Funcții continue

2009-2010

Marina Gorunescu

mgorun@inf.ucv.ro

Limite de funcții

Fie două spații metrice (X,d) și , o funcție $f : A \to X_1$, unde $A \subset X$ și x_0 un punct de acumulare al mulțimii A ($x_0 \in A'$).

Spunem că există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $d(x, x_0) < \delta$

avem $d_1(f(x), l) < \varepsilon$.

În cazul spațiilor liniare normate $(E, \| \ \|)$, $(E_1, \| \ \|_1)$ şi a funcției $f : A \to E_1$, $A \subset E$, vom spune că există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $x_0 \in A'$, dacă:

$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$, astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $\|x - x_0\| < \delta$,

avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.

Dacă $X = X_1 = \mathbf{R}$, există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă

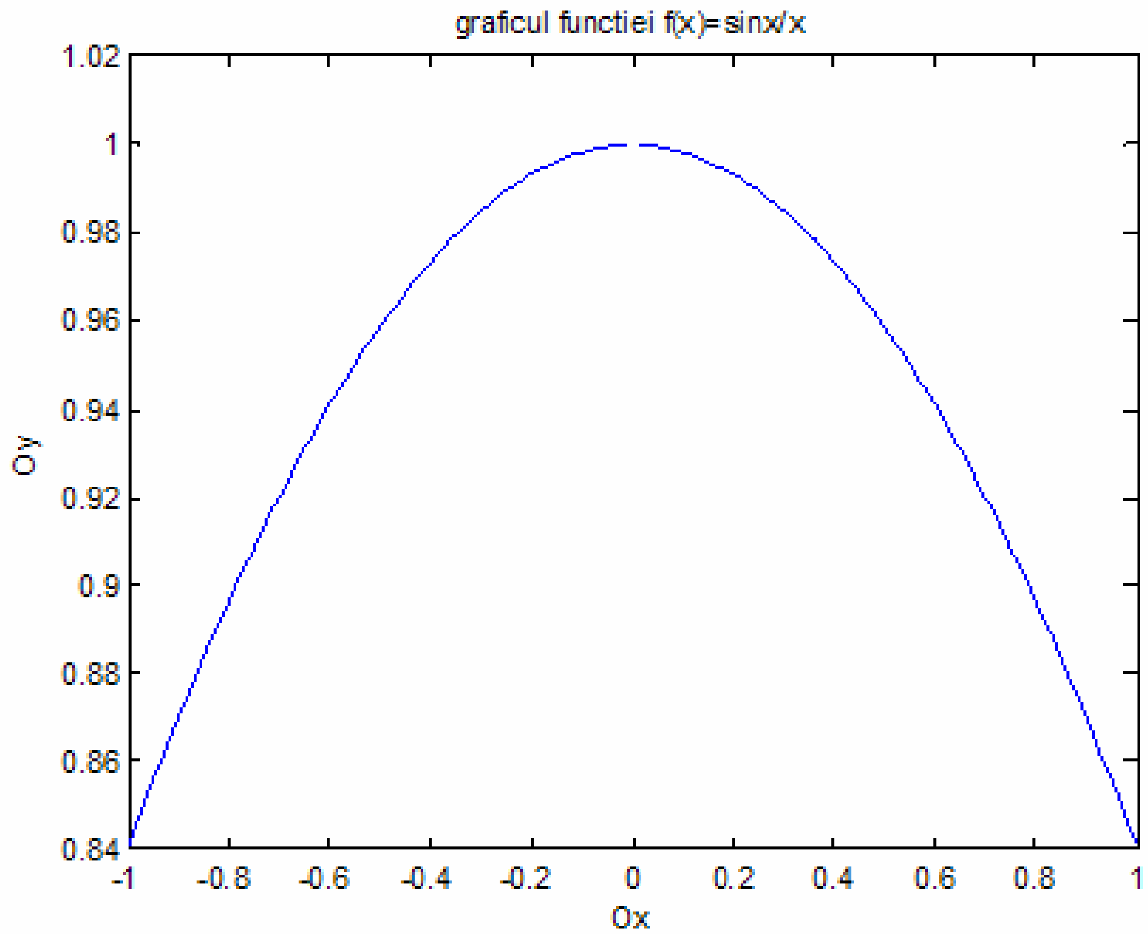
$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta$

avem $|f(x) - l)| < \varepsilon$.

Exemple

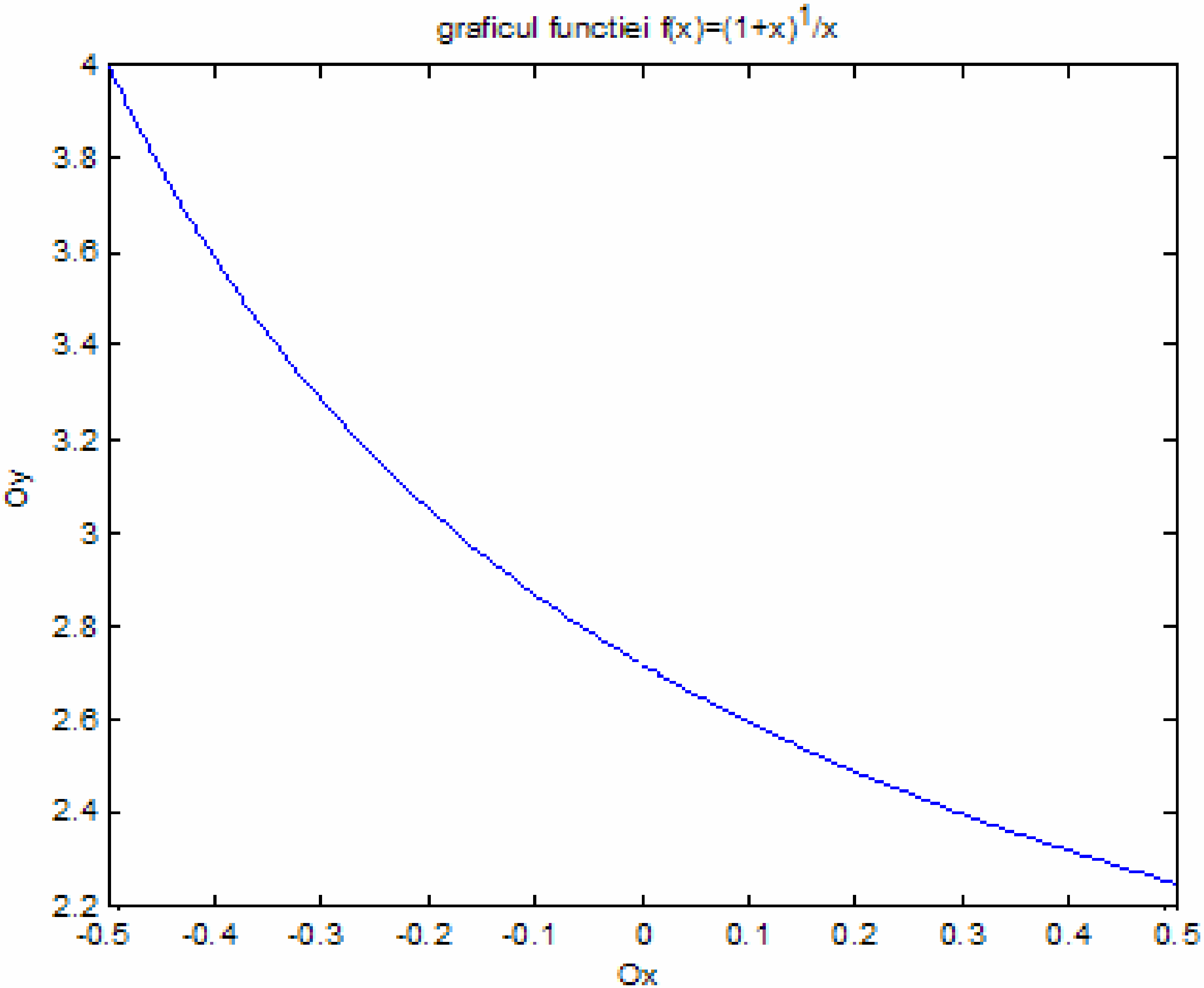
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

x	$\frac{\sin x}{x}$
-0.1	0.9983
-0.01	1.0000
-0.001	1.0000
0.001	1.0000
0.01	1.0000
0.1	0.9983


graficul functiei f(x)=sinx/x
1.02
1
0.98
0.96
0.94
0.92
0.9
0.88
0.86
0.84
Oy
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Ox

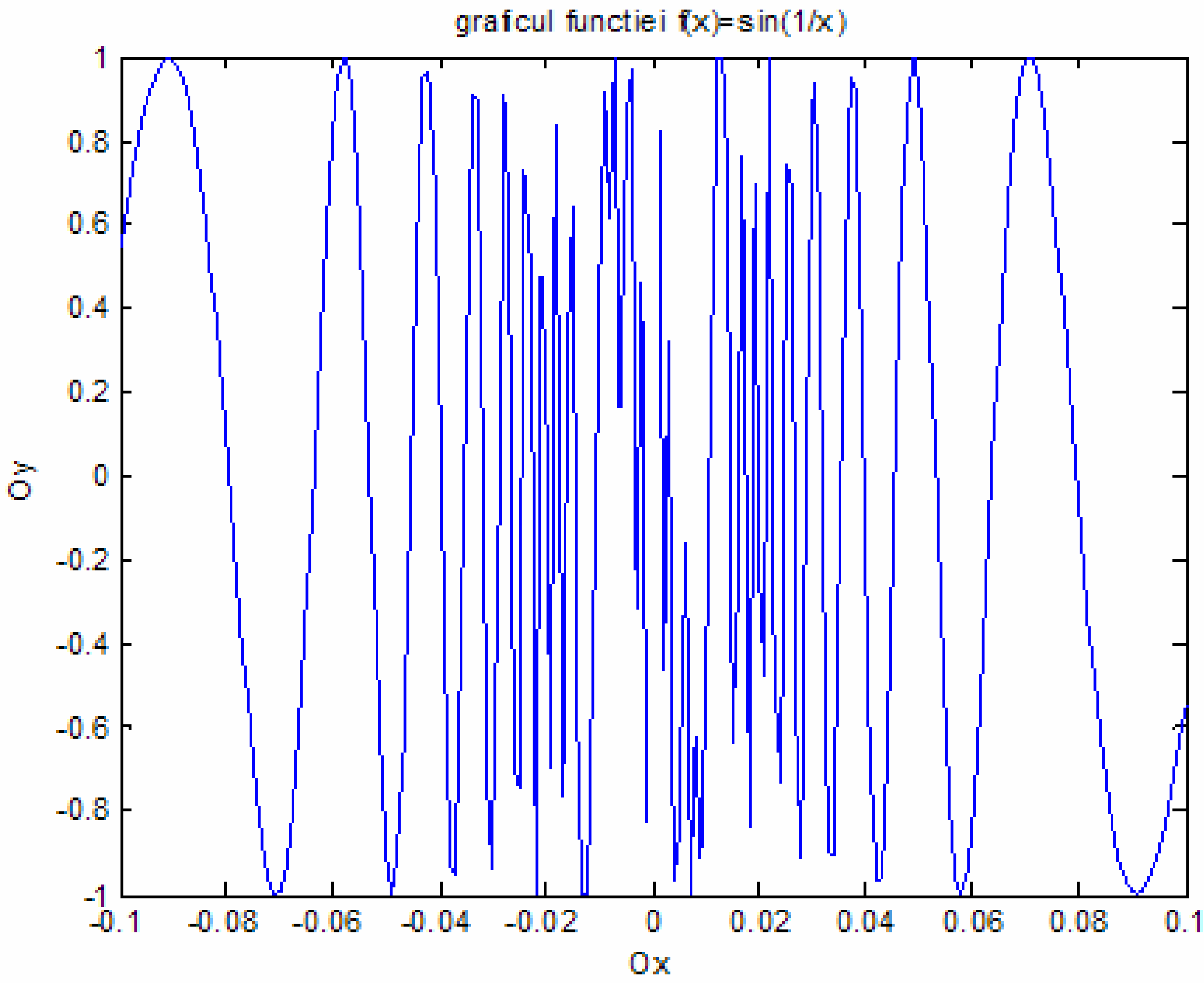
- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
-0.1	2.8680
-0.01	2.7320
-0.001	2.7196
-0.0001	2.7184
-0.00001	2.7183
0.00001	2.7183
0.0001	2.7181
0.001	2.7169
0.01	2.7048
0.1	2.5937


graficul functiei f(x)=(1+x)^1/x
Oy
Ox
4
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

- Nu există $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$

x	$\sin\frac{1}{x}$
-0.1	0.5440
-0.01	0.5064
-0.001	-0.8269
-0.0001	0.3056
-0.00001	-0.3057
0.00001	0.3057
0.0001	-0.3056
0.001	0.8269
0.01	-0.5064
0.1	-0.5440


grafcul functiei f(x)=sin(1/x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
Oy
-0.1
-0.08
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
Ox

Criteriul lui Heine

- Considerând două spații metrice (X, d) și (X_1, d_1), o funcție $f : A \to X_1$, unde $A \subset X$ și $x_0 \in A'$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
2. oricare ar fi șirul $(x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}$ convergent la x_0, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$

(*criteriul lui Heine*).

Exemple

- Nu există $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$, deoarece considerând şirurile convergente la zero

$x_n = \frac{1}{2n\pi}$ şi $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbf{N}$ avem:

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin 2n\pi = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$$

$$f(y_n) = \sin \frac{1}{y_n} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1.$$

- Nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$:

vom restricționa funcția $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ la mulțimea

$\{(x,y)\,|\,y=m\cdot x\},\ m\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$

$$f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

Considerând șirurile convergente la $(0,0)$,

$(x_n, y_n)=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ şi $(x_n', y_n')=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right)$, $n\in \mathbf{N}^*$ avem

$f((x_n, y_n))=\dfrac{1}{2}$, $f((x_n', y_n'))=\dfrac{2}{5}$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$, ceea ce implică

$\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n, y_n))=\dfrac{1}{2}$, respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n', y_n'))=\dfrac{2}{5}$.

Operații cu limite de funcții

Să considerăm un spațiu metric (X, d), un spațiu liniar normat $(E, \| \ \|)$ funcțiile $f, g : A \to E$, unde $A \subset X$ şi x_0 un punct de acumulare al mulțimii A.

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha \cdot f)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, unde $\alpha : A \to$ **R.**

- Fie spațiile metrice $(X,d),(X_1,d_1),(X_2,d_2)$, funcțiile $f:A\to X_1$, şi $g:B\to X_2$, unde $A\subset X, B\subset X_1, f(A)\subset B$ şi $x_0\in A'$; dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ şi $\lim\limits_{y\to l} g(y)=l_1$, atunci există $\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=l_1$

Calculul limitelor unor funcții

- Fie $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$ o funcție vectorială de o variabilă reală dată de $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, unde $f_k : A \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le m$.

Dacă $x_0 \in A'$ avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbf{R}^m$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f_k(x) = l_k, 1 \le k \le m$.

Demonstrația se bazează pe inegalitatea:

$$|a_k - b_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k)^2} \le \sum_{k=1}^{m} |a_k - b_k|, \quad a_k, b_k \in \mathbf{R},\ 1 \le k \le m$$

- Pentru funcțiile $f, g : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ ce au următoarele proprietăți:

  - $\left| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \leq g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$
  - $\lim\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \to x_0} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in A'$

avem $\lim\limits_{(x_1, \ldots, x_n) \to x_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Exemple

- $$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)} \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sin\frac{1}{x_1^2+\ldots+x_n^2}=0$$ deoarece:

$$\left|\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sin\frac{1}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right|\le\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

şi $$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)} \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}=0\ .$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} = 0$, deoarece folosind inegalitatea $\dfrac{|a \cdot b|}{a^2 + b^2} \le \dfrac{1}{2}$

avem:

$$\frac{|x^2 \cdot y|}{x^2 + y^2} = \frac{|x \cdot y|}{x^2 + y^2} \cdot |x| \le \frac{1}{2} \cdot |x| \text{ și } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \cdot |x| = 0 .$$

- Pentru a calcula $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+x^4+y^4+x^4\cdot y^4)}{x^4+y^4}$, folosim faptul că

$\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ şi astfel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4+x^4\cdot y^4)}{x^4+y^4} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^4+y^4+x^4\cdot y^4)}{x^4+y^4+x^4\cdot y^4} \cdot \frac{x^4+y^4+x^4\cdot y^4}{x^4+y^4} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{x^4\cdot y^4}{x^4+y^4}\right) = 1$$

deoarece:

$$\frac{x^4\cdot y^4}{x^4+y^4} = \frac{x^2\cdot y^2}{x^4+y^4}\cdot x^2\cdot y^2 \le \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot y^2 \quad \text{şi} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot y^2 = 0 .$$

De reținut

- Definiția limitei unei funcții într-un punct
- Criteriul lui Heine
- Calculul limitei unei funcții vectoriale
- Calculul limitei unei funcții reale de mai multe variabile reale

Tema

1. Studiați existența următoarelor limite:

   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$;
   - $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{arctg\, x^2 \cdot y^2}{x^4 + y^4}$.

2. Calculați limitele următoare:

   - $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x-1} \cdot \sin \dfrac{1}{x^2 - 1}$;
   - $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^4 + y^4 + 1} - 1}{x^4 + y^4}$;
   - $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1 + x^4 + y^4 + x^4 \cdot y^4\right)^{\frac{1}{x^4 + y^4}}$;

Funcții continue

Să considerăm două spații metrice (X, d) şi (X_1, d_1),

o funcție $f : A \to X_1$, unde $A \subset X$ şi un punct $x_0 \in A \cap A'$.

Spunem că f este *continuă* în x_0 dacă

oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $d(x, x_0) < \delta$,

să avem $d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

De reținut: f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi este egală cu $f(x_0)$.

Dacă funcția $f : A \to X_1$ este continuă în fiecare punct din A, spunem că f este *continuă pe* A.

În cazul spațiilor liniare normate $(E, \| \ \|)$, $(E_1, \| \ \|_1)$
şi a funcției $f : A \to E_1$, $A \subset E$ vom spune că
f este continuă în $x_0 \in A \cap A'$, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$,
astfel încât $\forall x \in A$ cu $\|x - x_0\| < \delta$, avem $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Exemplu

- Considerând spațiul liniar normat $(E, \| \|)$, vom arăta că norma $\| \| : E \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pe E:

luând $\varepsilon > 0$, determinăm un $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta$ să avem $\left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \varepsilon$.

Ținând seama de inegalitatea $\left| \|x\| - \|x_0\| \right| < \|x - x_0\|$, obținem $\delta = \varepsilon$.

Prelungirea prin continuitate

În cazul în care $f: A \to X_1$, unde $A \subset X$ şi $x_0 \in A' \setminus A$,
dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, se poate construi funcția $g: A \cup \{x_0\} \to X_1$,
continuă în x_0, dată de formula $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$,
funcție ce se numeşte *prelungirea prin continuitate* a lui f în x_0.

Exemple

- Funcția $f_1 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to [-1,1]$ definită prin $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nu poate fi prelungită

prin continuitate în $x_0 = 0$, deoarece nu există $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$.

- Funcția $f_2 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ poate fi prelungită

prin continuitate în $x_0 = 0$, deoarece $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$ şi anume:

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Criteriul lui Heine

- Considerând două spații metrice (X,d) şi (X_1,d_1),

o funcție $f:A\to X_1$ unde $A\subset X$ şi $x_0\in A'\cap A$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. f este continuă în x_0;
2. oricare ar fi şirul $(x_n)_n\subset A$, convergent la x_0, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$

Operații cu funcții continue

Să considerăm un spațiu metric (X, d), un spațiu liniar normat $(E, \|\ \|)$ funcțiile $f, g : A \to E$, unde $A \subset X$ şi $x_0 \in A \cap A'$.

- Dacă funcțiile f şi g sunt continue în x_0, atunci funcția $f + g$ este continuă în x_0;
- Dacă funcția f şi funcția $\alpha : A \to \mathbf{R}$ sunt continue în x_0, atunci funcția $\alpha \cdot f$ este continuă în x_0.

$C(A)$

Notăm $\boldsymbol{C}(A) = \{f : A \to E,\ f$ continuă pe $A\}$,

Mulțimea $C(A)$, înzestrată cu operațiile de adunare şi înmulțire cu scalar, este un spațiu vectorial real.

- Fie spațiile metrice (X,d), (X_1,d_1), (X_2,d_2), funcțiile $f:A\to X_1$, și $g:B\to X_2$, unde $A\subset X$, $B\subset X_1$, $f(A)\subset B$ și $x_0\in A\cap A'$;

dacă f este continuă în x_0 și g este continuă în $f(x_0)$, atunci $g\circ f$ este continuă în x_0.

Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.

Mulțime compactă

Într-un spaţiu metric (X,d), mulţimea K este *compactă* dacă orice şir din K conţine un subşir convergent. în K.

Exemple

- Orice interval $[a,b] \subset \mathbf{R}$ este o mulțime compactă, deoarece considerând şirul $(x_n)_n \subset [a,b]$, acesta este mărginit şi conform lemei lui *Cesaro* conține un subşir convergent în mulțimea închisă $[a,b]$.

- În $\mathbf{R}^n$ o mulțime este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.

- Fie spațiile metrice $(X,d),(X_1,d_1)$;

dacă funcția $f:A\to X_1$, $A\subset X$ este continuă,

atunci imaginea prin f a unei mulțimi compacte $K\subset A$,

este o mulțime compactă.

Exemple

- Pentru a arăta că graficul unei funcții continue $f:[a,b]\to \mathbf{R}$,

$$G_f=\{(x,f(x))\,|\,x\in[a,b]\}$$

este o mulțime compactă, construim funcția vectorială $h:[a,b]\to \mathbf{R}^2$, $h(x)=(x,f(x))$, funcție ce este continuă, având componentele continue. Graficul funcției f este imaginea prin h a compactului $[a,b]$, deci este o mulțime compactă.

- Dacă o funcție reală, definită pe o mulțime compactă K , dintr-un spațiu spațiu metric (X,d) este continuă pe K , atunci este mărginită pe K şi îşi atinge marginile.

Funcție uniform continuă

Considerând două spații metrice (X, d) și (X_1, d_1), spunem că o funcție $f : X \to X_1$ este *uniform continuă* pe $A \subset X$ dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât:

$\forall x_1, x_2 \in A$ cu $d(x_1, x_2) < \delta$ să avem $d_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Se observă că o funcție uniform continuă pe A este continuă în orice punct din A, reciproca nefiind adevărată.

Considerând două spații metrice (X, d) şi (X_1, d_1), spunem că o funcție $f : A \to X_1$, este funcție *lipschitziană* dacă există $L > 0$ astfel încât $d_1(f(x_1), f(x_2)) \le L \cdot d(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$.

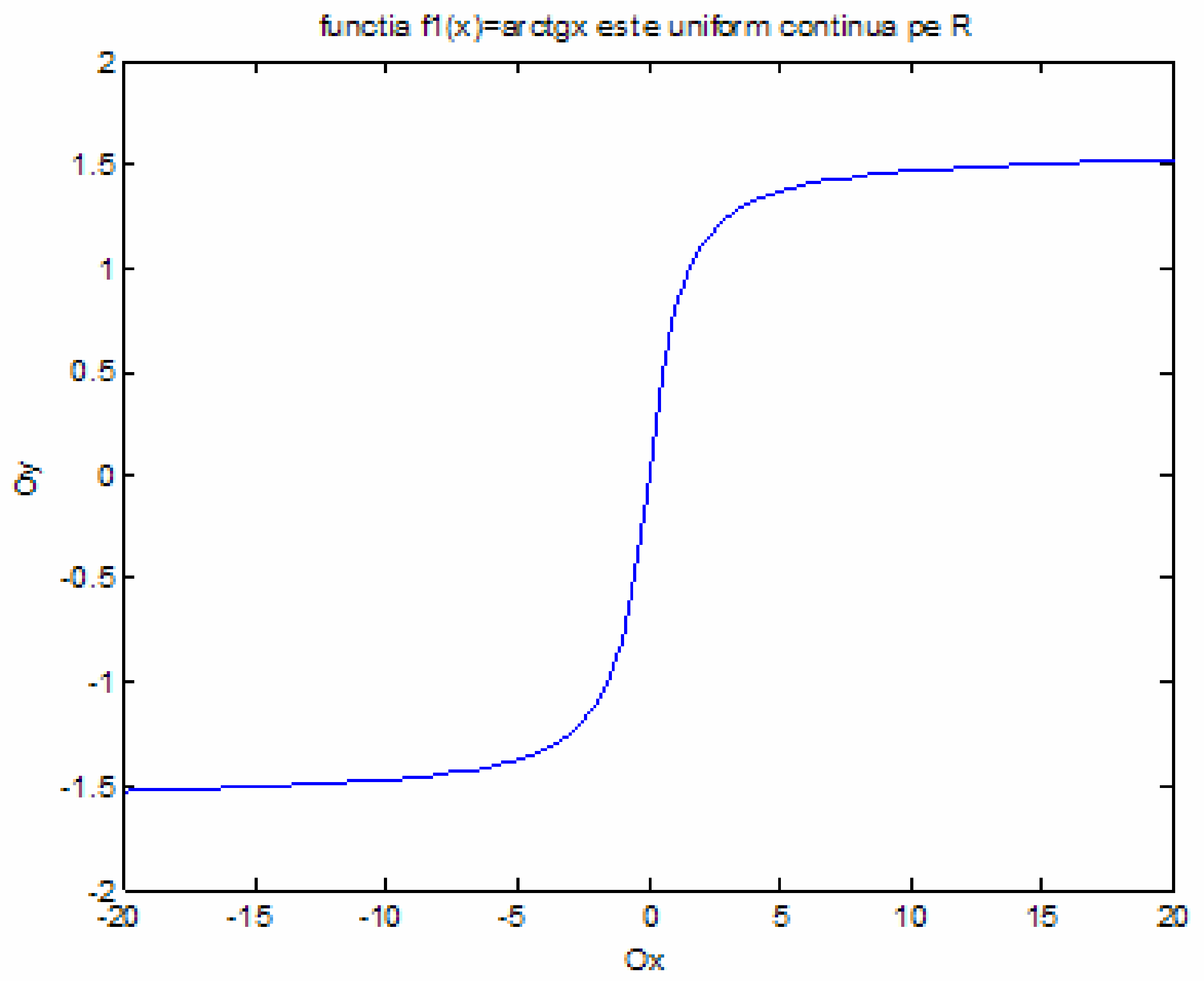
- O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă, cu derivata mărginită pe $A \subset \mathbf{R}$ este lipschitziană pe A.

- O funcție lipschitziană este uniform continuă

Exemple

- Funcția $f_1 : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definită de $f_1(x) = arctgx$ este uniform continuă

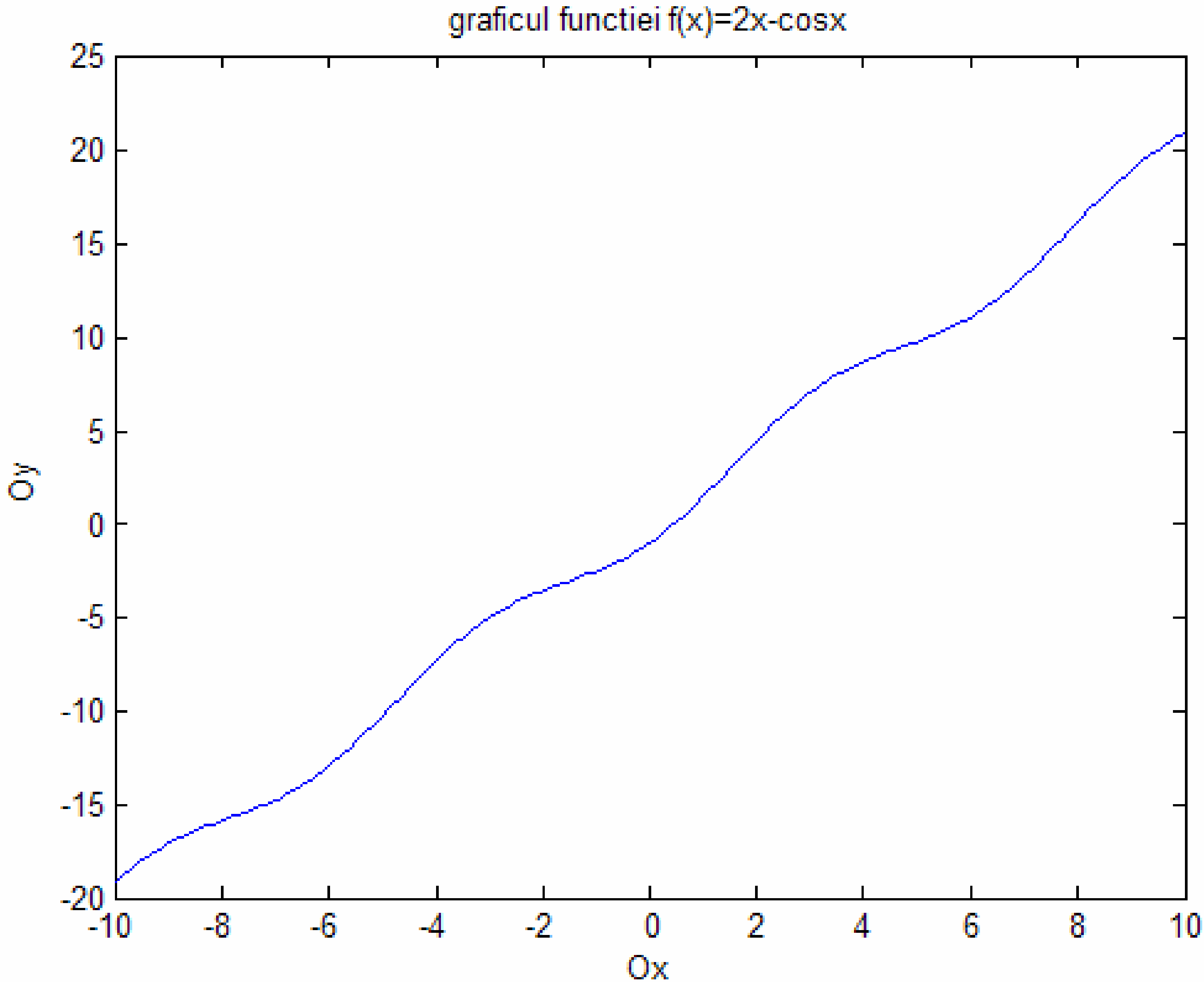
deoarece $f_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} \le 1$, ceea ce înseamnă că derivata este mărginită pe **R**,
adică f_1 este lipschitziană


functia f1(x)=arctgx este uniform continua pe R
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
Oy
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
Ox

- Funcția $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită de $f_2(x) = 2x - \cos x$ este uniform continuă deoarece

$$|f_2'(x)| = |2 + \sin x| \le 2 + |\sin x| \le 3$$

și astfel funcția este lipschitziană, deci uniform continuă.



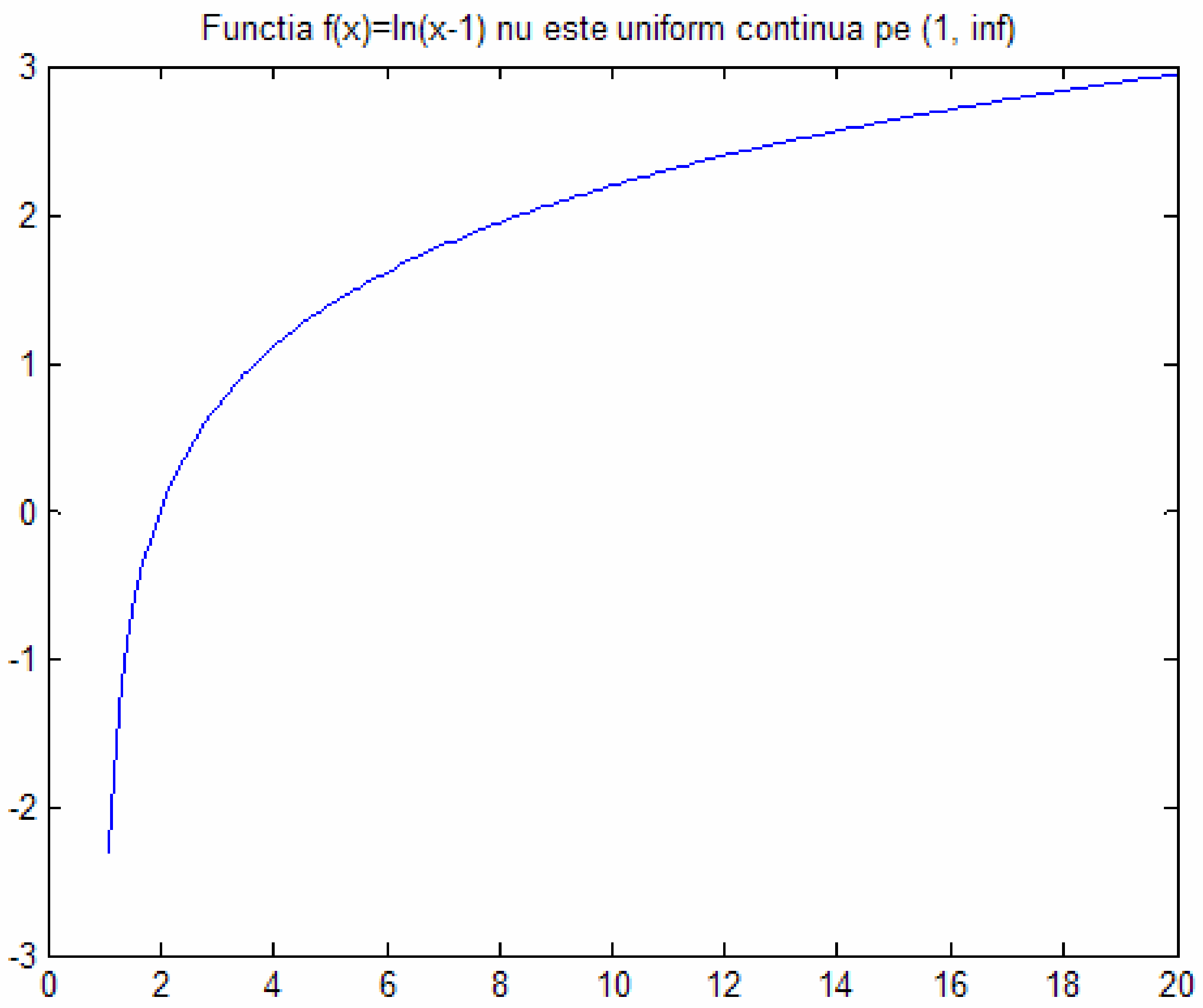
graficul functiei f(x)=2x-cosx
Oy
Ox
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

De reținut: dacă funcția $f : A \to X_1$, $A \subset X$ este uniform continuă pe A, atunci este uniform continuă pe orice submulțime $A_1 \subset A$.

- Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f_2(x) = 2x - \cos x$ este uniform continuă pe $(-10\pi, 10\pi) \subset \mathbf{R}$.

- O funcție $f:(a,b)\to \mathbf{R}$, $(a,b)\subset \mathbf{R}$, continuă pe (a,b) care admite asimptotă verticală $x=a$ sau $x=b$ nu este uniform continuă pe (a,b).

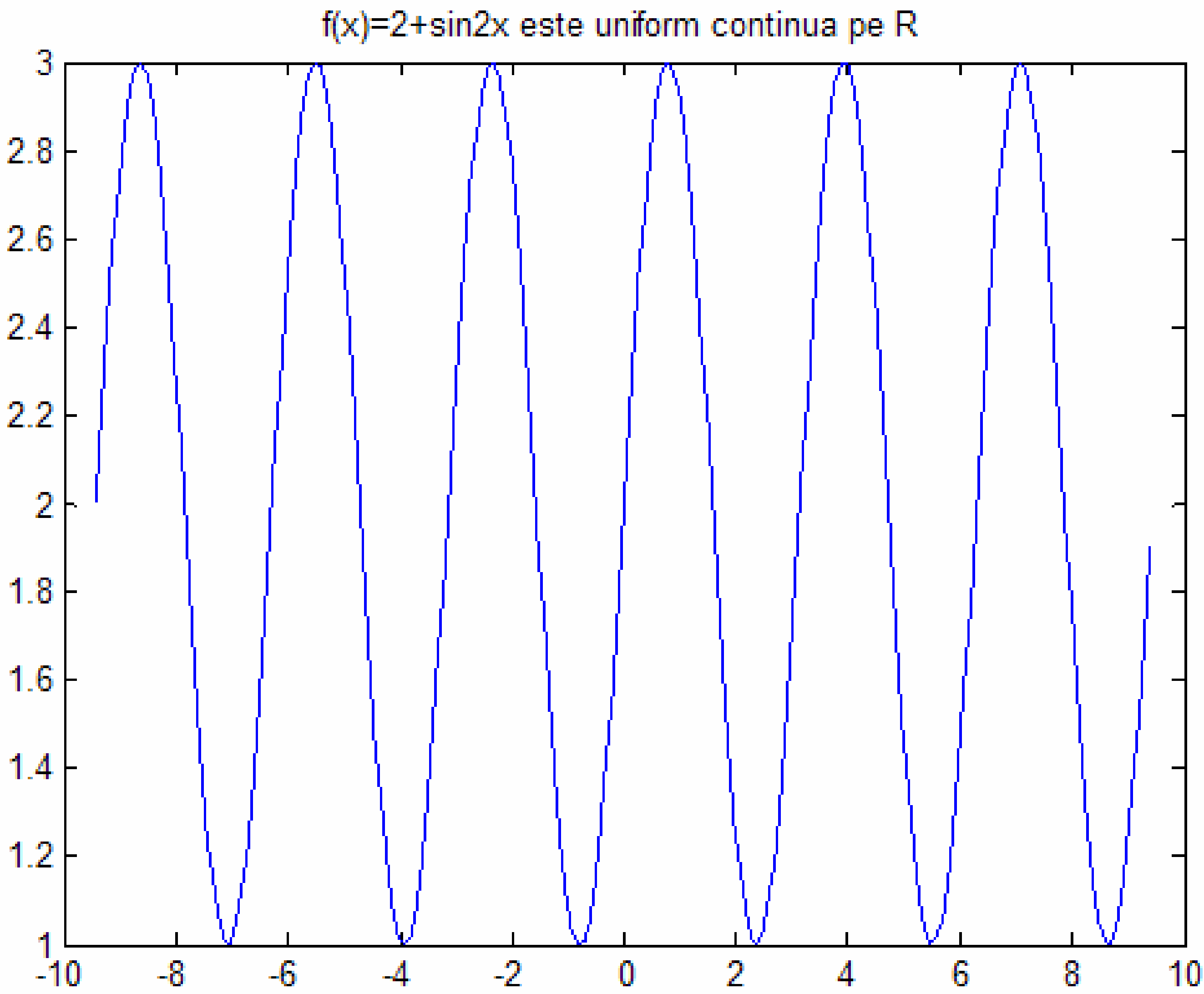
- Funcția $f(x)=\ln(x-1)$ nu este uniform continuă pe $(1,+\infty)$ deoarece $x=1$ este asimptotă verticală ($\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\ln(x-1)=-\infty$).



Functia f(x)=ln(x-1) nu este uniform continua pe (1, inf)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

- O funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ periodică și continuă este uniform continuă pe $\mathbf{R}$.

- Funcția $f:\mathbf{R}\to[1,3]$, definită prin $f(x)=2+\sin 2x$ este continuă, periodică, de perioadă $T=\pi$, deci uniform continuă pe $\mathbf{R}$.


f(x)=2+sin2x este uniform continua pe R
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

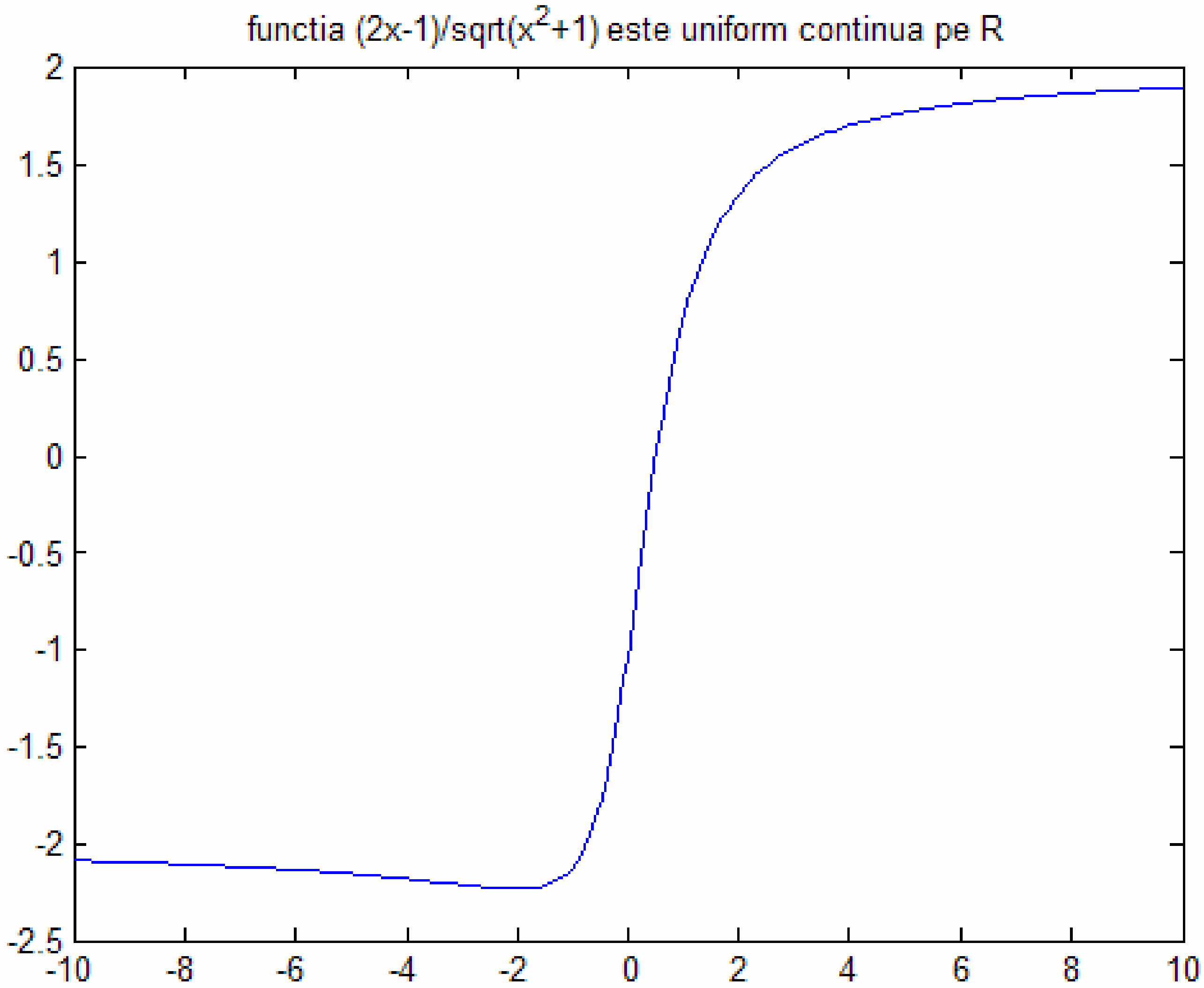
- O funcție continuă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, al cărei grafic admite asimptote la $-\infty$ şi la $+\infty$, este uniform continuă pe **R**.

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}$ este continuă pe **R** şi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=2,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(2-\frac{1}{x}\right)}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=-2,$$

adică funcția admite asimptote orizontale $y=2$ la $+\infty$ şi $y=-2$ la $-\infty$.
În concluzie f este uniform continuă pe **R**.


functia (2x-1)/sqrt(x2+1) este uniform continua pe R
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

- Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ este continuă pe $\mathbf{R}$ și admite asimptote oblice:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

$y=x-\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

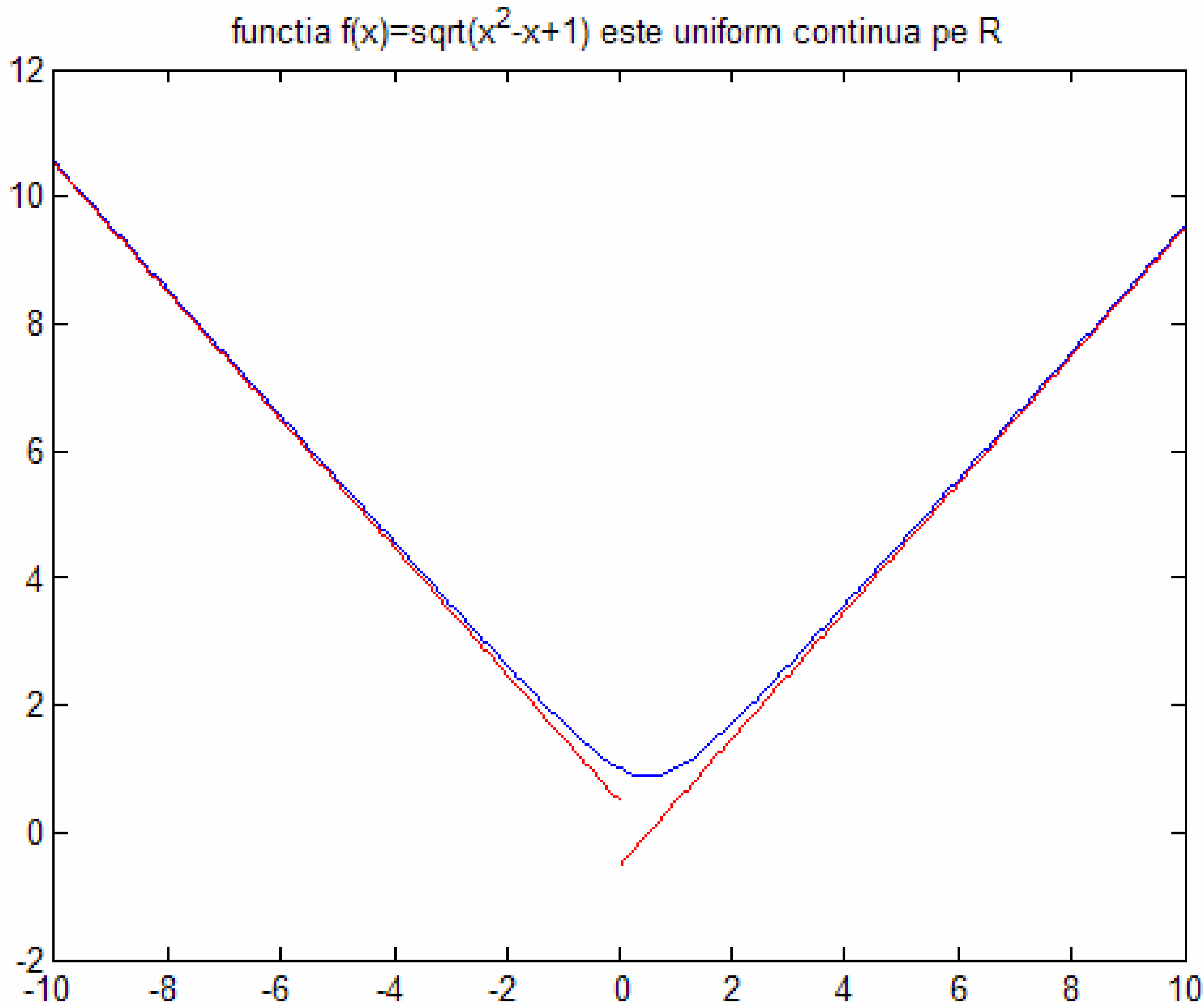
$$m_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1$$

$$n_1=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)}=\frac{1}{2}$$

$y=-x+\frac{1}{2}$ este asimptotă oblică la $-\infty$

Aşadar funcţia este uniform continuă pe **R**.


functia f(x)=sqrt(x^2-x+1) este uniform continua pe R
12
10
8
6
4
2
0
-2
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

- Fie spațiile metrice (X,d), (X_1,d_1) și $K \subset X$ o mulțime compactă; dacă funcția $f: K \to X_1$ este continuă pe K, atunci este uniform continuă pe K.

Exemple

- Funcția $f:(2,\infty)\to \mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\ln(x-2)$ este uniform continuă pe $[3,10]$, fiind continuă pe acest compact.

- Este funcția $f:(1,\infty)\to \mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$ uniform continuă pe $(3,4)$?

Ştim că f este continuă pe $[3,4]$, deci va fi uniform continuă pe această mulțime compactă, şi pe orice submulțime a sa, adică şi pe $(3,4)$.

Transfer de continuitate

- Considerăm două spații metrice (X,d) şi (X_1,d_1); funcția limită unui şir de funcții $(f_n)_n$, $f_n : A \to X_1$ funcții continue pe $A \subset X$, uniform convergent pe A, este continuă pe A.

Altfel spus:: limita uniformă a unui şir de funcții continue este o funcție continuă.

Exemplu

- Funcția limită a șirului de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **este** definită de

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} - x + 1}{x^{2n} + \sqrt{1 + x^2}} \text{ este } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}, & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}, & x = 1 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}+1}, & x = -1 \\ x, & |x| > 1 \end{cases}$$

Acest șir nu este uniform convergent pe $[-3,3]$, deoarece funcțiile f_n sunt continue pe $[-3,3]$, dar funcția limită nu este.

- Considerând (X,d) un spațiu metric, $(E,\| \ \|)$ un spațiu Banach și un șir de funcții $f_n : A \to E, n \in \mathbf{N}$, unde $A \subset X$, dacă $\sum_{n \geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe A și termenii ei sunt funcții continue pe A, atunci suma sa s este o funcție continuă pe A.

Exemplu

- Am demonstrat cu criteriul lui Weierstrass convergența uniformă pe **R** a seriei

de funcții $\sum_{n\geq 0} arctg \frac{2x}{x^2+n^6}$; funcțiile $f_n(x)=arctg\frac{2x}{x^2+n^6}$ sunt continue pe **R** şi astfel

putem afirma că suma seriei este o funcție continuă pe **R**.

În particular seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$ definește o funcție continuă

$f:(x_0-R, x_0+R)\to \mathbf{R},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$, dacă $R<+\infty$ și

respectiv $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$, dacă $R=+\infty$.

- Dacă $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci există un şir de polinoame $(P_n)_n$, care converge uniform la f pe $[a,b]$.

Demonstrația teoremei se face pentru intervalul $[0,1]$; trecerea de la intervalul $[a,b]$ la $[0,1]$ este imediată prin transformarea $[a,b]\to[0,1]$ dată de $t=\dfrac{x-a}{b-a}$, transformare ce păstrează polinoamele. Se consideră polinoamele *Bernstein* asociate funcției f:

$$B_n(x)=\sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right)\cdot C_n^m\cdot x^m\cdot(1-x)^{n-m},$$

polinoame ce converg uniform la f, pe $[0,1]$

De reţinut

- Funcţie continuă într-un punct, funcţie continuă pe o mulţime
- Criteriul lui Heine
- Prelungire prin continuitate
- Funcţie uniform continuă pe o mulţime
- Condiţii suficiente ca o funcţie reală de variabilă reală să fie uniform continuă.
- Transfer de continuitate în cazul şirurilor de funcţii, seriilor de funcţii, seriilor de puteri.

Tema

1. Se pot prelungi prin continuitate, în punctele indicate, următoarele funcții:

   o $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ în $x = 0$;

   o $g(x,y) = \left(1 + x^2 \cdot y^4\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ în $(x,y) = (0,0)$.

2. Precizați care din funcțiile următoare este uniform continuă, pe mulțimile indicate, justificând răspunsurile:

   o $f_1(x) = x + arctgx,\ x \in \mathbb{R}$;

   o $f_2(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-4}},\ x \in (2,5)$;

   o $f_3(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+1}},\ x \in \mathbb{R}$;

3. Este şirul de funcţii $(f_n)_n$, unde $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este definită prin

$$f_n(x) = \frac{(x^2+2)\cdot e^{nx} - \ln(x+\sqrt{x^2+1})}{e^{nx+1}+\sqrt{x^2+1}},\ n \in \mathbf{N},$$

uniform convergent pe $[-1,1]$?

4. Este suma seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot x^2}{n^5+x^4}$ o funcţie continuă pe $\mathbf{R}$?

Curbe

Funcția vectorială $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ $\gamma(t)=(f(t),g(t))$, continuă pe $[a,b]$,
(f și g sunt continue pe acest interval) se numește *curbă* parametrizată în $\mathbf{R}^2$,
în timp ce funcția vectorială continuă $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^3$
$\gamma(t)=(f(t),g(t),h(t))$ este o *curbă* în $\mathbf{R}^3$
Definim o *reprezentare parametrică* (o *parametrizare*) a curbei prin:

$$\gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}\quad t\in[a,b]\qquad \text{respectiv}\qquad \gamma:\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases}\quad t\in t\in[a,b]$$

(*ecuațiile parametrice ale curbei*).

Imaginea $\gamma([a,b]) = (\gamma) \subset \mathbf{R}^2$ se numeşte *urma* (*traiectoria*) curbei γ,

$\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc *capetele curbei*; dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ este o *curbă închisă*.

Exemple

- Identificând $\mathbf{R}^2$ cu planul xOy, urma curbei $\gamma:[0,\frac{\pi}{2}]\to \mathbf{R}^2$, definită prin $\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$ este sfertul de cerc unitate (cu centru în origine, de raza 1) situat în primul cadran $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0\}$. Capetele curbei sunt punctele $(1,0), (0,1)$.

- Curba $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$, definită de $\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$ este închisă deoarece $\gamma(0)=\gamma(2\pi)=(1,0)$; urma curbei este cercul unitate, parcurs în sens trigonometric $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$.

- Curba $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^3$, definită de $\gamma(t)=(\cos t, \sin t, 3)$ are ca urmă cercul $\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3,\ x^2+y^2=1, z=3\}$.

Pentru $\gamma:[a,b]\to \mathbf{R}^n$, $n\in\{2,3\}$, curbă parametrizată fixată, putem defini $\gamma^-:[a,b]\to \mathbf{R}^n$, prin $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$, curbă numită *opusa* curbei γ.

Remarcăm că urmele curbelor γ şi γ^- coincid.

Dacă $\gamma_1:[a,b]\to \mathbf{R}^m$ şi $\gamma_2:[b,c]\to \mathbf{R}^m$ sunt două curbe parametrizate în $\mathbf{R}^m$, $m\in\{2,3\}$, cu proprietatea că $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ putem defini curba:

$$\gamma_1\cup\gamma_2:[a,c]\to \mathbf{R}^m,\ \text{dată de: } (\gamma_1\cup\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(t),\ t\in[a,b]\\ \gamma_2(t),\ t\in[b,c]\end{cases}$$

numită *juxtapunerea* curbelor γ_1 şi γ_2.

Urma lui $\gamma_1\cup\gamma_2$ este reuniunea $(\gamma_1)\cup(\gamma_2)$.

Dacă $F : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ este o funcție continuă, mulțimea

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

este urma unei curbe în $\mathbf{R}^2$, $F(x, y) = 0$ se numește ecuația carteziană a curbei.

Obținerea ecuațiilor parametrice ale unei curbe definite prin ecuația carteziană

Reamintim ecuațiile ce leagă coordonatele carteziene (x, y) de coordonatele polare (r, t) :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], r \geq 0 \qquad (*)$$

Scriem într-o primă etapă ecuația curbei în coordonate polare $r = \varphi(t)$,

apoi înlocuim pe r cu $\varphi(t)$ în formulele (*).

Exemple

- Mulțimea $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=a^2\}$ este cercul cu centrul în origine, de rază 1.

Ecuația acestui cerc în coordonate polare este $r=a$ şi astfel ecuațiile parametrice ale cercului sunt:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = a\cdot\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]:$$

- *Să scriem ecuatiile parametrice ale lemniscatei lui Bernoulli* ştiind că ecuația carteziană a lemniscatei este $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.

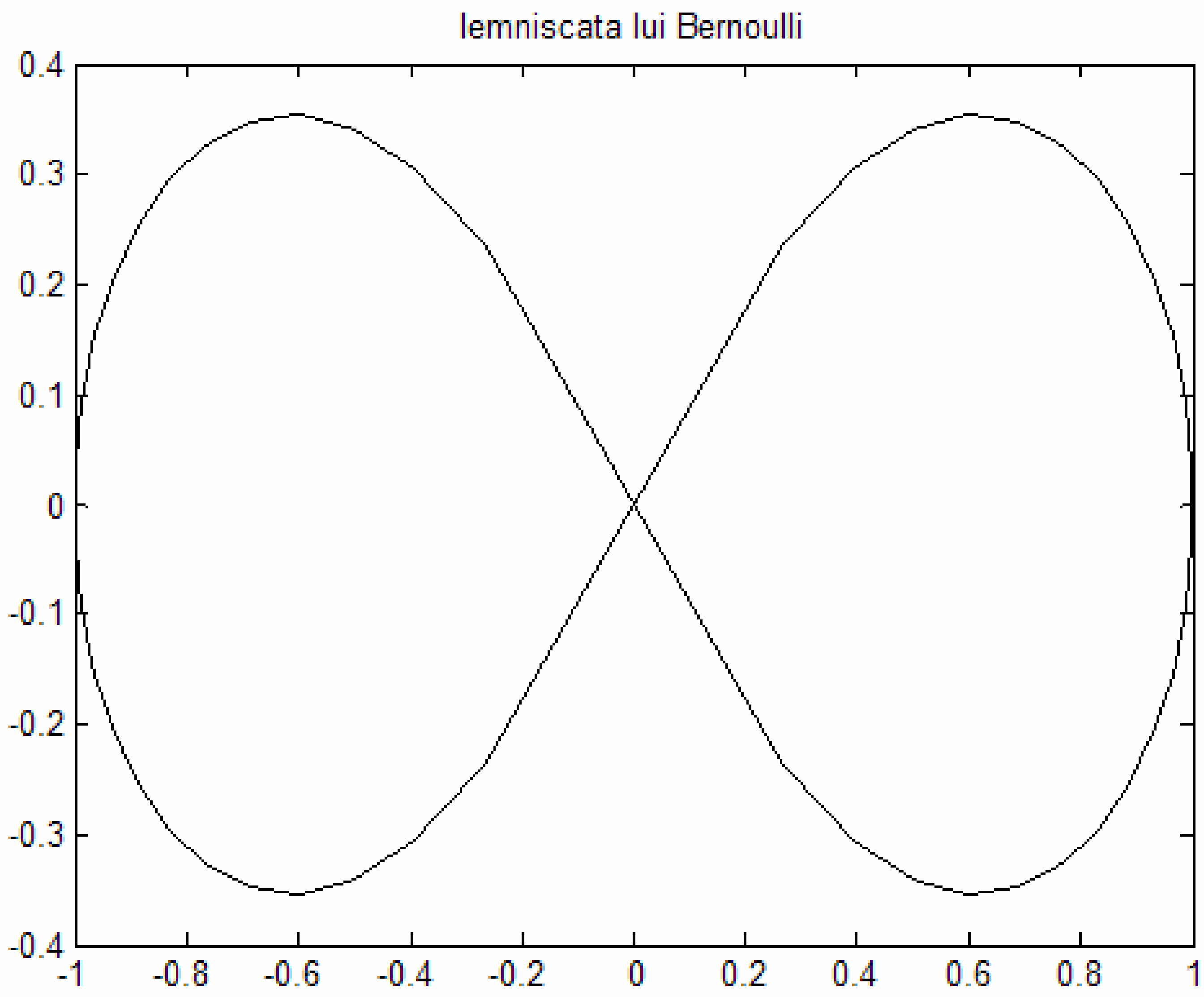
Inlocuind coordonatele carteziene cu cele polare obținem:

$r^2 = \cos^2 t - \sin^2 t$

adică $r = \sqrt{\cos 2t}$; din condiția $\cos 2t > 0$ obținem: $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ şi astfel

ecuațiile parametrice ale lemniscatei sunt:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos 2t} \cdot \cos t \\ y = \sqrt{\cos 2t} \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$



lemniscata lui Bernoulli
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

- Pentru a scrie ecuațiile parametrice ale elipsei $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \}$ folosim coordonate polare generalizate:

$$\begin{cases} x = a \cdot r \cdot \cos t \\ y = b \cdot r \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

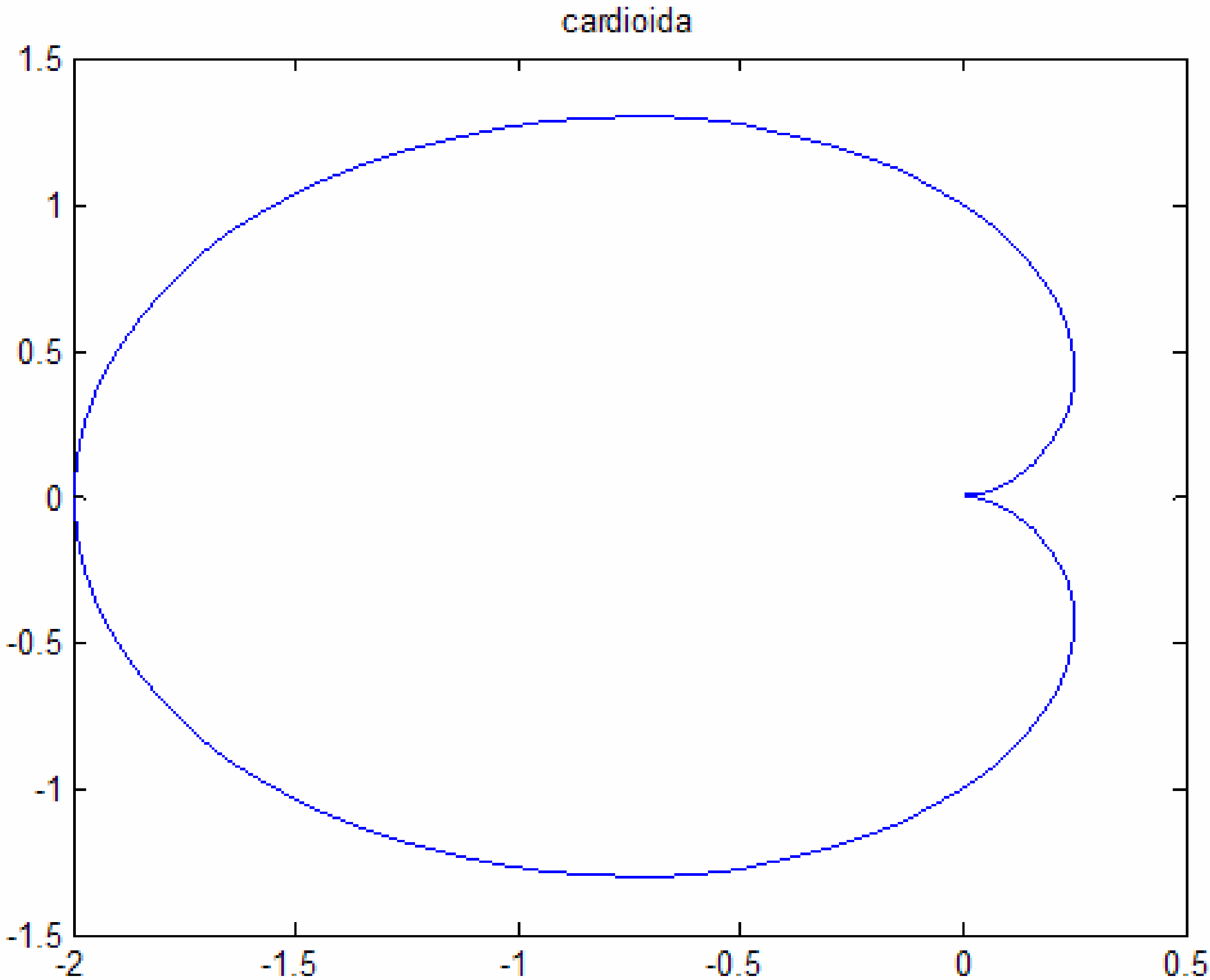
Ecuația elipsei în coordonate polare generalizate este $r = 1$ şi ecuațiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

În cazul în care este dată ecuația curbei în coordonate polare $r = \varphi(t)$ este mai simplu de a scrie ecuațiile parametrice ale curbei, având doar de inlocuit în ecuațiile (*) r cu $\varphi(t)$.

- Ecuația *cardioidei* în coordonate polare este $r = 1 + \cos t$, $t \in [-\pi, \pi]$ şi astfel

ecuațiile parametrice vor fi $\begin{cases} x = (1+\cos t)\cdot \cos t \\ y = (1+\cos t)\cdot \sin t \end{cases}$ $t \in [-\pi, \pi]$.


cardioida
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

Problemă

- Pentru a arăta că mulțimea $M=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=a^2\}\subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime compactă, ținem seama că $M=\gamma([0,2\pi])$ unde $\gamma:[0,2\pi]\to \mathbf{R}^2$ definită de $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$.
 Funcția vectorială γ este continuă, deoarece componentele sale $f,g:[0,2\pi]\to \mathbf{R}$ $f(t)=\cos t$, $g(t)=\sin t$ sunt funcții continue şi astfel imaginea compactului $[0,2\pi]$ prin γ este o mulțime compactă.

De reținut

- Ecuațiile parametrice ale curbelor
- Urma unei curbe
- Ecuația carteziană a unei curbe
- Obținerea ecuațiilor parametrice ale unei curbe definite prin ecuația carteziană

Tema

1. Scrieți ecuațiile parametrice ale curbelor ale căror ecuații în coordonate carteziene sunt:

   o $\sqrt{x^2+y^2} = arctg\,\dfrac{y}{x}$;

   o $x^2+y^2-y=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. Este mulțimea $E=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\}$ o muțime compactă?

Aplicații liniare şi continue

O aplicație $T:V \to V_1$ între două spații vectoriale reale V, V_1 este *liniară* dacă satisface relația $T(\alpha \cdot x + \beta \cdot x') = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(x')$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\forall x, x' \in V$.

De obicei, în cazul unei aplicații liniare T scriem Tx în loc de $T(x)$.

Să reținem că putem discuta despre liniaritatea aplicației $T:U \to V_1$, $U \subset V$, numai dacă U este un subspațiu liniar al lui V.

- Considerăm sistemul liniar de *m* ecuații cu *n* necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

și definim o aplicație liniară $T:\ \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, dată de:

$$T(x_1,\ldots, x_n) = (a_{11}\cdot x_1 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n, \ldots, a_{m1}\cdot x_1 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n)$$

și astfel putem interpreta problema rezolvării acestui sistem de ecuații în modul următor: fiind dat vectorul $(b_1,\ldots, b_m)$, să găsim acei vectori $(x_1,\ldots, x_n)$ care verifică relația $T(x_1,\ldots, x_n) = (b_1,\ldots, b_m)$.

Vom nota (V,V_1) mulțimea tuturor aplicațiilor liniare ce aplică pe V în V_1, mulțime ce formează un spațiu liniar față de corpul **R**, definind:

$(T_1+T_2)(x)=T_1x+T_2x, \forall x \in V$ şi $(\alpha \cdot T)(x)=\alpha \cdot Tx, \forall x \in V, \forall \alpha \in$ **R**.

Elementul nul al acestui spațiu, notat O, se numeşte *aplicația nulă*, şi este dat de formula: $O\,x=\theta_{V_1}, \forall x \in V$

Să considerăm spațiile vectoriale V, V_1 cu bazele $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, respectiv $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ și aplicația $T \in (V, V_1)$.

Dacă $x \in V$, în baza $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, x poate fi scris ca fiind

$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k$ și atunci:

$$y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot Tv_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} \cdot w_j\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot x_k\right) \cdot w_j$$

Scriind acum $y = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot w_j$ obținem $y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot x_k, 1 \le j \le m$

Aplicația T este caracterizată prin coeficienții a_{jk}.

Scriind dezvoltat formula ce dă legătura între coordonatele lui y şi coordonatele lui x:

$$y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n$$

....

$$y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n$$

obţinem matricea asociată aplicaţiei liniare T:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Studiul aplicaţiilor liniare în spaţii finit dimensionale se reduce astfel la studiul matricelor corespunzătoare.

Unei aplicații liniare $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ i se asociază matricea

$$M_T = \left(Te_1, Te_2, \ldots, Te_n\right)$$

adică vectorii Te_i formează coloanele lui M_T, unde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este baza uzuală din $\mathbf{R}^n$.

Aplicație liniară şi continuă

Dacă $(E, \| \ \|)$ şi $(E_1, \| \ \|_1)$ sunt spații liniare normate, aplicația liniară $T : E \to E_1$ este *continuă* în $x_0 \in E$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $\|x - x_0\| < \delta$ implică $\|Tx - Tx_0\|_1 < \varepsilon$.

- Aplicația liniară $T : E \to E_1$ este continuă pe E dacă şi numai dacă este continuă într-un singur punct.

Aplicația liniară $T : E \to E_1$ este *mărginită* dacă există un număr pozitiv M astfel încât $\|Tx\|_1 \le M \cdot \|x\|, \forall x \in E$.

- Condiția necesară şi suficientă ca aplicația liniară $T : E \to E_1$ să fie continuă este să fie *mărginită*.

- Orice aplicație liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este continuă.

De reținut

- Aplicație liniară; matricea asociată unei aplicații liniare
- Aplicație liniară şi continuă
- Condiție necesară şi suficientă ca o aplicație liniară să fie continuă.

Principiul contracțiilor

Intr-un spațiu metric (X,d) o funcție $f : A \to X,\ A \subset X$ este o *contracție* dacă există $C \in (0,1)$ astfel încât:

$$d(f(x_1), f(x_2)) \le C \cdot d(x_1, x_2),\ \forall x_1, x_2 \in E.$$

Teoremă de punct fix; metoda aproximațiilor succesive

- Dacă înr-un spațiu metric complet (X,d), funcția $f:A\to X$, unde mulțimea $A\subset X$ este închisă, este o contracție, atunci f admite un punct fix unic $\bar{x}$, adică $f(\bar{x})=\bar{x}$.

In plus, alegând x_0 un punct oarecare din A, șirul: $x_0, x_1=f(x_0),\ldots,$

$x_{n+1}=f(x_n),\ldots$ converge la $\bar{x}$ și avem:

$$d(x_n,\bar{x})\le\frac{C^n}{1-C}\cdot d(x_0,f(x_0))$$

Exemplu

- Să studiem convergența şirului definit prin relația de rcurență:

$$x_0 = 7,\ x_{n+1} = \frac{4x_n^2+1}{5x_n},\ n \geq 0$$

folosind principiul contracțiilor.

Considerăm funcția $f:[10^{-5},\infty) \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{4x^2+1}{5x}$.

Calculând $f'(x) = \dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{5x^2}$ avem $|f'(x)| < \dfrac{4}{5},\ \forall x \geq \dfrac{1}{10^5}$ şi din aplicarea teoremei creşterilor finite obținem:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x_1 - x_2|,\ \forall x_1, x_2 \geq \frac{1}{10^5}$$

deci f este o contracție.

Şirul în studiu este şirul aproximaţiilor succesive din principiul contracţiilor, pentru funcţia $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{3x}$ şi converge la punctul fix al funcţiei, pe care-l determinăm rezolvând ecuaţia: $x=\dfrac{4x^2+1}{5x}$, în mulţimea $[10^{-5},\infty)$.

In concluzie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

De reținut

- Contracție
- Teorema de punct fix; metoda aproximațiilor succesive.

Tema

Folosind principiul contractiilor, studiați convergența şirului definit prin relația de recurență $x_0 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 2x_n + 1}{5x_n},\ n \geq 1$