Integrale curbilinii

2009-2010

Marina Gorunescu
mgorun@inf.ucv.ro

Integrale curbilinii de speța I

Integrala curbilinie de speța I este generalizare a problemei determinării masei unui fir material, de grosime neglijabilă, de densitatea punctuală cunoscută.

Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^n$, $n\in\{2,3\}$, o curbă rectificabilă şi netedă (γ este derivabilă şi $\|\gamma'(t)\|\neq 0, \forall t\in[a,b]$), având ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad t\in[a,b] \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t), \quad t\in[a,b] \\ z=h(t) \end{cases}$$

şi mulțimea deschisă $D\subset\mathbf{R}^n$, $n\in\{2,3\}$, ce conține urma (γ).

Pentru funcția $F : D \to \mathbf{R}$, dacă există integrala

$$\int_a^b F(f(t), g(t)) \cdot \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt \text{, respectiv}$$

$$\int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \cdot \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt \text{,}$$

ea se notează cu $\int_\gamma F(x, y)ds$, respectiv $\int_\gamma F(x, y, z)ds$ şi se numeşte *integrala curbilinie de speța* I a funcției F de-a lungul curbei γ.

Exemple

- Să calculăm $\int_\gamma \sqrt[3]{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, unde γ este cercul $x^2+y^2=9$

Ecuațiile parametrice ale cercului sunt $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ şi astfel:

$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} = 3$ şi $\int_\gamma \sqrt[3]{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt[3]{9}\cdot 3dt = 6\cdot\sqrt[3]{9}\pi$

- Să calculăm $\int_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$, unde γ este prima spiră a elicei

$$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 5t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Avem $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2} = \sqrt{29}$ şi astfel:

$$\int_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds = \sqrt{29}\int_0^{2\pi} \sqrt{4+25t^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{29}\left(\frac{4}{5}\ln\frac{10\pi+\sqrt{4+100\pi^2}}{2} + \ \pi\sqrt{4+100\pi^2}\right).$$

Aplicație

Fiind dat un fir material de grosime neglijabilă, admitem că el este urma unei curbe rectificabile $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^2$, de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t\in[a,b].$$

Dacă $\rho(x,y)$ este funcția densitate punctuală a firului, atunci masa firului este dată de formula $m=\int_\gamma \rho(x,y)ds$.

Exemplu

- Să determinăm masa repartizată pe sfertul de elipsă situat în primul cadran, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, dacă densitatea sa liniară în fiecare punct (x,y) este egală cu $|y|$.

  Ecuațiile parametrice ale curbei sunt $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ și astfel

$$m = \int_\gamma |y| ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t \cdot \sqrt{25\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sqrt{25 - 16\cos^2 t}\, dt = 3 \cdot \int_0^1 \sqrt{25 - 16u^2}\, du = \frac{9}{2} + \frac{75}{8} \arcsin \frac{4}{5}$$

În cazul firului material, urmă a curbei rectificabile $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$, cu densitatea în fiecare punct $\rho(x, y, z)$, masa acestuia va fi

$$m = \int_{\gamma} \rho(x, y, z) ds .$$

Exemplu

- Să determinăm masa repartizată pe sfertul de cerc $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

situat în primul octant, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu lungimea razei vectoare a punctului

Vom calcula $m=\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds$

Cercul este intersecția cilindrului $x^2+y^2=1$ cu sfera $x^2+y^2+z^2=4$,

intersecție ce are loc în planul $z=\sqrt{3}$; ecuațiile parametrice ale sfertului

de cerc sunt $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t\,, \quad t\in[0,\dfrac{\pi}{2}] \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$

$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}=1$ şi avem $m=\int\limits_{\gamma}\sqrt{1+3}\,ds=\int\limits_{0}^{2\pi}2\,dt=4\pi$.

Proprietăți ale integralei curbilinii de speța I

- În cazul integralei de speța I, nu contează sensul de parcurgere al curbei, adică $\int_{\gamma} F ds = \int_{\gamma^-} F ds$.

- Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, este o curbă rectificabilă şi netedă pe porțiuni, adică $\gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k$ şi funcția $F : D \to \mathbf{R}$ (unde $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ este o mulțime deschisă ce conține urma (γ)) este continuă, atunci $\int_{\gamma} F ds = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} F ds$.

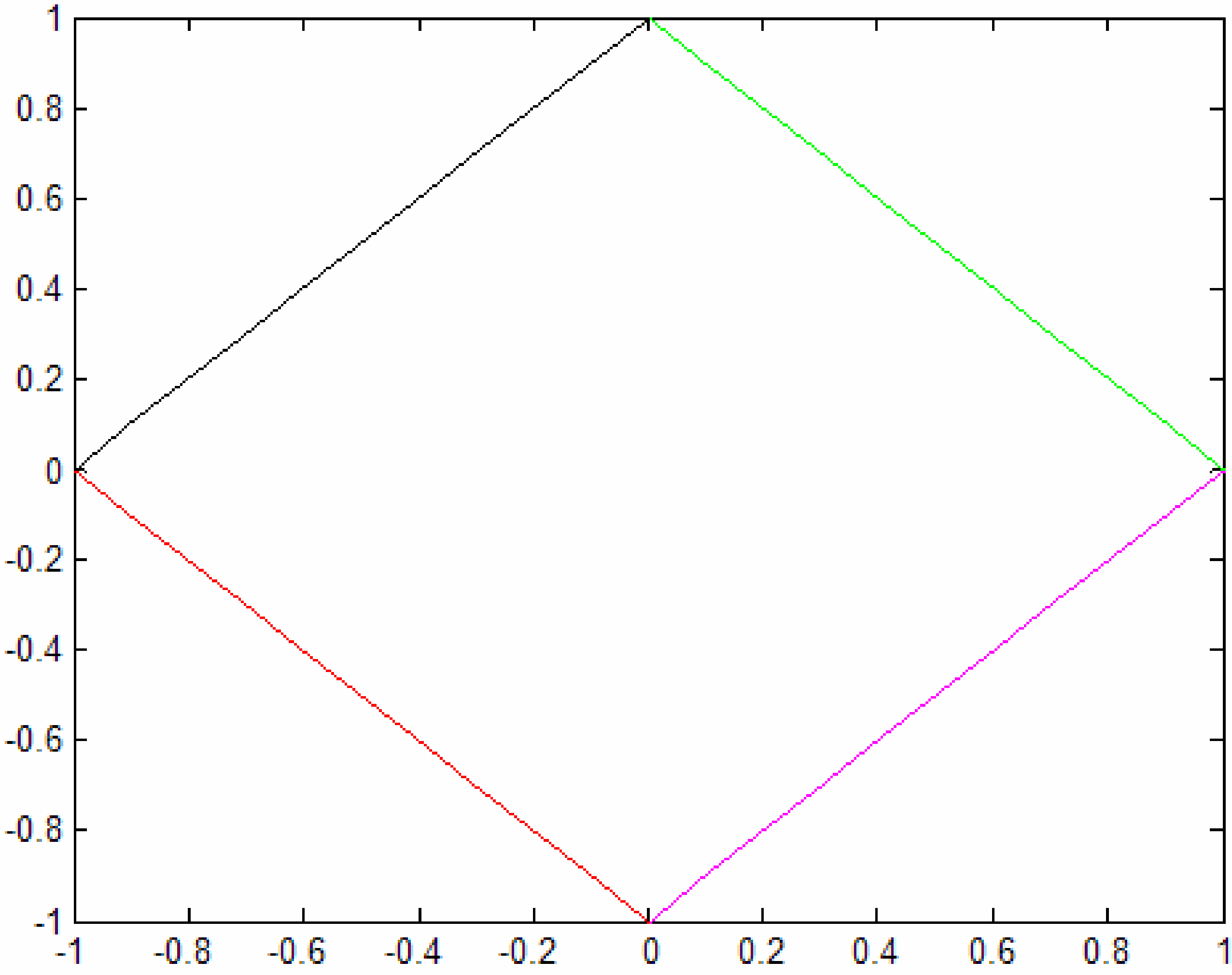
(*proprietatea de aditivitate la curbă*)

Exemplu

- Să calculăm $\int\limits_{\gamma}(xy+1)ds$, unde γ este pătratul $|x|+|y|=1$

Avem $\int\limits_{\gamma}(xy+1)ds=\sum\limits_{i=1}^{4}\int\limits_{\gamma_i}(xy+1)ds$, şi prezentăm alăturat (γ)

```
x=-1:.1:0;x1=0:.1:1;plot(x,1+x,'k',x,-x-1,'r',x1,1-x1,'g',x1,x1-1,'m')
```



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Vom scrie ecuațiile parametrice ale dreptelor γ_i:

dreapta ce unește $(0,1)$ cu $(1,0)$ $\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$ $t \in [0,1]$,

dreapta ce unește $(-1,0)$ cu $(0,1)$ $\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \end{cases}$ $t \in [-1,0]$,

dreapta ce unește $(-1,0)$ cu $(0,-1)$ $\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \end{cases}$ $t \in [-1,0]$ și

dreapta ce unește $(0,-1)$ cu $(1,0)$ $\gamma_4 : \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \end{cases}$ $t \in [0,1]$.

Nu are importanță sensul de parcurgere al curbei!

$$\int_\gamma (xy+1)ds = \int_0^1 (-t^2+t+1)\cdot\sqrt{2}dt + \int_{-1}^0 (t^2+t+1)\cdot\sqrt{2}dt +$$

$$\int_{-1}^0 (-t^2-t+1)\cdot\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 (t^2-t+1)\cdot\sqrt{2}\,dt = 4\sqrt{2}$$

De reținut

- Integrala curbilinie de speța I a unei funcții continue de-a lungul unei curbe.
- Proprietățile integralelor curbilinii de speța I
- Aplicație a integralei curbilinii de speța I

Tema

1. Calculați masa repartizată pe semicercul situat la dreapta axei Oy, $x^2+y^2=4$, dacă densitatea sa liniară în fiecare punct (x,y) este egală cu $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

2. Calculați $\int_\gamma (x+y+2)ds$, dacă ecuația curbei γ în coordonate polare este $r=1+\cos t, t\in[-\pi,\pi]$.

3. Calculați $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2+2}\,ds$, unde γ se află în primul cadran și este juxtapunerea dreptei $y=\sqrt{3}\cdot x$, primei bisectoare și arcului din cercul unitate, limitat de aceste drepte.

4. Calculați $\int_\gamma \dfrac{1}{x^2+y^2+9}ds$, unde γ este cercul de intersecție a sferei cu centru în origine, de rază 2, cu paraboloidul $z=x^2+y^2$

Integrala curbilinie de speța a II-a

Funcția $F : A \to \mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, unde $A \subset \mathbf{R}^n$ este o mulțime deschisă se numește *câmp vectorial.*

Este vorba de fapt, de o funcție vectorială cu două componente, de două variabile reale $F = (P, Q)$, respectiv de o funcție vectorială cu trei componente, de trei variabile reale $F = (P, Q, R)$.

Dacă $A \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ este o mulțime deschisă şi funcția $f : A \to \mathbf{R}$ admite derivate parțiale pe A, am definit gradientul funcției f, care este câmpul vectorial

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

respectiv

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Câmp conservativ

Câmpul vectorial F definit pe mulțimea deschisă $A \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ se numeşte *conservativ* dacă există o funcție $f : A \to \mathbf{R}$ astfel încât $F = \nabla f$, în timp ce f se numeşte funcția potențial pentru F.

Exemple

- $F(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ este un câmp conservativ , ce derivă din

potențialul $f(x,y,z)=xyz$

- $F(x,y)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ este un câmp conservativ , ce derivă din

potențialul $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Domeniu

O mulțime $A \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ este *conexă prin arce* dacă pentru orice două puncte $x, y \in A$ există o curbă ce uneşte x cu y în A, adică există $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, astfel încât $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ şi $\gamma([a,b]) \subset A$.

O mulțime $D \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ deschisă şi conexă prin arce se numeşte *domeniu*.

Integrala curbilinie de speța a II-a

Considerăm $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^3$, o curbă de clasă C^1, cu parametrizarea

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t)\ ,\ t\in[a,b]. \\ z = h(t) \end{cases}$$

Dacă F este un câmp vectorial continuu pe domeniul $D\subset\mathbf{R}^3$, mulțime ce conține urma (γ), atunci numărul real, dat de:

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt =$$

$$\int_a^b [P(f(t),g(t),h(t))\cdot f'(t)+Q(f(t),g(t),h(t))\cdot g'(t)+R(f(t),g(t),h(t))\cdot h'(t)]dt$$

şi notat $\int_\gamma F$ se numeşte *integrala curbilinie* (de *speța a doua*) a lui F de-a lungul curbei γ.

Exemple

- Să calculăm pentru câmpul vectorial $F(x,y)=(y,x^2)$, $\int_{\gamma^+} F$ de-a lungul

sfertului elipsei $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, situat în primul cadran, parcurs în sens pozitiv:

- scriem ecuațiile parametrice ale elipsei $\gamma:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$, $t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$;
- calculăm $\gamma'(t)=(-a\sin t, b\cos t)$
- determinăm $F(\gamma(t))=(b\sin t, a^2\cos^2 t)$.

Atunci:

$$\int_{\gamma^+} F=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\langle (b\sin t, a^2\cos^2 t),(-a\sin t, b\cos t)\right\rangle dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos^3 t-\sin^2 t)dt = ab\cdot\left(\frac{2}{3}a-\frac{\pi}{4}\right)\frac{2}{3}.$$

- Să calculăm $\int_\gamma F$, unde $F(x,y,z)=(x+y,z^2,xyz)$ şi $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$, $t\in[0,1]$.

Avem:

- $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$; $\gamma'(t)=(1,2t,3t^2)$
- $F(\gamma(t))=(t+t^2,t^6,t^6)$

$$\int_\gamma F=\int_0^1\left\langle (t+t^2,t^6,t^6),(1,2t,3t^2)\right\rangle dt=\int_0^1 (t+t^2+2t^7+3t^8)\,dt=\frac{17}{12}.$$

În cazul integralei curbilinii de speța a doua a câmpului vectorial F de-a lungul curbei γ, sensul de parcurgere a curbei are mare importanță:

- Dacă există $\int_{\gamma} F$, prin înlocuirea curbei γ cu γ^{-}, ceea ce înseamnă schimbarea sensului de parcurgere a curbei, avem $\int_{\gamma^{-}} F = -\int_{\gamma} F$.

Dacă γ este o curbă netedă, simplă, versorul său tangent este dat de

$$T(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), T(\gamma(t)) \rangle \cdot \|\gamma'(t)\| dt = .$$

$$= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), T(\gamma(t)) \rangle \cdot \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\, dt = \int_\gamma \langle F, T \rangle ds$$

ceea ce înseamnă că integrala curbilinie a lui F pe γ se reduce la integrala de speța întâi a funcției $(x, y, z) \mapsto \langle F(x, y, z), T(x, y, z) \rangle$ pe γ.

Proprietățile integralei curbilinii de speța a II-a

- Dacă F_1, F_2 sunt câmpuri vectoriale continue şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, atunci

  $$\int_\gamma (\alpha \cdot F_1 + \beta \cdot F_2) = \alpha \cdot \int_\gamma F_1 + \beta \cdot \int_\gamma F_2 \ .$$

  (*liniaritatea față de integrant*).

- Dacă $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbf{R}^3$, $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbf{R}^3$ sunt curbe de clasă C^1 cu $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, atunci pentru F, un câmp vectorial continuu pe domeniul D, domeniu ce conține $(\gamma_1 \cup \gamma_2)$, avem:

  $$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F$$

  (*aditivitatea față de curbă*).

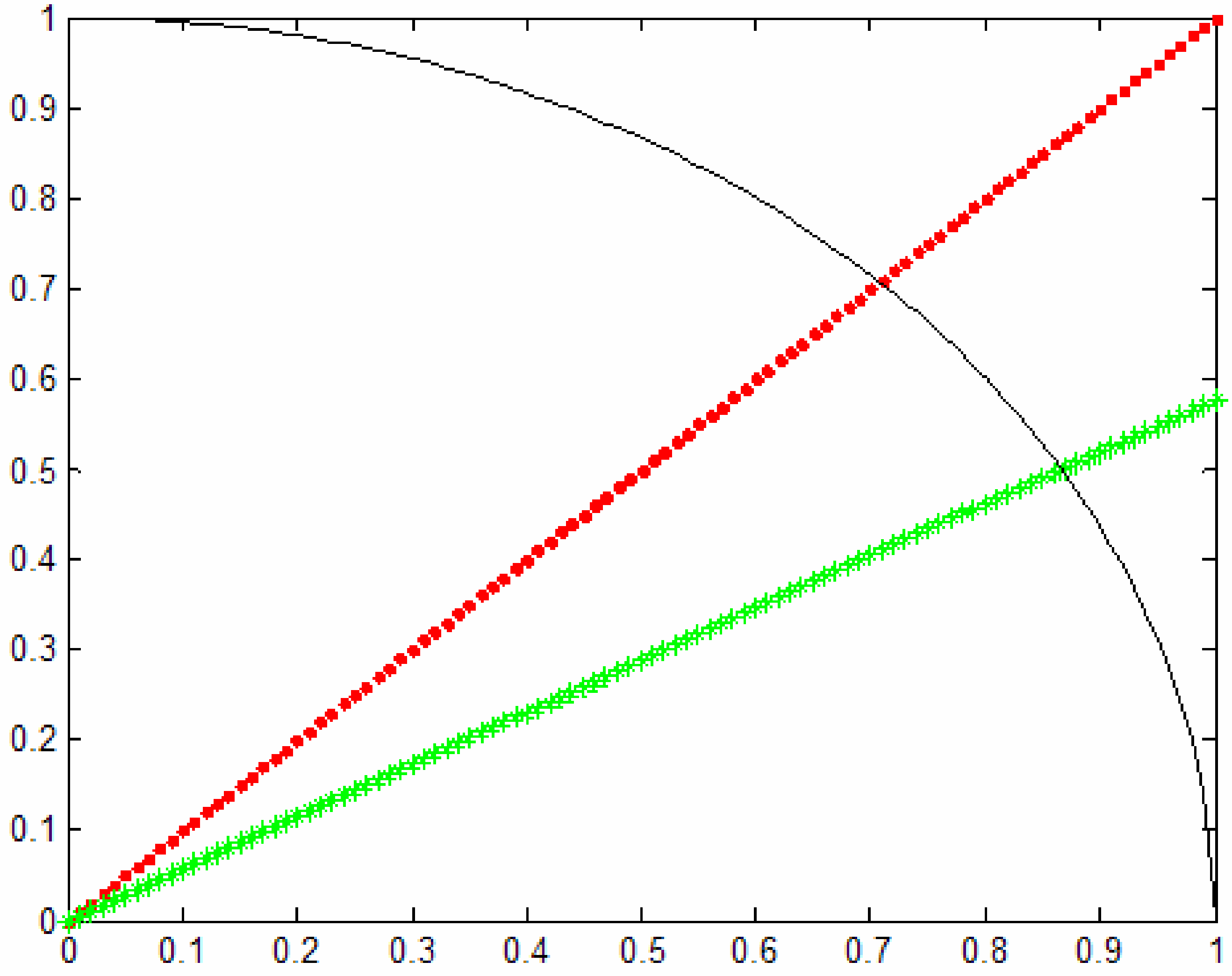
Exemplu

- Să calculăm $\int_{\gamma^+} F$, unde $F(x,y)=(x^2+y^2,xy)$ şi curba γ^+ este parcursă

în sens trigonometric, se află în primul cadran şi este definită de juxtapunerea dreptei $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, cu arcul de cerc $x^2+y^2=1$ şi cu prima bisectoare.

Pentru a desena curba γ, vom folosi Matlab:

```
» x=0:.01:1;plot(x,x,'r.',x,x./(sqrt(3)),'g*',x,sqrt(1-x.^2),'k-')
```



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Avem nevoie pentru reprezentarea parametrică a curbelor de punctele de intersecție ale acestora:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (ne interesează doar soluțiile din primul cadran!)}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1}{2}$$

Modul de parcurgere al curbei:

- din $O(0,0)$ ajungem în $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ urmând dreapta $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$
- parametrizarea curbei γ_1^+ este $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{\sqrt{3}} \end{cases}, t \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}];$

- din $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ până la $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ parcurgem arcul de cerc $y = \sqrt{1-x^2}$;

  parametrizarea curbei γ_2^+ este $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.

- din $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ajungem în origine, parcurgând prima bisectoare în sens

  invers; pentru parametrizare avem două posibilități:

  1. $\gamma_3^+ : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} - t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} - t \end{cases}$, $t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (formula $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t), t \in [a,b]$)

  2. $\gamma_3^- : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$, $t \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ și vom folosi faptul că $\int_{\gamma_3^-} F = -\int_{\gamma_3^+} F$

Aşadar $\gamma^{+}=\gamma_1^{+}\cup\gamma_2^{+}\cup\gamma_3^{-}$ şi utilizând aditivitatea faţă de curbă avem:

$$\int_{\gamma^{+}} F=\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\left(t^{2}+\frac{t^{2}}{3}\right)+\frac{t^{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right]dt+\;+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\{((\cos^{2}t+\sin^{2}t)(-\sin t)+\cos t\sin t(\cos t)]dt$$

$$-\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2t^{2}+t^{2})dt=\frac{5\sqrt{3}}{24}+\frac{5\sqrt{2}}{12}-\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Formă liniară

Un element din $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ se numeşte *formă liniară*.

În $\mathbf{R}^2$, câmpul vectorial F determină în fiecare punct $(x, y) \in D$ o formă liniară pe $\mathbf{R}^2$, $(v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \langle F(x, y), (v_1, v_2) \rangle \in \mathbf{R}$.

Valoarea acestei forme liniare în $(x, y) = (f(t), g(t)) = \gamma(t)$, pentru vectorul $(v_1, v_2) = (f'(t), g'(t)) = \gamma'(t)$ intervine direct în definirea integralei curbilinii de speța a doua.

Formă diferențială

O formă diferențială pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^n$ este o aplicație care asociază fiecărui punct al mulțimii D un element $\omega(x) \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

- Dacă $f : D \to \mathbf{R}$, unde $D \subset \mathbf{R}^n$ este mulțime deschisă, este diferențiabilă în orice punct din D, atunci aplicația $a \mapsto df(a) \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ este o formă diferențială pe D.

In spațiul vectorial L($\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}$), elementele $dx_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definite prin $dx_i(v_1, \dots, v_n) = v_i$, $1 \le i \le n$, constituie o bază, ceea ce înseamnă că pentru fiecare $x \in D$, $\omega(x)$ se poate scrie unic ca o combinație liniară de $dx_1, \dots, dx_n$ şi anume $\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \cdot dx_k$, unde $a_k(x), 1 \le k \le n$, sunt numere reale.

Forma diferențială ω este astfel definită de funcțiile reale $a_k : D \to \mathbf{R}$, $1 \le k \le n$ şi este de clasă C^m, $m \in \mathbf{N}$, dacă toate funcțiile a_k sunt de clasă C^m.

Exemple

- Dacă $f : D \to \mathbf{R}$, unde $D \subset \mathbf{R}^n$ este mulțime deschisă, este diferențiabilă în orice punct din D, atunci $df : D \to \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ este o formă diferențială pe D:

$$df(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot dx_k$$

- Dacă $F : D \to \mathbf{R}^3$, unde domeniul $D \subset \mathbf{R}^3$, este un câmp vectorial, atunci $\omega(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dată de:

$$\omega(x, y, z)(v_1, v_2, v_3) = \langle F(x, y, z), (v_1, v_2, v_3) \rangle$$

este o formă diferențială.

Dacă $F = (P, Q, R)$, unde funcțiile $P, Q, R : D \to \mathbf{R}$, atunci avem:

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dy + R(x, y, z) \cdot dz$$

Dacă $\gamma:[a,b]\to\mathbf{R}^3$, o curbă de clasă C^1, de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t)\ ,\ t\in[a,b] \\ z=h(t) \end{cases}$$

şi ω o formă diferențiala continuă pe domeniul $D\subset\mathbf{R}^3$ ce conține urma (γ) , vom defini integrala din ω de-a lungul curbei γ ca fiind numărul:

$$\int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)dt\ .$$

Reținem că $\omega(\gamma(t))\gamma'(t)$ reprezintă valoarea lui $\omega(\gamma(t))\in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$ în vectorul $\gamma'(t)\in\mathbf{R}^3$, funcția de integrat depinzând continuu de parametrul t .

Considerând baza uzuală din L($\mathbf{R}^3$,$\mathbf{R}$), avem:

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dy + R(x, y, z) \cdot dz$$

şi astfel putem scrie:

$$\int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$$

$$= \int_a^b [P(f(t), g(t), h(t)) \cdot f'(t) + Q(f(t), g(t), h(t)) \cdot g'(t) + R(f(t), g(t), h(t)) \cdot h'(t)]dt \, ,$$

formulă ce permite calculul efectiv al integralei din ω de-a lungul curbei γ.

În mod obişnuit, se foloseşte notaţia:

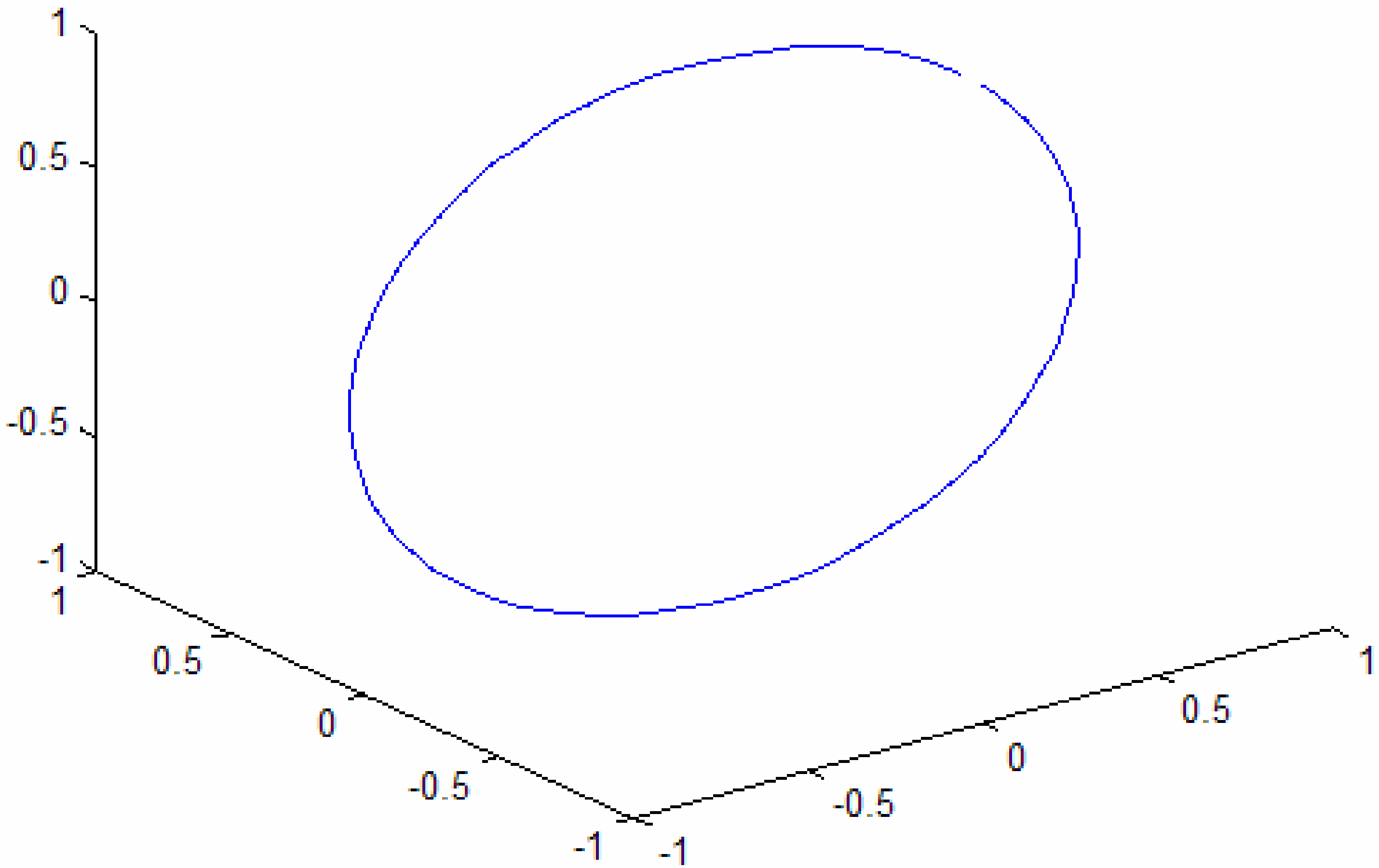
$$\int_{\gamma} \omega \quad \text{sau} \quad \int_{\gamma} P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dy + R(x,y,z)\cdot dz\ .$$

Integrala curbilinie a unui câmp vectorial $F : D \to \mathbf{R}^3$, $F = (P, Q, R)$, pe curba γ este de fapt integrala formei diferenţiale corespunzătoare $P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dy + R(x,y,z)\cdot dz$.

Exemple

- Să calculăm $\int_{\gamma^+} xdx + ydy + 2zdz$, unde γ^+ este cercul $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = z \end{cases}$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ y = \sin t \qquad\qquad , \ t \in [0, 2\pi]. \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \end{cases}$$



1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

Atunci:

$$\int_{\gamma^+} x dx + y dy + 2 z dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) + \sin t \cdot \cos t + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0 \ .$$

- Să calculăm $\int_{\gamma^+} \omega$, unde $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, unde γ^+ este semicercul $x^2+y^2=1, y \geq 0$.

$\int_{\gamma^+} \omega$ reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța dată de

$F(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, pentru a trece din (1, 0) în (-1, 0), pe curba γ^+.

Ecuațiile parametrice ale lui γ^+ sunt: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$ şi avem

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \pi .$$

Dacă $\gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k$, unde fiecare γ_k este netedă, atunci:

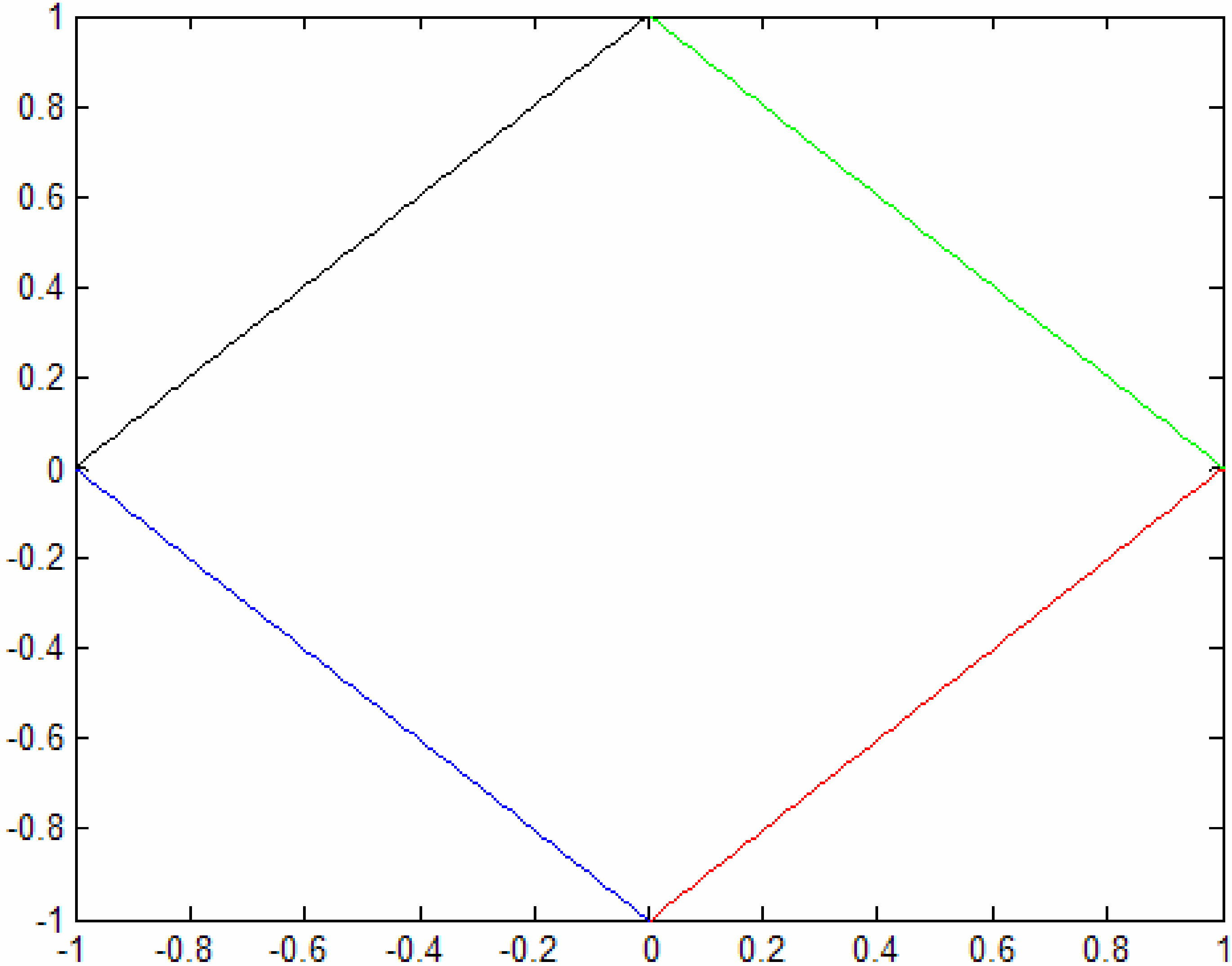
$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \omega$$

Exemplu

- Să calculăm $\int_{\gamma^+} (x-y)dx+(x+y)dy$, unde γ^+ este pătratul $|x|+|y|=1$,

parcurs în sens trigonometric.

```
x=0:.01:1;x1=-1:.01:0;plot(x,x-1,'r',x,1-x,'g',x1,1+x1,'k',x1,-1-x1,'b')
```


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Punctele de intersecție ale dreptelor sunt: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$

- $(\gamma_1) = AB$ ('g'); este preferabil să scriem dreapta BA şi în calculul integralei să ținem seama că este opusul lui AB;

  BA: $x = t, y = 1 - t,\ t \in [0,1]$;

- $(\gamma_2) = BC$ ('k'); scriem parametrizarea opusului CB: $x = t, y = 1 + t, t \in [-1,0]$;
- $(\gamma_3) = CD$ ('b'); folosim parametrizarea lui CD: $x = t, y = -1 - t, t \in [-1,0]$;
- $(\gamma_4) = DC$ ('r'); parametrizarea lui DC este: $x = t, y = t - 1, t \in [0,1]$.

Avem:

$$\int_{BA} \omega = \int_0^1 (2t-2)dt = -1\,; \qquad \int_{CB} \omega = \int_{-1}^0 2t dt = -1\,;$$

$$\int_{CD} \omega = \int_{-1}^0 (2t+2)dt = 1\,; \qquad \int_{DA} \omega = \int_0^1 2t dt = 1$$

Folosind rezultatul anterior avem:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CD} \omega + \int_{DA} \omega = 1+1+1+1 = 4\,.$$

Formă diferențială exactă

O formă diferențială ω , definită pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^n$, este o *formă diferențială exactă* dacă există o funcție diferențiabilă $f : D \to \mathbf{R}$, astfel încât $\omega = df$ pe D.

Astfel, pentru

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) dx_k \text{ unde } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$$

condiția $\omega = df$ pe D înseamnă $a_k(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x),\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$

Exemple

- Forma diferențială $\omega(x,y,z) = xdx + ydy + zdz$, $(x,y,z) \in \mathbf{R}^n$ este exactă

deoarece $\omega = df$ unde $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$.

- Forma diferențială $\omega(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$, $(x,y,z) \in \mathbf{R}^n$ este exactă

deoarece $\omega = df$ unde $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Formă diferențială închisă

- Dacă forma diferențială $\omega(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)dx_k$ este exactă şi de clasă C^1,

atunci $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall\, 1\le i,j\le n, \quad \forall x\in D$.

Forma diferențială ω de clasă C^1 pe D se numeşte *închisă* dacă:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall\, 1\le i,j\le n, \quad \forall x\in D.$$

aşadar o formă diferențiala exactă este închisă.

- Fie $\omega = dF$ o formă diferențială continuă și exactă pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^3$ și $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ o curbă de clasă C^1, având urma $(\gamma) \subset D$ (γ), de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t),\ t \in [a, b]. \\ z = h(t) \end{cases}$$

Atunci $\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

In particular, dacă curba γ este închisă, atunci $\oint_\gamma F = 0$

- Pentru ω o formă diferențială continuă pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^3$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. ω este formă diferențială exactă pe D.
2. $\oint\limits_{\gamma} \omega = 0$, oricare ar fi curba γ închisă, clasă C^1 pe porțiuni, $(\gamma) \subset D$.
3. $\oint\limits_{\gamma_1} \omega = \oint\limits_{\gamma_2} \omega$, oricare ar fi curbele $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbf{R}^3$, de clasă C^1,

   cu urmele $(\gamma_i) \subset D$ şi $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.

- Fie $F=(P,Q,R)$ un câmp vectorial de clasă C^1 într-un domeniu convex $D\subset \mathbf{R}^3$.

Dacă avem:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\text{, pe } D$$

atunci F derivă dintr-un potențial.

analog:

- *O formă diferențială închisă* ω , definită pe un domeniu convex $D\subset \mathbf{R}^n$ este o formă diferențială exactă.

Exemple

- In $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ câmpul vectorial

$$F(x,y,z)=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

este conservativ, deoarece :

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

Funcția $f(x,y,z)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ este potențialul acestui câmp de forțe, potențial ce se numeşte *newtonian.*

- Pentru a calcula $\int_{(2,4)}^{(5,12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ verificăm mai întâi dacă forma diferențiala

$\omega(x,y)=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ este exactă: $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

Integrala nu depinde de drumul ales şi astfel alegem drumulcare leagă punctele $(3,4)\to(5,4)\to(5,12)$, adică $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ unde

$$\gamma_1:\begin{cases}x=t\\ y=4\end{cases},t\in[3,5]\quad,\quad \gamma_2:\begin{cases}x=5\\ y=t\end{cases},t\in[4,12]$$

şi astfel:

$$\int_{(2,4)}^{(5,12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_3^5 \frac{t}{t^2+4}dt+\int_4^{12}\frac{t}{t^2+25}dt=\ln\frac{13}{5}$$

- Pentru a calcula $\int\limits_{(0,2,3)}^{(3,2,1)} yzdx + zxdy + xydz$, verificăm dacă forma diferențială este

exactă: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = z = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = y = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = x = \dfrac{\partial R}{\partial y}$.

Alegem drumul care leagă punctele: $(0,2,3) \to (3,2,3) \to (3,2,1)$, adică $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^{-}$, unde:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} , t \in [0,3] \text{ și } \gamma_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} , t \in [1,3]$$

și astfel:

$$\int\limits_{(0,2,3)}^{(3,2,1)} yzdx + zxdy + xydz = \int\limits_0^3 6\,dt - \int\limits_1^3 6\,dt = 6 .$$

- Dacă $dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, atunci:

$$F(u,v) = \int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} dF = \int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \, ,$$

unde (u_0, v_0) este un punct convenabil ales din domeniul de definiție, dacă este posibil chiar $(0,0)$ pentru simplificare acalculului.

Exemplu

- Să determinăm funcția a cărei diferențială este $dF = e^{-x^2-y^2}(xdx + ydy)$;

Verificăm adică dacă dF este o formă diferențiala exactă:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-x^2-y^2}\right) = -2xye^{-x^2-y^2}\ ; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{-x^2-y^2}\right) = -2xye^{-x^2-y^2}$$

$$F(u,v) = \int_0^u te^{-t^2}dt + \int_0^v te^{-u^2-t^2}dt = -\frac{1}{2}\left(e^{-u^2}-1\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-u^2-v^2}-e^{-u^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-u^2-v^2} + \frac{1}{2}\,.$$

Aşadar $F(x,y) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2-y^2} + \dfrac{1}{2}$

- Dacă $dF = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, avem

$$F(u, v, w) = \int_{(u_0, v_0, w_0)}^{(u, v, w)} dF = \int_{(u_0, v_0, w_0)}^{(u, v, w)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$\int_{u_0}^{u} P(t, v_0, w_0)dt + \int_{v_0}^{v} Q(u, t, w_0)dt + \int_{w_0}^{w} R(u, v, t)dt$$

- Să găsim funcția a cărei diferențiala este:

$$dF = \frac{1}{\sqrt{1+x^2y^2z^2}} \cdot (xy^2z^2dx + x^2yz^2dy + x^2y^2zdz)$$

Avem :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xyz^2 + 3x^3y^3z^4}{\sqrt{(1+x^2y^2z^2)^3}} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2xy^2z + 3x^3y^4z^3}{\sqrt{(1+x^2y^2z^2)^3}} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{2x^2yz + 3x^4y^3z^3}{\sqrt{(1+x^2y^2z^2)^3}} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

şi astfel putem aplica formula prezentată anterior:

$$F(u,v,w) = \int_{(0,0,0)}^{(u,v,w)} dF = \int_0^u P(t,0,0)dt + \int_0^v Q(u,t,0)dt + \int_0^w R(u,v,t)dt =$$

$$\int_0^u 0 \cdot dt + \int_0^v 0 \cdot dt + \int_0^w \frac{u^2v^2t}{\sqrt{1+u^2v^2t^2}} dt = \sqrt{1+u^2v^2w^2} - 1.$$

$$F(x,y,z) = \sqrt{1+x^2y^2z^2} - 1.$$

Să considerăm $\mathbf{R}^2$ raportat la un sistem ortogonal xOy de versori $\bar{i}, \bar{j}$.

Dacă $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime deschisă şi $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcție de clasă C^1 pe D, definim curba de clasă C^1, având ecuația carteziană $f(x, y) = 0$, ca fiind mulțimea $\gamma = \{(x, y) \in D \,|\, f(x, y) = 0\}$.

Presupunem că (γ) este frontiera unui compact $K \subset \mathbf{R}^2$ şi că nu admite puncte singulare. ($(x_0, y_0) \in \gamma$ este punct singular dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$).

Pentru orice punct $P \in \gamma$ curba γ împarte planul în două regiuni, una conținând puncte din K, iar cealaltă conținând puncte din $\mathbb{R}^2 \setminus K$.

Versorul normalei în P la curba γ este $\overline{n_P}$.

Dintre cei doi versori ai tangentei în P alegem pe cel notat $\overline{\tau_P}$, astfel încât reperul $(\overline{\tau_P}, \overline{n_P})$ să aibă aceeași orientare cu $(\bar{i}, \bar{j})$, stabilind astfel sensul pozitiv al tangentei, adică orientarea pozitivă a curbei γ.

Intuitiv, "parcurgând pe γ în sens pozitiv, compactul K trebuie să rămână tot timpul la stânga".

Compact bordat

O mulțime compactă $K \subset \mathbf{R}^2$ se numeşte *compact bordat,* dacă frontiera sa este o reuniune finită de curbe plane, parametrizate, de clasă C^1, nesingulare, simple, închise şi orientate pozitiv.

Exemple

- Dacă $[a,b]\subset \mathbf{R}$ şi $g_1, g_2 :[a,b]\to \mathbf{R}$ sunt funcții de clasă C^1, cu proprietatea că $g_1(x)\le g_2(x), \forall x\in[a,b]$, atunci mulțimea:

  $K_x = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \,|\, x\in[a,b], g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$

  este un compact bordat.

- Dacă $[c,d]\subset \mathbf{R}$ şi $h_1, h_2 :[c,d]\to \mathbf{R}$ funcții de clasă C^1, cu proprietatea că $h_1(y)\le h_2(y), \forall y\in[c,d]$,atunci mulțimea:

  $K_y = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \,|\, y\in[c,d], h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$

  este tot un compact bordat.

Compact bordat elementar

Un compact bordat K se numeşte *elementar* dacă mulțimea K poate fi descompusă ca o reuniune finită de mulțimi de tip K_x, având în comun cel mult puncte de pe frontieră, respectiv admite o descompunere similară în mulțimi de tip K_y.

- Poligoanele convexe, bilele închise (discurile) sunt compacți bordați elementar.

Formula Green-Riemann

- Fie $K \subset \mathbf{R}^2$ un compact bordat elementar şi $D \subset \mathbf{R}^2$ o mulţime deschisă ce conţine K; dacă $P,Q : D \to \mathbf{R}$, funcţii de clasă C^1 pe D, atunci:

$$\oint_{FrK} P(x,y)dx + q(x,y)dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

Exemplu

- Să calculăm cu ajutorul formulei, $\oint_{\gamma^+}(-x^2y)dx + xy^2dy$, unde γ este cercul unitate, parcurs în sens trigonometric.

$$\oint_{\gamma^+}(-x^2y)dx + xy^2dy = \iint_k (x^2+y^2)dxdy\,,$$

unde $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Trecând la coordonate polare, obținem:

$$\iint_K (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^3 dr\right)d\varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$

De reținut

- Câmp vectorial; câmp vectorial conservativ; potențial.
- Integrala curbilinie a unui câmp vectorial – integrala curbilinie de speța a II-a
- Proprietățile integralei curbilinii de speța a II-a
- Formă liniară; formă diferențială
- Integrala curbilinie a unui câmp vectorial este integrala curbilinie a formei diferențiale corespunzătoare.

- Formă diferențială exactă
- Formă diferențială închisă; aplicație.
- Compact bordat elementar
- Formula Green-Riemann

Tema

1. Pentru câmpul vectorial $F(x,y)=(y^2,-x^2+y)$, calculați $\int_{\gamma^+} F$, unde γ^+ este cercul $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ parcurs în sens trigonometric.

2. Calculați $\int_{\gamma^+} F$, unde $F(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ și γ^+ este cercul $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=z \end{cases}$, parcurs în sens trigonometric.

3. Calculați $\int_{\gamma^+} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, unde γ^+ este în cadranul I și este juxtapunerea dreptelor $y=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ și a arcului de cerc $x^2+y^2=1$.

4. Calculați:

$$\int_{(1,2)}^{(3,1)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; \quad \int_{(1,2,3)}^{(2,1,5)} \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2+y^2+z^2+1}.$$

5. Determinați funcțiile ale căror diferențiale sunt:

$$dF = e^{x^2+y^2}\left((1+2x^2)dx + 2xydy\right);$$

$$dF = \frac{y}{z^2+1}dx + \frac{x}{z^2+1}dy - \frac{2xyz}{(z^2+1)^2}dz.$$

6. Calculați următoarele integrale folosind formula Green-Riemann:

- $\int_{\gamma^+} -\frac{y^3}{27}dx + \frac{x^3}{12}dy$, unde γ^+ este elipsa $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
- $\int_{\gamma^+} \frac{y^2 - x^2 + 2xy + 1}{(x^2+y^2+1)^2}dx + \frac{y^2 - x^2 - 2xy - 1}{(x^2+y^2+1)^2}dy$ unde γ^+ este definită de cercurile $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2 = 4x$.