Diferențiabilitate

2009-2010

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro

1. Diferențiabilitatea funcțiilor de variabilă reală

Punct interior unei mulțimi

Într-un spațiu metric (X,d) un punct x_0 este punct *interior* mulțimii $A \subset X$, dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(x_0,\varepsilon) \subset A$.

In particular dacă $X = \mathbf{R}$ avem:

$x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A$.

Funcție derivabilă

Spunem că funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbf{R}$.

Valoarea acestei limite se notează $f'(x_0)$ şi se numeşte *derivata* lui f în x_0.

Dacă f este derivabilă în fiecare punct din $A_1 \subset \operatorname{int}(A)$, vom spune că f este *derivabilă* pe A_1, iar funcția $f : A_1 \to \mathbf{R}$ definită prin $x \mapsto f'(x)$ se numeşte *derivata* lui f pe A_1.

Aplicații în economie: Rata de schimb

- *Rata de schimb* instantanee a funcției $y = f(x)$ în raport cu x este

$$y_{x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

De exemplu expresia $P(t) = \sqrt{at + b}$ cu $a = 920$ şi $b = 1359$ dă o bună aproximare a populatiei P (în milioane) a SUA în perioada 1950-2000, unde $t = 0$ corespunde anului 1950.

Rata de schimb instantanee pentru un timp oarecare t este $P'(t) = \dfrac{a}{2\sqrt{at + b}}$;

$P'(39) = 1.897$, ceea ce înseamnă că în 1989 populația SUA a crescut cu aproximativ 1.9 milioane.

Aplicații în economie: Analiza marginală

- *Marginal Analysis* este teorie economică ce se ocupă de estimarea efectelor produse de mici variații ale unor cantități ce apar în fenomene economice, cum ar fi costul, venitul, profitul:

Dacă $C(x)$ reprezintă costul producerii a x unități, costul producerii al celei de-a x_0+1 unități este $C(x_0+1)-C(x_0)$. În analiza marginală se definește *costul marginal* ca fiind $C'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C(x_0+h)-C(x_0)}{h}$.

Analog, definim *venitul marginal* ca fiind derivata funcției venit $R(x)$, respectiv *profitul marginal* $P'(x)$.

Funcție diferențiabilă

Funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ este *diferențiabilă* în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă există o aplicație liniară $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

cu alte cuvinte $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + \alpha(x) \cdot |x - x_0|$, unde $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

- Funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ este *diferențiabilă* în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă și numai dacă este derivabilă în x_0; aplicația liniară $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este dată de $Ts = f'(x_0) \cdot s$, $s \in \mathbf{R}$.

Aplicația liniară $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se numește *diferențiala* lui f în x_0 și se notează $df(x_0)$.
Să reținem așadar că $df(x_0) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o aplicație liniară.

- Dacă funcția $f: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$, atunci ea este continuă în x_0.

Reciproca nu este adevărată:

- Funcția $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă în $x = 0$.

Operații cu funcții derivabile

- Dacă funcțiile $f, g: A \to \mathbf{R},\ A \subset \mathbf{R}$ sunt derivabile în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$,

atunci funcțiile $f+g,\ \lambda \cdot f, \lambda \in \mathbf{R}, f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}\ (g(x) \neq 0)$ sunt derivabile în punctul x_0

și avem:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

- Dacă
  - funcția $f : A \to B$, unde $A, B \subset \mathbf{R}$, este derivabilă în punctul $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ și
  - funcția $g : B \to \mathbf{R}$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0) \in \mathrm{int}(B)$,

atunci $g \circ f$ este derivabilă în punctul x_0 şi avem:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

Derivata funcției vectoriale de variabilă reală

În cazul funcției vectoriale de variabilă reală $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$, raportul $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, unde $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ este un element din $\mathbf{R}^m$ și astfel $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se calculează pe componente.

- Funcția $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ este derivabilă în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă și numai dacă toate componentele sale sunt derivabile în punctul x_0 și avem $f'(x_0) = (f_1'x_0), \dots, f_m'(x_0))$

Curbă parametrizată. Vector tangent

Funcția $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in [a, b]$, unde $f, g, h : [a, b] \to \mathbf{R}$ sunt derivabile, este o curbă parametrizată.

Derivata funcției vectoriale $r(t)$, $r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$, ce îndeplinește condiția ca $\left\|\vec{r}'(t)\right\| \neq 0$, este *vectorul tangent* la această curbă.

O curbă $r(t)$, $t \in [a, b]$ este *netedă* dacă $r'(t) \neq (0, 0, 0)$, $t \in [a, b]$.

Analog se definesc aceste noțiuni in $\mathbf{R}^2$.

Exemple

- Elicea $r(t)=(\cos t,\sin t,t)$, $t\in[0,2\pi]$ este o curbă netedă deoarece

  $(-\sin t,\cos t,1)\neq(0,0,0)$, $t\in[0,2\pi]$,

  vectorul tangent fiind $r'(t)=(-\sin t,\cos t,1)$;

- Elipsa definită de $r(t)=(a\cos t,b\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ este o curbă netedă deoarece $(-a\sin t,b\cos t)\neq(0,0)$, $t\in[0,2\pi]$.

  Vectorul tangent este $r'(t)=(-a\sin t,b\cos t)$

Ecuația tangentei a curbă

Tangenta la curba definită de $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in [a,b]$ în punctul P, ce aparține curbei, adică $P(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$, $t_0 \in [a,b]$, este dreapta ce trece prin P și este paralelă cu vectorul tangent $r'(t_0)$, de ecuație:

$$r_{t_0}(t) = r(t_0) + t \cdot r'(t_0)$$

Exemplu

- Să scriem ecuația tangentei la elicea $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

în punctul $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}) = \dot{r}(\frac{\pi}{6})$.

Calculăm $r'(\frac{\pi}{6}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ și avem:

$$r_{\infty}(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}) + t \cdot \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right),$$

adică $r_{\infty}(t) = \left(\frac{\sqrt{3} - t}{2}, \frac{1 + \sqrt{3} \cdot t}{2}, \frac{\pi}{6} + t \right)$.

Vector normală

Versorul tangent la curba $r(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in [a, b]$ este vectorul

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\| r'(\mathrm{t}) \|} = \frac{(f'(t), g'(t), h'(t))}{\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}} \; .$$

Definim vectorul *normală* la aceeaşi curbă ca fiind $N(t) = T'(t)$

Se arată că $\langle T(t), N(t) \rangle = 0$, $t \in [a, b]$, ceea ce înseamnă că cei doi vectori sunt *ortogonali.*

Exemple

- Elicea definită prin $r(t)=(\cos t,\sin t,t)$, $t\in[0,2\pi]$, are

versorul tangent $T(t)=\left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}};\frac{\cos t}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

vectorul normală $N(t)=\left(\frac{-\cos t}{\sqrt{2}};\frac{-\sin t}{\sqrt{2}};0\right)$

- Elipsa definită de $r(t)=(a\cos t, b\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, are versorul tangent

$$T(t)=\left(\frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}};\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right),$$

vectorul normală

$$N(t)=\left(\frac{-ab^2\cos t}{\left(\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)^3};\frac{-a^2b\cos t}{\left(\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)^3}\right).$$

Considerăm o curbă parametrizată $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ simplă, neînchisă,

de ecuații parametrice $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$ şi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$:

$\Delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

Pentru punctele $P_k(f(t_k), g(t_k), h(t_k)),\ 0 \le k \le n$ definim suma:

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^{n} d(P_{k-1}, P_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f(t_k) - f(t_{k-1}))^2 + (g(t_k) - g(t_{k-1}))^2 + (h(t_k) - h(t_{k-1}))^2}$$

care reprezintă lungimea liniei poligonale cu vârfurile P_k.

Curbă rectificabilă

Dacă mulțimea $\{L_\Delta,\ \Delta \in \mathcal{D}[a,b]\}$ este mărginită, curba γ este *rectificabilă* şi are *lungimea* $L = \sup\{L_\Delta,\ \Delta \in \mathcal{D}[a,b]\}$.

Considerând $\gamma:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ o curbă rectificabilă, putem defini funcția $s:[a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $s(t)$ reprezintă lungimea arcului de curbă dat de:

$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u),\ u \in [a,t],\ t \le b \\ z = h(u) \end{cases}$$

- Dacă γ şi derivata sa γ' sunt continue (adică γ este de clasă C^1), atunci γ este rectificabilă şi s este derivabilă, cu derivata continuă şi în plus

$$s'(t) = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}$$

Calculul lungimii unei curbe:

$$L_\gamma = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\,dt\,.$$

Exemplu

- Să calculăm lungimea elicei $\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t\,,\ t \in [0, 2\pi] \\ z = 2t \end{cases}$:

$$L_\gamma = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 2^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\, dt = 2\sqrt{5}\pi \,.$$

Funcția $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}$, este *diferențiabilă* în punctul $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ dacă există o aplicație liniară $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, astfel încât:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = (0,\ldots 0) = \theta_{R^m}$$

Aplicația liniară $T:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$ dacă există, este unică şi se notează $df(x_0)$.

Se demonstrează că dacă $f=(f_1,\ldots,f_m)$ este diferențiabilă în $x_0\in\operatorname{int}(A)$ atunci fiecare componentă a sa este diferențiabilă în x_0 şi avem

$$df(x_0)=(df_1(x_0),\ldots,df_m(x_0))$$

adică

$$df(x_0)s=(df_1(x_0)s,\ldots,df_m(x_0)s)=(s\cdot f_1'(x_0)s,\ldots,s\cdot f_m'(x_0))$$

Dacă f este diferențiabilă în x_0, atunci ea este continuă în x_0

Derivate de ordin superior

Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, este derivabilă în orice punct al unui interval $(x_0 - r, x_0 + r)$,$x_0 \in \operatorname{int}(A)$ și în plus $f' : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbf{R}$ este derivabilă în x_0, spunem că f este de *două ori derivabilă* în x_0 și scriem $(f')'(x_0) = f''(x_0)$.

Dacă $f' : (x_0 - r_1, x_0 + r_1) \to \mathbf{R}$, $r_1 \le r$, este derivabilă pe $(x_0 - r_2, x_0 + r_2)$, $r_2 \le r_1$ vom defini funcția

$f'' : (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \to \mathbf{R}$, prin $x \mapsto f''(x)$

funcție numită *derivata de ordinul* II a funcției f .

In general, dacă $f^{(n-1)}:(x_0-r_{n-1},x_0+r_{n-1})\to\mathbf{R}$, este derivabilă în x_0, spunem că f este de *n ori derivabilă* în x_0 şi scriem

$(f^{(n-1)})'(x_0)=f^{(n)}(x_0)$.

Analog, putem defini, $(f^{(n-1)})'=f^{(n)}:(x_0-r_n,x_0+r_n)\to\mathbf{R}$, funcția $f^{(n)}$ numindu-se *derivata de ordin n* a funcției f.

Exemple

- Să calculăm derivata de ordin n a funcției $f(x) = \dfrac{1}{x-a}, x \neq a$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(x-a)^3} \Rightarrow f'''(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(x-a)^4}$$

presupunând că $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x-a)^{n+1}}$, calculăm

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-(-1)^n \cdot n! \cdot (n+1)}{(x-a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!}{(x-a)^{n+2}}$$

şi astfel conform principiului inducției matematice avem

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-a)^{n+1}}.$$

- Folosind rezultatul obținut anterior, să calculăm derivata de ordin n a funcției $f(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}},\ x \in (-1,1)$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x} - \frac{(-1)}{1-x}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1}\right)$$ şi astfel:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{3}\cdot\left(\frac{1}{(1+x)^n} - \frac{1}{(x-1)^n}\right).$$

Vom spune că f este *de clasă* $\mathcal{C}^n$ şi vom scrie $f \in \mathcal{C}^n(A)$ unde $A \subset \mathbf{R}$ este o mulțime deschisă, dacă există $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)}$ şi $f^{(n)}$ este continuă pe A.

Vom spune că f este *de clasă* $\mathcal{C}^\infty$ sau *indefinit derivabilă* şi vom scrie $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ dacă există $f^{(n)}, \forall n \in \mathbf{N}$.

Teorema creşterilor finite

- Dacă funcția $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, unde $a,b\in \mathbf{R}$, $a<b$ are următoarele proprietăți:

  1. f este continuă pe $[a,b]$,
  2. f este derivabilă pe (a,b),

  atunci există $c\in (a,b)$ astfel încât $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Polinomul lui Taylor

Formula lui Taylor este generalizarea naturală a teoremei creşterilor finite, în cazul în care f este de clasă C^{n+1}, permițând aproximarea acestei funcții printr-un polinom.

Pentru $f : I \to \mathbf{R}$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval deschis, funcție de clasă C^n şi $x_0 \in I$, polinomul

$$T_n(x, x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0), \; x \in I$$

se numeşte *polinomul lui Taylor* de grad n asociat funcției f în x_0.

Formula lui Taylor

- Pentru $f : I \to \mathbf{R}$, unde $I \subset \mathbf{R}$ este un interval deschis, funcție de clasă C^{n+1} și $x_0 \in I$ avem:

$$f(x) = T_n(x, x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ , } \xi \text{ cuprins între } x \text{ și } x_0 .$$

(*formula Taylor*).

Termenul $R_n(x) = \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ se numește *restul de ordin n al formulei Taylor* (*restul Lagrange*).

Exemplu

- Pentru a scrie formula lui Taylor pentru funcția $f(x)=\sqrt{x+3}, x \geq -3$, în punctul $x_0=1$, calculăm derivata de ordin n a funcției.:

$$f'(x)=\left((x+3)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(x+3)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{2^2}\cdot(x+3)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$f'''(x)=\frac{3}{2^3}\cdot(x+3)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^{(4)}(x)=-\frac{3\cdot 5}{2^4}\cdot(x+3)^{-\frac{7}{2}}.$$

Se demonstrează prin inducție că

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot(x+3)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

Avem

$$f(x)=f(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!}\cdot f^{(k)}(1)+\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)=$$

$$=2+\frac{x-1}{1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!}{2^k}\cdot 2^{-\frac{2k-1}{2}}+$$

$$+\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\cdot(\xi+3)^{-\frac{2n+1}{2}}$$ cu ξ cuprins între x şi 1.

Formula Mac-Laurin

Caz particular al formulei Taylor, cazul în care $x_0 = 0$ este *formula Mac-Laurin*:

- Dacă funcția $f : I \to \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$ interval deschis, este de clasă C^{n+1} şi $0 \in I$, atunci oricare ar fi $x \in I$ există un punct ξ cuprins între 0 şi x astfel încât $f(x) = T_n(x,0) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$.

Este evident orice număr cuprins între 0 şi x se poate scrie $\theta \cdot x, \theta \in (0,1)$ şi astfel formula Mac-Laurin poate fi scrisă sub forma:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta \cdot x), \theta \in (0,1)$$

unde θ depinde de n şi x.

Exemplu

- Să scriem formula Mac-Laurin de ordinul n pentru funcția

  $f(x)=\sqrt{3x+2},\ x\in[-\frac{2}{3},+\infty)$, calculăm

$$f'(x)=\left((3x+2)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3x+2)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{3^2}{2^2}\cdot(3x+2)^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}\cdot 3^n\cdot(3x+2)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$f(x)=\sqrt{2}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^{k-1}\cdot(2k-3)!!}{2^k}\cdot 3^k\cdot 2^{-\frac{2k-1}{2}}+$$

$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\cdot 3^{n+1}\cdot(3\xi+2)^{-\frac{2n+1}{2}}$$ cu ξ cuprins între x și 0.

Formula Taylor cu restul Lagrange poate fi astfel scrisă ca:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x+\theta \cdot h), \theta \in (0,1)$$

Probleme de aproximare

- Fiind date h şi n, să se determine eroarea care se face înlocuind $f(x)$ cu $T_n(x)$;

- Cerându-se inițial o anume eroare ε, n fiind dat, să determinăm h, cu alte cuvinte să determinăm intervalul $(x-h, x+h)$ pe care înlocuind $f(x)$ cu $T_n(x)$ obținem o eroare mai mică decât ε;

- Fiind dat h şi cerându-se ca eroarea să fie mai mică decât ε, determinăm gradul lui $T_n(x)$, astfel încât înlocuind $f(x)$ cu $T_n(x)$ în intervalul $(x-h, x+h)$, să se obțină o eroare mai mică decât ε.

Exemple

- Pentru a calcula eroarea comisă prin aproximarea funcției $f:(-1,1)\to\mathbf{R},\ f(x)=e^x$ prin polinomul $T_{11}(x)=1+\sum_{k=1}^{11}\frac{x^k}{k!}$, evaluăm restul sub forma Lagrange: $R_{11}(x)=\frac{x^{12}}{12!}\cdot e^{\xi}$, cu ξ între 0 şi x. Astfel:

$$eroarea \le \left|\frac{x^{12}}{12!}\right|\cdot e < \frac{e}{12!} = 5.67\cdot 10^{-9}$$

- Pentru a găsi intervalul pe care funcția $f:(-h,h)\to\mathbf{R},\ f(x)=e^x$ este aproximată de polinomul $T_{11}(x)=1+\sum_{k=1}^{11}\frac{x^k}{k!}$ cu trei zecimale exacte, rezolvând inegalitatea

$|R_{11}(x)|=\left|\frac{h^{12}}{12!}\cdot e^{\xi}\right|<\left|\frac{h^{12}}{12!}\cdot e^{h}\right|<10^{-4}$ obținem $h=2.0665$.

- Pentru a stabili gradul polinomului Taylor ce aproximează funcția $f:(-1,1)\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x$ cu trei zecimale exacte, rezolvăm inecuația $|R_n(x)|=\left|\frac{1}{n!}\cdot e^{\xi}\right|<\frac{1}{n!}\cdot e<10^{-4}$, cu ajutorul următorului program în Matlab:

```
»n=1; fact=n;x=exp(1)*(10^4);while fact<x n=n+1;
fact =fact*n;x=exp(1)*(10^4);end
» [n]
     ans =
               8
```

Aşadar polinomul $T_8(x)=1+\sum_{k=1}^{8}\frac{x^k}{k!}$ este cel căutat.

Consecință

- Dacă pentru funcția $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ de clasă C^n pe (a,b), $n\geq 2$ există $x_0\in(a,b)$ astfel încât $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ şi $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, atunci, dacă n este par, x_0 este punct de extrem local al lui f şi anume este minim local dacă $f^{(n)}(x_0)>0$ şi este maxim local dacă $f^{(n)}(x_0)<0$.

Dacă n este impar, x_0 nu este punct de extrem local al lui f (este punct de inflexiune).

Exemplu

- Să determinăm punctele de extrem ale funcției $f(x) = 2\cos x + x^2,\ x \in \mathbf{R}$.

Calculăm:

$$f'(x) = -2\sin x + 2x,\ f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -2\cos x + 2,\ f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2\sin x,\ f''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 2\cos x,\ f^{(4)}(0) \neq 0$$

așadar în $x = 0$ funcția are un minim.

- Fie $I, J \subset \mathbf{R}$ două intervale şi $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ şi avem $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Derivând relaţia $(f^{-1} \circ f)(x) = x, x \in \mathbf{R}$, obţinem:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1, x \in \mathbf{R} \qquad (*)$$

Notând $y = f(x)$ avem $(f^{-1})'(y) \cdot = \dfrac{1}{f'(x)}$ unde $y = f(x)$

Derivăm încă o dată relaţia (*):

$$(f^{-1})''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + (f^{-1})'(f(x)) \cdot f''(x) = 0, x \in \mathbf{R}$$

obţinând $(f^{-1})''(y) = -\dfrac{(f^{-1})'(y) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = -\dfrac{f''(x)}{(f'(x))^3}$, $x \in \mathbf{R}$, $y = f(x)$

Exemplu

- Funcția $f:\mathbf{R}\to(-1,\infty)$, definită prin $f(x)=4^x+2^x-1$ este bijectivă.

Să calculăm $(f^{-1})'(1)$ și $(f^{-1})''(1)$:

Rezolvăm ecuația $4^x+2^x-1=1$ și obținem $x=0$

Calculăm $f'(x)=4^x\cdot\ln 4+2^x\cdot\ln 2$ și $f''(x)=4^x\cdot(\ln 4)^2+2^x\cdot(\ln 2)^2$

și avem :

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{3\ln 2},\quad (f^{-1})''(1)=-\frac{f''(0)}{(f'(0))^3}=-\frac{5}{27\ln 2}$$

Teorema de inversiune locală

Funcția $f : I \to J$, unde $I, J \subset \mathbf{R}$ sunt două intervale, este *difeomorfă* (*difeomorfism*) dacă f este bijectivă şi f şi f^{-1} sunt derivabile.

Funcția f este C^n-*difeomorfă* dacă f este bijectivă şi f şi f^{-1} sunt de clasă C^n.

- Dacă pentru funcția $f : I \to \mathbf{R}$ ($I \subseteq \mathbf{R}$ interval), funcție de clasă C^1 există $x_0 \in I$ cu $f'(x_0) \neq 0$, atunci există $V \subset I$ un interval deschis care conține x_0 şi $W \subseteq \mathbf{R}$ un inteval deschis care conține $f(x_0)$, astfel încât f aplică C^1-difeomorf V pe W .

Transfer de derivabilitate

- Dacă $(f_n)_n \subset Hom(I, \mathbf{R})$, $I \subset \mathbf{R}$ este un şir de funcții de clasă C^1, punctual convergent la f pe I, cu proprietatea că şirul derivatelor $(f_n')_n$ converge uniform pe I la funcția g ,atunci funcția limită f este derivabilă pe I şi $f' = g$.

Exemplu

- Să studiem dacă se poate aplica teorema transferului de derivabilitate şirului

de funcţii $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2\cdot x^2}$ pe $[-1,1]$

Funcţia limită este $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\equiv 0, \forall x\in[-1,1]$; şirul derivatelor

$f_n'(x)=\dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, $x\in(-1,1), n\in\mathbf{N}$, are ca funcţie limită o funcţie discontinuă

şi anume $g:[-1,1]\to\{0,1\}$ $g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$.

Derivatele f_n' sunt funcţii continue pe $(-1,1)$, funcţia limită nu este, deci şirul derivatelor nu converge uniform şi astfel nu se poate aplica transferul de derivabilitate.

Transferul de derivabilitate este valabil şi în cazul seriilor de funcţii: dacă $(f_n)_n \subset Hom(I, \mathbf{R})$, $I \subset \mathbf{R}$ interval, este un şir de funcţii de clasă C^1 pe I, astfel încât $\sum_{n \geq 0} f_n$ este punctual convergentă cu suma f, iar seria derivatelor $\sum_{n \geq 0} f_n'$ este uniform convergentă cu suma g, atunci f este derivabilă şi $f' = g$.

- Dacă $(a_n)_n$ este un şir de numere reale, seriile de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$ şi $\sum_{n\geq 0} n a_n \cdot x^{n-1}$ au aceeaşi rază de convergență.

Dacă $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergență $R > 0$,

construim funcția $f:(-R,R)\to \mathbf{R}$, dată de $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

- Funcția $f:(-R,R)\to \mathbf{R}$, definită de $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ este de clasă C^{∞} și, în plus, relația $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ poate fi derivată termen cu termen ori de câte ori în $(-R,R)$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$, $\forall x\in(-1,1)$, deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$, $\forall x\in(-1,1)$, și derivând obținem relația de mai sus.

- Dacă $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, x \in (-R,R)$, coeficienții a_n sunt unic determinați

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n \in \mathbb{N}$$

Dacă avem $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n, x \in (x_0-R, x_0+R)$, atunci:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n \in \mathbb{N}$$

Funcție dezvoltabilă in serie de puteri

Spunem că o funcție reală $f:(x_0-r,x_0+r)\to \mathbf{R}$, $x_0\in\mathbf{R}, r>0$ este *dezvoltabilă* în serie de puteri centrată în x_0 dacă există $0<a<r$ şi un şir $(a_n)_n\subset\mathbf{R}$, astfel încât seria $\sum_{n\geq 0} a_n\cdot(x-x_0)^n$ să fie convergentă pe (x_0-a,x_0+a), având suma $f(x)$.

Dezvoltarea $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$ este unică.

Nu orice funcție de clasă C^∞ pe (x_0-a,x_0+a) este dezvoltabilă în serie puteri.

- Funcția $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x\in(0,a) \\ 0, \quad x\in(-a,0)\end{cases}$ este de clasă C^∞ pe $\mathbf{R}$, nu este dezvoltabilă în serie de

puteri în jurul originii , $f^{(n)}(0)=0$

Seria Taylor

Seria de puteri centrată în $x_0 \in (a,b) \subset \mathbf{R}$, asociată funcției $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ de clasă C^∞, dată de formula $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$ se numeşte *seria Taylor* a lui f în jurul punctului x_0.

- Dacă funcția $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ de clasă C^∞, are proprietatea că există $M > 0$, astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in (a,b)$, seria Taylor a lui f în jurul lui $x_0 \in (a,b)$ este uniform convergentă pe (a,b) iar suma sa este $f(x)$

Exemple

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbf{R};$

să găsim dezvoltarea în serie a funcției $f(x) = e^{-3x}$:

$$e^{-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{n!} \cdot x^n, x \in \mathbf{R}.$$

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1;$

Pentru a determina dezvoltarea în serie a funcției $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 6x + 8}$ $x \notin \{2,4\}$,

specificând intervalul pe care este valabilă, ținem seama că $\dfrac{x+1}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x-2}$

şi astfel:

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{5}{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(3 - \frac{5}{2^{n+1}}\right) \cdot x^n .$$

- $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}, x \in \mathbf{R}$$

Pentru a găsi dezvoltarea în serie de puteri a funcției $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$,

vom ține seama de formula trigonometrică $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (2x)^n = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{(2n)!} \cdot (x)^n \ , x \in \mathbf{R}.$$

- $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} \cdot x^{n},\ x > -1, \alpha \in \mathbf{R}$$

Pentru a determina dezvoltarea în serie a funcției $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in \mathbf{R}$

folosim dezvoltarea prezentată anterior şi anume:

$$f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \ldots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \cdot \left(x^2\right)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n},\ x \in \mathbf{R}$$

De reținut

- **Funcții reale de variabilă reală**
- Funcție derivabilă într-un punct, funcție diferențiabilță într-un punct, echivalența celor două noțiuni în acest caz.
- Derivate de ordin superior
- Formula Taylor
- Transfer de derivabilitate
- Funcții dezvoltabilă în serie de puteri; seria Taylor

- **Funcții vectoriale de variabilă reală**
- Funcție derivabilă într-un punct, funcție diferențiabilță într-un punct
- Curbe parametrizate: vector tangent, vector normală, lungimea unei curbe.

Tema

1. Calculați vectorul tangent și scrieți ecuația tangentei în punctul $\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ în cazul lemniscatei lui Bernoulli, $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$; determinati-i versorul tangent și vectorul normală.

2. Scrieți formula Taylor pentru funcția $f:(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\to \mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\ln(x^2-1)$, în punctul $x_0=2$.

3. Determinați dezvoltarea în serie pentru funcțiile următoare, pe mulțimile indicate

$f_1(x) = e^{\frac{x}{2}},\ x\in \mathbf{R};$ $\qquad$ $f_2(x)=\dfrac{2x+1}{x^3+3x^2-4x-12},\ x\notin\{-3,-2,2\}$

$f_3(x)=\sin^3 x,\ x\in\mathbf{R};$ $\qquad$ $f_4(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1$

2. Diferențiabilitatea funcțiilor de mai multe variabile reale

Funcție derivabilă după un versor într-un punct

Considerând un versor $s \in \mathbf{R}^n$, $(\|s\|=1)$ vom că f este *derivabilă după versorul* (*direcția*) s *în* a, dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+ts)-f(a)}{t}$

a cărei valoare se notează $\dfrac{df}{ds}(a)$ şi se numeşte *derivata lui* f *după versorul* s *în* a.

Exemplu

- Să considerăm un versor oarecare $s=(s_1,s_2)\in$ $\mathbf{R}^2$ şi să calculăm pentru funcția $f:$ $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

derivata $\dfrac{df}{ds}(0,0)$:

$$\frac{df}{ds}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ts_1,ts_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4s_1^2s_2^2}{t\cdot(t^2s_1^2+t^2s_2^2)}=0$$

Derivate parțiale

Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este baza uzuală în $\mathbf{R}^n$, fiecare $e_i, 1 \le i \le n$ este versor şi derivata lui f după versorul $s = e_i$ în a se numeşte *derivata lui* f *în raport cu* x_i *în* a şi se noteaza $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Spunem deci că f este derivabilă parțial în raport cu x_i în a, dacă:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{t}$$

Exemple

- Să calculăm cu definiția, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ pentru $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2+1)-\ln 2}{x-1};$$

aceasta limită este derivata în $x=1$ a funcției $g(x)=\ln(x^2+1)$ și astfel $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=1$.

- Să calculăm $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$ pentru:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(x^2+y^2+z^2)\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(0,0,z)-f(0,0,0)}{z}\lim_{z\to 0}\frac{z^2\cdot\cos\dfrac{1}{z^2}}{z}=\lim_{z\to 0}z\cdot\cos\frac{1}{z^2}=0\,.$$

Se observă ca derivata parrțială a lui f în raport cu x_i *în* a este de fapt derivata în a_i a unei funcții de o singură variabilă:

$$x_i \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$$

şi astfel calculul unei derivate parrțiale se reduce la calculul derivatei unei funcții de o singură variabilă.

Exemple

- Pentru a calcula $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ pentru $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$, calculăm pentru

început $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ (derivata parțială în punctal curent) considerând y ca variabilă

(x este constantă):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

şi astfel $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=-\dfrac{3}{25}$;

- Pentru a calcula $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)$ pentru $f(x,y,z)=\frac{x}{yz}+x^2z^2+xyz$,

  calculăm pentru început $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ considerând y ca variabilă

  (x şi z sunt constante):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{x}{z}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)=\frac{1}{2}.$$

Noțiunile de derivată după un versor, respectiv derivată parțială, se extind natural în cazul funcțiilor vectoriale: pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$, considerând un versor $s \in \mathbf{R}^n$, vom defini

$$\frac{df}{ds}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+ts) - f(a)}{t}$$

studiul acestei limite din $\mathbf{R}^m$ reducându-se la studiul limitelor în $\mathbf{R}$ pentru cele m componente:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right)$$

Matricea jacobiană

Definim o matrice remarcabilă, cu m linii şi n coloane:

$$J_f(a)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

numită *matricea jacobiană* a lui f în a.

Dacă $m = n$ determinantul matricii jacobiene $J_f(a)$ se numeşte *jacobianul* lui f în a şi se notează:

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a) = \det J_f(a)$$

Exemple

- Să explicităm matricea jacobiană J_f în punctul curent pentru fiecare din funcțiile următoare:

Pentru $f(x,y,z) = (xy + yz + zx, xyz)$ avem $J_f = \begin{pmatrix} y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$;

Pentru $f(x,y) = \left(x^2 + y^2, x \cdot y, \dfrac{x}{y^2+1)}\right)$ avem $J_f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \\ \dfrac{1}{y^2+1} & \dfrac{-2xy}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix}$

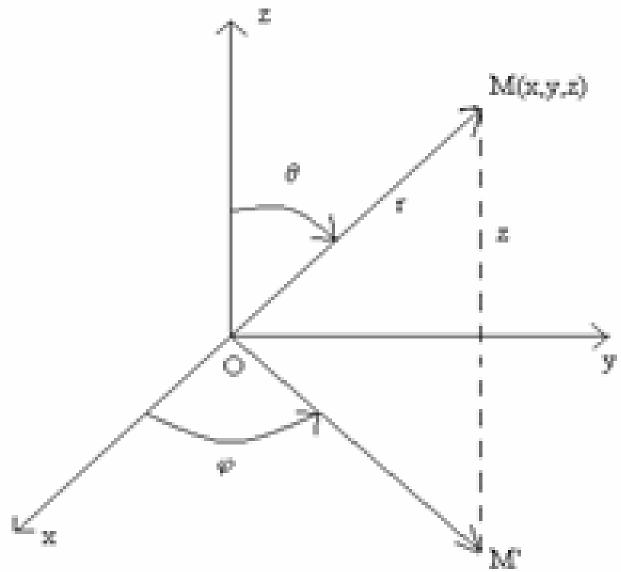
- Să calculăm jacobianul funcției $f:[0,+\infty)\times\{0,2\pi]\times\{0,\pi]$ definită prin

  $f(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ în punctul curent

$$J_f=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

şi astfel $\det J_f = r^2\sin\theta$.

Coordonate sferice



Coordonatele sferice (r,θ,φ) ce caracterizează punctul $M \in \mathbf{R}^3$ reprezintă:

- $r = \|OM\|$ este distanța de la originea O la punctul M, $r \geq 0$;
- θ este unghiul dintre axa Oz şi OM, $\theta \in [0,\pi]$;
- φ este unghiul dintre axa Ox şi OM', unde M' este proiecția punctului M

în planul xOy, $\varphi \in [0,2\pi]$

Formulele ce stabilesc legătura între coordonate carteziene şi coordonate sferice:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \quad \text{unde } r \in [0, +\infty),\ \varphi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, \pi]$$

$$z = r \cos\theta$$

Exemplu

- Funcția $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

este discontinuă în $(0,0)$, deoarece nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

$f(x,\sqrt{mx})=\dfrac{m}{1+m^2}$ Aplicăm criteriul lui Heine: luând șirurile:

$$\left(\frac{1}{n^2},\frac{\sqrt{m}}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}(0,0),\ m\in\mathbf{R}_+ \text{ avem } f\left(\left(\frac{1}{n^2},\frac{\sqrt{m}}{n}\right)\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{m}{1+m^2}.$$

Admite însă derivate parțiale în (0,0) și anume:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \text{ și } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to\infty}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

Funcție diferențiabilă într-un punct

Funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este *diferențiabilă* în $a \in \operatorname{int} A$ dacă există o aplicație liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} = 0 .$$

Considerând $\varphi : A \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|}$, spunem că

f este *diferențiabilă* în $a \in \operatorname{int} A$ dacă există o aplicație liniară

$T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, astfel încât

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + \|x-a\| \cdot \varphi(x), \forall x \in A \text{ şi } \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0 .$$

Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este *diferențiabilă* în $a \in \operatorname{int} A$, atunci aplicația liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este unică , se notează $T = df(a)$ şi se numeşte *diferențiala* lui f în *a*.

- Dacă $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, atunci este şi continuă în a.

  Rezultă că o funcție $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ care nu este continuă în $a \in \operatorname{int} A$, nu este diferențiabilă în a

- Funcția $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ este discontinuă în $(0,0)$,

deci nu este diferențiabilă în $(0,0)$.

- Funcția $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$ dacă și numai dacă toate componentele sale sunt diferențiabile în a și $df(a) = (df_1(a), df_2(a), \ldots, df_m(a))$.

Rezultatul afirmă că studiul diferențiabilității unei funcții vectoriale se reduce la studiul diferențiabilității componentelor sale.

- Dacă $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, atunci există $\dfrac{df}{ds}(a)$ pentru orice versor $s \in \mathbf{R}^n$ şi avem $\dfrac{df}{ds}(a) = df(a)s$; în particular, există derivate parțiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)e_i$, $1 \le i \le n$.

Deducem că matricea asociată aplicației liniare $df(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este matricea jacobiană $J_f(a)$.

Rezultă că o funcție $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ care nu admite derivate parțiale în $a \in \operatorname{int} A$, nu este diferențiabila în a. De exemplu:

- Să calculăm $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ pentru $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$, limită ce nu există, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{|x|}{x} = 1$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{|x|}{x} = -1$.

Astfel f nu este diferențiabilă în (0,0).

Pentru o funcție $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, se pot calcula derivatele după un versor cu ajutorul derivatelor parțiale:

fie $s = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot e_k$, $\|s\| = 1$, atunci:

$$\frac{df}{ds}(a) = df(a)s = df(a)\left(\sum_{k=1}^{n} s_k \cdot e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot df(a)e_k = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Exemplu

- Pentru a determina $\frac{df}{ds}(1,2)$ dacă $s = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 1}$,

calculăm:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 1}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 1}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

şi aplicăm formula precedentă:

$$\frac{df}{ds}(1,2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{3} + 4}{2 \cdot \sqrt{10}}.$$

Vector gradient

Reamintim că pentru orice aplicație liniară $T:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ există un vector unic $\omega \in \mathbf{R}^n$ astfel încât $Tv = \langle \omega, v \rangle, \forall v \in \mathbf{R}^n$, unde $\langle , \rangle$ este produsul scalar euclidian (este suficient a lua ω ca fiind vectorul ce are drept componente $Te_1, \dots, Te_n$, unde $\{e_1, \dots, e_n\}$ este baza uzuală în $\mathbf{R}^n$).

Putem reformula definiția diferențiabilității unei funcții într-un punct:

Funcția $f: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$ dacă există un vector $\omega \in \mathbf{R}^n$, astfel încât $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - \langle \omega, x - a \rangle}{\|x - a\|} = 0$.

Acest vector unic determinat se numește *vectorul gradient* al lui f în a și se notează $\operatorname{grad} f(a)$ sau $\nabla f(a)$.

Având $\frac{df}{ds}(a) = df(a)s = \langle \nabla f(a), s \rangle$, derivata după un versor se obține prin calcularea produsului scalar dintre gradient şi versor.

Coordonatele vectorului $\nabla f(a)$ în baza uzuală din $\mathbf{R}^n$ sunt derivatele parțiale $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ şi astfel putem considera că $\nabla f(a) = J_f(a)$.

- Considerând E şi E_1 două spaţii Banach, orice aplicaţie liniară şi continuă $T : E \to E_1$ este diferenţiabilă în orice $a \in E$ şi $dT(a) = T$, deoarece

$$\lim_{x \to a} \frac{\|Tx - Ta - T(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$$

Funcţia $pr_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definită prin $pr_i(x_1,\dots, x_n) = x_i$ fiind o aplicaţie liniară este diferenţiabilă în orice punct din $\mathbf{R}^n$ şi $dpr_i = pr_i$.

Această diferenţială fiind independentă de punctul în care o calculăm, se notează cu dx_i.

Dacă $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, diferențiala $df(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este un element din spațiul $\mathbf{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, spațiul aplicațiilor liniare reale definite pe $\mathbf{R}^n$

Se demonstrează că $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ constituie o bază în $\mathbf{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Formula de calcul a diferențialei

Diferențiala $df(a)$ poate fi scrisă ca o combinație liniară de $dx_1, \ldots, dx_n$,

adică $df(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot dx_k$, formulă de calcul ce se verifică arătând

că $df(a)e_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot dx_k(e_i), 1 \le i \le n$, unde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este baza uzuală în $\mathbf{R}^n$,

ținând seama că $dx_k(e_i) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \ne k \end{cases}$.

- Pentru funcția $f(x,y,z) = \ln(x^2 \cdot y^2 + z^2 + 2)$ vom calcula

$$df(1,2,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1) \cdot dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2xy^2}{x^2y^2 + z^2 + 2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1) = \frac{8}{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2x^2y}{x^2y^2 + z^2 + 2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1) = \frac{4}{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{x^2y^2 + z^2 + 2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1) = -\frac{2}{7}$$

şi astfel $df(1,2,-1) = \frac{8}{7} \cdot dx + \frac{4}{7} \cdot dy - \frac{2}{7} \cdot dz$.

Condiție suficientă de diferențiabilitate

- Dacă pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, există o bilă deschisă $B(a,r)$, unde $a \in \operatorname{int} A$ și $r > 0$, în care sunt definite derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}, 1 \le i \le n$, derivate ce sunt continue în a, atunci f este diferențiabilă în a.

În consecință dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este de clasă C^1 (adică f este continuă, cu derivate parțiale de ordin I continue) pe A atunci este diferențiabilă pe A.

Reguli de calcul pentru diferențială

- Dacă funcțiile $f, g : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, sunt diferențiabile în $a \in \operatorname{int} A$, atunci $f + g$ este diferențiabilă în a și $d(f+g)(a) = df(a) + df(a)$ (semnul + din membrul drept reprezintă adunarea în $\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$).

- Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, în plus funcția $g : B \to \mathbf{R}^p$, $B \subset \mathbf{R}^m$, $f(A) \subset B$, este diferențiabilă în $f(a)$, atunci funcția $g \circ f : A \to \mathbf{R}^p$ este diferențiabilă în a și $d(g \circ f)(a) = d(g(f(a)) \circ df(a)$.

Matricea compunerii a două aplicații liniare este produsul matricilor celor două aplicații, rezultând că matricea jacobiană a lui $g \circ f$ în a este produsul matricilor jacobiene a lui g în $f(a)$ şi a lui f în a. Notând $h = g \circ f$ şi considerând $(x_1, \ldots, x_n)$ variabila lui f, respectiv $(y_1, \ldots, y_m)$ variabilă lui g, obținem după regula de înmulțire a matricilor:

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a), 1 \le j \le p, 1 \le 1 \le n,$$

formulă ce dă derivatele parțiale ale funcției h în raport cu derivatele parțiale ale lui f şi g.

- Dacă $g(x,y)=f(u(x,y))$, unde $f:A_1\to\mathbf{R}$, $A_1\subset\mathbf{R}$ şi $u:A_2\to\mathbf{R}$, $A_2\subset\mathbf{R}^2$, f şi u de clasă C^1, să calculăm $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ scriind egalitatea dintre matricile jacobiene:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}=f'(u)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

Exemplu

Calculăm derivatele parțiale ale funcției $g(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y^2+1}\right)$, unde

$f : A_1 \to \mathbf{R},\ A_1 \subset \mathbf{R},\ f$ de clasă C^1:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f'(u)\cdot\frac{1}{y^2+1} \text{ și } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(u)\cdot\frac{-2xy}{(y^2+1)^2}$$

- Dacă $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, unde funcția $f : A_2 \to \mathbf{R}, A_2 \subset \mathbf{R}^2$ şi funcțiile $u, v : B_2 \to \mathbf{R}, B_2 \subset \mathbf{R}^2$, sunt de clasă C^1, să calculăm $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$, scriind egalitatea dintre matricile jacobiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Exemplu

- Să scriem diferențiala în punctul curent a funcției
$g(x,y)=f(xy^2,x^2+y^2)$, unde $f:A_2\to\mathbf{R}$, $A_2\subset\mathbf{R}^2$, f de clasă C^1

Calculăm derivatele parțiale ale funcției $g(x,y)=f(xy^2,x^2+y^2)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y^2+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x \quad \text{şi} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2xy+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y$$

Atunci:

$$dg(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y^2+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x\right)\cdot dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2xy+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y\right)\cdot dy$$

Puncte de extrem

Pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, punctul $a \in A$ este *punct de minim local* al lui f pe A dacă există o bilă $B(a, r)$ astfel încât:

$f(a) \leq f(x), \forall x \in A \cap B(a, r)$.

Punctul este de *minim global* dacă $f(a) \leq f(x), \forall x \in A$.

Analog, definim punctele de maxim local şi global. Punctele de minim şi de maxim se numesc *puncte de extrem*.

Punct critic

- Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este derivabilă în $a \in \operatorname{int} A$, după versorul s și a este un punct de extrem local, atunci $\frac{df}{ds}(a) = 0$; în particular dacă funcția f admite derivate parțiale în a, punct de extrem local, atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, 1 \le i \le n$, rezultând că $\nabla f(a) = \theta_{R^n}$.

Punctul $a \in \operatorname{int} A$, în care f este diferențiabilă și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, 1 \le i \le n$,

se numește *punct critic*.

Exemplu

- pentru $f(x, y) = x \cdot y, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$, derivata după un versor oarecare, în origine,

este $\dfrac{df}{ds}(0{,}0) = 0$, dar $(0{,}0)$ nu este punct de extrem, deoarece funcţia ia valori negative şi pozitive în orice vecinătate a originii.

Derivate parțiale de ordin superior

Considerăm $f : A \to \mathbf{R}$ unde $A \subset \mathbf{R}^n$, $a \in \operatorname{int} A$ şi $i, j \in \{1,2,\dots, n\}$, nu neapărat distincte.

Dacă funcția de o variabilă $x_i \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ este definită pe $(a_i - \delta, a_i + \delta) \subset \mathbf{R}$, $\delta > 0$ şi dacă această funcție este derivabilă în a_i atunci putem spune că f este *de două ori derivabilă* în raport cu variabilele x_i şi x_j şi scriem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$.

Derivatele de ordin trei, patru sau mai mult se definesc analog.

Spunem că funcția $f : A \to \mathbf{R}^m, m \geq 1$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este *de clasă* C^k *pe* A , dacă funcția și derivatele sale parțiale până la ordinul k inclusiv, sunt continue pe *A*.

Funcția f este *de clasă* C^{∞} *pe A* dacă are derivate parțiale de orice ordin continue pe *A*..

Matricea hessiană

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Se observă că $H_f(a) = J_{\nabla f(a)}$.

Ordinea în care se efectuează derivarea parțială este importantă

- pentru $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ calculăm derivatele mixte de ordinul II în origine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=-1$$

Criteriul lui Schwarz

- Dacă pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, există pe $B(a,\varepsilon), \varepsilon > 0$, $a \in \operatorname{int} A$, derivatele parțiale $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, care sunt continue în a , atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Astfel dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este de clasă C^2, atunci hessiana sa este o matrice simetrică.

Exemplu

- Să calculăm hessiana funcției $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}+y^3$ în punctul (2,1):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{y};\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x^2}{y^2}+3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2}{y};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{-2x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{-2x}{y^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2x^2}{y^3}+6y$$

şi astfel $H_f(2,1)=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$

Aplicație biliniară

Spunem că o aplicație $B:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definită prin $(u,v) \mapsto B(u,v)$ este *biliniară* dacă:

- pentru $u \in \mathbf{R}^n$ fixat, aplicația $v \mapsto B(u,v)$ este liniară;
- pentru $v \in \mathbf{R}^n$ fixat, aplicația $u \mapsto B(u,v)$ este liniară.

❑ Funcția:

(aplicație biliniară: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$) $\mapsto$ element din $\mathsf{L}(\mathbf{R}^n, \mathsf{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))$.

este bijectivă.

Diferențiala de ordinul al II-lea

Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, este diferențiabilă în orice punct dintr-o bilă deschisă $B(a,r), r > 0$ unde $a \in \operatorname{int} A$, (adică pentru orice $x \in B(a,r)$ există $df(x) \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$) putem defini funcția $df : U \to \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ prin $x \mapsto df(x)$.

Dacă această funcție este diferențiabilă în a, ceea ce înseamnă că există o aplicație liniară $T : \mathbf{R}^n \to \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, astfel încât:

$$\lim_{x \to a} \frac{df(x) - df(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = \theta ,$$

unde θ este elementul neutru în $\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, spunem că *f este de două ori diferențiabilă în* a.

Diferențiala de ordinul doi a lui f în a este definită ca fiind diferențiala lui df în a și avem:

$$d^2 f(a) = d(df)(a) \, ,$$

fiind un element din $\mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}))$.

Conform rezultatului prezentat anterior, putem considera că $d^2 f(a)$ este o aplicație biliniară reală definită pe $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Valoarea aplicației biliniare $d^2 f(a)$ în (u, v) va fi notată $d^2 f(a)(u, v)$ și este valoarea în v a aplicației liniare $d(df)(a)u \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Se demonstrează că dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este de două ori diferențiabilă în $a \in \operatorname{int} A$, atunci există cele n^2 derivate parțiale de ordinul doi în a şi matricea aplicației biliniare $d^2 f(a)$ este matricea hessiană în a, adică:

$$d^2 f(a)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Exemple

- Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$, este de clasă C^2, diferențiala de ordinul II în $(a, b) \in \operatorname{int} A$ este:

$$d^2 f(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \cdot dy^2$$

unde prin convenție se face notația $dx^2 = dx \cdot dx$.

- Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^3$, este de clasă C^2, diferențiala de ordinul II în $(a,b,c) \in \operatorname{int} A$ este:

$$d^2 f(a,b,c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) \cdot dx^2 + + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \cdot dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c) \cdot dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \cdot dx \cdot dy$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a,b,c) \cdot dy \cdot dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a,b,c) \cdot dz \cdot dx$$

Polinom Taylor

Pentru funcția $f: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, de clasă C^p într-o bilă deschisă $B(a, r)$, $r > 0$ unde $a \in \operatorname{int} A$, vom defini *polinomul Taylor* de grad p al funcției f în a ca fiind funcția polinomială:

$$T_p(x,a) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\cdot(x_k - a_k) + \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)\cdot(x_j - a_j)\cdot(x_k - a_k) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{p!}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}\ldots\partial x_{k_p}}(a)\cdot(x_{k_1} - a_{k_1})\cdot(x_{k_2} - a_{k_2})\ldots(x_{k_p} - a_{k_p})$$

Se poate verifica că aplicația $x \mapsto T_p(x,a)$ este unica funcție polinomială de n variabile ale căror derivate parțiale de ordin mai mic sau egal cu p coincid cu cele ale lui f în $x = a$.

Diferența $R_p(x,a) = f(x) - T_p(x,a)$ se numeşte *restul dezvoltării Taylor* de ordin p a lui f în a.

Se observă că toate derivatele parțiale de ordin mai mic sau egal cu p ale lui $R_p(x,a)$ în $x = a$ sunt nule.

Se observă că polinomul Taylor de grad 2 poate fi scris ca fiind:

$$T_2(x,a) = f(a) + df(a)(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a, x-a)$$

Exemplu

- Pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$, de clasă C^3 să scriem polinomul Taylor în $(a, b) \in \operatorname{int} A$:

$$T_3((x,y),(a,b)) = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot(x-a)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot(y-b)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\cdot(x-b)\cdot(y-b)\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)\cdot(x-a)^3 + \right.$$

$$\left. +3\,\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a,b)\cdot(x-a)^2\cdot(y-b) + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)\cdot(y-b)^3\right)$$

Formula Taylor

- Pentru funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, de clasă C^{p+1}, considerând $a \in \operatorname{int} A$ şi $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$ avem:

$\forall x \in B(a, r)$ există $c \in [a, x]$ astfel încât:

$$R_p(x, a) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k_1, \ldots, k_{p+1}}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_{p+1}}}(c) \cdot (x_{k_1} - a_{k_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{k_{p+1}} - a_{k_{p+1}})$$

Formă pătratică

O aplicație biliniară $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este *simetrică* dacă:
$B(u, v) = B(v, u), \forall u, v \in \mathbf{R}^n$.

O aplicație $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ se numeşte *formă pătratică* pe $\mathbf{R}^n$ dacă există o aplicație biliniară simetrică $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, astfel încât:
$q(u) = B(u, u), \forall u \in \mathbf{R}^n$.

Se arată că această aplicație biliniară simetrică ce corespunde formei pătratice q este în mod necesar unică.

Formă pătratică pozitiv definită

O formă pătratică q este semi-pozitiv definită dacă $q(u) \geq 0, \forall u \in \mathbf{R}^n$ şi respectiv q este pozitiv definită dacă $q(u) > 0, \forall u \in \mathbf{R}^n \setminus \{\theta\}$.

Matricea lui q, notată $(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$, în baza uzuala $\{e_1, \ldots, e_n\}$ din $\mathbf{R}^n$ este definită ca fiind matricea asociată aplicației biliniare simetrice B asociată lui q.

- forma q este pozitiv definită dacă şi numai dacă determinanţii:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

sunt strict pozitivi (condiţia *Sylvester*).

Formă q este negativ definită dacă şi numai dacă avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots$$

Vectori si valori proprii

Un număr real λ se numeşte *valoare proprie* a unei aplicaţii liniare $T:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ dacă există un vector $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{\theta\}$ astfel încât $Tx = \lambda x$.

Vectorul x se numeşte *vector propriu* al aplicaţiei T, corespunzător valorii proprii λ.

Ecuaţia $Tx = \lambda x$ poate fi scrisă sub forma $(T - \lambda I)x = \theta$, unde I este operatorul identitate.

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + (a_{22}-\lambda)\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\cdot x_n = 0 \end{cases};$$

Matricea sistemului omogen este de fapt matricea asociată aplicației liniare $T - \lambda I$.

Vectorii proprii fiind nenuli, suntem interesați de soluțiile nebanale ale sistemului, condiția necesară şi suficientă de existență a acestora fiind ca determinantul matricei sistemului să se anuleze.

Acest determinant, $\left|M_T - \lambda I\right|$, unde I este matricea unitate de ordin n este un polinom de grad n, numit *polinomul caracteristic* al aplicatiei liniare $T:\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Exemplu

- Să considerăm o aplicație liniară $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, a cărei matrice asociată este $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Valorile proprii sunt rădăcinile ecuației $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

- Forma pătratică $q:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale matricii $(a_{ij}), 1 \le i, j \le n$ sunt strict pozitive

Formă q este negativ definită dacă şi numai dacă toate valorile proprii ale matricii $(a_{ij}), 1 \le i, j \le n$ sunt strict negative.

Dacă funcția $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este de clasă C^2, atunci $d^2 f(a)$ este în fiecare punct $a \in \operatorname{int} A$ o aplicație biliniară *simetrică* a cărei matrice în baza uzuală din $\mathbf{R}^n$ este hessiana lui f.

Forma pătratică corespunzătoare, notată tot $d^2 f(a)$, este dată de

$$d^2 f(a)(u, u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot u_i \cdot u_j$$

- Fie funcția $f : A \to \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}^n$, de clasă C^2 și $a \in \operatorname{int} A$.

1. Dacă a este un punct de minim (maxim) local, atunci a este punct critic al lui f și $d^2 f(a)$ este semi-pozitiv definită (semi-negativ definită).
2. Dacă a este punct critic și $d^2 f(a)$ este pozitiv definită (negativ definită), atunci a este punct de minim (maxim).

Demonstrația se bazează pe formula Taylor aplicată funcției f pentru $x \in B(a, r), r > 0$, cu restul de ordin doi și anume:

$$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f(c)(x-a, x-a) \text{, unde } c \in [a, x]$$

Exemplu

- Pentru a găsi extremele funcției $f(x,y)=x^4+y^4+xy-x^2-y^2$, calculăm mai întâi punctele critice, ca soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + y - 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + x - 2y = 0 \end{cases}$$

Acestea sunt: $(0,0), \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Calculăm matricea hessiană în punctul curent:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 1 \\ 1 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$ şi

şi evaluăm :

- $\Delta = \det H_f(0,0) = 3$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2$ şi astfel $(0,0)$ este punct de maxim local;

- $\Delta = \det H_f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 48$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7$, rezultă că $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este punct de minim local;

- $\Delta = \det H_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 48$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7$, rezultă că $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este punct de minim local;

- $\Delta = \det H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$;

- $\Delta = \det H_f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 1$;

în aceste ultime două cazuri, nu putem afirma nimic.

- Să rezolvăm aceeași problemă, folosind condiția necesară și suficientă cu valori proprii: scriem hessiana în punctele critice, calculându-i apoi valorile proprii:

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; calculăm valorile proprii, rezolvând ecuația

$(-2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = -3$,

rezultă ca $(0,0)$ este punct de maxim local;

- $H_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = H_f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; rezolvăm ecuația $(7-\lambda)^2 - 1 = 0$, $\lambda = 6, \lambda = 8$ și

astfel $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ și $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sunt puncte de minim local;

- $H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = H_f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; rezolvând ecuația $(1-\lambda)^2 - 1 = 0$

obținem valorile proprii corespunzătoare: $\lambda = 0, \lambda = 2$, așadar $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

nu sunt puncte de extrem.

- Pentru a determina extremele funcției $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4+xyz$, calculăm punctele critice, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + yz = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + xz = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 4z^3 + xy = 0 \end{cases}$$

Soluțiile reale ale sistemului (punctele critice) sunt:

$$(0,0,0), \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right),$$

Hessiana în punctul curent este $H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & z & y \\ z & 12y^2 & x \\ y & x & 12z^2 \end{pmatrix}$ și astfel:

$$H_f(0{,}0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\ a_{11}=0\,,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}=0\,,\ \Delta=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0\,;$$

$$H_f\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix};\ a_{11}=\frac{3}{4}\,,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{2};\ \Delta=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{4}\,;$$

$$H_f\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{-1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{-1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix};\ a_{11}=\frac{3}{4}\,,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{2};\ \Delta=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&\frac{-1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{-1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{4}\,;$$

$$H_f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix};\ a_{11}=\frac{3}{4},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{-1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{2};\Delta=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{4};$$

$$H_f\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix};\ a_{11}=\frac{3}{4},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{-1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{2};\ \Delta=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{4}$$

Conform regulei lui Sylvester avem următoarele puncte de minim local:

$$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right),\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right).$$

- Să rezolvăm aceeaşi problemă, folosind condiția necesară şi suficientă cu valori proprii: scriem hessiana în punctele critice, calculându-i apoi valorile proprii:

- pentru punctul critic $(0,0,0)$, rezolvând ecuația $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, avem $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

aşadar $(0,0,0)$ nu este punct de extrem local;

- pentru punctul critic $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, rezolvând ecuația

$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ obținem $\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, deci avem punct de minim;

- pentru punctul critic $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, rezolvând ecuația

$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$ obținem $\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, deci avem punct de minim.

Lăsăm cititorului să verifice că si celelalte două puncte critice sunt puncte de minim local.

Cunoaştem următorul rezultat: un sistem liniar $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ are soluție unică

dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, altfel spus:

- Funcția $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$ este bijectivă dacă şi numai dacă $\dfrac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$.

Ne interesează extinderea acestui rezultat în cazul sistemelor neliniare de forma

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) = y_n \end{cases} .$$

Teorema de inversiune locală

- În cazul unei funcții $f : A \to \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^n$ este o mulțime deschisă, de clasă C^1, dacă $df(a) \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $a \in A$, este un izomorfism (adică $df(a)$ este bijecție), atunci există o bilă deschisă $B(a, \delta)$ și o bilă deschisă $B(f(a), \varepsilon)$, astfel încât $f : B(a, \delta) \to B(f(a), \varepsilon)$ să fie bijectivă și funcția inversă $f^{-1} : B(f(a), \varepsilon) \to B(a, \delta)$ să fie de clasă C^1.

Dacă f este de clasă C^k, atunci f^{-1} este de clasă C^k.

Teorema poate fi enunțată și astfel:

- O funcție este inversabilă în vecinătatea unui punct în care diferențiala sa este inversabilă".

Condiția $df(a) \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ este izomorfism este echivalentă cu $\det J_f(a) \neq 0$, deoarece $J_f(a)$ este matricea asociată operatorului $df(a)$ şi, într-o astfel de asociere, matricile nesingulare corespund izomorfismelor liniare.

In condițiile teoremei, când

$$f : B(a,\delta) \to B(f(a),\varepsilon) \text{ și } f^{-1} : B(f(a),\varepsilon) \to B(a,\delta)$$

sunt de clasă C^1, deci diferențiabile, avem:

$$df(x) \circ df^{-1}(y) = \mathrm{I} \quad \text{(aplicația identică) și} \quad df^{-1}(y) \circ df(x) = \mathrm{I}$$

unde $y = f(x), x \in B(a,\delta)$.

În consecință:

$$df^{-1}(y) = (df(x))^{-1},$$

Matricea jacobiană a lui f^{-1} în $y = f(x)$ este inversa matricii jacobiene a lui f în x, ceea ce permite calculul derivatelor parțiale ale lui f^{-1} în funcție de derivatele parțiale ale lui f.

Exemplu

- Considerăm sistemul $\begin{cases} \sqrt{x^4+y^4} = u \\ x^2y^3 = v \end{cases}$, avem $f = (f_1, f_2)$ cu domeniul de definiție $\mathbf{R}^2$, unde $f_1(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$, $f_2(x,y) = x^2y^3$.

  Sistemul se poate rezolva în vecinătatea oricărui punct în care

  $$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x,y)} \neq 0$$

  $$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x,y)} = \frac{2xy^2(3x^4 - 2y^4)}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

şi astfel sistemul se poate rezolva, spre exemplificare, în vecinătatea lui $(2,2)$,

deoarece $\dfrac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)}(2,2) = 45.25 \neq 0$.

Derivatele parţiale $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ se obţin prin inversarea matricii jacobiene a lui f,

de exemplu: $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{x \cdot \sqrt{x^4 + y^4}}{(3x^4 - 2y^4)}$.

Funcție implicită

Pentru mulțimile deschise $A, B \subset \mathbf{R}$ și funcția $F : A \times B \to \mathbf{R}$, considerând ecuația

$F(x, y) = 0$,

ne interesează în ce condiții aceasta determină pe y ca funcție de x.

În cazul în care fiecărui $x \in A$ îi corespunde din ecuație, o soluție unică $y \in B$, atunci funcția $\varphi : A \to B$ care asociază fiecărui $x \in A$ pe $y \in B$, se numește *funcție implicită* definită de ecuația $F(x, y) = 0$ și este caracterizată prin:

$\varphi : A \to B$ și $F(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in A$

Se poate întâmpla ca pentru anumiți $x \in A$ ecuația $F(x, y) = 0$ să aibă mai multe soluții. Considerând că $(\bar{x}, \bar{y})$ este o soluție a ecuației, să găsim condițiile care asigură existența unor intervale $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ şi $(\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon)$ astfel încât $\forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ ecuația să aibă o soluție unică $y \in (\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon)$.

În aceste condiții, obținem funcția $\varphi : (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \to (\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon)$, cu proprietatea $F(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, funcția φ fiind funcția implicită dată de relația $F(x, y) = 0$

Exemple

- Fie funcția $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ şi $(\overline{x}, \overline{y}) = (1,0)$.

  Avem $F(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Aşadar ecuația $F(x, y) = 0$ nu are soluție pentru $|x| > 1$ şi are două soluții pentru $|x| \le 1$.

Nu există nici o vecinătate a lui $(1,0)$ cu proprietatea cerută.

Remarcăm că $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0$.

- Fie funcția $F:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x,y)=x^2+y^2-1$ şi $(\overline{x},\overline{y})=(0,1)$.

  Atunci $B(0,1)=(-1,1)$ şi $B(1,1)=(0,2)$ satisfac proprietatea cerută şi funcția implicită $\varphi:(-1,1)\to(0,2)$ este dată de $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$.

  Dacă $(\overline{x},\overline{y})=(0,-1)$ avem $B(0,1)=(-1,1)$ şi $B(-1,1)=(-2,0)$, iar funcția implicită este dată de $\varphi(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

  Remarcăm faptul că în aceste cazuri $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})\neq 0$.

Să considerăm funcția $F: A\times B \to \mathbf{R}^m$, $F=(F_1,\dots,F_m)$ unde $A\subset\mathbf{R}^n$, $B\subset\mathbf{R}^m$, şi sistemul:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \end{cases}$$

Ne interesează punctele $(\bar{x},\bar{y})\in A\times B$ care verifică sistemul şi pentru care există bilele deschise $B(\bar{x},\delta)$, $B(\bar{y},\varepsilon)$ astfel încât sistemul să aibă, pentru fiecare $(x_1,\dots,x_n)\in B(\bar{x},\delta)$ o soluție unică $(y_1,\dots,y_n)\in B(\bar{y},\varepsilon)$.

Funcția implicită definită, este $\varphi : B(\bar{x}, \delta) \rightarrow B(\bar{y}, \varepsilon)$, având proprietățile:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots, x_n, \varphi_1(x_1,\ldots, x_n),\ldots, \varphi_m(x_1,\ldots, x_n)) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots \ \ldots \\ F_m(x_1,\ldots, x_n, \varphi_1(x_1,\ldots, x_n),\ldots, \varphi_m(x_1,\ldots, x_n)) = 0 \end{cases},$$

unde $(x_1,\ldots,x_n) \in B(\bar{x},\delta)$.

Matricea jacobiană a lui F în raport cu y

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x,y) \end{pmatrix}$$

este matricea asociată diferențialei funcției $y \to F(x,y)$.

Determinantul său se numeşte jacobianul lui F în raport cu y şi se notează $\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(x,y)$

Teorema funcțiilor implicite

- Considerând mulțimea deschisă $D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, funcția de clasă C^1 $F : D \to \mathbf{R}^m$ şi punctul $(\overline{x}, \overline{y}) \in D$ cu proprietatea că $F(\overline{x}, \overline{y}) = \theta_{R^m}$, presupunem că $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$; atunci rezultă că există bilele deschise $B(\overline{x}, \delta)$, $B(\overline{y}, \varepsilon)$ astfel încât $B(\overline{x}, \delta) \times B(\overline{y}, \varepsilon) \subset D$ şi:
  1. $\forall x \in B(\overline{x}, \delta)$ există $y \in B(\overline{y}, \varepsilon)$, soluție unică a ecuației $F(x, y) = (0, \ldots, 0)$.
  2. Funcția $\varphi : B(\overline{x}, \delta) \to B(\overline{y}, \varepsilon)$ care asociază lui x acest y unic, soluție a ecuației $F(x, y) = (0, \ldots, 0)$, este de clasă C^1.
  3. Dacă funcția F este de clasă C^k, atunci funcția φ este de clasă C^k.

În condițiile teoremei, avem

$F(x, \varphi(x)) = (0, \ldots, 0)$, $\forall x \in B(\bar{x}, \delta)$

şi aplicând formula de derivare a funcțiilor compuse, obținem:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_k}(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) = 0,\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$$

Matricea $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\right)$, de tip $m \times m$, este inversabilă în $(\bar{x}, \bar{y})$, deci este inversabilă într-o vecinătate a lui $(\bar{x}, \bar{y})$ şi putem folosi formulele de mai sus, pentru a calcula derivatele parțiale $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x), 1 \le k \le m, 1 \le j \le n$ ale funcției implicite, deoarece formulele reprezintă un sistem de ecuații liniare, cu necunoscutele $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x), 1 \le k \le m, 1 \le j \le n$, având matricea sistemului nesingulară. Obținem:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

În cazul $m = n = 1$, avem $\dfrac{d\varphi}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$.

Exemple

- Pentru a calcula derivatele de ordinul I şi II ale funcţiei $y(x)$ definite implicit prin ecuaţia $xy^2 - \ln y = 2$, considerăm funcţia

$$F(x, y) = xy^2 - \ln y - 2.$$

şi calculăm $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy - \dfrac{1}{y}$;

dacă $2xy^2 - 1 \neq 0$ aplicăm formula rezultată din teorema funcţiilor implicite şi avem:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{y^3}{2xy^2 - 1}.$$

Pentru a calcula y'' derivăm expresia $-\dfrac{y^3}{2xy^2-1}$, ținând seama că y este funcție de x:

$$y'' = -\frac{3y^2y'(2xy^2-1)-(2y^2-4xyy')y^3}{(2xy^2-1)^2} =$$

$$= \frac{(10xy^4-3y^2)\cdot\dfrac{y^3}{2xy^2-1}+2y^5}{(2xy^2-1)^2}.$$

- Ecuația $e^{x^2+z^2} - x^2yz = 2$ definește z ca funcție de x, y, pentru a calcula derivatele parțiale ale lui $z(x, y)$, considerăm funcția :

$F(x, y, z) = e^{x^2+z^2} - x^2yz - 2$;

dacă $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z \cdot e^{x^2+z^2} - x^2y \neq 0$ putem calcula:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$$

şi astfel;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \cdot = -\frac{2xe^{x^2+z^2} - 2xyz}{2z \cdot e^{x^2+z^2} - x^2y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \cdot = \frac{x^2z}{2z \cdot e^{x^2+z^2} - x^2y}.$$

- Pentru a calcula derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x,y), v(x,y)$ definite

implicit de sistemul: $\begin{cases} x^2+y^2=u\cdot e^v \\ xy=v\cdot e^u \end{cases}$, considerăm funcțiile

$$F_1(x,y,u,v)=x^2+y^2-u\cdot e^v,\ F_2(x,y,u,v)=xy-v\cdot e^u$$

şi impunem condiția $\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} -e^v & -ue^v \\ -ve^u & -e^u \end{vmatrix}=e^{u+v}\cdot(1-uv)\neq 0$.

Atunci:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -e^v & -ue^v \\ -ve^u & -e^u \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}=\frac{1}{e^{u+v}\cdot(1-uv)}\cdot\begin{pmatrix} e^u & -ue^v \\ -ve^u & e^v \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{2xe^u-yue^v}{e^{u+v}\cdot(1-uv)} & \dfrac{2ye^u-xue^v}{e^{u+v}\cdot(1-uv)} \\ \dfrac{-2xve^u+ye^v}{e^{u+v}\cdot(1-uv)} & \dfrac{-2ye^u+xe^v}{e^{u+v}\cdot(1-uv)} \end{pmatrix}$$

Extreme cu legături

Considerăm o mulțime deschisă $D \subset \mathbf{R}^{n+m}$ şi o funcție de clasă C^1, $f : D \to \mathbf{R}$;

fiind date m funcții de clasă C^1 $g_i : D \to \mathbf{R}$, presupunem că există relații de forma:

$g_i(x, y) = 0, 1 \le i \le m$,

unde am notat $(x_1,..., x_n, y_1,..., y_m) = (x, y)$, numite *legături* între $(x_1,..., x_n)$ şi $(y_1,..., y_m)$.

Mulțimea punctelor din D ce verifică aceste legături o vom nota

$M = \{(x, y) \in D | g_i(x, y) = 0, 1 \le i \le m\}$.

Un punct de extrem local al lui f , cu legăturile $g_i(x, y) = 0, 1 \le i \le m$ este un punct $(x_0, y_0) \in M$, pentru care există o bilă $B((x_0, y_0), r) \subset D$, astfel încât $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ are semn constant $\forall (x, y) \in M \cap B((x_0, y_0), r)$.

Aşadar extremele cu legături ale lui f sunt extremele locale ale restricțiilor lui f la M .

Multiplicatorii lui Lagrange

- Cu notațiile convenite mai sus, presupunem că (x_0, y_0) este un punct de extrem local al funcției f, cu legăturile $g_i(x,y) = 0, 1 \le i \le m$. În plus dacă $\frac{D(g_1,\dots, g_m)}{D(y_1,\dots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0$, atunci există numerele reale $\lambda_1,\dots, \lambda_m$ (*multiplicatorii lui Lagrange*), astfel încât, considerând funcția $F = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot g_k$, punctul (x_0, y_0) verifică sistemul de $(2m+n)$ ecuații:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, 0 \le i \le n$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, 0 \le k \le m$$

$$g_j = 0, 1 \le j \le m$$

cu $(2m+n)$ necunoscute $(x_1,\dots, x_n)$, $(y_1,\dots, y_m)$ $(\lambda_1,\dots, \lambda_m)$

Exemple

- Extremele locale ale unei funcții $f(x,y)$ cu legătura $g(x,y)=0$, unde f și g sunt funcții de clasă C^1 $(m=n=1)$ se află printre punctele care verifică sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y}=0$$
$$g=0$$

Se observă că pentru funcția $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$, avem $\frac{\partial F}{\partial \lambda}=g$, observație importantă în rezolvarea problemei în Matlab.

Pentru a calcula extremele funcției $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, cu legătura $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$, construim funcția $F(x,y,\lambda)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-1\right)$.

Rezolvăm sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$$

ştiind că printre soluţiile sale se află extremele funcţiei ce satisfac legătura din enunţ:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = y = -\sqrt{2} \quad \text{şi} \quad \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = y = \sqrt{2}$$

Calculăm hessiana lui F în aceste puncte:

$$H_F(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

rezultând că $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ este un punct de minim.

$$H_F(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

rezultând că $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ este un punct de maxim.

- Pentru a calcula extremele funcției $f(x,y,z)=x-2y+2z$ cu legătura $x^2+y^2+z^2=9$ construim funcția

$$F(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda\cdot(x^2+y^2+z^2-9)$$

Rezolvând sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda)=1+2\lambda\cdot x=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda)=-2+2\lambda\cdot y=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda)=2+2\lambda\cdot z=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-9=0$$

obținem:

$$\lambda=\frac{1}{2},\ x=-1,\ y=2,\ z=-2 \quad \text{şi} \quad \lambda=-\frac{1}{2},\ x=1,\ y=-2,\ z=2$$

Să calculăm hessiana lui F în punctele $(-1,2,-2)$ şi $(1,-2,2)$:

$$H_F(-1,2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, adică $(-1,2,-2)$ este punct de minim;

$$H_F(-1,2,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$, adică $(1,-2,2)$ este punct de maxim.

Extremele unei funcții reale definite pe un compact

Fie o funcție de clasă C^1, $f : A \to \mathbf{R}$, unde $A \subset \mathbf{R}^n$ este o mulțime deschisă; considerăm o mulțime compactă $K \subset A$, a cărei frontieră poate fi descrisă prin ecuații carteziene. Funcția f fiind continuă pe K, este mărginită şi îşi atinge marginile pe K, adică există punctele a şi b aparținând mulțimii K, astfel încât $f(a) = \inf_{x \in A} f(x)$ şi . $f(b) = \sup_{x \in A} f(x)$.

Dacă $a \in \operatorname{int} K$, atunci a este un punct de minim local pentru f şi $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0, 1 \le k \le n$;

dacă $a \in FrK$, atunci a este un punct de minim pentru f , cu legăturile date de ecuaţiile carteziene care descriu frontiera lui f .

Analog se întâmplă şi cu punctul de maxim b .

- Pentru a calcula marginile funcției $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2+4$ definită pe discul $x^2+y^2\leq 4$, calculăm la început punctele de extrem ale funcției în discul deschis $x^2+y^2<4$:

Soluțiile sistemului $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2y=0 \end{cases}$ sunt:

$$(0,0), \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

şi se verifică imediat că se află în discul deschis $x^2+y^2<4$.

Să calculăm hessiana lui f în aceste puncte:

$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ rezultă că $(0,0)$ este punct de maxim;

$H_f(0,\frac{1}{\sqrt{2}})=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$; $H_f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$;

$H_f(\frac{1}{\sqrt{2}},0)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$; $H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$;

$H_f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, deci $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim;

$H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim;

$H_f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim;

$H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ este punct de minim;

Calculăm:

$M_1=f(0,0)=4$;

$$m_1=f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{7}{2}$$

Pentru a calcula extremele funcției ce se află pe cercul $x^2 + y^2 = 4$, construim funcția $F(x, y, \lambda) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 4 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 4)$ și rezolvăm sistemul:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 4x^3 - 2x + 2\lambda \cdot x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 4y^3 - 2y + 2\lambda \cdot y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

ale cărui soluții sunt:

$\lambda = -7, x = 2. y = 0;\ \lambda = -7, x = -2. y = 0;$

$\lambda = -7, x = 0. y = 2;\ \lambda = -7, x = 0. y = -2;$

$\lambda = -3, x = \sqrt{2}. y = \sqrt{2};\ \lambda = -3, x = -\sqrt{2}. y = \sqrt{2};$

$\lambda = -3, x = -\sqrt{2}. y = \sqrt{2};\ \lambda = -3, x = \sqrt{2}. y = -\sqrt{2}$

Să scriem hessiana funcției $F(x, y, -7)$ în punctele găsite:

$$H_F(2,0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = H_F(-2,0)\,;\ H_F(0,2) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = H_F(0,-2)\,,$$

remarcăm că nu sunt puncte de extrem;

Scriem hessiana funcției $F(x, y, -3)$ în punctele corespunzătoare:

$$H_F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = H_F(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = H_F(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) =$$

$$= H_F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})\,.$$

Punctele $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sunt puncte de minim şi avem

$$m_2 = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8\,.$$

Aşadar $\inf\limits_{x^2+y^2 \le 4} f(x, y) = \dfrac{7}{2}$ şi $\sup\limits_{x^2+y^2 \le 4} f(x, y) = 4$.

Suprafață parametrizată

Vom studia un caz particular de funcție vectorială de două variabile reale.

O funcție de clasă C^1, $s : D \to \mathbf{R}^3$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă, se numește *suprafață parametrizată de clasă* C^1.

Aplicația $(u,v) \mapsto s(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$

face să-i corespundă fiecărui punct $(u,v) \in D$ un punct $s(u,v)$ din $\mathbf{R}^3$, de

coordonate $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v), (u,v) \in D \\ z = h(u,v) \end{cases}$.

Aceste relații reprezintă *ecuațiile parametrice* ale suprafeței s.

Mulțimea $s(D)$ notată Σ, se numește *urma suprafeței.*

Exemple

- Să scriem ecuațiile parametrice ale suprafeței elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Vom scrie ecuația elipsoidului în coordonate sferice generalizate:

$$x = a \cdot r \sin u \cos v$$
$$y = b \cdot r \sin u \sin v \text{ , unde } r \in [0,+\infty),\ v \in [0, 2\pi],\ u \in [0, \pi]$$
$$z = c \cdot r \cos u$$

şi anume $r = 1$; înlocuind în formulele ce exprimă coordonatele carteziene, ca funcții de coordonatele sferice generalizate, pe r, cu ecuația sa în coordonate sferice generalizate, obținem ecuațiile parametrice ale elipsoidului:

$$x = a \cdot \sin u \cos v$$
$$y = b \cdot \sin u \sin v \text{ , unde } v \in [0, 2\pi],\ u \in [0, \pi]$$
$$z = c \cdot \cos u$$

- În cazul în care suprafața este dată prin ecuația sa în coordonate carteziene $z = f(x, y), (x, y) \in D$ (caz în care suprafața este graficul unei funcții reale, de două variabile reale, de clasă C^1), vom scrie astfel ecuațiile parametrice

ale suprafeței $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}, (u, v) \in D$

Să scriem ecuațiile parametrice ale paraboloidului $2z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{u^2 + v^2}{2} \end{cases}, (u, v) \in \{(u, v) \in \mathbf{R}^2, u^2 + v^2 \leq 2\}$$

Dacă în $\mathbf{R}^3$ există un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, atunci considerând suprafața parametrizată de clasă C^1, $s : D \to \mathbf{R}^3$, punctul $s(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, punct curent al urmei Σ, are vectorul de poziție dat de

$$\bar{r} = f(u,v) \cdot \bar{i} + g(u,v) \cdot \bar{j} + h(u,v) \cdot \bar{k},\ (u,v) \in D$$

Suprafața s este *simplă* dacă funcția s este injectivă; suprafața este *nesingulară* dacă matricea sa jacobiană

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$$

are rangul maxim în toate punctele lui D.

Notăm:

$$\overline{r_u} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \bar{i} + \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \bar{j} + \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \bar{k} \text{ şi}$$

$$\overline{r_v} = \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \bar{i} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \bar{j} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \bar{k}$$

Produsul vectorilor

$$\bar{r_u} \times \bar{r_v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} = A \cdot \bar{i} + B \cdot \bar{j} + C\bar{k} \neq \theta$$

unde A, B, C sunt determinanții funcționali:

$$A = \frac{D(g,h)}{D(u,v)} \;,\; B = \frac{D(h,f)}{D(u,v)} \;, C = \frac{D(f,g)}{D(u,v)} \;,$$

se numeşte *produsul vectorial fundamental* al suprafeței nesingulare s.

Versorul normală la suprafață

Se notează cu $\overline{N}$ *versorul normală la suprafață* în punctul curent, vector ce are proprietatea că triedrele $\{\overline{r_u}, \overline{r_v}, \overline{N}\}$ și $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ sunt la fel orientate, și

$$\overline{N} = \frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{\left\| \overline{r_u} \times \overline{r_v} \right\|}.$$

Fiecărei suprafețe parametrizate i se asociază versorul normală în punctul curent.

- Octantul de sferă $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ este urma porțiunii de suprafață definită de ecuațiile parametrice:

$$s: \begin{cases} x = R\sin u \cos v \\ y = R\sin u \sin v\,, \quad (u,v) \in [0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}] \quad ; \\ z = R\cos u \end{cases}$$

avem:

$$\overline{r} = R\sin u \cos v \cdot \overline{i} + R\sin u \sin v \cdot \overline{j} + R\cos u \cdot \overline{k}$$

$$\overline{r_u} = R\cos u \cos v \cdot \overline{i} + R\cos u \sin v \cdot \overline{j} - R\sin u \cdot \overline{k}$$

$$\overline{r_v} = -R\sin u \sin v \cdot \overline{i} + R\sin u \cos v \cdot \overline{j}$$

$$\overline{r_u} \times \overline{r_v} = R^2 \sin^2 u \cos v \cdot \overline{i} + R^2 \sin^2 u \sin v \cdot \overline{j} + R^2 \sin u \cos u \cdot \overline{k}$$

$\left\| \overline{r_u} \times \overline{r_v} \right\| = R^2 \sin u$, și astfel

$$\overline{N} = R\sin u \cos v \cdot \overline{i} + R\sin u \sin v \cdot \overline{j} + R\cos u \cdot \overline{k}$$

Prezentăm o definiție echivalentă a suprafeței de clasă C^1:
dacă $A \subset \mathbf{R}^3$ este o mulțime deschisă şi $f : A \to \mathbf{R}$ este o funcție de clasă C^1, atunci mulțimea:

$$S = \{(x, y, z) \in A \mid f(x, y, z) = 0\}$$

se numeşte suprafață de clasă C^1, având ecuația carteziana $f(x, y, z) = 0$.

Un punct $(x_0, y_0, z_0) \in S$ este punct *singular* dacă este punct critic pentru f (adică $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$).

Cu ajutorul teoremei funcțiilor implicite se demonstrează că orice suprafață parametrizată de clasă C^1 poate fi dată local printr-o ecuație carteziană (prin eliminarea parametrilor).

Reciproc, o suprafață de clasă C^1 având ecuația carteziană $f(x, y, z) = 0$ poate fi local parametrizată, astfel: dacă $(x_0, y_0, z_0) \in S$ este un punct nesingular cu proprietatea că $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, atunci există o funcție $\varphi(x, y)$, definită într-o bilă deschisă $B((x_0, y_0), r)$, de clasă C^1, astfel încât în $B((x_0, y_0), r)$, suprafața are parametrizarea :

$$x = u, y = v, z = \varphi(u, v), (u, v) \in B((x_0, y_0), r) .$$

Atunci avem

$$\overline{r} = u \cdot \overline{i} + v \cdot \overline{j} + \varphi(u, v) \cdot \overline{k} \ ,$$

$$\overline{r_u} = \overline{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \overline{k} \ , \ \overline{r_v} = \overline{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \overline{k}$$

Folosind notațiile consacrate $p = \dfrac{\partial f}{\partial u}$, $q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ versorii normalei sunt:

$$\pm \overline{N} = \pm \frac{-p \cdot \overline{i} - q \cdot \overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

Având $p = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$, $q = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$, rezultă că: $\pm \overline{N} = \pm \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \overline{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$

Exemplu

- În cazul elipsoidului de ecuație în coordonate carteziene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

relația $f(x,y,z)=0$, unde $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, definește implicit pe $z(x,y)$ şi astfel conform formulei de mai sus avem:

$$\overline{N}=\pm\frac{\frac{2x}{a^2}\cdot\overline{i}+\frac{2y}{b^2}\cdot\overline{j}+\frac{2z}{c^2}\overline{k}}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{2z}{c^2}\right)^2}}\ .$$

De reținut

- Derivata după un versor,
- Derivate parțiale
- Matrice jacobiană, jacobian
- Funcție diferențiabilă într-un punct
- Vectorul gradient
- Formula de calcul a diferențialei într-un punct
- Condiție suficientă de diferențiabilitate
- Derivate de ordin superior
- Matrice hessiană

- Criteriul lui Schwarz
- Polinomul Taylor, formula Taylor
- Vectori şi valori proprii
- Calculul extremelor funcțiilor de mai multe variabile.
- Funcție definită implicit
- Derivarea unei funcții definită implicit
- Extreme cu legături
- Suprafață parametrizată

Tema

1. Calculați $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ pentru $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ și

$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1)$ pentru $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2. Calculați jacobianul funcției $f(r,\varphi)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi), r\geq 0, \varphi\in[0,2\pi]$

   în punctul current.

3. Calculați $\frac{df}{ds}(1,-2,4)$ pentru versorul $s=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ și funcția $f(x,y,z)=\frac{2xy+3z}{x^2+y^2+z^2}$;

4. Calculați $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$, dacă $g(x,y)=f(x^2-y^2, x^2\cdot y^3)$,

   unde funcția $f: A_2\to\mathbf{R}, A_3\subset\mathbf{R}^2$ și funcțiile $u,v: A_1\to\mathbf{R}, A_1\subset\mathbf{R}^2$, sunt de clasă C^1

5. Calculați $df(-2,1)$ pentru funcția $f(x,y)=x^4y+2y^2\cdot e^{x^2+y^2}$;

calculați $df(0,-1,3)$ pentru funcția $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y+z}+\sqrt{x^2+z^4}$.

6. Scrieti polinomul Taylor de gradul 3 în punctul $(1,0)$, pentru funcția $f(x,y)=e^{xy}\cdot\cos y$

7. Calculați extremele funcțiilor:

$f_1(x,y)=x\cdot e^{-x^2-y^2}$; $f_2(x,y)=x^3-3x^2+5x\cdot y-7y^2$;

$f_3(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$;

8. Pentru $f=(f_1,f_2,f_3):[0,+\infty)\times[0,\pi)\times[0,2\pi)\to \mathbf{R}^3$ unde

$f_1(r,u,v)=r\cdot\sin u\cos v$,

$f_2(r,u,v)=r\cdot\sin u\sin v$

$f_3(r,u,v)=r\cdot\cos u$

verificați dacă jacobianul este diferit de zero, în punctul $(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$; dacă da, pe baza teoremei de inversiune locală calculați matricea jacobiană a funcției inverse $g=f^{-1}$.

9. Calculați derivata de ordinul I a funcției $y(x)$ definite implicit prin ecuația

$$\sqrt{x^2+y}-\ln(x+y)=3$$

10. *Calculați* diferențiala dz în punctul curent, dacă funcția $z(x,y)$ este definită implicit de ecuația $\sqrt{x^2+y^2\cdot z^2}=x+y+z$

11. *Calculați* derivatele parțiale ale funcțiilor $u(x,y), v(x,y)$ definite implicit de sistemul $\begin{cases} x = u\cdot\cos v \\ y = u\cdot\sin v \end{cases}$

12. *Calculați* extremele funcției $f(x,y)=x^2+y^2$, cu legătura $2x+y=1$