Serii

2009-2010

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro

Un spaţiu liniar normat care privit ca spaţiu metric este spatiu metric complet se numeşte spaţiu *Banach*.

Spaţiile Banach constituie cadrul natural pentru definirea şi studiul conceptului de serie.

Serie de numere reale

Fie $(x_n)_n \subset$ R un şir; considerăm şirul *sumelor parţiale* asociat şirului iniţial:

$$s_0 = x_0, s_1 = x_0 + x_1, \ldots, s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

Perechea formată din şirurile $(x_n)_n$ şi $(s_n)_n$ se numeşte *serie* cu *termenul general* x_n şi se notează $\sum_{n \geq 0} x_n$.

Serie convergentă

O serie $\sum_{n\geq 0} x_n$ se numeşte *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale este convergent în **R**.

O serie care nu este convergentă se numeşte *divergentă*.

În cazul în care seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă, se defineşte *suma seriei* ca fiind $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ (în **R**), notaţia folosită fiind: $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Exemple

- natura seriei $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2} =$$

$$= \ln \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2} = \ln\frac{n+1}{2n}$$

şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = -\ln 2$.

Seria este convergentă şi $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$

- Pentru $r \in \mathbf{R}$ fixat, seria $\sum_{n\geq 0} r^n$ se numeşte *seria geometrică de rație r.*

Şirul sumelor parțiale va fi

$$s_0 = 1, s_1 = 1 + r, \ldots, s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} \dfrac{1-r^n}{1-r}, & r \neq 1 \\ n, & r = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-r}$ dacă $|r| < 1$, caz în care seria geometrică este convergentă.

- Pentru a studia natura seriei $\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ calculăm termenul general al şirului sumelor parţiale:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \ln \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, seria $\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă

Operații cu serii

Suma, termen cu termen, a două serii de aceeaşi natură (convergente sau nu) este o serie de aceeaşi natură.

Înmulțind cu un număr real o serie, nu este afectată natura seriei.

Eliminând sau adăugând un număr finit de termeni unei serii, nu se modifică natura seriei (evident pentru seriile convergente, suma se modifică).

Criteriul lui Cauchy

- *O serie de numere reale* $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbf{N}$ avem: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon$.

Dacă, în particular, $p = 1$ atunci:

$\forall \varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\left|x_{n+1}\right| < \varepsilon$

Aşadar, dacă $\sum_{n \geq 0} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, condiţie ce nu este suficientă pentru a asigura convergenţa unei serii.

Seria $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă, cu toate că $\lim_{n \to \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$.

Dacă $\lim_{n \to \infty} x_n \neq 0$ atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n$ este divergentă,

Exemple

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este o serie divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)}$ este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)} = \frac{2}{\ln 2}$

Serie absolut convergentă

O serie $\sum_{n\geq 0} x_n$ este *absolut convergentă* dacă seria de numere reale nenegative $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ este convergentă.

Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

- *O* serie cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale este mărginit superior.

Criteriul de comparație cu inegalități

- Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} a_n$ și $\sum_{n\geq 0} b_n$ au proprietatea că există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$ atunci:

1. Convergența seriei $\sum_{n\geq 0} b_n$ implică convergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
2. Divergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$ implică divergența seriei $\sum_{n\geq 0} b_n$.

Exemple

- $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n+\sqrt{n}}$ este convergentă deoarece $\frac{1}{3^n+\sqrt{n}}<\frac{1}{3^n}, \forall n\in \mathbf{N}$ şi

seria $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ este convergentă.

- $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{\pi}{4^n}$ este convergentă deoarece pe baza inegalității:

$\sin x < x, \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

avem $\sin\frac{\pi}{4^n}<\frac{\pi}{4^n}, \forall n\in \mathbf{N}$ şi seria $\pi\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4^n}$ este convergentă.

Seria armonică generalizată

Natura seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ este funcție de parametrul real α:

- pentru $\alpha > 1$ seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ este convergentă,
- pentru $\alpha \leq 1$ seria este divergentă.

Seria armonică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă.

Criteriu de comparație cu trecere la limită

- Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} a_n$ și $\sum_{n\geq 0} b_n$ au proprietatea că

există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, atunci seriile $\sum_{n\geq 0} a_n$ și $\sum_{n\geq 0} b_n$ au aceeași natură.

Exemple

- $\sum_{n\geq 0}\frac{2n-5}{n^2+4}$ este divergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-5}{n^2+4}}{\frac{1}{n}}=2$ şi

  seria armonică $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă.

- $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\right)$ este convergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}}=1$

  şi seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n}}$ este convergentă

Criteriul raportului

- Fie seria de numere reale pozitive $\sum_{n\geq 0} a_n$ cu proprietatea

că există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci:

1. dacă $l < 1$ rezultă convergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
2. dacă $l > 1$ rezultă divergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
3. dacă $l = 1$ nu putem afirma nimic despre natura seriei.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

- în cazul seriei divergente $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

(notație: dublu factorialele $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$ şi $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n$)

- în cazul seriei convergente $1+\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$

Exemple

- Seria $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n}$ este convergentă deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3}$.
- Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$ este convergentă, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Considerăm seria $\sum_{n\geq 0} x_n$, pentru care există $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = l$.

- pentru $l < 1$, seria este absolut convergentă;
- pentru $l > 1$, şirul de numere reale pozitive $(|x_n|)_n$ este crescător,

deci $\lim_{n\to\infty} |x_n| \neq 0$, rezultând că $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, ceea ce înseamnă divergența seriei .

Evaluarea erorii

Considerăm o serie absolut convergentă $\sum_{n\geq 0} a_n$ de numere reale,

cu suma s şi cu proprietatea că există $n_0 \in \mathbf{N}$ şi $k \in (0,1)$ astfel încât

pentru $n \geq n_0$ avem $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq k < 1$.

Evaluare a erorii absolute $|s - s_n| = R_n$, comisă în formula de aproximare $s \approx s_n$.

$$|R_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \frac{k}{1-k} \cdot a_n .$$

Exemplu

- Să stabilim câți termeni trebuie însumați pentru a obține suma

seriei $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n}$ cu două zecimale exacte:

Avem: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

și astfel $|R_n| < a_n = \frac{n}{3^n} < 0.001$.

Trebuie însumați 11 termeni, deci $s_{11} = 0.75$ aproximează suma seriei cu două zecimale exacte.

Criteriul Raabe-Duhamel

- Fie seria de numere reale pozitive $\sum_{n\geq 0} a_n$ cu propietatea că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$; în plus există $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = l$

  1. dacă $l > 1$ rezultă convergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
  2. dacă $l < 1$ rezultă divergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
  3. dacă $l = 1$ natura seriei nu poate fi stabilită.

  (*criteriulRaabe- Duhamel*) .

Exemple

- Să studiem natura seriei $\sum_{n\geq 1} a^{\ln n},\ a>0$:

Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}a^{\ln\frac{n+1}{n}}=1$, vom aplica criteriul Raabe-Duhamel,

evaluând $\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{a^{\ln n}}{a^{\ln(n+1)}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1\right)=-\ln a$.

În concluzie:

- $a<\frac{1}{e}$ seria este convergentă,
- $a>\frac{1}{e}$ seria este divergentă,
- $a=\frac{1}{e}$ obținem seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ care este divergentă.

- Pentru seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ calculăm $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}=1$,

aplicăm criteriul Raabe -Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

Seria este divergentă.

Criteriul rădăcinii

- Fie seria de numere reale pozitive $\sum_{n\geq 0} a_n$ cu propietatea că există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, atunci:

1. dacă $l<1$ rezultă convergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
2. dacă $l>1$ rezultă divergența seriei $\sum_{n\geq 0} a_n$;
3. dacă $l=1$ nu putem afirma nimic despre natura seriei.

Exemple

- seria $\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ este convergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3} = \frac{e}{3} < 1\,;$$

- seria $\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$ este divergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2} = \frac{e}{2} > 1 .$$

Considerăm seria $\sum_{n \geq 0} x_n$, pentru care există $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = l$.

Pentru $l < 1$, seria este absolut convergentă;

pentru $l > 1$ există $n_1 \in \mathbf{N}$, astfel încât $\sqrt[n]{|x_n|} > 1, \ \forall n \geq n_1$,

deci $\lim_{n \to \infty} |x_n| \neq 0$, rezultând divergența seriei .

Serii alternante. Criteriul lui Leibniz

Seriile *alternante* sunt seriile de forma $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot a_n$ unde $(a_n)_n \subset \mathbf{R}_+$.

criteriu de convergență _*criteriul lui Leibniz*:

- Dacă $(a_n)_n \subset \mathbf{R}_+$ este un şir monoton descrescător, convergent la zero, atunci seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot a_n$ este convergentă.

Exemplu

- *Seria armonică alternată* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ este convergentă,

dar nu este absolut convergentă.

In cazul seriei alternate convergente $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot a_n$, eroarea comisă prin înlocuirea sumei s a seriei cu suma parțială s_n este mai mică în modul decât primul termen neglijat a_{n+1} , adică:

$$|s - s_n| < a_{n+1}$$

Exemplu

- Suma seriei armonice alternate este $\ln 2$

Pentru a obține suma seriei cu două zecimale exacte, evaluăm

$$\left|R_n\right| < \frac{1}{n+1} < 0.001 \text{ , rezultă } n > 999 \text{ ,}$$

şi astfel trebuie însumați cel puțin 1000 termeni

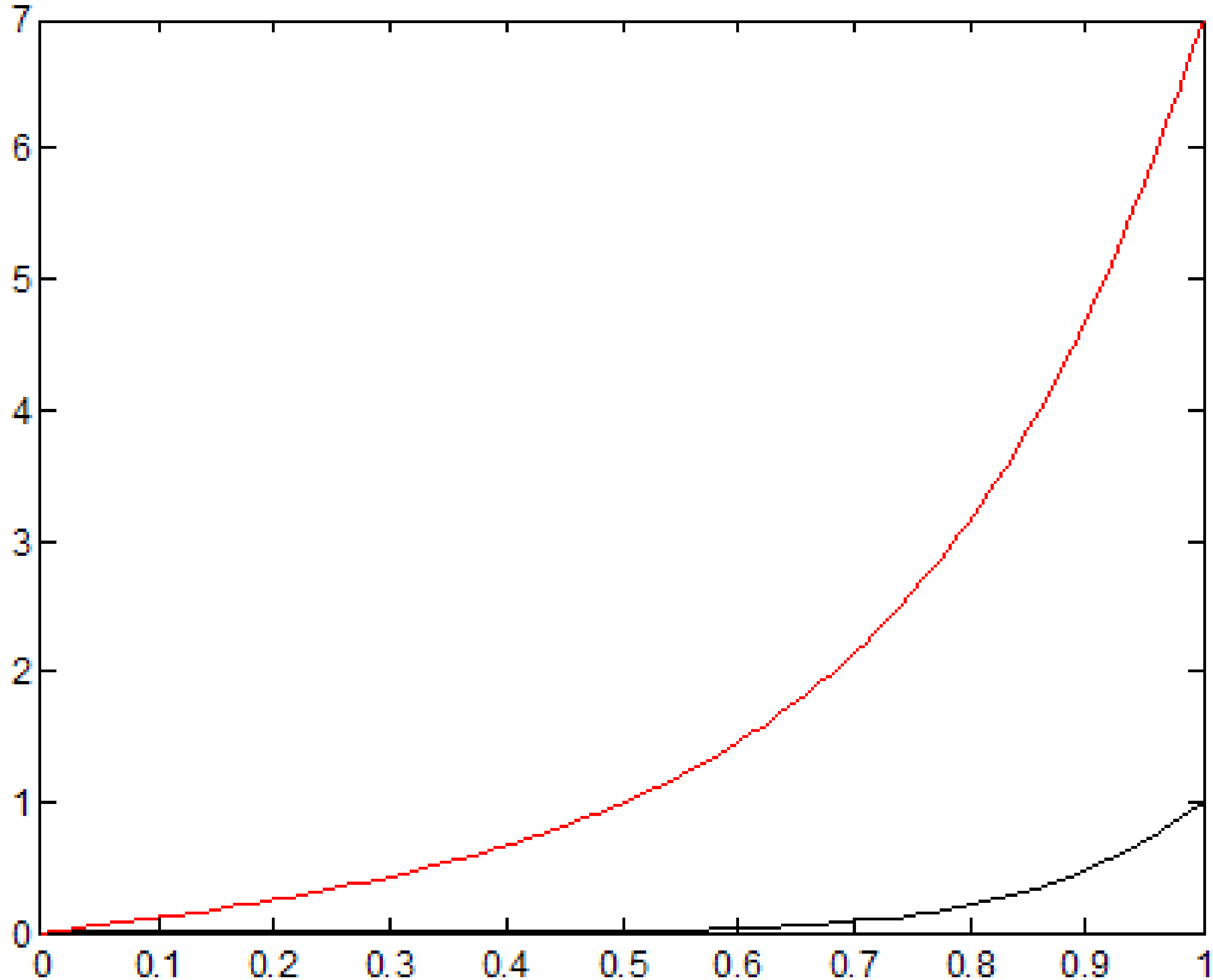
Serie de funcții

Fie $(f_n)_n$ un şir de funcții $f_n : A \to \mathbf{R}$ unde $A \subset \mathbf{R}$.

Considerând şirul sumelor parțiale $(s_n)_n$ unde $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$,

perechea formată din şirurile $(f_n)_n$ şi $(s_n)_n$ se numeşte *serie de funcții* şi se notează $\sum_{n\geq 1} f_n$.

```
x=0:.01:1;plot(x,x.^7,'k',x,x+x.^2+x.^3+x.^4+x.^5+x.^6+x.^7,'r')
```



Convergenta punctuală

Seria de funcții $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ *converge punctual* către funcția f dacă şirul sumelor parțiale converge punctual la f.

Pentru stabilirea mulțimii de convergență a unei serii de funcții aplicăm seriei modulelor criteriile studiate.

Exemplu

- mulțimea de convergență pentru seria de funcții:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)^n\cdot\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n$$

Aplicăm criteriul rădăcinii seriei $\sum_{n\geq 1}\left|f_n(x)\right|$ și anume:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|f_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{n^2}\cdot\left|\frac{x+2}{x-2}\right|=\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$$

Rezolvând inecuația $\left|\frac{x+2}{x-2}\right|<1\Leftrightarrow -1<\frac{x+2}{x-2}<1$ obținem că pentru $x\in(-\infty,0)$ seria este absolut convergentă.

Pentru $x \in (0,+\infty)$ seria modulelor este divergentă, rezultatul fiind obținut pe baza criteriuluic rădăcinii, seria de funcții este divergentă pe $(0,+\infty)$.

În $x=0$, seria devine $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)^n \cdot (-1)^n$, serie divergentă deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0 .$$

În concluzie mulțimea de convergență este $(-\infty,0)$

Criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă

O serie de funcții este *uniform convergentă* pe $A_1 \subset A$ dacă șirul sumelor parțiale converge uniform pe A_1..

- Considerăm un șir de funcții $f_n : A \to \mathbf{R}$, , $n \in \mathbf{N}$, unde $A \subset \mathbf{R}$; dacă există o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} a_n$, convergentă, cu proprietatea că:

  $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, astfel încât $\forall n \geq n_0$ avem $\left|f_n(x)\right| \leq a_n \quad \forall x \in A$,

  atunci seria de funcții $\sum_{n\geq 0} f_n$ este absolut și uniform convergentă.

Exemple

- $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \cdot x^2}{x^4+n^6}$ este absolut şi uniform convergentă pe **R**:

  pe baza inegalităţii : $\frac{|a\cdot b|}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}$ avem:

  $$\frac{\left|(-1)^n \cdot x^2\right|}{x^4+n^6} = \frac{n^3 \cdot x^2}{x^4+n^6} \cdot \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2n^3},\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}$$

  iar seria $\frac{1}{2} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ este convergentă.

- seria de funcții $\sum_{n\geq 0} arctg\frac{2x}{x^2+n^6}$ este absolut și uniform convergentă pe **R**,

vom studia variația funcțiilor f_n pentru a găsi termenii $a_n = \sup\{f_n(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

Calculăm $f_n{}'(x) = \frac{n^6 - x^2}{(x^2+n^6)^2+4x^2}$, punctele de extrem sunt $x = \pm n^3$ și

$$\lim_{x\to\pm\infty} arctg\frac{2x}{x^2+n^6} = 0 .$$

x	$-\infty$		$-n^3$			n^3			∞
$f'(x)$	-	-	0	+	+	0	-	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-arctg\frac{1}{n^3}$	$\nearrow$		$arctg\frac{1}{n^3}$	$\searrow$		0

Avem $f(\mathbf{R}) \subset [-arctg\frac{1}{n^3}, arctg\frac{1}{n^3}]$, aşadar

$$\left|f_n(x)\right| \leq arctg\frac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Seria $\sum_{n\geq 1} arctg\frac{1}{n^3}$ fiind convergentă (conform criteriului de comparaţie cu trecere la limită) sunt îndeplinite condiţiile din criteriul Weierstrass.

Serie de puteri

Dacă $(a_n)_n$ este un şir de numere reale şi $x_0 \in \mathbf{R}$, considerăm

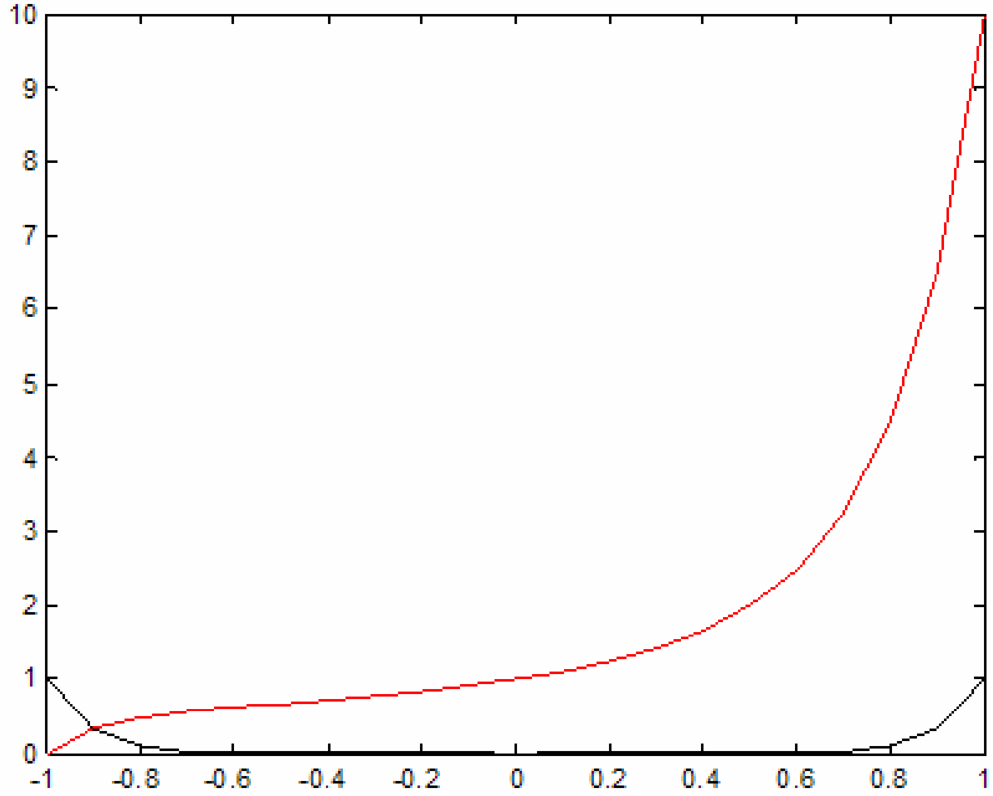
funcțiile $f_n(x) = a_n \cdot (x - x_0)^n$, definite pe $\mathbf{R}$;

seria de funcții $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x - x_0)^n$, se numeşte *serie de puteri*.

Exemplu

$$\sum_{n\geq 1} x^n \ , \ x \in [-1,1]$$

x=-1:.1:1; plot(x,x.^10,'k',x, x+x.^2+x.^3+x.^4+x.^5+x.^6+x.^7+x.^8+x.^9+x.^0,'r')



Raza de convergență a seriei de puteri

O serie de puteri este absolut convergentă în interiorul unui interval deschis de centru x_0 și cu o anumită rază R , și anume $(x_0 - R, x_0 + R)$

(R se numește *raza de convergență* a seriei)

și este divergentă pe mulțimea $(-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty)$

- Pentru seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$ considerăm $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ şi

$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}, \alpha > 0 \\ \infty, \alpha = 0 \\ 0, \alpha = \infty \end{cases}$. Atunci seria este absolut convergentă pe $(x_0 - R, x_0 + R)$

şi divergentă pe $(-\infty, x_0) \cup (x_0, \infty)$.

- Pentru seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$, cu propietatea că $a_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dacă $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \beta$ atunci raza de convergență este $R = \frac{1}{\beta}$

De obicei se studiază comportamentul seriilor centrate în origine $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$,

deoarece studiul unei serii centrată în x_0 se reduce la studiul unei asemenea serii, prin substituția $y = x - x_0$

Convergenta uniformă a seriilor de puteri

- Considerăm seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$, având raza de convergență R

1. Dacă $R<+\infty$, seria converge uniform pe $[x_0-R+\varepsilon, x_0+R-\varepsilon]$, $\forall \varepsilon>0$.
2. Dacă $R=+\infty$, seria converge uniform pe $[x_0-R_0, x_0+R_0]$, $\forall R_0>0$.

De reținut

- Serie de numere reale, serie convergentă
- Seria geometrică, seria armonică generalizată
- Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi
- Serie alternantă, criteriul lui Leibniz
- Serie de funcții; convergență punctuală, convergență uniformă
- Serie de puteri, rază de convergență

Temă

- Natura seriilor:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\cdot(\sqrt[3]{5}-1)},\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(0.3)^n},$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{3}{n^3+(0.2)^n},\ \sum_{n\geq 1}\frac{n^2-2}{n^3+5},$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+2}{5^n},\ \sum_{n\geq 1}\left(a\cdot\frac{n+1}{n}\right)^n, a>0$$

$$\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$$

- Este seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cdot x^2}{x^4+n^8}$ uniform convergentă?