{v}}$$

Această valoare limită depinde de volumul rezidual de solvent în precipitat v şi de volum total de solvent utilizat pentru spălare. Concentraţia de impuritate nu poate scădea sub valoarea $c_0 \cdot e^{-\frac{V}{v}}$.

Şir de funcţii

Considerând două spaţii metrice (X, d) şi (X_1, d_1) definim *şirul de funcţii* ca fiind orice aplicaţie $f : \mathbf{N} \to Hom(A, X_1)$, unde $A \subset X$.

Notaţia consacrată pentru termenul general este $f(n) = f_n$ unde $f_n : A \to X_1$, iar pentru şirul de funcţii este $(f_n)_n$.

Fixând $x_0 \in A$, obținem $(f_n(x_0))_n$ un şir de puncte din X_1 .

Spunem că $(f_n)_n$ este *convergent* în $x_0 \in A$ dacă şirul $(f_n(x_0))_n$ este convergent în X_1 .

Mulțimea punctelor $x \in A_1 \subset A$ pentru care şirul $(f_n(x))_n$ este convergent se numeşte *mulțime de convergență*.

Dacă $(f_n)_n$ este convergent pe $A_1 \subset A$ atunci putem defini pe A_1 o funcție, numită *funcția limită*, dată de $x \mapsto f(x)$, unde $f(x)$ este limita şirului $(f_n(x))_n$.

Acest tip de convergență se numeşte *convergență punctuală*.

Convergență punctuală

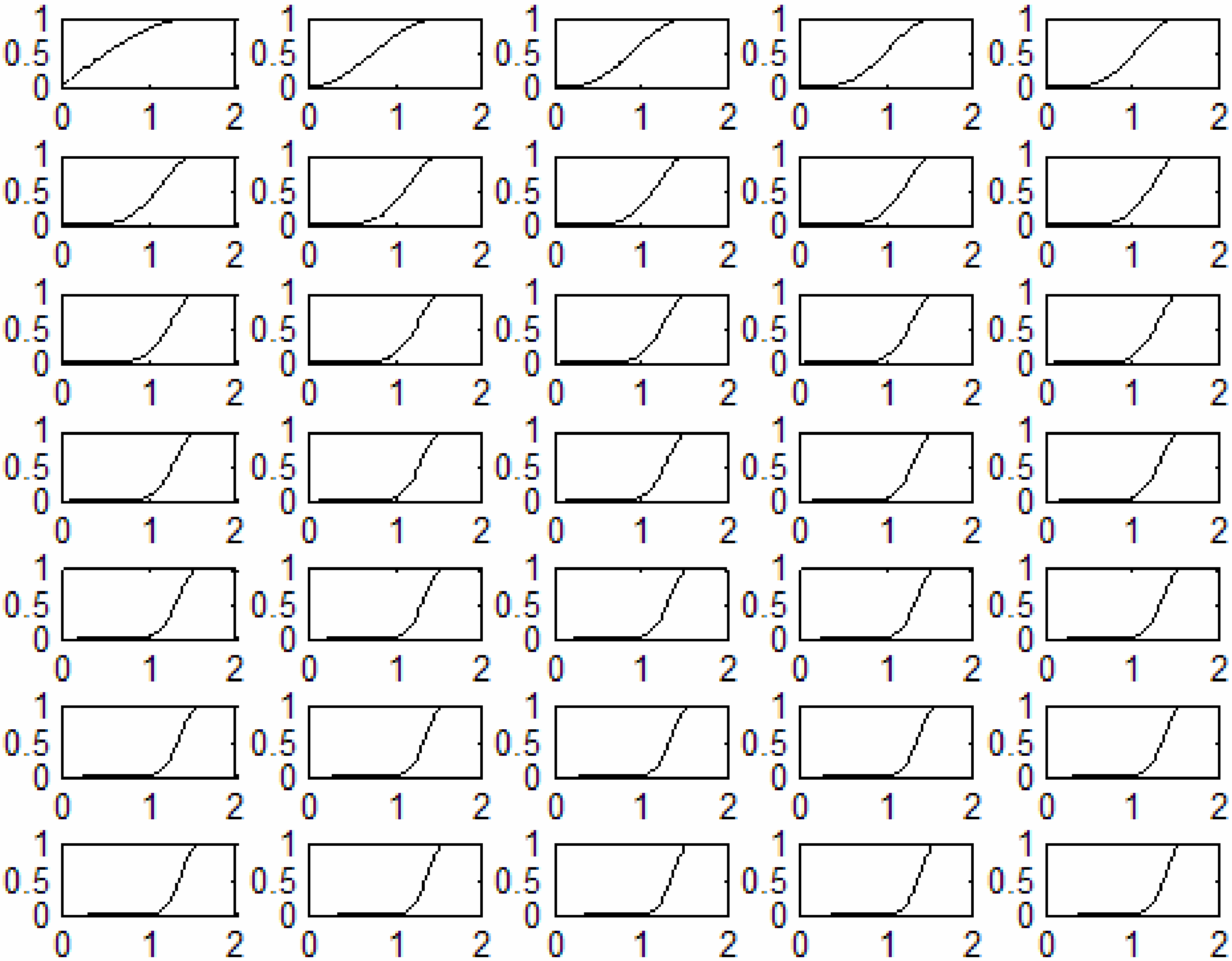
Spunem că $(f_n)_n$ converge *punctual* la f pe A_1 dacă:

$\forall x \in A_1, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(x, \varepsilon)$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ avem $d_1(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Exemple

- Şirul de funcţii $(f_n)_n$ unde $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, $f_n(x) = \sin^n x$ are ca funcţie limită funcţia $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \{0,1\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

```
»x=0:.01:pi/2; for n=1:35 subplot(7,5,n),plot(x,sin(x).^n,'k'); end
```



- Să calculăm funcția limita a şirului de funcții $(f_n)_n$ unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

este definită de $f_n(x) = \dfrac{2x^{2n} - x^2 + 1}{x^{2n+1} + \sqrt{1+x^2}}$:

Reamintindu-ne că $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1 \end{cases}$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x^{2n} - x^2 + 1}{x^{2n+1} + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{pentru } |x| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x^{2n} - x^2 + 1}{x^{2n+1} + \sqrt{1+x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} \cdot \left(2 - \dfrac{x^2-1}{x^{2n}}\right)}{x^{2n} \cdot \left(x + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^{2n}}\right)} = \frac{2}{x} \quad \text{pentru } |x| > 1$$

funcția limită este:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}, & |x|<1\\[2mm] \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}, & x=1\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}, & x=-1\\[2mm] \dfrac{2}{x}, & |x|>1\end{cases}$$

- Funcția limită a șirului de funcții $(f_n)_n$ unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este

definită de $$f_n(x) = \frac{x \cdot e^{nx} - x^2}{e^{nx+1} + \sqrt{1+x^2}} :$$

Știind că $\lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \infty, & x>0 \end{cases}$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x \cdot e^{nx} - x^2}{e^{nx+1} + \sqrt{1+x^2}} = \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x<0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x \cdot e^{nx} - x^2}{e^{nx+1} + \sqrt{1+x^2}} = \frac{e^{nx} \cdot \left(x - \frac{x^2}{e^{nx}}\right)}{e^{nx} \cdot \left(e + \frac{\sqrt{1+x^2}}{e^{nx}}\right)} = \frac{x}{e}, \quad x>0 .$$

Funcția limită este $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{x}{e}, & x>0 \end{cases}$.

Convergența uniformă

Remarcăm că în cazul convergenței punctuale rangul n_0 depinde atât de ε cât şi de x.

Cazul în care n_0 depinde doar de ε, caz în care şirul $(f_n(x))_n$ converge "la fel de repede" pentru toți $x \in A_1$, este cazul *convergenței uniforme.*

Astfel, şirul $(f_n)_n$ converge *uniform* la f pe A_1, dacă:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0 \text{ avem } d_1(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \ \forall x \in A_1$$

Exemplu

- Pentru şirul $f_n : [0,1] \to [1,2]$ definit prin $f_n(x) = x^n + 1$, $n \in \mathbf{N}$, funcţia limită este $f : [0,1] \to \{1,2\}$, definită de $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

Să presupunem că şirul converge uniform pe $[0,1)$ la f.

Pentru $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ să avem

$| x^n + 1 - f(x) | = x^n < \varepsilon, \ \forall x \in [0,1)$,

inegalitate din care rezultă că:

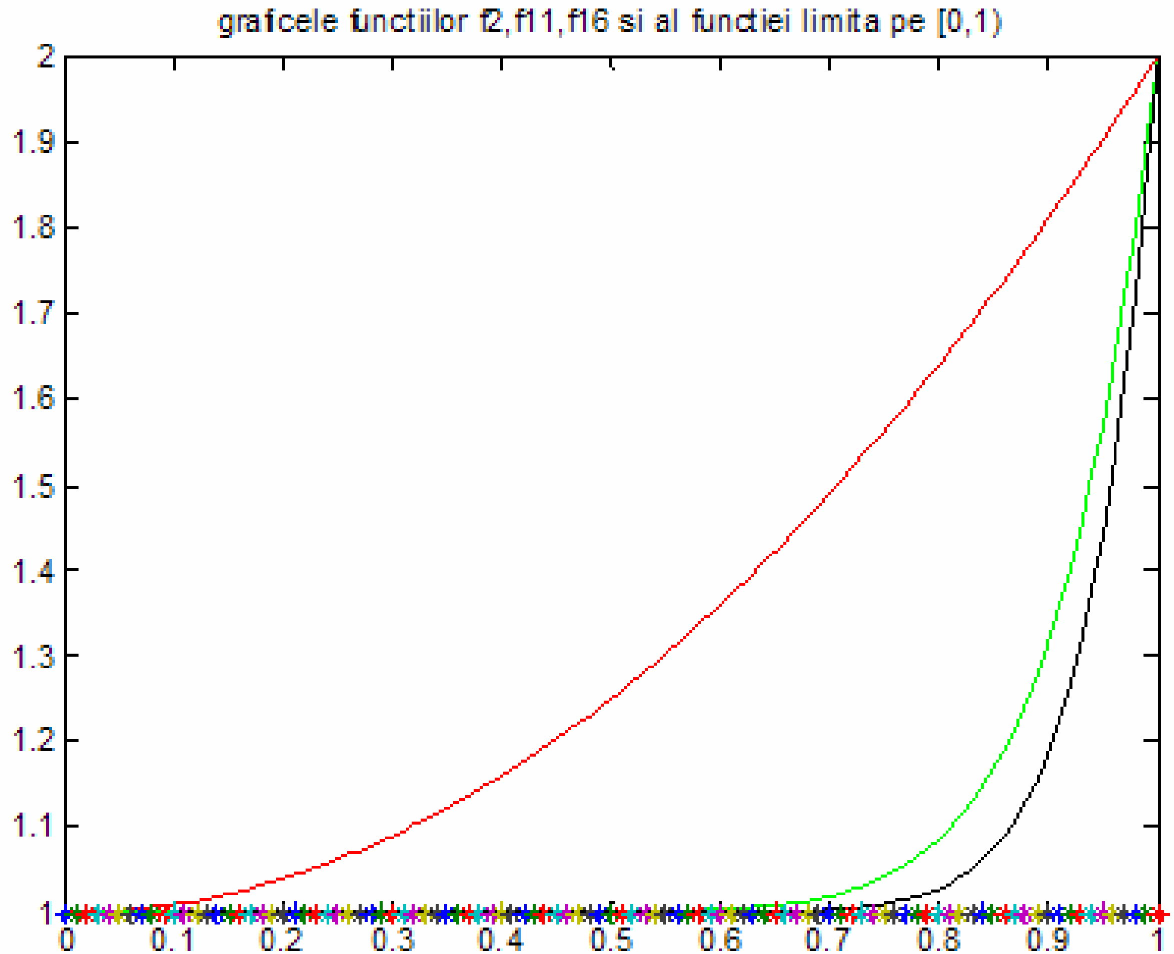
$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{x}}, \quad \forall x \in [0,1) \quad \text{adică} \quad n > \sup_{[0,1)} \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{x}} = +\infty$$

şi astfel $n_0(\varepsilon) = +\infty$, ceea ce înseamnă că şirul nu este uniform convergent pe $[0,1)$.

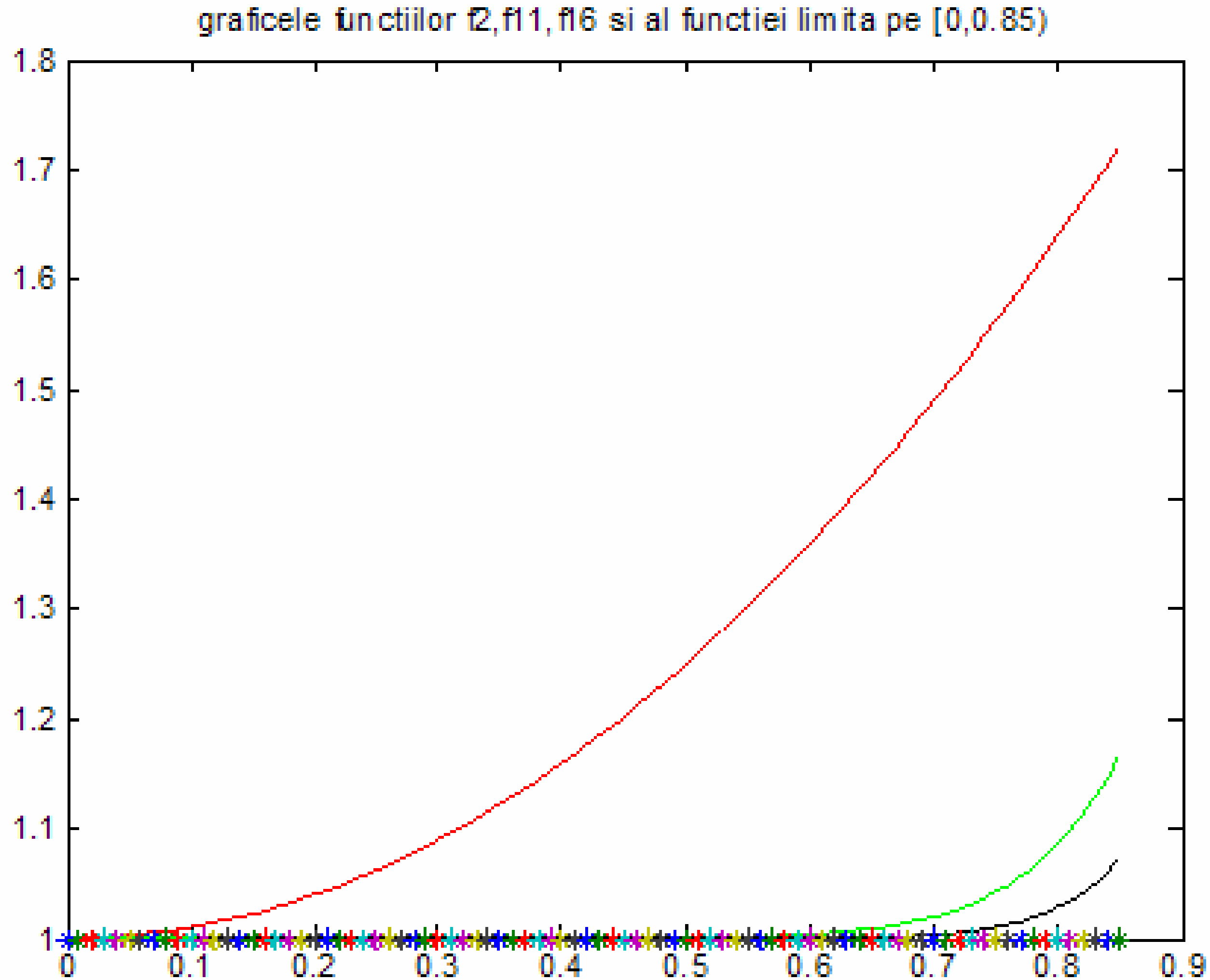
O mulţime de convergenţă uniformă este $[0,\alpha)$, unde $\alpha \in (0,1)$, caz în care obţinem:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\alpha}} \right] + 1 \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0 \text{ avem } x^n < \varepsilon,\ \forall x \in [0,\alpha).$$

```
»x=0:.01:1;plot(x,x.^2+1,'r',x,x.^11+1,'g', x,x.^16+1,'k',x,1,'*')
```



```
»x=0:.01:0.85;plot(x,x.^2+1,'r',x,x.^11+1,'g', x,x.^16+1,'k',x,1,'*')
```



Vom nota convergența punctuală cu $f_n \xrightarrow{p} f$,

iar cea uniformă $f_n \xrightarrow{u} f$.

Convergența uniformă este o noțiune globală, având multe aplicații.

De exemplu în aproximații, dacă $f_n \xrightarrow{u} f$, funcția f este aproximată de şirul $(f_n)_n$.

De reținut

- Definiția şirului
- Definiția şirului convergent
- Proprietățile şirurilor convergente în spații metrice, în spații normate.
- Definiția şirului Cauchy
- Punct de acumulare
- În **R** orice şir Cauchy este convergent.

- Spațiu metric complet
- Şiruri în R
- Şiruri în spațiul real p-dimensional
- Şiruri de funcții
- Convergența punctuală
- Convergența uniformă

Tema

- Câți termeni ai șirului $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \frac{1}{3n^2}\right)_n$ se află în afara bilei centrată în origine și de rază 0.1?
- Arătați că șirul $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}, \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 5^k}{5^k}\right)$ este șir Cauchy.
- Determinați parametrul $\lambda > 0$ astfel încât distantă de la (-1,0,1) la $L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2}{2^n}, n\cdot(\sqrt[n]{3}-1), \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right)$ să fie minimă.

- Calculați functia limită pentru următoarele şiruri de funcții:

$$(f_n)_n,\ f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f_n(x) = \frac{x^{2n+1} + \ln(x^2 + x + 1)}{x^{2n} + 1}$$

$$(g_n)_n,\ g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad g_n(x) = \frac{e^{nx^2+1} + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^4 \cdot e^{nx^2+3} + 5}$$