Integrale multiple

2009-2010

Marina Gorunescu

mgorun@inf.ucv.ro

Integralele multiple sunt o extindere naturală a integralei Riemann pentru cazul funcțiilor de mai multe variabile.

- Integralele *duble*, notate $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$, unde funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^2$ *este* continuă și $A \subset D$ o mulțime compactă.

- Integralele *triple*, notate $\iiint\limits_A f(x,y,z)dxdydz$, unde funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^3$ este continuă, și $A \subset D$ este o mulțime compactă.

Integrale duble

Pentru început studiem cazul $A=[a,b]\times[c,d]$ și $f:A\to\mathbb{R}_+$, funcție continuă.
Considerând diviziunile

$$\Delta'\in \mathcal{D}\,[a,b]\,,\ \Delta':a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b$$

$$\Delta''\in \mathcal{D}\,[c,d]\,,\ \Delta'':c=y_0<y_1<\ldots<y_n=d$$

obținem o diviziune $\Delta\in\mathcal{D}[a,b]\times[c,d]$, ale cărei elemente sunt dreptunghiurile $[x_{k-1},x_k]\times[y_{j-1},y_j],1\le k\le m,1\le j\le n$, de normă

$$\|\Delta\|=\max\{(x_k-x_{k-1})\cdot(y_j-y_{j-1}),1\le k\le m,1\le j\le n\}$$

Familia punctelor intermediare $(\xi_\Delta, \eta_\Delta)$ corespunzătoare diviziunii Δ are ca elemente perechile (ξ_k, η_j) unde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$.

Construim suma Riemann corespunzătoare funcției f şi diviziunii Δ şi punctelor intermediare $(\xi_\Delta, \eta_\Delta)$

$$\sigma_f(\Delta, (\xi_\Delta, \eta_\Delta)) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}),$$

ce reprezintă suma volumelor paralelipipedelor cu baza $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ şi înălțimea $f(\xi_k, \eta_j)$.

Funcție reală de două variabile reale, integrabilă

Funcția $f : A = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}_+$ este *integrabilă pe A*, dacă există un număr real I, cu proprietatea că:

$\forall \varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]\times[c,d]$, cu $\|\Delta\| < \delta$ să avem

$\left|\sigma_f(\Delta,(\xi_\Delta,\pi_\Delta)) - I\right| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare $\left(\xi_\Delta,\eta_\Delta\right)$.

Integrala dublă a lui *f*

Numărul I se numeşte *integrala dublă* a lui f pe $A=[a,b]\times[c,d]$, este unic determinat şi se notează $I=\iint_A f(x,y)dxdy$.

$$\iint_A f(x,y)dxdy=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sigma_f(\Delta,(\xi_\Delta,\pi_\Delta)),\ \Delta\in \mathcal{D}[a,b]\times[c,d],$$ pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_Δ,η_Δ).

Numărul $I=\iint_A f(x,y)dxdy$ reprezintă volumul corpului situat deasupra planului xOy şi sub graficul funcţiei $y=f(x,y)$, unde $f:A\to \mathbb{R}_+$ este o funcţie integrabilă.

Calculul prin iterare al integralei duble

Calculul acestei integrale duble se reduce la calculul unei integrale Riemann, bazându-ne pe teorema:

- Dacă funcția $f : A = [a,b]\times[c,d] \to \mathbf{R}$ este continuă, atunci

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

(*teorema Fubini de permutare a ordinii de integrare*)

Exemple

- Pentru a calcula $I = \iint\limits_{[-1,1]\times[0,2]} (x^2 - xy + y^2)\,dxdy$, folosim teorema Fubini:

$$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2}(x^2 - xy + y^2)\,dy\right)dx$$

În calculul integralei $\int_{0}^{2}(x^2 - xy + y^2)\,dy$, considerăm y variabilă şi x constantă:

$$\int_{0}^{2}(x^2 - xy + y^2)\,dy = x^2 y - x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = 2x^2 - 2x + \frac{8}{3}$$

şi astfel:

$$I = \int_{-1}^{1}(2x^2 - 2x + \frac{8}{3})\,dx = \frac{20}{3}$$

- Pentru a calcula integrala $\iint\limits_{[0,1]\times[2,3]} y\cdot e^{xy}\,dxdy$, e preferabil să calculăm $\int_0^1 y\cdot e^{xy}\,dx = e^{xy}\Big|_0^1 = e^y - 1$, decât $\int_2^3 y\cdot e^{xy}\,dy$ şi astfel:

$$\iint\limits_{[0,1]\times[2,3]} y\cdot e^{xy}\,dxdy = \int_2^3\left(\int_0^1 y\cdot e^{xy}\,dx\right)dy = \int_2^3 (e^y - 1)\,dy = e^3 - e^2 - 1$$

In cazul în care $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$, unde $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ şi $g:[c,d]\to \mathbf{R}$, calculul integralei se simplifică:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d g(x)\cdot h(y)\,dy\right)dx=\int_a^b g(x)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)dx=$$

$$=\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

Exemplu

- $$I = \iint\limits_{[-1,1]\times[0,\pi]} e^{x} \cdot \cos\frac{y}{2}\,dx\,dy = \left(\int_{-1}^{1} e^{x}\,dx\right)\cdot\left(\int_{0}^{\pi} \cos\frac{y}{2}\,dy\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Într-un caz mai general funcția f este definită pe o mulțime $A_i \subset \mathbf{R}^2$, $i \in \{1,2\}$, de forma

$$A_1 = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$$

unde $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbf{R}$ sunt funcții continue, sau

$$A_2 = \{(x,y) \mid c \le y \le d, \alpha_1(y) \le x \le \beta_1(y)\},$$

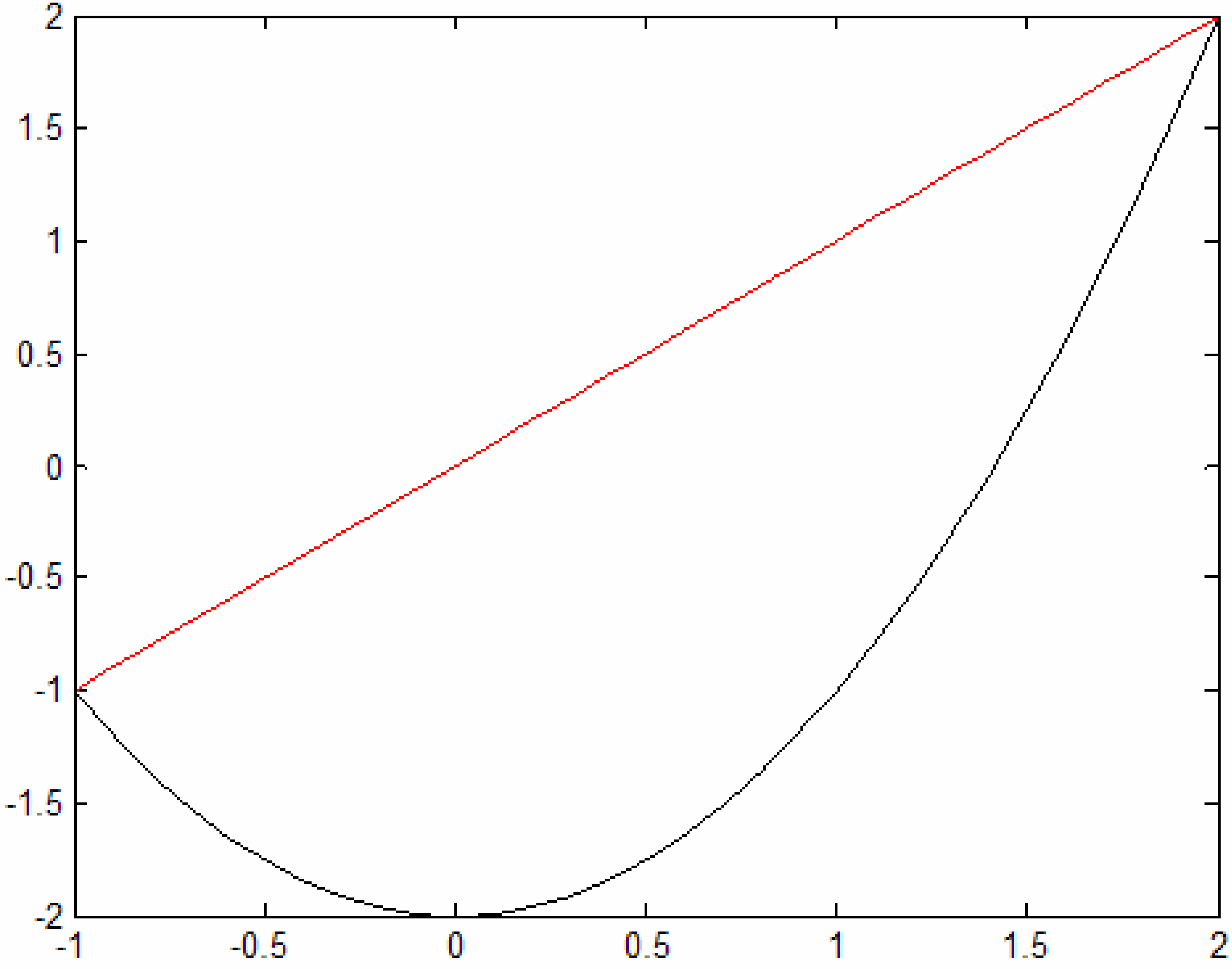
unde $\alpha_1, \beta_1 : [c,d] \to \mathbf{R}$ sunt funcții continue.

Exemple

- Pentru a defini cu ajutorul inegalităților mulțimea A_1, limitată de parabola $y = x^2 - 2$ și de prima bisectoare $y = x$ vom desena cele două curbe.

Calculăm abscisele intersecțiilor: $x = x^2 - 2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$, obținem că $x \in [-1,2]$

```
x=-1:.1:2;plot(x,x,'r',x,x.^2-2,'k')
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

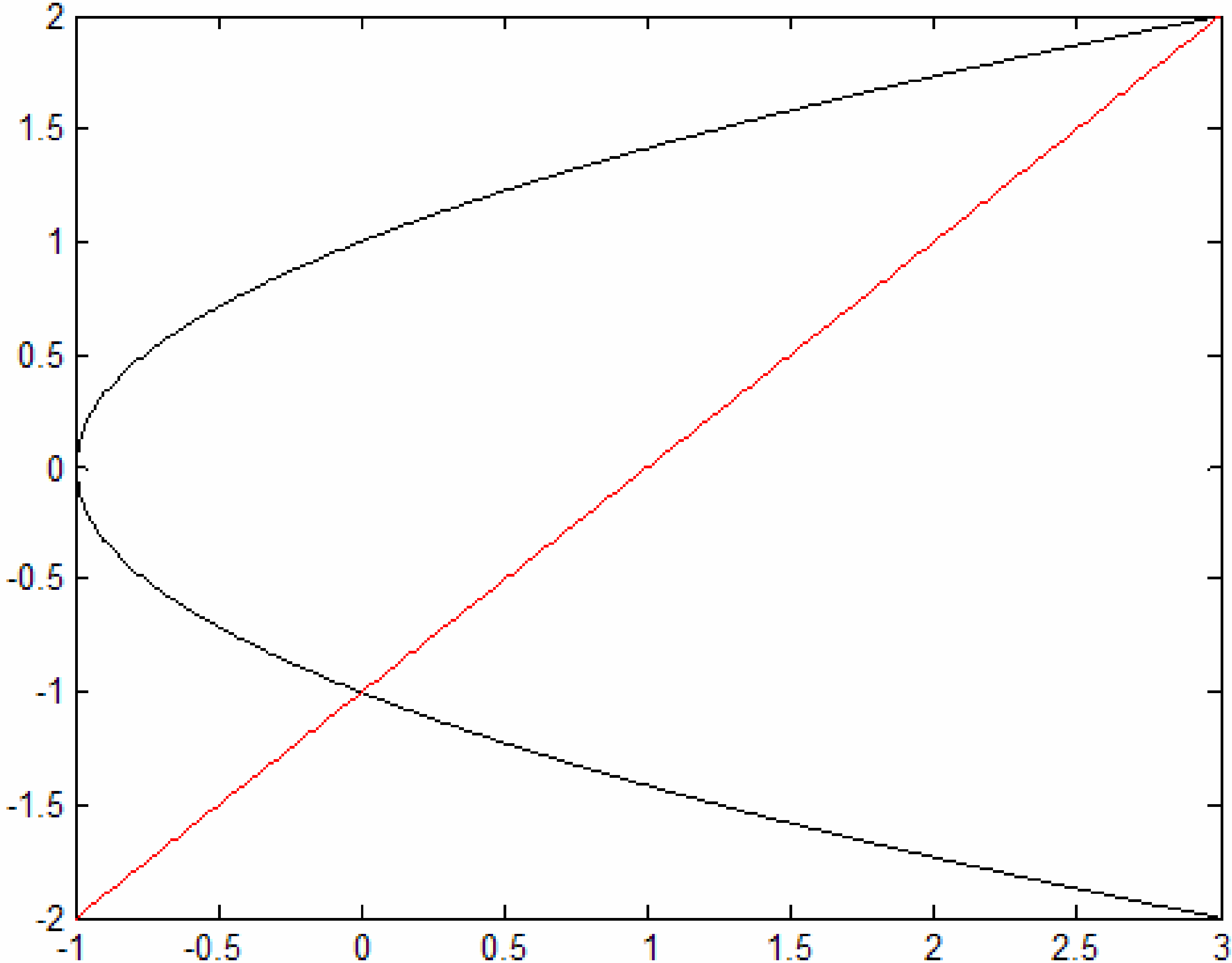
Aşadar $x \in [-1,2]$, în timp ce ordonata y este cuprinsă între parabolă şi prima bisectoare, adică $x^2 - 2 \le y \le x$.

Astfel putem spune că:

$$A_1 = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 2,\ x^2 - 2 \le y \le x\}$$

- În cazul mulțimii A_2, limitată de parabola $x = y^2 - 1$ şi dreapta $x = y + 1$ avem:

```
x=-1:.01:3; plot(x,sqrt(x+1),'k',x,-sqrt(x+1),'k',x,x-1,'r')
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Calculăm ordonatele intersecțiilor: $y^2-1=y-1 \Rightarrow y_1=-1, y_2=2$ şi astfel $y \in [-1,2]$, în timp ce x variaza între parabolă şi dreaptă.

Caracterizăm mulțimea A_1 prin inegalităţi:

$$A_2=\{(x,y) \mid -1 \le y \le 2,\ y^2-1 \le x \le y+1\}.$$

Calculul integralei duble ca succesiune de integrale simple

Dacă funcțiile $f, g : A_i \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2\}$ sunt continue definim:

$$\iint_{A} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a}^{b}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$\iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{c}^{d}\left(\int_{\alpha_1(y)}^{\beta_1(y)} f(x,y)\,dx\right)dy\,.$$

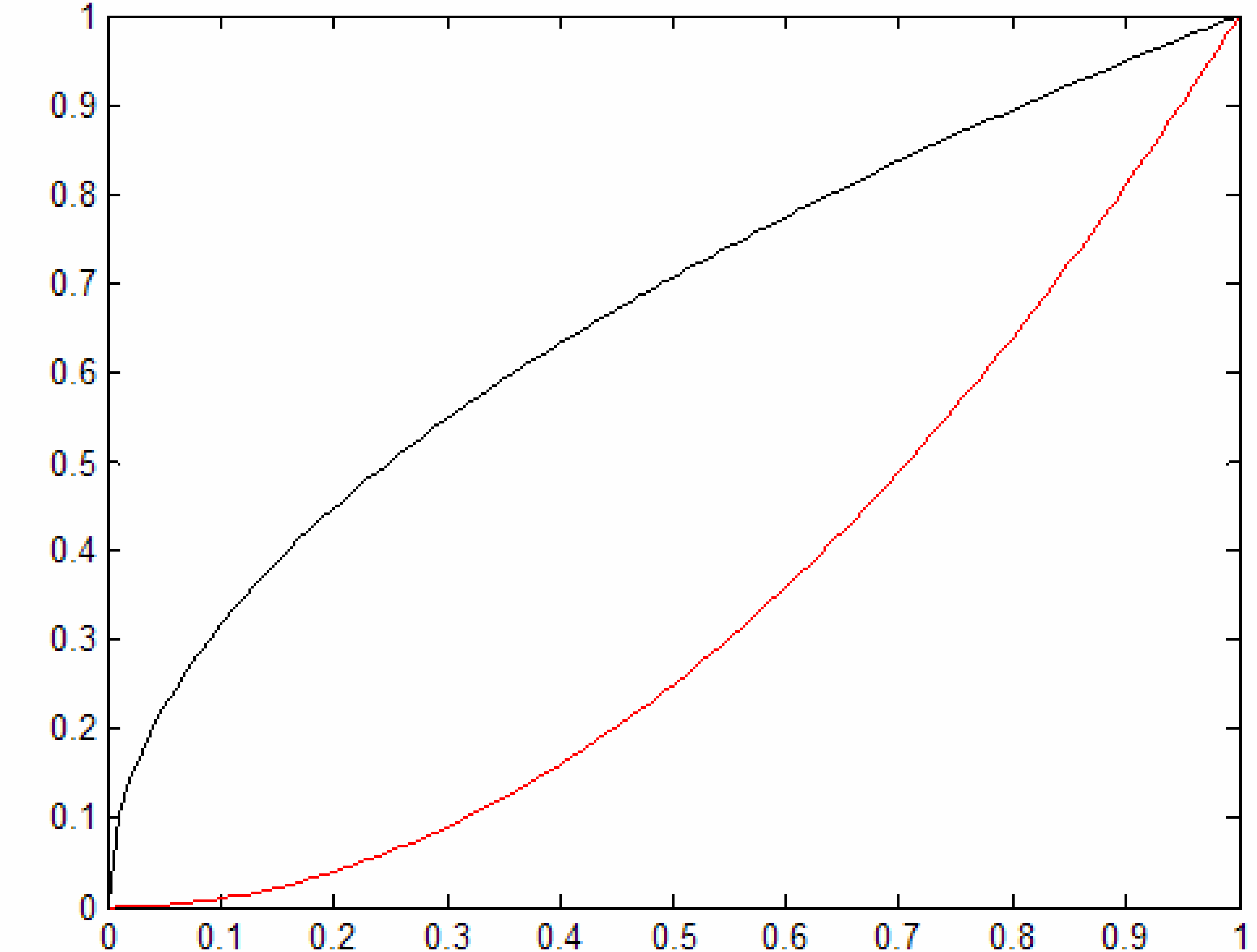
Exemple

- Să calculăm $\iint_A (x^2 + y)dxdy$, dacă mulțimea A este limitată de parabolele

$y = x^2$ şi $x = y^2$.

Calculăm abscisele punctelor de intersecție: $x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

```
x=0:.01:1;plot(x,x.^2,'r',x,sqrt(x),'k')
```



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Aşadar $0 \le x \le 1$, în timp ce y variază între parabola $y = x^2$ şi parabola $y = \sqrt{x}$, adică $x^2 \le y \le \sqrt{x}$.

Avem:

$$\iint_A (x^2 + y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(x^2(\sqrt{x} - x^2) + \frac{1}{2}(x - x^4) \right) dx = \frac{2}{7} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4}.$$

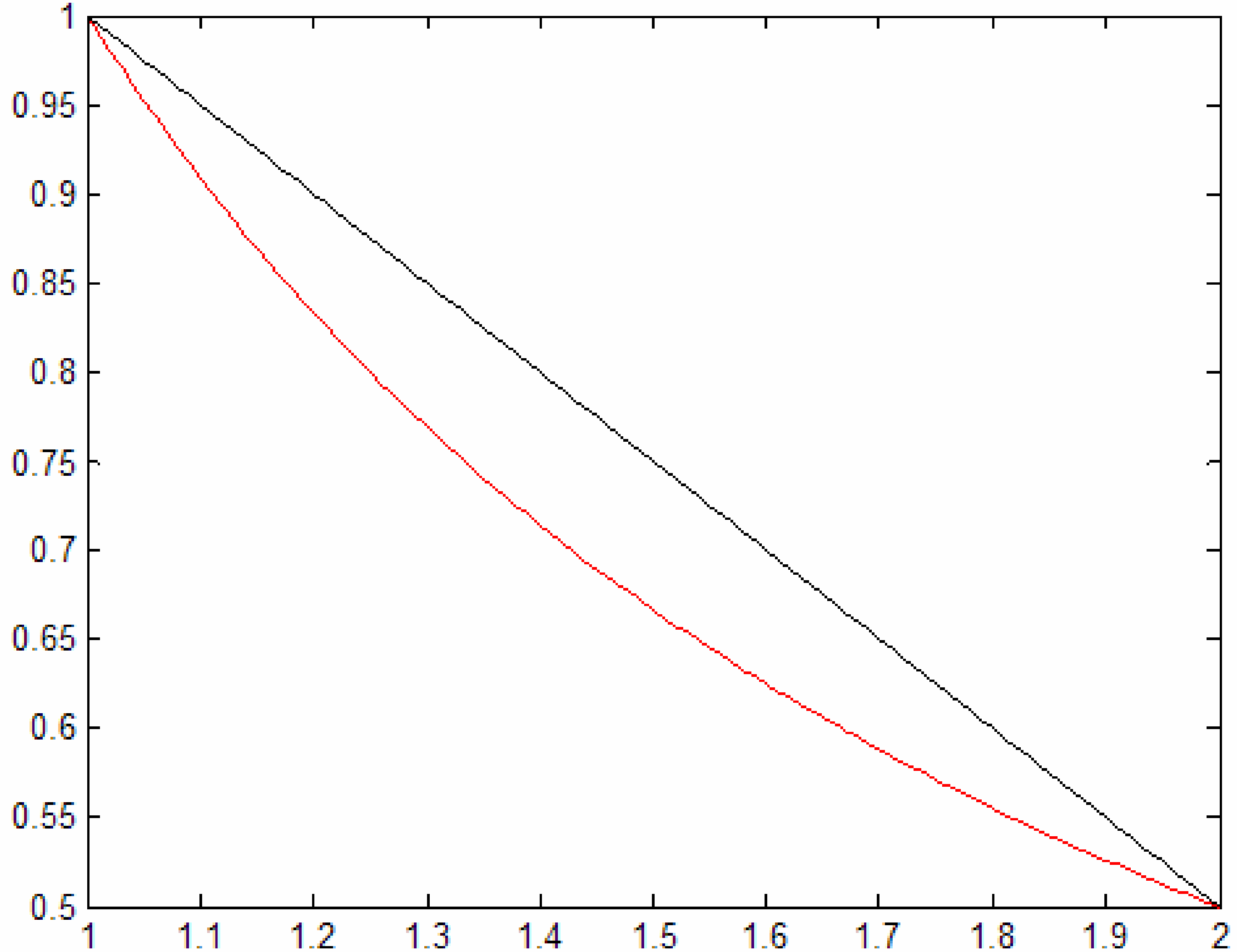
- Să calculăm $\iint_A (x+y)dxdy$, dacă mulțimea A este limitată de hiperbola $y=\dfrac{1}{x}$ și dreapta $x+2y=3$.

Calculăm punctele de intersecție:

$$x+\frac{2}{x}=3 \Rightarrow x_1=1, x_2=2$$

Să desenăm mulțimea A:

```
x=1:.01:2;plot(x,1./x,'r',x,0.5*(3-x),'k')
```


1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2

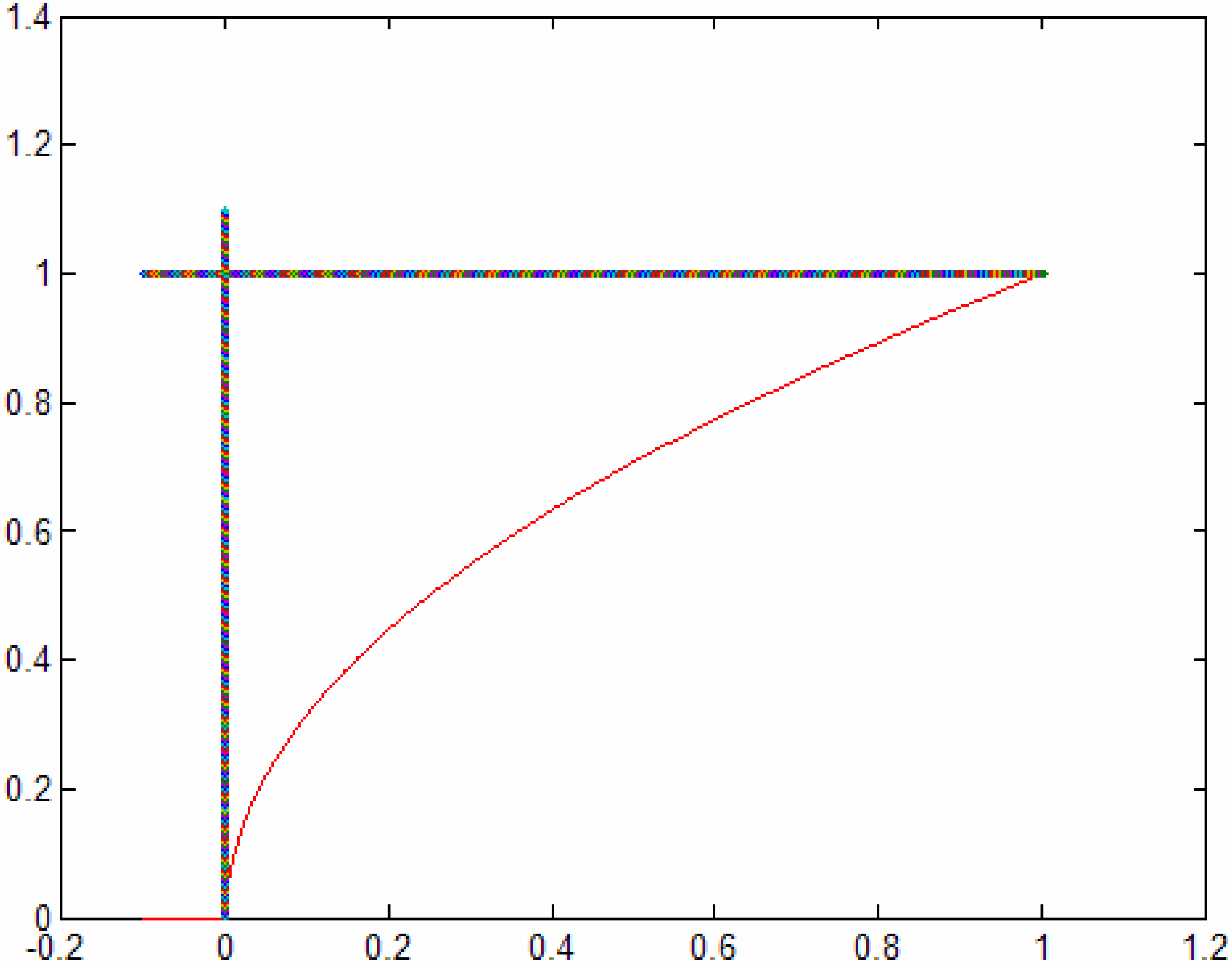
Se vede că $1 \le x \le 2$ şi $\frac{1}{x} \le y \le \frac{3-x}{2}$ şi avem:

$$\iint_A (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{3-x}{2}} (x+y)\,dy \right) dx = \int_1^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\frac{3-x}{2}} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x \cdot \left(\frac{3-x}{2} - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{3-x}{2} \right)^2 - \frac{1}{x^2} \right) \right) dx = -\frac{5}{8}$$

- $\iint_A e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, dacă A este mărginită de parabola $y^2 = x$ şi dreptele $x = 0,\ y = 1$

```
x=-0.1:.001:1;x1=0;y1=0:.001:1.1;plot(x,sqrt(x),'r',x,1,x1,y1)
```


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

Abscisele punctelor de intersecție sunt $x_1 = 0, x_2 = 1$ şi y variază între parabolă şi dreapta $y = 1$, adică $\sqrt{x} \le y \le 1$, astfel:

$$\iint_A e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}}\,dy \right) dx$$

Nu ştim să calculăm prin metode elementare $\int e^{\frac{x}{y}}\,dy$, aşa că suntem obligați să încercăm cealaltă variantă de definire cu inegalități, a mulțimii A, şi anume $0 \le y \le 1$ şi abscisa x, care variază între axa Ox şi parabolă, adică $0 \le x \le y^2$.

În acest caz avem:

$$\iint_A e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(y \cdot e^{\frac{x}{y}} \Big|_0^{y^2} \right) dy = \int_0^1 y \cdot e^{y}\,dy = 1$$

Proprietățile integralei duble

- Dacă funcțiile $f, g : A_i \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2\}$ sunt continue, atunci:

$$\iint_{A_i} (f+g)(x,y)\,dxdy = \iint_{A_i} f(x,y)\,dxdy + \iint_{A_i} g(x,y)\,dxdy$$

$$\iint_{A_i} (k \cdot f)(x,y)\,dxdy = k \cdot \iint_{A_i} f(x,y)\,dxdy$$, unde $k \in \mathbf{R}$

- Pentru functia continuă $f : A_i' \cup A_i'' \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2\}$, unde $A_i' \cap A_i'' \neq \phi$ avem:

$$\iint_{A_i' \cup A_i''} f(x,y)\,dxdy = \iint_{A_i'} f(x,y)\,dxdy + \iint_{A_i''} f(x,y)\,dxdy$$

(aditivitatea integralei duble).

Aditivitatea integralei duble_ exemplu

- $\iint\limits_A \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy$, unde A este definită de inegalitățile:

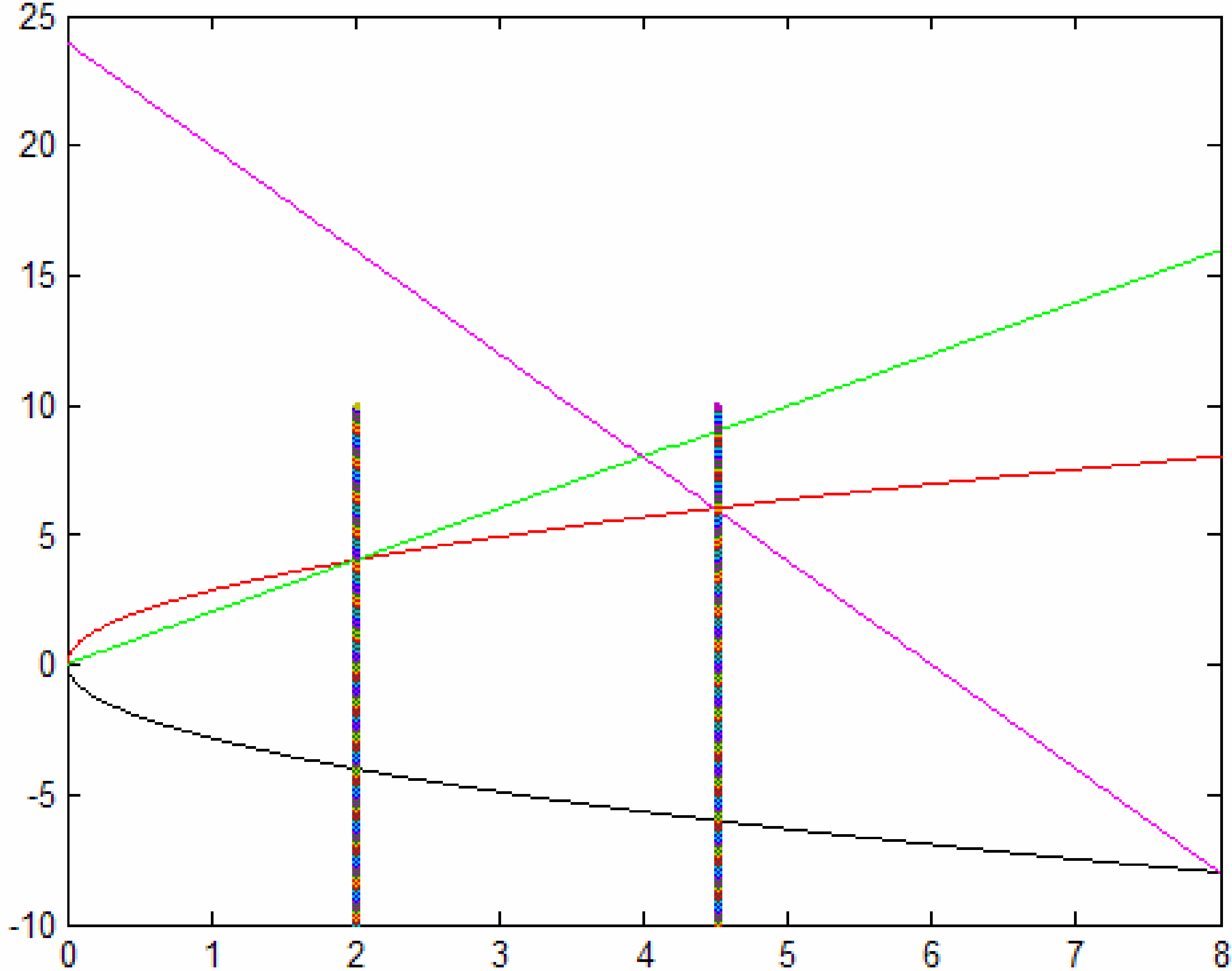
$y^2 \le 8x;\quad y \le 2x;\quad y + 4x \le 24$.

Să stabilim pentru început punctele de intersecție ale parabolei cu cele două drepte, respectiv punctul de interecție al dreptelor:

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2 \qquad \begin{cases} y^2 = 8x \\ y + 4x = 24 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{9}{2},\ x_2 = 8$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y + 4x = 24 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4$$

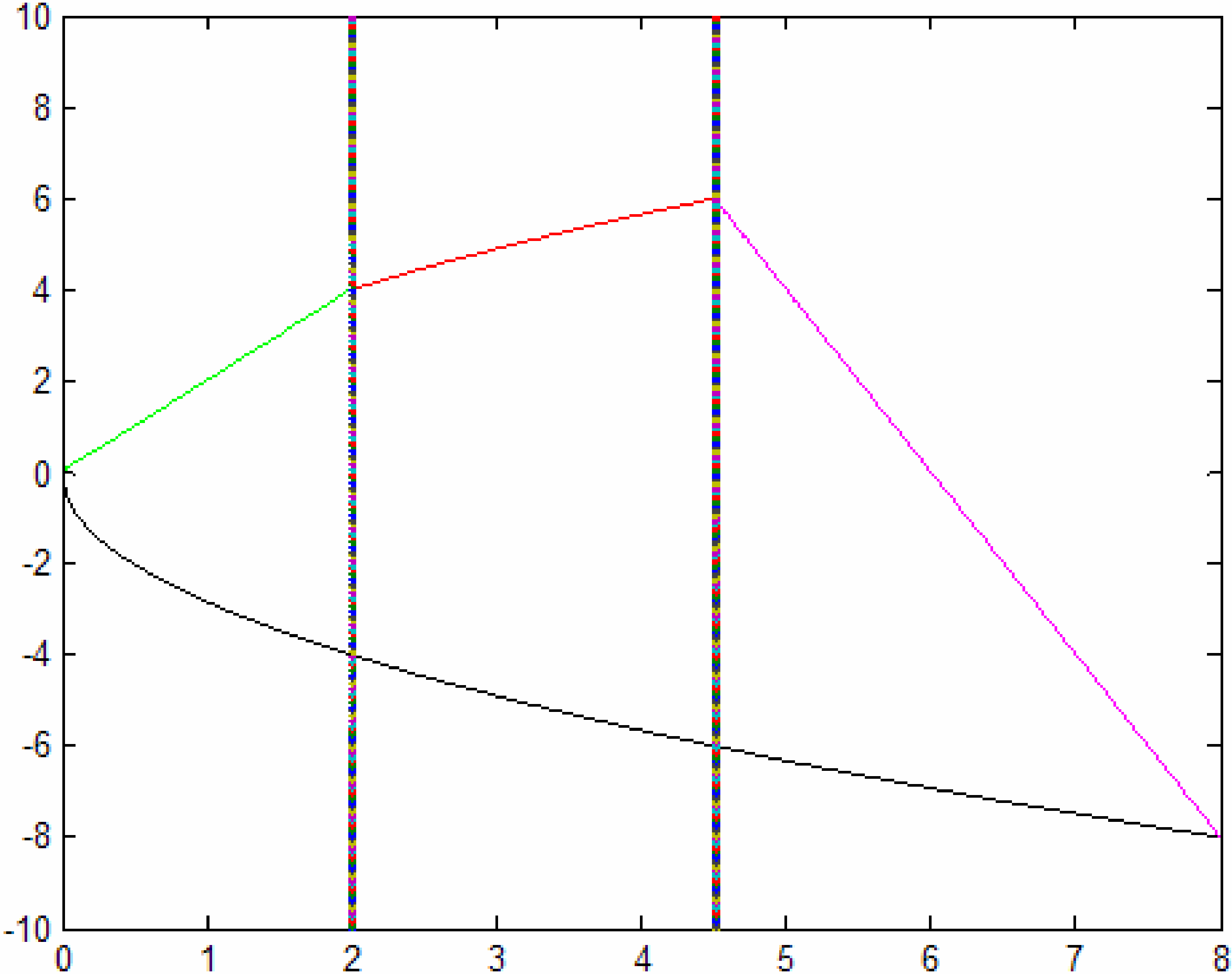
```
x=0:.01:8;x1=2;y1=-10:.01:10; x2=9/2;
plot(x,2*sqrt(2*x),'r',x,-2*sqrt(2*x),'k',x,2*x,'g',x,24-4*x,'m',x1,y1,x2,y1)
```



25
20
15
10
5
0
-5
-10
0
1
2
3
4
5
6
7
8

pentru calculul acestei integrale, împărțim mulțimea A în trei submulțimi, disjuncte prin ducerea unor paralele la Oy : $x = 2$ şi $x = \frac{9}{2}$

```
x=2:.01:9/2;x3=0:.01:8;x4=0:.01:2;x5=9/2:.01:8;x1=2;y1=-10:.1:10; x2=9/2;
plot(x,2*sqrt(2*x),'r',x3,-2*sqrt(2*x3),'k',x4,2*x4,'g',x5,24-4*x5,'m',x1,y1,x2,y1)
```



10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0
1
2
3
4
5
6
7
8

$$A' = \{(x,y) \mid x \in [0,2],\ -\sqrt{8x} \le y \le 2x\}$$

$$A'' = \{(x,y) \mid x \in [2,\tfrac{9}{2}],\ -\sqrt{8x} \le y \le \sqrt{8x}\}$$

$$A''' = \{(x,y) \mid x \in [\tfrac{9}{2},8],\ -\sqrt{8x} \le y \le \sqrt{24-4x}\}$$

şi astfel:

$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x}}\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{2x} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dy \right) dx + \int_2^{\frac{9}{2}} \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dy \right) dx + + \int_{\frac{9}{2}}^{8} \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{24-4x} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{2x+\sqrt{8x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_2^{\frac{9}{2}} \frac{2\cdot\sqrt{8x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_{\frac{9}{2}}^{8} \frac{24-4x+\sqrt{8x}}{\sqrt{x}}\,dx = 23\sqrt{2}$$

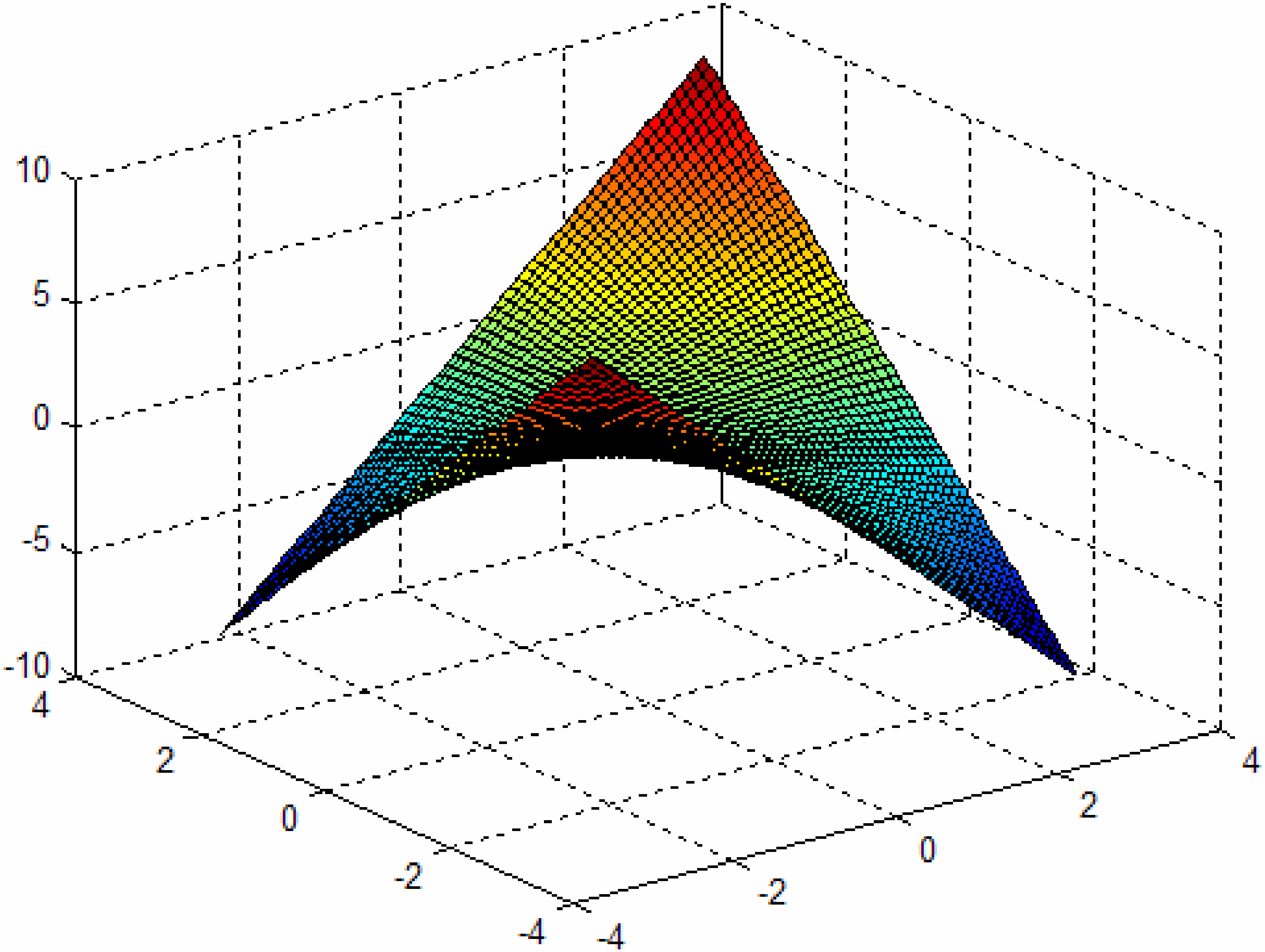
Numărul $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$ reprezintă volumul corpului situat deasupra mulțimii A din planul xOy şi sub porțiunea de suprafață $z = f(x,y)$.

Exemplu

- Să calculăm volumul corpului ce este situat sub suprafața $z = x \cdot y + 1$ şi deasupra mulțimii A din planul xOy, mărginită de parabolele $y = x^2$ şi $y = 8 - x^2$.

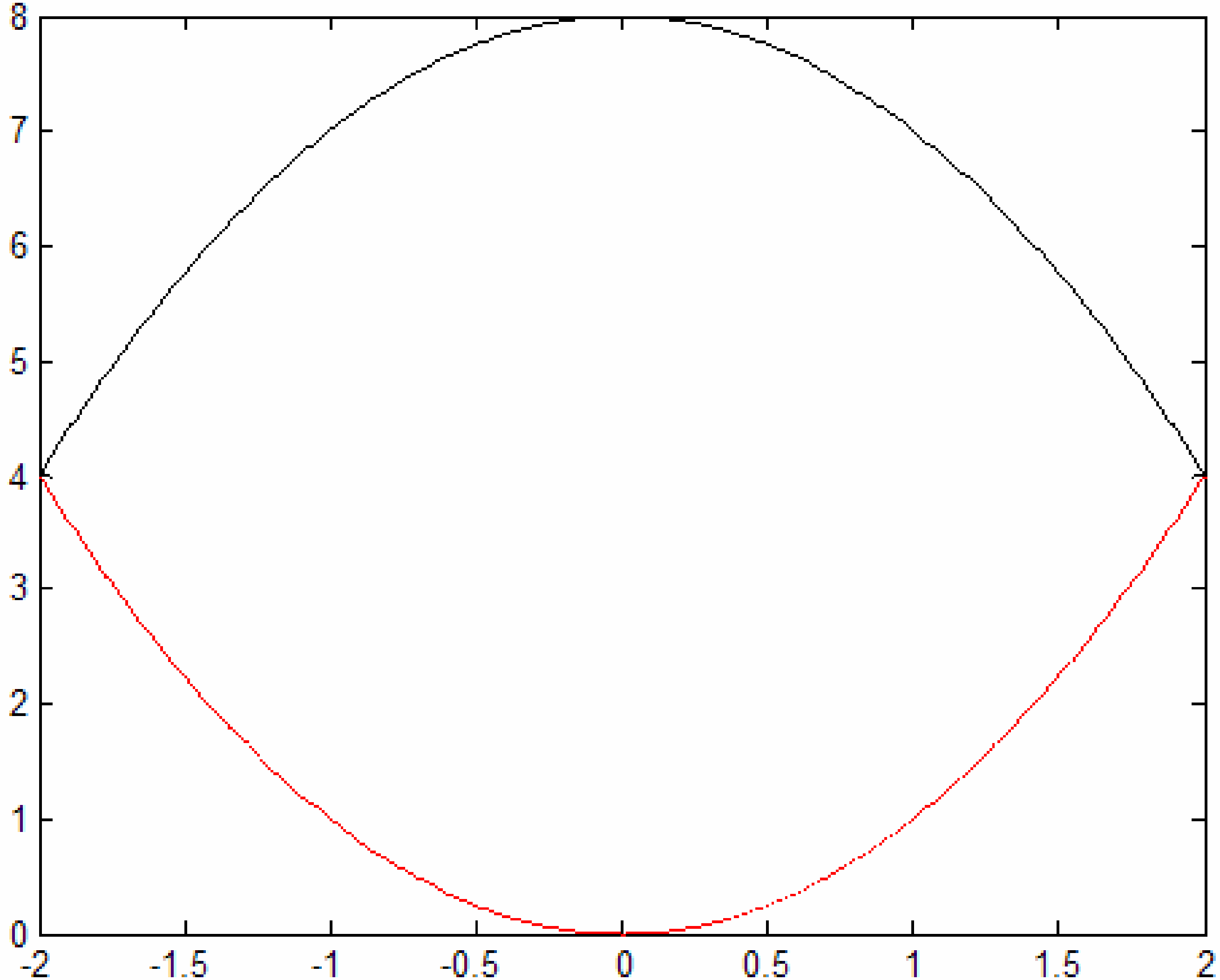
$$vol(V) = \iint_A (x \cdot y + 1)dxdy$$

```
[x,y]=meshgrid(-3:.1:3,-3:.1:3);surf(x,y,x.*y+1)
```


10
5
0
-5
-10
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

Abscisele punctelor de intersecție ale parabolelor ce mărginesc mulțimea A din planul xOy sunt soluțiile ecuației $x^2 = 8 - x^2$, adică $x_{1,2} = \pm 2$.

```
x=-2:.01:2;plot(x,x.^2,'r',x,8-x.^2,'k')
```


8
7
6
5
4
3
2
1
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

aşadar:

$$-2 \le x \le 2\ ;\ x^2 \le y \le 8-x^2$$

şi astfel $vol(V) = \int_{-2}^{2}\left(\int_{x^2}^{8-x^2}(x\cdot y+1)dy\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(x\cdot\frac{y^2}{2}+y\Big|_{x^2}^{8-x^2}\right)dx = \frac{64}{3}$

A doua interpretare geometrică a integralei duble ne spune că $\iint_A dxdy$ reprezintă aria mulțimii A.

justificare:

Aria mulțimii $A=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$ unde funcțiile $g_1, g_2:[a,b]\to \mathbf{R}$ sunt continue se calculează după formula:

$$aria(A)=\int_a^b [g_2(x)-g_1(x)]dx$$

Din definiția integralei duble avem:

$$\iint_A dxdy=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\right)dx=\int_a^b (g_2(x)-g_1(x))dx.$$

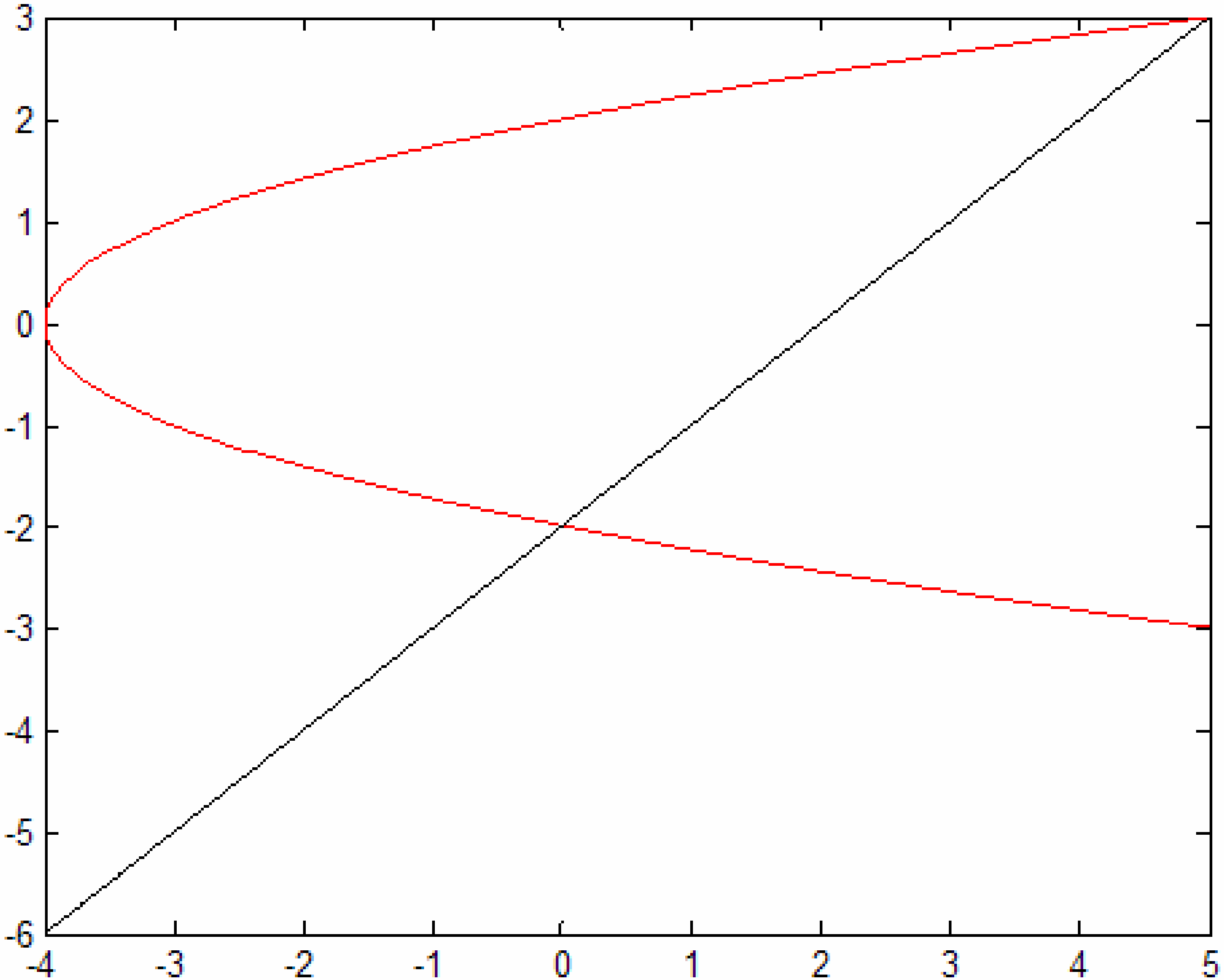
Exemplu

- Calculați aria mulțimii A care este limitată de parabola $y^2 = x+4$ și de dreapta $y = x-2$.

  Determinăm punctele de intersecție rezolvând ecuația $x+4=(x-2)^2$:

  $x_1 = 0, x_2 = 5$ și $y_1 = -2, y_2 = 3$

```
x=-4:.01:5;plot(x,sqrt(x+4),'r',x,-sqrt(x+4),'r',x,x-2,'k')
```


3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Dacă vom considera mulțime de tip A_1 $(x \in [a,b])$ va fi necesar să descompunem în două submulțimi.

Pentru simplificarea calculului este preferabil să definim A astfel:

$$-2 \le y \le 3;\ y^2 - 4 \le x \le y + 2$$

$$aria(A) = \iint_A dx\,dy = \int_{-2}^{3} \left(\int_{y^2-4}^{y+2} dx \right) dy = \int_{-2}^{3} (y + 2 - y^2 + 4)\,dy = \frac{56}{3}$$

Schimbare de variabile în integrala dublă

O aplicație $F:U \to \mathbf{R}^2$, unde $U \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă, dată de $F(x,y)=(f_1(x,y), f_2(x,y))$, injectivă, de clasă C^1 pe U , cu proprietatea că $F(U)$ este deschisă şi F^{-1} este de clasă C^1 pe $F(U)$ se numeşte *schimbare de coordonate* în U .

Pentru orice punct $(x,y) \in U$ numerele $f_1(x,y), f_2(x,y)$ se numesc *coordonatele* lui (x,y) în sistemul de coordonate F , iar funcțiile f_1, f_2 se numesc *sistem de coordonate* în U .

- Fie $F : U \to \mathbf{R}^2$, unde $U \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă, o schimbare de coordonate în U , $g : F(U) \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $A \subset F(U)$ o mulțime compactă;

funcția g este integrabilă pe A dacă și numai dacă funcția $(g \circ F) \cdot \left|\det J_F\right|$ este integrabilă pe $F^{-1}(A)$ și are loc relația:

$$\iint_A g(x,y)\,dxdy = \iint_{F^{-1}(A)} (g \circ F)(u,v) \cdot \left|\det J_F\right| dudv$$

Schimbarea de variabile uzuală pentru integrala dublă este trecerea la coordonate polare, caz în care:

$$\iint_{A} g(x,y)\,dxdy = \iint_{F^{-1}(A)} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi$$

unde $g: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$ compactă, este o funcție continuă.

Exemple

- Să calculăm $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, unde

$A = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$:

Trecem la coordonate polare, în inegalitățile ce definesc domeniul

$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}$ și obținem $1 \le r^2 \le 9,\ r\cos\varphi \ge 0,\ r\sin\varphi \ge 0$, adică:

$$F^{-1}(A) = \{(r,\varphi) \mid r \in [1,3],\ \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]\}$$

Astfel $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{[1,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r \cdot r\,dr\,d\varphi = \left(\int_1^3 r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right) = \frac{13\pi}{3}$.

- $\iint\limits_A e^{x^2+y^2}dxdy$, unde mulțimea A este limitată de cercul $x^2+y^2=1$.

Mulțimea A este discul unitate, caracterizat de inegalitatea $x^2+y^2\le 1$,

care în coordonate polare devine $r^2\le 1$;

în inegalitatea în coordonate polare ce definește pe A, nu apare nici o restricție impusă variabilei φ ,așadsar $r\in[0,1]$ și $\varphi\in[0,2\pi]$.

$$\iint\limits_A e^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} e^{r^2}\cdot rdrd\varphi=\left(\int_0^1 r\cdot e^{r^2}dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)=\pi$$

În cazul în care mulțimea A, pe care integrăm este mărginită de o elipsă $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, trecem la coordonate polare generalizate:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi \\ y &= br\sin\varphi \end{aligned}\ , \quad r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{şi} \quad \left|\det J_F\right| = abr$$

Exemplu

- Pentru a calcula $\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,dxdy$, unde A se află în primul cadran şi este

mărginită de elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, înainte de a trece la coordonate polare generalizate

vom descrie mulțimea prin inegalități şi anume: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1;\ x\ge 0, y\ge 0$,

inegalități care devin:

$r^2 \le 1,\ 3r\cos\varphi \ge 0; 2r\sin\varphi \ge 0$.

Astfel $r\in[0,1], \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ şi

$$\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} 6r\cdot\sqrt{1-r^2}\,drd\varphi = \pi$$

- Pentru a evalua $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, calculăm:

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

Prin trecere la coordonate polare mulțimea $[0,\infty)\times[0,\infty)$ se transformă în $[0,\infty)\times[0,2\pi)$ şi astfel:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r d\varphi \right) dr = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{\pi}{4}$$

şi astfel $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Aria unei porțiuni de suprafață

Pentru *suprafață parametrizată de clasă* C^1 $s : D \to \mathbf{R}^3$, unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă, simplă şi nesingulară, de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v), (u,v) \in D \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

definim pentru orice mulțime compactă $A \subset D$ *aria porțiunii de suprafață* $s(A)$ ca fiind numărul real pozitiv:

$$aria(s(A)) = \iint_A \left\| \overline{r_u} \times \overline{r_v} \right\| du dv$$

Exemplu

- Să calculăm aria octantului de sferă: situat în primul cadran:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ \ | \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Octantul de sferă este urma porțiunii de suprafață definită de ecuațiile parametrice:

$$s: \quad \begin{array}{l} x = a \sin u \cos v \\ y = a \sin u \sin v \ , \quad (u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \\ z = a \cos u \end{array}$$

Am calculat că $\left\| \overline{r_u} \times \overline{r_v} \right\| = a^2 \sin u$ și astfel

$$aria(\Sigma) = \iint\limits_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} a^2 \sin u du dv = a^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Dacă $z = f(x,y)$ este o suprafaţă dată explicit (proiectabilă pe planul xOy),

unde $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}^2$ deschisă) este o funcţie de clasă C^1, mulţimea $A \subset D$ este compactă şi Σ este porţiunea corespunzătoare de suprafaţă ($\Sigma = s(A)$) ,

având vectorul de poziţie

$\bar{r}(x,y) = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + f(x,y) \cdot \bar{k}, (x,y) \in A$

calculând $\left\| \overline{r_x} \times \overline{r_y} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ avem:

$$aria(\Sigma) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

Exemplu

- Pentru a calcula aria suprafeței paraboloidului $2z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$, stabilim că:

  $f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)$ este definită pe $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

  şi astfel, conform formulei avem:

$$aria(\Sigma) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{r^2 + 1} \cdot r dr d\varphi =$$

$$\left(\int_0^1 r \cdot \sqrt{r^2 + 1}\, dr\right) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

De reținut

- Funcție reală de două variabile reale, integrabilă
- Calculul integralei duble ca succesiune de integrale simple
- Aditivitatea integralei duble
- Schimbarea de variabile
- Aplicații ale integralei duble.

Tema

1. Calculați $\iint_A (xy-1)dxdy$, dacă mulțimea A este limitată de axa Oy, dreapta $y=2x$ şi parabola $y=x^2+1$.

2. Calculați $\iint_A (x+y+1)dxdy$, dacă mulțimea A este limitată de dreapta $x=2$ şi de parabola $x=y^2$.

3. Calculați $\iint_A \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy$, dacă mulțimea A este situată deasupra axei Ox şi este limitată de dreptele $y=x\sqrt{3}$, $y=-x\sqrt{3}$ şi de cercul unitate.

4. Calculați volumul corpului situat seasupra planului xOy, limitat de discul $x^2+y^2+2x-4y\le 4$ şi de paraboloidul $z=2+x^2+y^2$.

5. Calculați aria porțiunii de suprafață $z=(x-1)^2-(y+2)^2$, decupată de cilindrul $x^2+y^2=25$.

Integrale triple

Pentru funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^3$ continuă, şi $V \subset D$ mulțime compactă putem defini $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Dacă $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ definim:

$$\iiint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3}\left(f(x,y,z\right)dz\right)dy\right)dx$$

Din ipoteză funcția f este continuă, şi astfel teorema Fubini de permutare a ordinii de integrare este valabilă, ceea ce înseamnă că avem 6 posibilități de calcul în cazul acestei integrale.

Exemplu

- $$\iiint\limits_{[0,1]\times[-3,-1]\times[-2,2]} (x^2y^2z+2z^2x)dxdydz = \int_0^1\left(\int_{-3}^{-1}\left(\int_{-2}^{2}\left(x^2y^2z+2z^2x\right)dz\right)dy\right)dx =$$

$$\int_0^1\left(\int_{-3}^{-1}\frac{32}{3}xdy\right)dx = \int_0^1\frac{64}{3}xdx = \frac{32}{3}$$

Am ales această ordine de integrare, pentru simplificarea calculelor, deoarece dacă funcția integrabilă $f:[-a,a]\to\mathbf{R}$ este impară avem $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Dacă $V=\{(x,y,z) \mid (x,y)\in A\subset \mathbf{R}^2,\ \alpha(x,y)\le z\le \beta(x,y)\}$, unde funcțiile $\alpha,\beta: A\to \mathbf{R}$ sunt continue, definim:

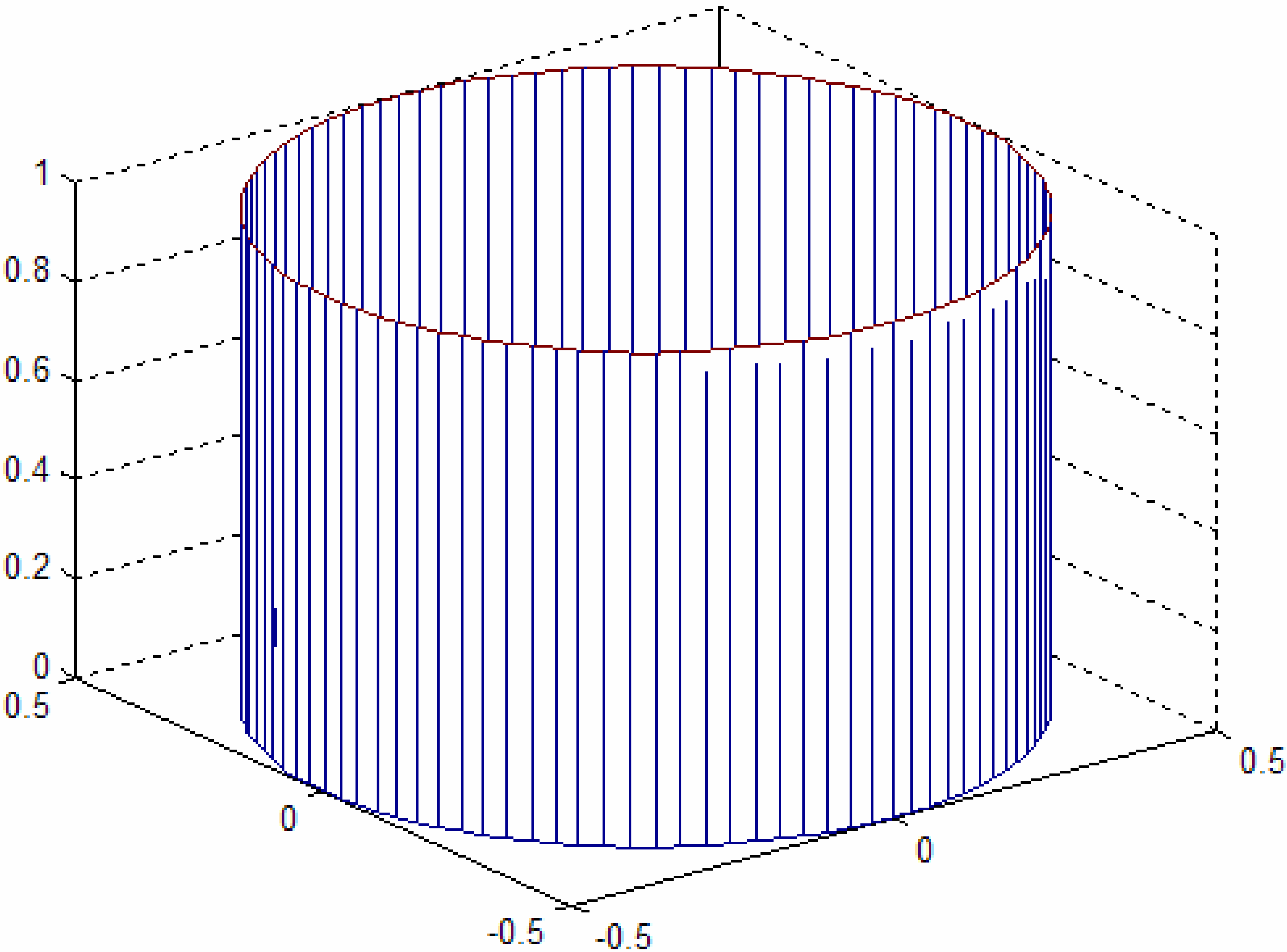
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_A\left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy\,.$$

Pentru aplicații, reținem că mulțimea A este de fapt proiecția pe planul xOy a mulțimii V .

Exemple

- $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$, unde V se află deasupra planului xOy şi este limitat de cilindrul $x^2+y^2=4$ şi planul $z=1$:

```
[x,y,z]=cylinder(.5,100);mesh(x,y,z)
```


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5

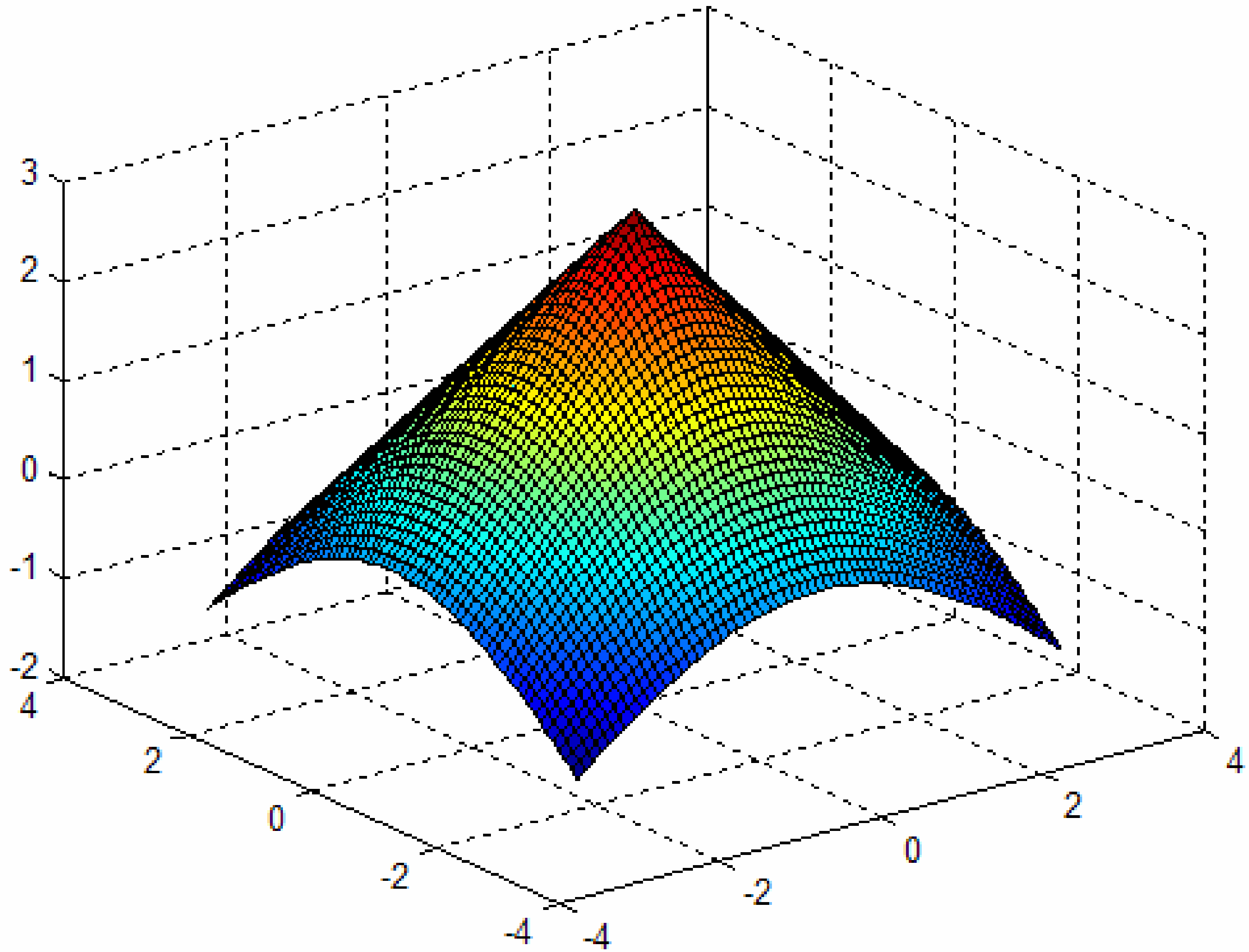
Avem $0 \le z \le 1$ (observați că z este cuprins între planul xOy şi planul $z = 1$), în timp ce proiecția acestui corp în planul xOy este discul $x^2 + y^2 \le 4$:

$$\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2\le 4} \left(\int_0^1 (x+y+z)\,dz \right) dxdy =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 4} (x+y+\frac{1}{2})\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + \frac{1}{2}) \cdot r\,d\varphi \right) dr = \pi \int_0^1 r\,dr = \frac{\pi}{2}$$

- $\iiint\limits_V (z+2)\,dxdydz$, unde V se află deasupra planului xOy şi este limitată de conul $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

```
[x,y]=meshgrid(-3:.1:3,-3:.1:3);z=3-sqrt(x.^2+y.^2);surf(x,y,z)
```


3
2
1
0
-1
-2
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

În acest caz z variază între planul xOy şi suprafaţa conului, adică:

$$0 \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

mulţimea A fiind discul $x^2 + y^2 \le 3$

$$\iiint\limits_V (z+2)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 3} \left(\int\limits_0^{3-\sqrt{x^2+y^2}} (z+2)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 3} \left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{x^2+y^2})^2 - 2(3 - \sqrt{x^2+y^2}) \right) dx\,dy\,.$$

Dacă $V=\{(x,y,z) \mid (x,z)\in A\subset \mathbf{R}^2,\ \alpha(x,z)\le y\le \beta(x,z)\}$, unde funcțiile $\alpha,\beta : A\to \mathbf{R}$ sunt continue, avem:

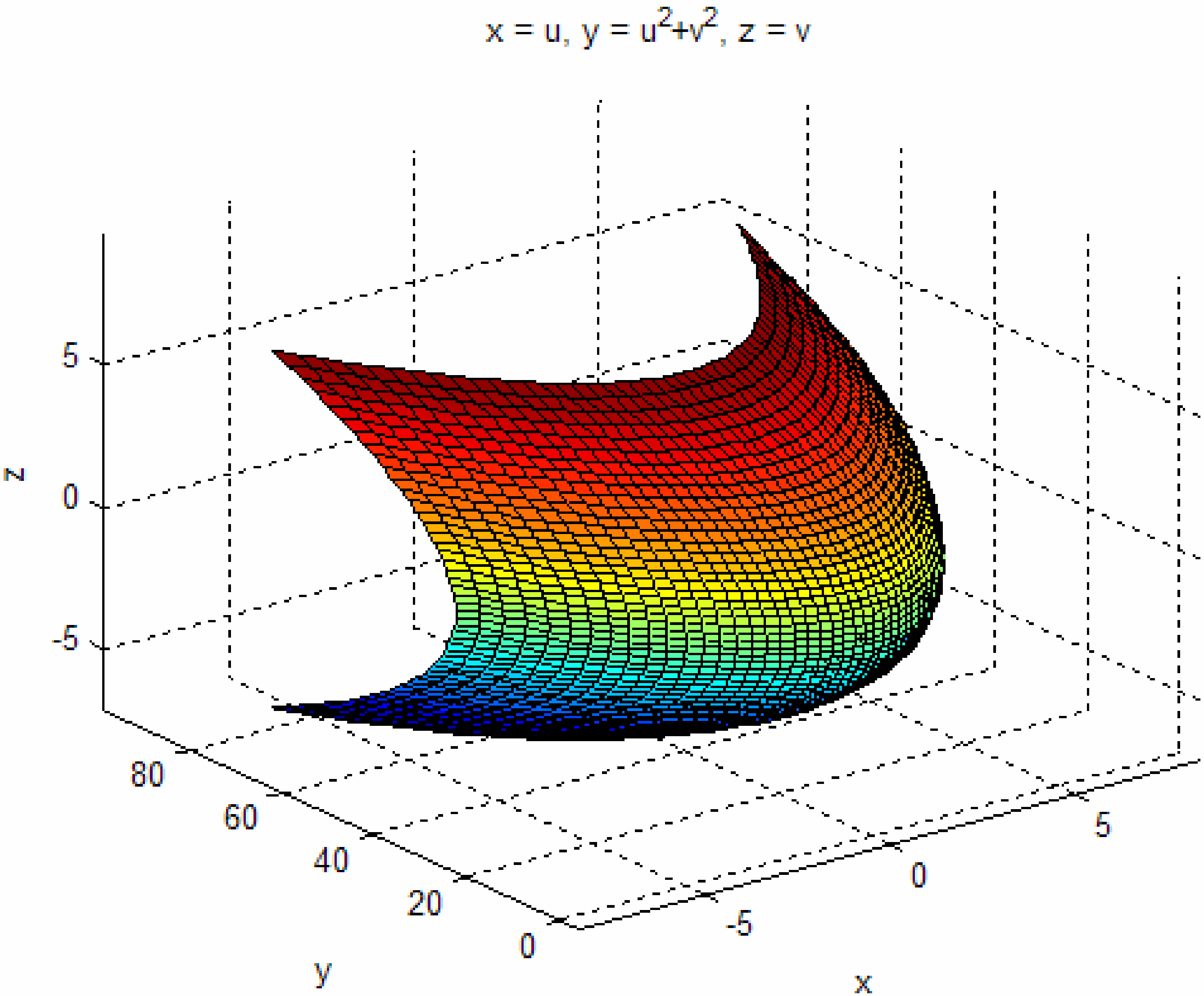
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_A\left(\int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right)dx\,dz .$$

Exemplu

- $\iiint\limits_V (xy+1)dxdydz$, unde V se află deasupra planului xOz , între paraboloidul

$y = x^2 + z^2$ şi planul $y = 2$.

```
syms u v
>> x=u;y=u^2+v^2;z=v;ezsurf(x,y,z)
```


x = u, y = u2+v2, z = v
5
0
-5
z
80
60
40
20
0
y
-5
0
5
x

Avem $x^2 + z^2 \le y \le 2$ şi A este discul $x^2 + z^2 \le 2$, (fiind de fapt proiecția mulțimii V pe planul xOz).

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_A \left(\int\limits_{x^2+z^2}^{2} (xy + 1)\,dy \right) dxdz =$$

$$= \iint\limits_{x^2+z^2 \le 2} \left(\frac{x}{2}(x^2 + z^2)^2 - 2x + x^2 + z^2 - 2 \right) dxdz$$

Trecem la coordonate polare, notând $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ şi obținem:

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r\cos\varphi}{2} \cdot r^4 - 2r\cos\varphi + r^2 - 2 \right) \cdot r\,d\varphi \right) dr = 2\pi \cdot \int\limits_0^{\sqrt{2}} (r^3 - 2r)\,dr\,.$$

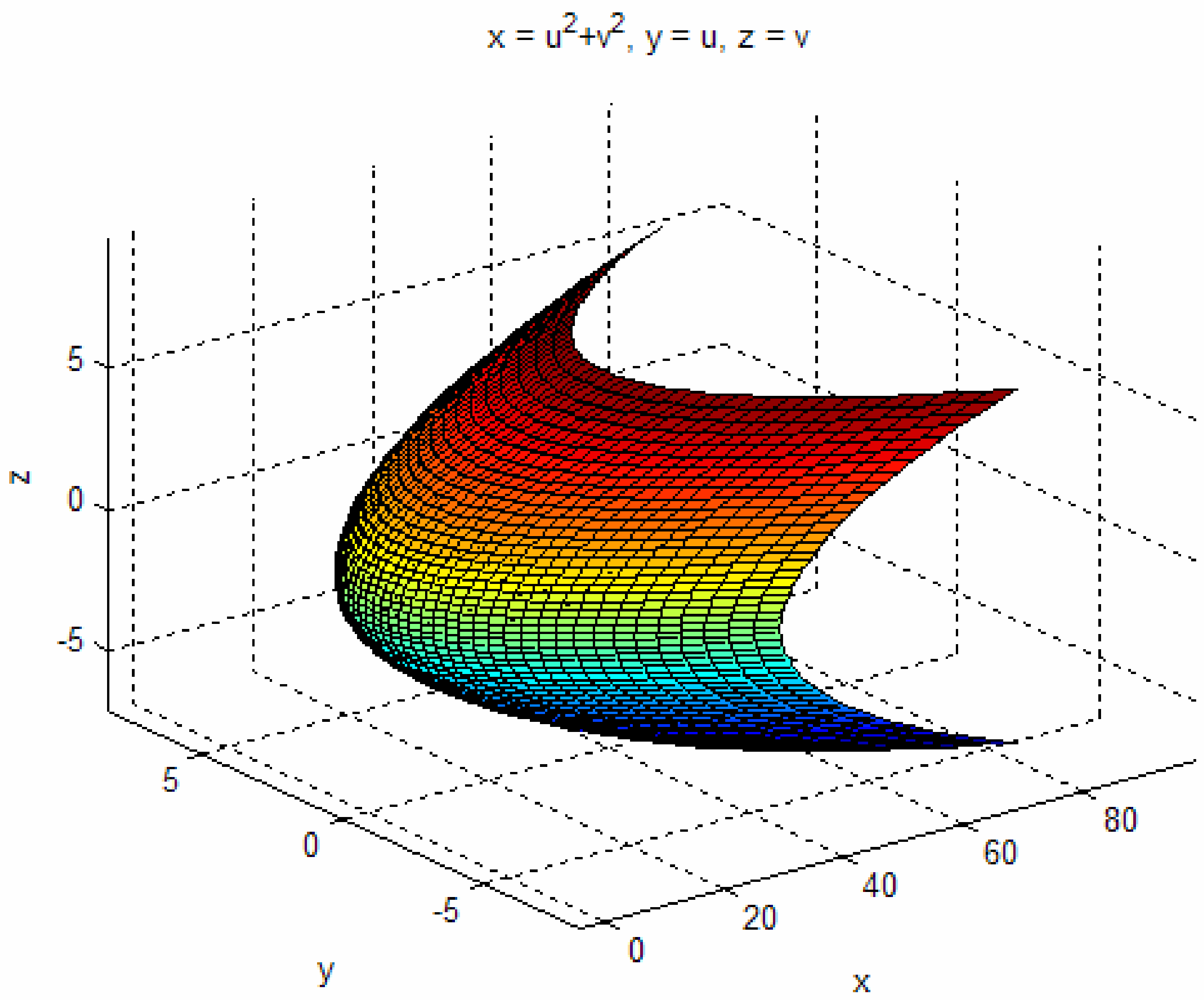
Dacă $V = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in A \subset \mathbf{R}^2,\ \alpha(y, z) \le x \le \beta(y, z)\}$, unde funcțiile $\alpha, \beta : A \to \mathbf{R}$ sunt continue, avem:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_A \left(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x, y, z)\,dx \right) dy\,dz.$$

Exemple

- Să calculăm $\iiint_V (xy+1)\,dx\,dy\,dz$, unde V se află deasupra planului yOz, între paraboloidul $x = y^2 + z^2$ şi planul $x = 2$.

```
x=u^2+v^2;y=u;z=v;ezsurf(x,y,z)
```


x = u2+v2, y = u, z = v
z
5
0
-5
y
5
0
-5
x
0
20
40
60
80

$$\iiint\limits_V (xy+1)\,dxdydz = \iint\limits_{y^2+z^2\le 2}\left(\int\limits_{y^2+z^2}^{2}(xy+1)\,dx\right)dydz = \iint\limits_{y^2+z^2\le 2}\left.\frac{x^2}{2}\cdot y + x\right|_{y^2+z^2}^{2} dydz =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}r\sin\varphi\cdot(2-r^4)+(2-r^2)\right)\cdot r\,d\varphi\right)dr = \int\limits_0^{\sqrt{2}}(2r-r^3)\cdot 2\pi\,dr$$

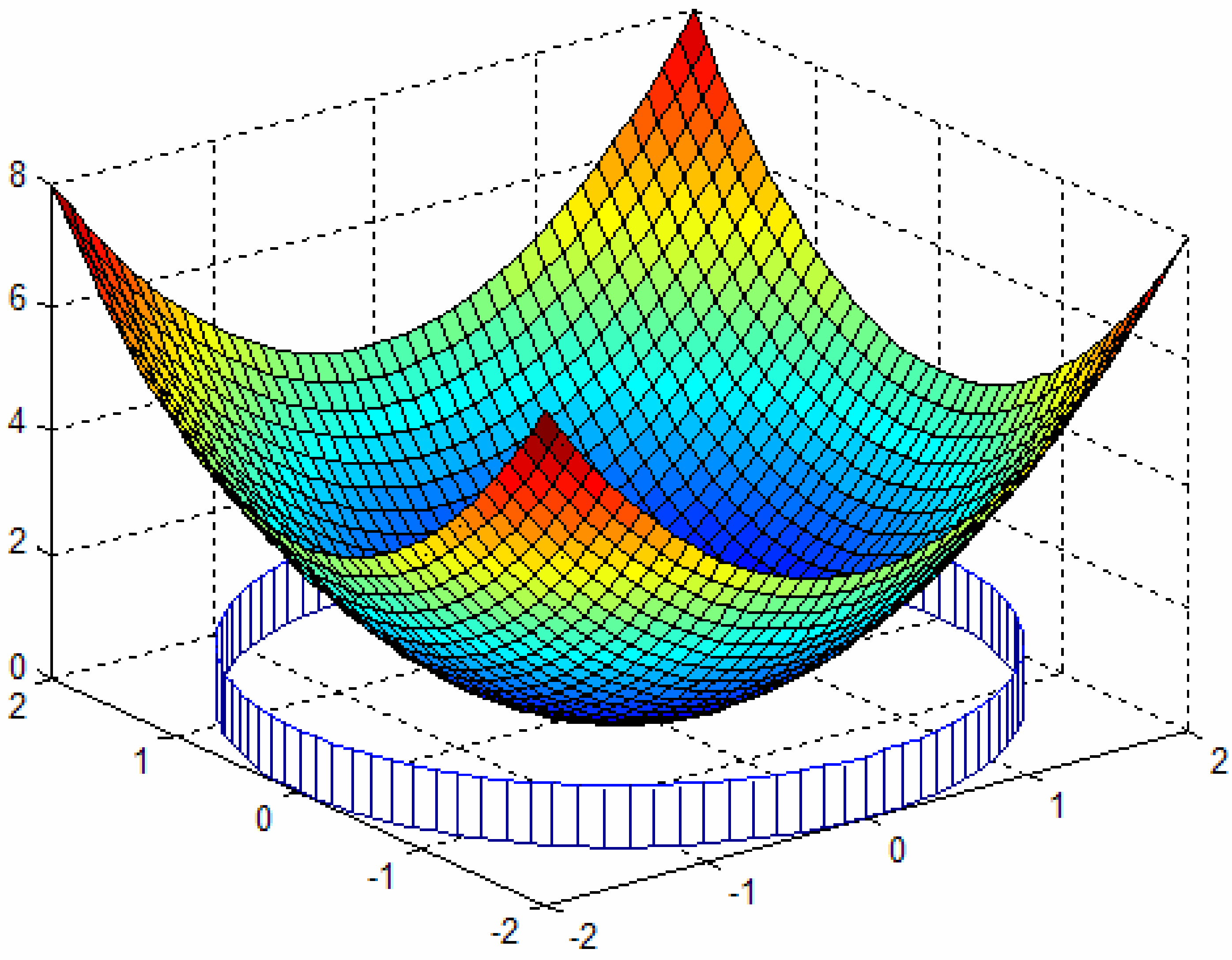
Un rezultat important afirmă că volumul mulțimii $V \subset \mathbf{R}^3$ se calculează cu integrala triplă şi anume

$$vol(V) = \iiint_V dxdydz\,.$$

Exemplu

- Să calculăm volumul mulțimii $V \subset \mathbf{R}^3$, situată deasupra planului xOy şi limitată de paraboloidul $z = x^2 + y^2$ şi de cilindrului $x^2 + y^2 = 4$.

```
[x,y,z]=cylinder(2,100);mesh(x,y,z);hold on
[x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=x.^2+y.^2;surf(x,y,z);hold off
```


8
6
4
2
0
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2

Avem $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ şi A este definită de inegalitatea $x^2 + y^2 \leq 4$

$$vol(V) = \iint_{x^2+y^2\leq 4} \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 4} \left(x^2 + y^2 \right) dxdy = 2\pi \int_0^2 r^3 dr = 8\pi$$

- Dacă funcțiile $f, g : V \to \mathbf{R}$, sunt continue, atunci:

$$\iiint_V (f+g)(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz +$$
$$+ \iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\iiint_V (k\cdot f)(x,y,z)\,dxdydz = k\cdot \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$, unde $k \in \mathbf{R}$

- Pentru funcția continuă $f : V_1 \cup V_2 \to \mathbf{R}$, unde $V_1 \cap V_2 \neq \phi$ avem:

$$\iiint_{V_1\cup V_2} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

O aplicație $F:U \to \mathbf{R}^3$, unde $U \subset \mathbf{R}^3$ este o mulțime deschisă,

dată de $F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$, injectivă, de clasă C^1 pe U ,

cu proprietatea că $F(U)$ este deschisă şi F^{-1} este de clasă C^1 pe $F(U)$,

este o *schimbare de coordonate* în U .

Schimbarea de variabile în integrala triplă

- Fie $F : U \to \mathbf{R}^3$, unde $U \subset \mathbf{R}^3$ este o mulțime deschisă, o schimbare de coordonate în U , $g : F(U) \to \mathbf{R}$ o funcție continuă şi $V \subset F(U)$ o mulțime compactă; funcția g este integrabilă pe V dacă şi numai dacă funcția $(g \circ F) \cdot \left|\det J_F\right|$ este integrabilă pe $F^{-1}(V)$ şi are loc relația:

$$\iiint_V g(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{F^{-1}(V)} (g \circ F)(u, v, w) \cdot \left|\det J_F\right| du\,dv\,dw$$

Schimbarea de variabile uzuală pentru integrala triplă este trecerea la coordonate sferice caz în care:

$$\iiint_V g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{F^{-1}(V)} g(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\cdot\sin\theta\cdot dr\,d\varphi$$

Exemple

- $\iiint\limits_V (z^2-1)dxdydz$, unde V se afla în primul octant şi este limitat de

octantul de sferă $x^2+y^2+z^2=9$

Pentru început să definim mulţimea V cu ajutorul inegalităţilor:

$$x^2+y^2+z^2 \le 9, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$$

şi apoi trecând la coordonate sferice

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ , \quad r \ge 0, \theta \in [0,\pi\}, \varphi \in [0,2\pi] \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

avem: $r^2 \le 9$ şi $\sin\theta\cos\varphi \ge 0, \sin\theta\sin\varphi \ge 0, \cos\theta \ge 0$,

inegalități ce implică: $r \in [0,3], \theta \in [0,\frac{\pi}{2}], \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$$\iiint\limits_V (z^2 - 1)dxdydz = \iiint\limits_{[0,3]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times 0,\frac{\pi}{2}]} (r^2\cos^2\theta - 1)\cdot r^2\sin\theta \cdot drd\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^4\cos^2\theta \cdot \sin\theta - r^2\sin\theta)d\theta \right) d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

- $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, V fiind mărginită de sfera $x^2+y^2+z^2=z$.

Prin trecere la coordonate sferice, inegalitatea $x^2+y^2+z^2\le z$ care defineşte mulţimea pe care integrăm, devine $r^2\le r\cos\theta$ şi astfel $r\in[0,\cos\theta]$;

este necesar ca să avem $\cos\theta\ge 0$, ceea ce înseamnă că $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Asupra unghiului φ nu se impune vreo restrictie şi astfel $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]}\left(\int_0^{\cos\theta} r\cdot r^2\sin\theta dr\right)d\theta\, d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos^4\theta\cdot\sin\theta\cdot d\varphi\right)d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{10}.$$

In cazul în care mulțimea V este limitată de un elipsoid, sau o de o porțiune din suprafata elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, vom face shimbarea în coordonate sferice generalizate:

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi\ ,\ \ r \geq 0,\, \theta \in [0,\pi\},\, \varphi \in [0,2\pi] \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

caz în care $\left|\det J_F\right| = abcr^2\sin\theta$.

Exemplu

- Să calculăm $\iiint_V \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}}}dxdydz$, dacă V se afla în primul octant şi

este limitat de planele de coordonate şi de elipsoidul $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$

Inegalitățile ce definesc mulțimea V sunt:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}\le 1, \quad x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$$

şi prin trecere la coordonate sferice generalizate devin:

$$r^2 \le 1 \quad , \; 5r\sin\theta\cos\varphi \ge 0,\; 4r\sin\theta\sin\varphi \ge 0,\; 3r\cos\theta \ge 0$$

şi astfel avem $r \in [0,1],\ \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}}}\,dxdydz = 60\cdot\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1+r^2}}\,d\theta\right)d\varphi\right)dr =$$

$$= 30\pi\cdot\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,dr = 15\pi\cdot(\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))$$

De reținut

- Calculul integralei triple ca succesiune de integrale
- Schimbarea de variabile în integrala triplă
- Aplicație a integralei triple

Tema

1. $\iiint\limits_V (z-1)\,dxdydz$, unde V este limitată de conul $z=\sqrt{x^2+y^2}$ şi de sfera $x^2+y^2+z^2=4z$ şi conține punctul $(0,0,2)$

2. Calculați volumul corpului limitat de paraboloidul $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=2z$ şi de planul $z=2$.

3. Calculați volumul corpului limitat de elipsoidul $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$

4. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2+5)\,dxdydz$, unde V se afla deasupra planului xOy şi este limitată de sferele $x^2+y^2+z^2=1$ şi $x^2+y^2+z^2=4$.