



Integrala Riemann

2009-2010

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro



Integrala Riemann



Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, o diviziune a intervalului $[a, b]$ este mulțimea punctelor $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ și anume:

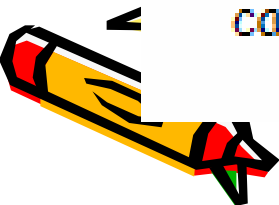
$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Notăm cu $D[a, b]$ mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

Norma diviziunii $\Delta \in D[a, b]$ este numărul $\|\Delta\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$.

O diviziune este echidistantă dacă $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $1 \leq k \leq n$,

caz în care avem: $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $1 \leq k \leq n$.





Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, și $\Delta \in \mathcal{D} [a, b]$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, mulțimea $\xi_{\Delta} = \{\xi_k, 1 \leq k \leq n, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$ este mulțimea *punctelor intermediare* asociate diviziunii Δ .

Pentru funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, construim suma:

$$\sigma_f(\Delta, \xi_{\Delta}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

numită *suma Riemann*.

Aceasta, reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de laturi $(x_k - x_{k-1})$ și $f(\xi_k)$, $1 \leq k \leq n$.



Funcție integrabilă Riemann



Funcția f este *integrabilă Riemann* pe $[a, b]$ dacă există un număr real I , cu proprietatea că:

$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât $\forall \Delta \in D[a, b]$, cu $\|\Delta\| < \delta$ să avem

$|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_Δ

Numărul I se numește *integrala Riemann* a lui f pe $[a, b]$, este unic determinat

și se notează $I = \int_a^b f(x) dx$.

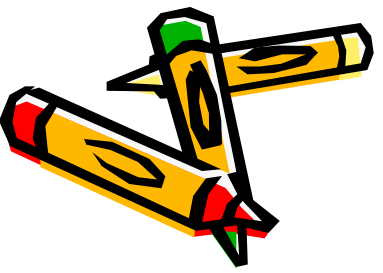
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta), \Delta \in D[a, b].$$





Pentru funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$, integrabilă Riemann pe $[a, b]$, numărul $\int_a^b f(x) dx$ reprezintă aria mulțimii mărginite de axa Ox , dreptele $x = a, x = b$ și graficul funcției $y = f(x)$.

Reamintim că în general, aria mulțimii limitată de axa Ox , dreptele $x = a, x = b$ și graficul funcției $y = f(x)$, unde funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, este $\int_a^b |f(x)| dx$.





Sumele Darboux

- O funcție $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, integrabilă Riemann pe $[a,b]$ este mărginită pe $[a,b]$.

Pentru o funcție $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, mărginită pe $[a,b]$, definim *sumele Darboux* astfel:

pentru $\Delta \in D[a,b]$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

notăm $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$ și $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$ și construim

$$s_f(\Delta) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{suma Darboux inferioară})$$

$$S_f(\Delta) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{suma Darboux superioară})$$



Criteriul lui Darboux

- O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mărginită pe $[a, b]$, este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D} [a, b]$, cu $\|\Delta\| < \delta$, să avem $S_f(\Delta) - s_f(\Delta) < \varepsilon$

Consecință

- O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă, este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.



Mulțime neglijabilă de măsură Lebesgue nulă



O mulțime $A \subset \mathbf{R}$ se numește *neglijabilă* sau *de măsură Lebesgue nulă* dacă $\forall \varepsilon > 0$ există un șir de intervale din \mathbf{R} , notate $(J_n)_n$, cu proprietățile: $A \subset \bigcup_n J_n$

și $\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) < \varepsilon$. (am notat lungimea intervalului J_n cu $l(J_n)$).

Putem lua intervalele J_n deschise, închise sau semi-deschise.



Exemplu

- Mulțimea numerelor naturale \mathbf{N} este de măsură Lebesgue nulă:

Pentru $\varepsilon > 0$, să considerăm $J_n = \left[n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right]$, $n \in \mathbf{N}$ și atunci:

$$\mathbf{N} \subset \bigcup_n J_n \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon.$$



Proprietățile mulțimilor neglijabile



- O submulțime a unei mulțimi neglijabile este neglijabilă.
- O mulțime numărabilă este neglijabilă.



Criteriul lui Lebesgue



□ O funcție $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă f este mărginită și mulțimea punctelor ei de discontinuitate este de măsură Lebesgue nulă.

Din acest criteriu rezultă imediat integrabilitatea funcțiilor continue, a celor monotone și a celor mărginite cu mulțimea punctelor de discontinuitate finită.



Exemplu

- Vom arăta că funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right], & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ îndeplinește condițiile din

criteriul lui Lebesgue, fiind astfel integrabilă pe $[0,1]$

Avem $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 1$, rezultat obținut prin trecere la limită $x \rightarrow 0$

în inegalitatea $x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] \leq x \cdot \frac{1}{x}$, așadar f este continuă în 0 .

Să explicităm funcția, ținând seama că:

$$\left[\frac{1}{x} \right] = n \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{x} < n+1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$$





$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ 2x, & x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \\ \dots \\ nx, & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ \dots \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Din $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{n} \\ x < \frac{1}{n}}} f(x) = 1$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{n} \\ x > \frac{1}{n}}} f(x) = \frac{n-1}{n}$ rezultă că mulțimea punctelor de

discontinuitate ale funcției f este $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$, o mulțime numărabilă, deci

de măsură Lebesgue nulă.

Funcția f fiind și mărginită ($0 < f(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$), sunt îndeplinite condițiile criteriului Lebesgue



Proprietățile integralei Riemann



- Dacă funcțiile $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a, b]$, atunci $f + g$ este integrabilă pe $[a, b]$; dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, funcția $\alpha \cdot f$ este integrabilă pe $[a, b]$ și:

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$\int_a^b (\alpha \cdot f)(x) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx$$

(liniaritatea integralei Riemann).





□ Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$,

$$\text{atunci } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Consecință: *monotonia integralei Riemann*, în sensul că

dacă funcțiile $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a, b]$,

cu proprietatea că $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.





□ Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe $[a, b]$, atunci f este integrabilă Riemann pe orice compact $[c, d] \subset [a, b]$. (*ereditate*).

□ Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, atunci oricare ar

fi $c \in [a, b]$ avem
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(*aditivitatea integralei ca funcție de interval*).





Teorema de medie

- Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, atunci:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

unde $m = \inf_{[a, b]} f(x)$ și $M = \sup_{[a, b]} f(x)$.

Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$



Exemplu

- Pentru a demonstra inegalitatea $\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1$, observăm că funcția

$f(x) = e^{-x^2}$ este descrescătoare pe $[0,1]$ ($f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \leq 0, x \in [0,1]$)

și astfel avem $\frac{1}{e} \leq e^{-x^2} \leq 1, x \in [0,1]$, deci conform teoremei de medie

$$\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1.$$

Pe de altă parte $f(x) = e^{-x^2}$ fiind continuă pe $[0,1]$, există $\xi = 0.5043$

astfel încât $f(\xi) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.





□ Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe $[a, b]$, vom defini

funcția $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, prin $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Funcția F este continuă pe $[a, b]$

□ Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ este continuă pe $[a, b]$, atunci funcția $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$,

definită prin $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ este derivabilă pe $[a, b]$ și $F'(x) = f(x)$.



Exemplu

• Pentru a calcula derivata funcției $\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt$, notăm cu $F(x)$ primitiva

funcției (continue) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; atunci $\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt = F(\cos x) - F(0)$

și astfel

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt \right) = \frac{d}{dx} (F(\cos x) - F(0)) = -\sin x \cdot F'(\cos x) =$$

$$= -\sin x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x \cdot |\sin x|.$$



Transfer de integrabilitate



- Fie un șir $(f_n)_n \subset \mathcal{C}([a, b])$, uniform convergent la funcția f pe $[a, b]$. Atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

- Dacă seria de puteri $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$ are raza de convergență $R > 0$, suma f , atunci

și seria de puteri $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ are raza de convergență R și avem relația

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} .$$



Exemple

- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$, $x \in (-1,1)$, deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$ și integrând,

obținem relația de mai sus

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} x^n, x \in (-1,1);$$



- Pentru a stabili mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

calculăm raza de convergență $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+3}} = 1$;

În punctele $x = 1$ și $x = -1$ sunt verificate condițiile din criteriul Leibniz, deci seria este convergentă și astfel mulțimea de convergență este $[-1, 1]$.

Definim suma seriei ca fiind $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Derivând seria termen cu termen obținem

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \forall |x| < 1$$

și astfel $f(x) = \arctg x + C, |x| < 1$. Pentru $x = 0$, obținem $C = 0$.





- Folosind transferul de integrabilitate în cazul seriilor de puteri, să dezvoltăm în serie funcția $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbf{R}$:

Calculăm derivata $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ și o dezvoltăm în serie de puteri (este suma unei serii binomiale), așadar:

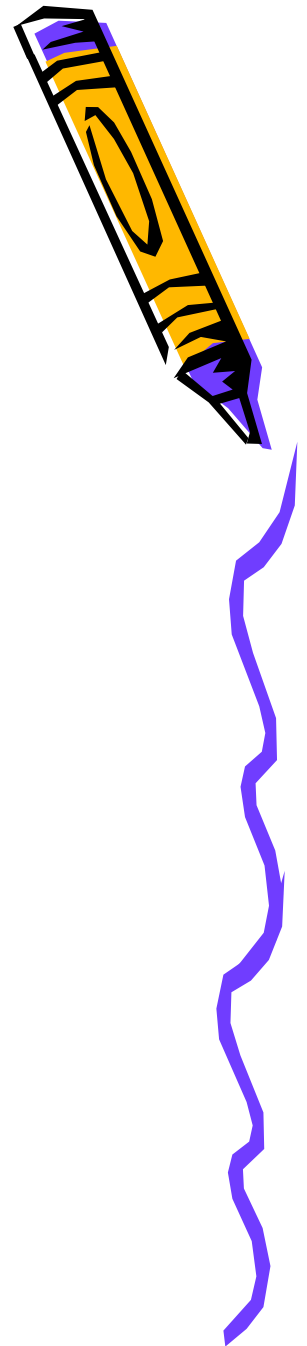
$$f'(x) = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n}, x \in \mathbf{R}$$

Integrăm termen cu termen pe $[0, x]$, $x \in \mathbf{R}$ și obținem:

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! \cdot (2n+1)} \cdot x^{2n+1} + C;$$

din $f(0) = 0$, rezultă $C = 0$





De reținut

- Funcție integrabilă Riemann
- Criteriul lui Darboux
- Criteriul lui Lebesgue
- Proprietățile funcțiilor integrabile
- Teorema de medie
- O primitivă a unei funcții integrabile Riemann
- Transfer de integrabilitate





Tema

1. Studiați integrabilitatea funcției $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \left[\frac{1}{x} \right], & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

2. Calculați derivatele funcțiilor, în punctele indicate:

o $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t \cdot \sqrt{t^4 + t^2 + 1}} dt$ în $x = 3$

o $G(x) = \int_0^{x^3+1} e^{t^2} dt$ în $x = 2$

3. Dacă $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă, atunci funcția

$F : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$, definită de $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, este lipschitziană.



a

4. Stabiliți mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ și apoi calculați suma seriei.

5. Determinați dezvoltările în serie de puteri ale următoarelor funcții, pe mulțimile indicate:

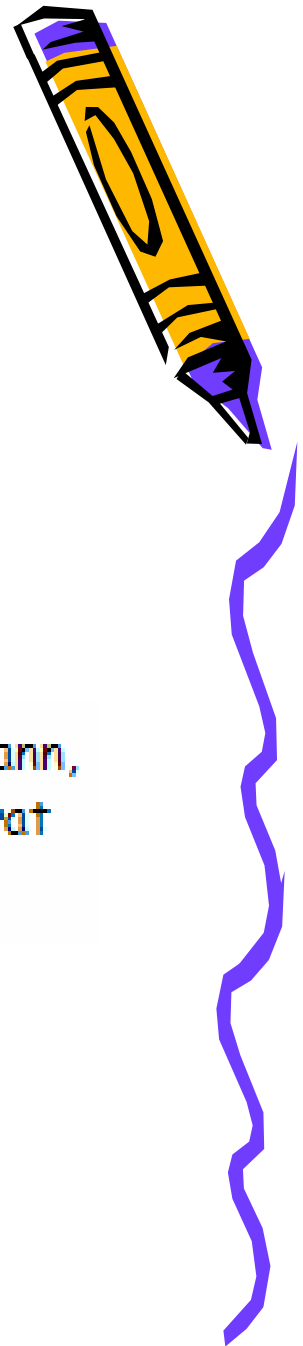
o $f(x) = \arcsin x, |x| \leq 1$

o $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt, x \in \mathbf{R}.$

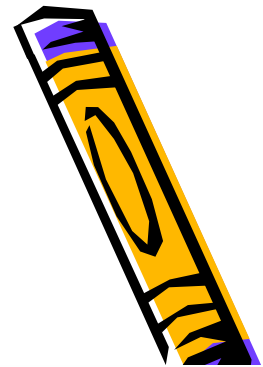


Integrale improprii

Integralele improprii constituie o extindere naturală a integralei Riemann, în sensul că vom considera domeniul de integrare sau funcția de integrat nemărginite, bazându-ne pe teoria trecerii la limită.



Integrale pe intervale nemărginite



Integralele pe *intervale nemărginite* sunt integralele în care cel puțin una din limitele de integrare este infinită, adică de forma:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ sau } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Dacă pentru funcția $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, integrabilă pe orice interval $[a, x]$, cu $x > a$,

există $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_a^L f(x) dx \in \mathbf{R}$, vom spune că $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este *convergentă*

și vom nota $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_a^L f(x) dx$. În caz contrar integrala este *divergentă*.



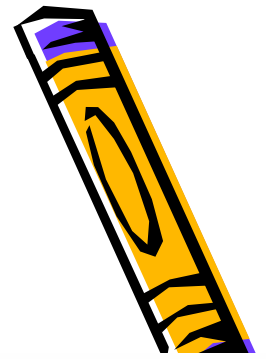
Exemple

- Să calculăm $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \arctg u = \frac{\pi}{2}$;

- Integrala $\int_a^{\infty} \sin x dx$ este divergentă deoarece:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \sin x dx = \lim_{u \rightarrow \infty} (-\cos u + 1) \text{ și nu există } \lim_{u \rightarrow \infty} \cos u.$$





Există încă două cazuri de integrale improprii, cu domeniul de integrare nemărginit, cazuri care se reduc imediat la cazul prezentat anterior. Astfel, avem:

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^{\infty} f(-t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx$$

dacă $\int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx$ există.





□ Integralele $\int_a^{\infty} f(x) dx$ și $\int_b^{\infty} f(x) dx$, unde $f : [c, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, c = \min\{a, b\}$

converg sau diverg în același timp.

□ Considerând $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, integralele $\int_a^{\infty} f(x) dx$ și $\int_a^{\infty} k \cdot f(x) dx$ au aceeași natură, oricare ar fi $k \neq 0$.





□ Integrala $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este convergentă dacă și numai dacă oricare ar fi șirul

$(a_n)_n \subset [a, \infty)$, crescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, seria $\sum_{n \geq 0} u_n$, cu termenul general

$u_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx$, este convergentă.

Consecință: criteriul lui *Cauchy*, de convergență a integralelor improprii pe domenii nemărginite

□ Integrala $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este convergentă dacă și numai dacă oricare ar fi

$\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon)$ astfel încât $a_{n(\varepsilon)} > a$ și $\left| \int_{a_{k+1}}^{a_{k+p}} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n(\varepsilon), \forall p \in \mathbf{N}$



Criteriu de convergență



□ Dacă funcția $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$, integrabilă pe orice interval $[a, x]$, are proprietatea că există o funcție $g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$ astfel încât $f(x) \leq g(x), \forall x \geq a$, atunci din convergența

$\int_a^{\infty} g(x) dx$ rezultă că integrala $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este convergentă, în timp ce divergența integralei

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ implică divergență integralei $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

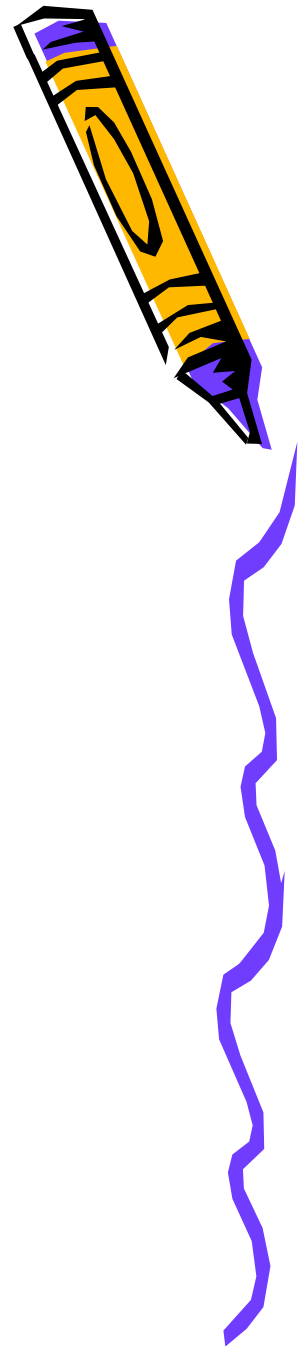


Exemplu

- $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ este convergentă, deoarece $\forall x > 1$ avem

$$e^{-x^2} < e^{-x} \text{ și}$$

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}.$$



Consecință



- Pentru funcția $f : [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$, integrabilă pe orice interval $[\alpha, x]$:
 - dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot f(x) = A$ (finit), pentru $\alpha > 1$, atunci $\int_{\alpha}^{\infty} f(x) dx$ este convergentă;
 - dacă $\alpha \leq 1$ și $A \neq 0$, integrala este divergentă.





Exemplu

- $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ este convergentă, deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{2}$.

Pentru a calcula integrala, folosim a doua schimbare de variabilă:

din substituția $x = \operatorname{tg} t$ obținem $dx = (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$;

se schimbă limitele de integrare: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ și $x = \infty \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ și astfel:

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos t dt = \frac{\pi}{2} - 1$$



Integrală absolut convergentă

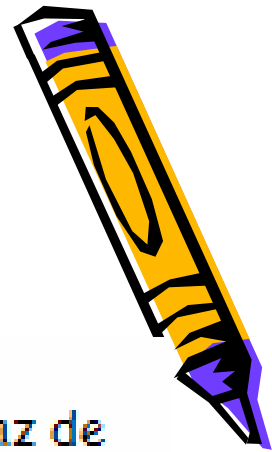


Spunem că integrala $\int_a^{\infty} f(x) dx$ este *absolut convergentă* dacă

integrala $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ este convergentă.

Se observă că o integrala absolut convergentă este și convergentă.





Exemplu

- Să studiem natura integralei $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \sin bx dx$, unde $b \in \mathbb{R}$ și în caz de convergență să calculăm efectiv integrala:

Avem inegalitatea $|e^{-2x} \cdot \sin bx| \leq e^{-2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și în plus

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}, \text{ așadar integrala este absolut convergentă}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \sin bx dx &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right)' \cdot \sin bx dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \sin bx \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \frac{b}{2} \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \cos bx dx = \frac{b}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \cos bx \Big|_0^{\infty} - \frac{b}{2} \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \sin bx dx \right), \end{aligned}$$

calcul din care rezultă că $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \sin bx dx = \frac{b}{b^2 + 4}$.



Integrale definite de funcții nemărginite



Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$ cu excepția unui punct x_0 , $a \leq x_0 \leq b$, punct în care funcția f are o discontinuitate de speța a doua ($\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$).

Să presupunem că $x_0 = b$, în caz contrar putând scrie:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx - \int_b^{x_0} f(x) dx$$

Integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă dacă există $\lim_{u \rightarrow 0} \int_a^{b-u} f(u) du$ și este finită.

In caz contrar, integrala este divergentă.



Exemple



- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-u} = \frac{\pi}{2}$

- $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^{1-u} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^{1-u} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{u \rightarrow 0} (\arcsin x \Big|_0^{1-u} - \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{1-u}) =$
 $= \frac{\pi}{2} + 1$





În integrala $\int_a^b f(x)dx$, unde $f:[a,b) \rightarrow \mathbf{R}_+$ este integrabilă pe orice interval

$[a, b-u]$, $u \in (0, b-a)$ și în plus avem $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$, vom face schimbarea de variabilă

$t = \frac{1}{b-x}$; din $x = b - \frac{1}{t}$ rezultă $dx = \frac{1}{t^2} dt$ și schimbând limitele de integrare obținem

o integrală improprie pe interval nemărginit:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$$



Criteriu de convergență



□ Fie funcția $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$, cu $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$, integrabilă pe orice interval $[a, b - u]$,

$u \in (0, b - a)$; dacă există și este finită $\lim_{x \rightarrow b} (b - x)^\beta \cdot f(x)$ pentru $\beta < 1$, atunci

$\int_a^b f(x) dx$ este convergentă.





Exemplu

- Integrala $\int_0^1 \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{1-x^2}} dx$ este convergentă, deoarece

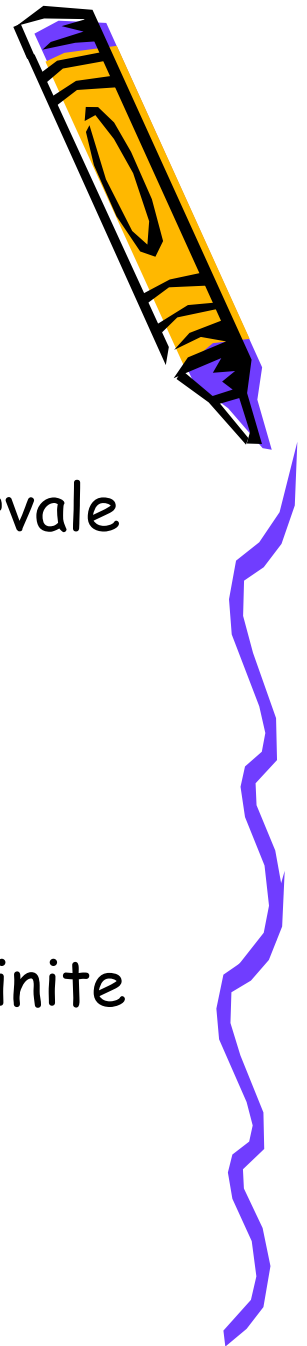
$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} ;$$

pentru a calcula integrala folosim substituția $t = \frac{1}{x+1}$, rezultând astfel

$dx = -\frac{1}{t^2} dt$; după înlocuirea limitelor de integrare obținem:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1) \cdot \sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{2t-1}}{t}} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{2t-1}} dt = 1$$





De reținut

- **Integrale pe intervale nemărginite**
- Caracterizare a integralelor improprii pe intervale nemărginite cu ajutorul seriilor numerice
- Criteriul de convergență și consecință
- Integrală improprie absolut convergentă
- **Integrala definită de funcții nemărginite**
- Legătura dintre integrala definită de funcții nemărginite și integralele pe intervale nemărginite
- Criteriu de convergență





Tema

1. Calculați următoarele integrale, după ce în prealabil ați studiat convergența lor:

$$\int_0^{\infty} \frac{2 + \operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} dx; \quad \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx; \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx;$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}} dx; \quad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx; \quad \int_{-1}^0 \frac{2x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

