Integrala Riemann

2009-2010

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro

Integrala Riemann

Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, o *diviziune* a intervalului $[a, b]$ este mulțimea punctelor $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset [a, b]$ şi anume:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Notăm cu $D[a, b]$ mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

Norma diviziunii $\Delta \in D[a, b]$ este numărul $\|\Delta\| = \max_{1 \le k \le n} |x_k - x_{k-1}|$.

O diviziune este *echidistantă* dacă $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}, 1 \le k \le n$,

caz în care avem: $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, 1 \le k \le n$.

Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, şi $\Delta \in D\ [a, b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, mulţimea $\xi_\Delta = \{\xi_k, 1 \le k \le n, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\}$ este mulţimea *punctelor intermediare* asociate diviziunii Δ.

Pentru funcţia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, construim suma:

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

numită *suma Riemann.*

Aceasta, reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de laturi $(x_k - x_{k-1})$ şi $f(\xi_k)$, $1 \le k \le n$.

Funcție integrabilă Riemann

Funcția f este *integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ dacă există un număr real I , cu proprietatea că:

$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D}\,[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \delta$ să avem

$\left|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I\right| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_Δ

Numărul I se numeşte *integrala Riemann* a lui f pe $[a,b]$,este unic determinat

şi se notează $I = \int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)\,,\quad \Delta \in \mathcal{D}\,[a,b]\,.$$

Pentru funcția $f:[a,b] \to \mathbf{R}_+$, integrabilă Riemann pe $[a,b]$, numărul $\int_a^b f(x)dx$ reprezintă aria mulțimii mărginite de axa Ox, dreptele $x=a, x=b$ și graficul funcției $y=f(x)$.

Reamintim că în general, aria mulțimii limitată de axa Ox, dreptele $x=a, x=b$ și graficul funcției $y=f(x)$, unde funcția $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, este $\int_a^b |f(x)|dx$.

Sumele Darboux

- O funcție $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, integrabilă Riemann pe $[a,b]$ este mărginită pe $[a,b]$.

Pentru o funcție $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, mărginită pe $[a,b]$, definim *sumele Darboux* astfel:

pentru $\Delta\in \mathrm{D}[a,b]$, $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$,

notăm $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$ și $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$ și construim

$$s_f(\Delta)=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot(x_k-x_{k-1})$$ (*suma Darboux inferioară*)

$$S_f(\Delta)=\sum_{k=1}^{n} M_k\cdot(x_k-x_{k-1})$$ (*suma Darboux inferioară*)

Criteriul lui Darboux

- O funcție $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, mărginită pe $[a,b]$, este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă $\forall\varepsilon>0$ există $\delta>0$, astfel încât $\forall\Delta\in\mathrm{D}\,[a,b]$, cu $\|\Delta\|<\delta$, să avem $S_f(\Delta)-s_f(\Delta)<\varepsilon$

Consecință

- O funcție $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, continuă, este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Mulțime neglijabilă_de măsură Lebesgue nulă

O mulțime $A \subset \mathbf{R}$ se numește *neglijabilă* sau *de măsură Lebesgue nulă* dacă $\forall \varepsilon > 0$ există un şir de intervale din **R**, notate $(J_n)_n$, cu proprietățile: $A \subset \bigcup\limits_n J_n$

şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(J_n) < \varepsilon$. (am notat lungimea intervalului J_n cu $l(J_n)$).

Putem lua intervalele J_n deschise, închise sau semi-deschise.

Exemplu

- Mulțimea numerelor naturale **N** este de măsură Lebesgue nulă:

Pentru $\varepsilon > 0$, să considerăm $J_n = \left[n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right], n \in \mathbf{N}$ şi atunci:

$$\mathbf{N} \subset \bigcup_n J_n \text{ şi } \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon .$$

Proprietățile mulțimilor neglijabile

- O submulțime a unei mulțimi neglijabile este neglijabilă.
- O mulțime numărabilă este neglijabilă.

Criteriul lui Lebesgue

- O funcție $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă f este mărginită și mulțimea punctelor ei de discontinuitate este de măsură Lebesgue nulă.

Din acest criteriu rezultă imediat integrabilitatea funcțiilor continue, a celor monotone și a celor mărginite cu mulțimea punctelor de discontinuitate finită.

Exemplu

- Vom arăta că funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right], & x\in(0,1] \\ 1, & x=0 \end{cases}$ îndeplineşte condițiile din criteriul lui Lebesgue, fiind astfel integrabilă pe $[0,1]$

Avem $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$, rezultat obținut prin trecere la limită $x\to 0$

în inegalitatea $x\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le x\cdot\frac{1}{x}$, aşadar f este continuă în 0 .

Să explicităm funcția, ținând seama că:

$$\left[\frac{1}{x}\right]=n \Leftrightarrow n\le\frac{1}{x}<n+1 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$$

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right] \\ 2x, & x\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] \\ \dots\dots & \dots \\ nx, & x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right] \\ \dots\dots & \dots \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

Din $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{n} \\ x<\frac{1}{n}}} f(x)=1$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{n} \\ x>\frac{1}{n}}} f(x)=\frac{n-1}{n}$ rezultă că mulțimea punctelor de

discontinuitate ale funcției f este $\{\frac{1}{n}, n\in\mathbf{N}^*\}$, o mulțime numărabilă, deci

de măsură Lebesgue nulă.

Funcția f fiind şi mărginită $\left(0<f(x)\le 1, \forall x\in[0,1]\right)$, sunt îndeplinite condițiile criteriului Lebesgue

Proprietățile integralei Riemann

- Dacă funcțiile $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$, atunci $f+g$ este integrabilă pe $[a,b]$; dacă $\alpha \in \mathbf{R}$, funcția $\alpha \cdot f$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b (\alpha \cdot f)(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$$

(*liniaritatea integralei Riemann*).

- Dacă funcția $f:[a,b]\to \mathbf{R}_+$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$,

atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Consecință: *monotonia integralei Riemann*, în sensul că

dacă funcțiile $f,g:[a,b]\to \mathbf{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$,

cu proprietatea că $f(x)\leq g(x), \forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

- Dacă $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Riemann pe orice compact $[c,d]\subset[a,b]$. (*ereditate*).

- Dacă funcția $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci oricare ar fi $c\in[a,b]$ avem $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

  (*aditivitatea integralei ca funcție de interval*).

Teorema de medie

- Dacă funcția $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$,atunci:

$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a)$$

unde $m=\inf\limits_{[a,b]} f(x)$ şi $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci există $\xi\in[a,b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a).$$

Exemplu

- Pentru a demonstra inegalitatea $\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1$, observăm că funcția

$f(x) = e^{-x^2}$ este descrescătoare pe $[0,1]$ $\left(f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \le 0,\ x \in [0,1]\right)$

şi astfel avem $\frac{1}{e} \le e^{-x^2} \le 1, \quad x \in [0,1]$, deci conform teoremei de medie

$$\frac{1}{e} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1.$$

Pe de altă parte $f(x) = e^{-x^2}$ fiind continuă pe $[0,1]$, există $\xi = 0.5043$

astfel încât $f(\xi) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.

- Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție integrabilă Riemann pe $[a,b]$, vom defini funcția $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, prin $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Funcția F este continuă pe $[a,b]$

- Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este continuă pe $[a,b]$, atunci funcția $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ este derivabilă pe $[a,b]$ și $F'(x)=f(x)$.

Exemplu

- Pentru a calcula derivata funcției $\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt$, notăm cu $F(x)$ primitiva

funcției (continue) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; atunci $\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt = F(\cos x)-F(0)$

și astfel

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(F(\cos x)-F(0)\right) = -\sin x \cdot F'(\cos x) =$$

$$= -\sin x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x \cdot |\sin x| \,.$$

Transfer de integrabilitate

- Fie un şir $(f_n)_n \subset \mathcal{C}([a,b])$, uniform convergent la funcţia f pe $[a,b]$. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

- Dacă seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$ are raza de convergenţă $R>0$, suma f, atunci

şi seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}\cdot x^n$ are raza de convergentă R şi avem relaţia

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot x^{n+1}.$$

Exemple

- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},\ x\in(-1,1)$, deoarece $\sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x},\ x\in(-1,1)$ şi integrând,

obținem relația de mai sus

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\ x^n,\ x\in(-1,1)\ ;$$

- Pentru a stabili mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

calculăm raza de convergență $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n+3}}=1$;

în punctele $x=1$ și $x=-1$ sunt verificate condițiile din criteriul Leibniz, deci seria este convergentă și astfel mulțimea de convergență este $[-1,1]$.

Definim suma seriei ca fiind $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Derivând seria termen cu termen obținem

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\ \forall\ |x|<1$$

și astfel $f(x)=arctgx+C, |x<1|$. Pentru $x=0$, obținem $C=0$.

- Folosind transferul de integrabilitate în cazul seriilor de puteri, să dezvoltăm în serie funcția $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), x\in \mathbf{R}$:

Calculăm derivata $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ și o dezvoltăm în serie de puteri (este suma unei serii binomiale), așadar:

$$f'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n},\ x\in \mathbf{R}$$

Integrăm termen cu termen pe $[0,x], x\in \mathbf{R}$ și obținem:

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)}\cdot x^{2n+1}+C\ ;$$

din $f(0)=0$, rezultă $C=0$

De reținut

- Funcție integrabilă Riemann
- Criteriul lui Darboux
- Criteriul lui Lebesgue
- Proprietățile funcțiilor integrabile
- Teorema de medie
- O primitivă a unei funcții integrabile Riemann
- Transfer de integrabilitate

Tema

1. Studiați integrabilitatea funcției $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases} x^3\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

2. Calculați derivatele funcțiilor, în punctele indicate:

   - $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$ în $x=3$
   - $G(x)=\displaystyle\int_0^{x^3+1} e^{t^2}\,dt$ în $x=2$

3. Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție integrabilă, atunci funcția $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, definită de $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, este lipschitziană.

a

4. Stabiliți mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$ şi

şi apoi calculați suma seriei.

5. Determinați dezvoltările în serie de puteri ale următoarelor funcții, pe mulțimile indicate:

- $f(x)=\arcsin x,\ |x|\leq 1$
- $F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt,\ x\in \mathbf{R}.$

Integrale improprii

Integralele improprii constituie o extindere naturală a integralei Riemann, în sensul că vom considera domeniul de integrare sau funcția de integrat nemărginite, bazându-ne pe teoria trecerii la limită.

Integrale pe intervale nemărginite

Integralele pe *intervale nemărginite* sunt integralele în care cel puțin una din limitele de integrare este infinită, adică de forma:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx\,,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \ \text{ sau } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\,.$$

Dacă pentru funcția $f:[a,+\infty)\to \mathbf{R}$, integrabilă pe orice interval $[a,x]$, cu $x>a$,

există $\lim\limits_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx \in \mathbf{R}$, vom spune că $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este *convergentă*

şi vom nota $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx$. În caz contrar integrala este *divergentă*.

Exemple

- Să calculăm $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty} arctgu = \frac{\pi}{2}$;

- Integrala $\int_a^\infty \sin x dx$ este divergentă deoarece:

$\lim_{u\to\infty}\int_0^u \sin x dx = \lim_{u\to\infty}(-\cos u + 1)$ şi nu există $\lim_{u\to\infty}\cos u$.

Există încă două cazuri de integrale improprii, cu domeniul de integrare nemărginit, cazuri care se reduc imediat la cazul prezentat anterior. Astfel, avem:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{\infty} f(-t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

dacă $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ există.

- Integralele $\int_a^{\infty} f(x)dx$ şi $\int_b^{\infty} f(x)dx$, unde $f:[c,\infty)\to \mathbf{R}$, $c=\min\{a,b\}$

  converg sau diverg în acelaşi timp.

- Considerând $f:[a,+\infty)\to \mathbf{R}$, integralele $\int_a^{\infty} f(x)dx$ şi $\int_a^{\infty} k\cdot f(x)dx$ au aceeaşi natură, oricare ar fi $k\neq 0$.

- Integrala $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul $(a_n)_n \subset [a,\infty)$, crescător cu $\lim\limits_{u\to\infty} a_n = \infty$, seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, cu termenul general $u_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$, este convergentă.

Consecință: criteriul lui *Cauchy*, de convergență a integralelor improprii pe domenii nemărginite

- Integrala $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon)$ astfel încât $a_{n(\varepsilon)} > a$ şi $\left|\int_{a_{n+1}}^{a_{n+p}} f(x)dx\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n(\varepsilon), \forall p \in \mathbf{N}$

Criteriu de convergență

- Dacă funcția $f:[a,+\infty)\to \mathbf{R}_+$, integrabilă pe orice interval $[a,x]$, are proprietatea că există o funcție $g:[a,+\infty)\to \mathbf{R}_+$ astfel încât $f(x)\le g(x), \forall x\ge a$, atunci din convergența $\int_a^\infty g(x)dx$ rezultă că integrala $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă, în timp ce divergența integralei $\int_a^\infty f(x)dx$ implică divergentă integralei $\int_a^\infty g(x)dx$.

Exemplu

- $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ este convergentă, deoarece $\forall x > 1$ avem

  $e^{-x^2} < e^{-x}$ şi

  $$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

Consecință

- Pentru funcția $f:[a,+\infty)\to \mathbf{R}_+$, integrabilă pe orice interval $[a,x]$:
  - dacă $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=A$ (finit), pentru $\alpha>1$, atunci $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă;
  - dacă $\alpha\le 1$ şi $A\neq 0$, integrala este divergentă.

Exemplu

- $\int_0^\infty \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ este convergentă, deoarece $\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{2}$.

Pentru a calcula integrala, folosim a doua schimbare de variabilă:

din substituția $x = tgt$ obținem $dx = (1+tg^2 t)dt$;

se schimbă limitele de integrare: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ şi $x = \infty \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ şi astfel:

$$\int_0^\infty \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot \cos t dt = \frac{\pi}{2} - 1$$

Integrală absolut convergentă

Spunem că integrala $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este *absolut convergentă* dacă

integrala $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ este convergentă.

Se observă că o integrala absolut convergentă este şi convergentă.

Exemplu

- Să studiem natura integralei $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \sin bx dx$, unde $b \in \mathbf{R}$ şi în caz de convergență să calculăm efectiv integrala:

Avem inegalitatea $\left|e^{-2x} \cdot \sin bx\right| \le e^{-2x}, \quad \forall x \in \mathbf{R}$ şi în plus

$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}$, aşadar integrala este absolut convergentă

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \sin bx dx = \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right)' \cdot \sin bx dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \sin bx \Big|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{b}{2} \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \cos bx dx = \frac{b}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \cos bx \Big|_0^{\infty} - \frac{b}{2} \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \sin bx dx\right),$$

calcul din care rezultă că $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot \sin bx dx = \frac{b}{b^2 + 4}$.

Integrale definite de funcții nemărginite

Fie $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, continuă pe $[a,b]$ cu excepția unui punct x_0 , $a\le x_0\le b$, punct în care funcția f are o discontinuitate de speța a doua ($\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$).

Să presupunem că $x_0=b$, în caz contrar putând scrie:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx-\int_b^{x_0} f(x)dx$$

Integrala $\int_a^b f(x)dx$ este *convergentă* daca există $\lim\limits_{u\to 0}\int_a^{b-u} f(u)du$ şi este finită.

In caz contrar, integrala este *divergentă.*

Exemple

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{u\to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-u} = \frac{\pi}{2}$
- $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \lim_{u\to 0} \int_0^{1-u} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \lim_{u\to 0} \int_0^{1-u} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{u\to 0}\left(\arcsin x \Big|_0^{1-u} - \sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^{1-u}\right) =$

  $= \frac{\pi}{2} + 1$

În integrala $\int_a^b f(x)dx$, unde $f:[a,b)\to \mathbf{R}_+$ este integrabilă pe orice interval $[a,b-u],\ u\in(0,b-a)$ şi în plus avem $\lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty$, vom face schimbarea de variabilă $t=\dfrac{1}{b-x}$; din $x=b-\dfrac{1}{t}$ rezultă $dx=\dfrac{1}{t^2}dt$ şi schimbând limitele de integrare obținem o integrală improprie pe interval nemărginit:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}\,dt$$

Criteriu de convergență

- Fie funcția $f:[a,b)\to \mathbf{R}_+$, cu $\lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty$, integrabilă pe orice interval $[a,b-u]$, $u\in(0,b-a)$; dacă există și este finită $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^{\beta}\cdot f(x)$ pentru $\beta<1$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

Exemplu

- Integrala $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$ este convergentă, deoarece

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ;$$

pentru a calcula integrala folosim substituția $t=\frac{1}{x+1}$, rezultând astfel

$dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$; după înlocuirea limitelor de integrare obținem:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{2t-1}}{t}}\cdot\frac{1}{t^2}\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\cdot\sqrt{2t-1}}\,dt=1$$

De reținut

- **Integrale pe intervale nemărginite**
- Caracterizare a integralelor improprii pe intervale nemărginite cu ajutorul seriilor numerice
- Criteriul de convergență şi consecință
- Integrală improprie absolut convergentă
- **Integrala definită de funcții nemărginite**
- Legătura dintre integrala definită de funcții nemărginite şi integralele pe intervale nemărginite
- Criteriu de convergență

Tema

1. Calculați următoarele integrale, dupa ce în prealabil ați studiat convergența lor:

$$\int_0^{\infty} \frac{2+arctgx}{x^2+1}dx\,; \quad \int_1^{\infty} \frac{arctgx}{x^2}dx\,; \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx\,;$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-x+1}}dx\,; \quad \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\,; \quad \int_{-1}^{0} \frac{2x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx\,;$$