

Noțiuni introductive- laborator 2009-2010

Matlab este un pachet de programe performante, care rezolvă numeric și probleme ale calculului științific. Probleme complicate pot fi rezolvate rapid, permițându-ne astfel să folosim timpul gândind și experimentând. Algoritmii folosiți sunt de foarte bună calitate, așa că putem avea încredere deplină în rezultatele obținute. În plus resursele de grafică sunt excelente.

Cu siguranță Matlab ne va fi de un real folos pentru a înțelege și a folosi rezultatele calculului științific. Există un singur mod de a învăța cum poate fi folosit și anume lucrând cât mai multe și mai variate exemple.

Aritmetică în Matlab

În Matlab operațiile aritmetice de bază (+ , - , * , / , ^) sunt folosite împreună cu parantezele (). Ordinea operațiilor este cea cunoscută din aritmetica elementară.

```
» 6*7-4/9+2^5
```

Importanța parantezelor este reamintită prin următorul exemplu:

```
» -3^4+2/5*7
```

```
» (-3)^4+2/5*7
```

```
» (-3)^4+2/(5*7)
```

Să urmărim următorul calcul:

```
» 2-7/3
```

```
ans =
```

```
-0.3333
```

```
» ans^2
```

```
ans =
```

```
0.1111
```

Rezultatul în urma calculului primei expresii a fost etichetat de Matlab cu ans (answer). Putem atribui nume pentru a stoca numerele:

```
» x=2-7/3
```

```
» y=x^2
```

și astfel valorile lui x și y pot fi folosite în calcule ulterioare.

În cazul în care nu dorim afișarea rezultatelor intermediare, la sfârșitul expresiei sau atribuirii, scriem punct și virgulă (semi-colon):

```
» x=2-7/3; y=x^2; z=y^2+2
```

Prezentăm câteva funcții elementare din Matlab:

- ♦ abs = valoarea absolută
» abs(3-5*2^3)
- ♦ sqrt = radical
» sqrt(3)

de reținut: pentru a calcula $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$ veți scrie $a^{\frac{1}{n}}$

- ♦ sin = funcția sin
» sin(pi/6)
- ♦ cos = funcția cos
» cos(pi/10)
- ♦ tan = funcția tg
» tan(pi/12)
- ♦ asin = funcția arcsin
» asin(-sqrt(3)/2)
- ♦ acos = funcția arccos
» acos(-1)
- ♦ atan = funcția arctg
» atan(-1)
- ♦ exp = funcția exponențială
» exp(1)

de reținut: în Matlab pentru a scrie numărul irracional e veți scrie exp(1)

- ♦ log = funcția logaritm natural
» log(0)
- ♦ log10 = funcția logaritm în baza 10

» log10(1)

de reținut: pentru a calcula $\log_a b$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, vei folosi formula: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

Matrice în Matlab

Pentru a scrie o matrice în Matlab folosim următoarea sintaxă:

- fiecare linie a matricei poate fi considerată a fi o listă de numere, separate între ele de virgulă sau spațiu liber;
- fiecare linie a matricei este despărțită de următoarea prin punct și virgulă;
- elementele matricei se scriu între paranteze drepte.

```
» M=[1 -2 3 -4;2 1 5 2;-2 3 1 0; 3 1 2 -5]
» M1=[2 1 -1 3; 1 3 2 -5]
```

Pentru a obține *matricea transpusă* a matricei M scriem M':

```
» M'
» M1'
```

Pentru a scrie matricea identitate notată de obicei I_n utilizăm eye(n)

```
»eye(4)
```

Operațiile cu matrice sunt cele cunoscute; eventualele greșeli, legate de dimensiunea matricelor sunt semnalate de soft:

```
» M2=[1 0 -2 1;3 1 2 -3]; M1+M2
» (-3)*M2
» M+M1
```

```
??? Error using ==> plus
Matrix dimensions must agree.
```

Calculul *matricei inverse* se face cu funcția inv(.)

```
» inv(M)
```

Soft-ul atenționează următoarele greșeli:

- se cere să se calculeze inversa unei matrice care nu este pătratică;
- se cere calcularea inversei unei matrici singulare

```
» inv(M1)
```

```
??? Error using ==> inv
Matrix must be square.
```

```
» M4=[1 -2 3 ;1 0 1 ;-2 4 -6]; inv(M4)
```

```
Warning: Matrix is singular to working precision.
(Type "warning off MATLAB:singularMatrix" to suppress this warning.)
```

Pentru a calcula determinantul matricei, folosim funcția det()

• Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; calculați determinantul matricei și inversa ei.

```
» A=[1 3 3 3 3 3 3;3 1 3 3 3 3 3;3 3 1 3 3 3 3; 3 3 3 1 3 3 3; 3 3 3 3 1 3 3; 3 3 3 3 3 1 3; 3 3 3 3 3 3 1];
» det(A)
» inv(A)
```

Vectori în Matlab

Vectorii *linie* sunt matrici cu o linie și n coloane. Ei pot fi considerați a fi liste de numere, separate între ele de virgulă sau spațiu liber. Numărul de input-uri reprezintă lungimea (*length*) vectorului; deseori folosim pentru input-urile vectorului, termenul de componentă. Astfel, un element din \mathbf{R}^n este un vector linie de lungime n în loc de vector de dimensiune n .

```
»x=[1 -2 7 15]
```

Prin instrucțiunea $a:b:c$ unde $a < c$, $b > 0$ obținem un vector de forma:

$a \ a+b \ a+2b \ a+3b \ \dots \ a+mb$

unde $a+mb$ este cel mai mare număr de acest tip, mai mic sau egal cu c .

```
»y=0:2:8
```

```
» -2:5:2
```

```
»1:2:-1
```

În ultimul exemplu rezultatul este mulțimea vidă deoarece dacă $a > c$ este necesar ca numărul b să fie negativ, cum se întâmplă în exemplul următor:

```
»1:-5:-14
```

Operațiile cu vectori sunt cele cunoscute din \mathbf{R}^n : adunarea și înmulțirea cu scalari.

```
»x=[1 -2 7 15]; y=0:2:6; x+y
```

```
» 0.2*x
```

Vectorii *coloană* sunt matrici cu n linii și o coloană. În *Matlab* elementele sunt separate de punct și virgulă.

```
» u=[-2;3;1;4]
```

Adunarea a doi vectori de aceeași dimensiune și respectiv înmulțirea cu scalar se definesc ca în cazul vectorilor linie.

```
» u=[3;2;1;-10]; u+v
```

```
» (-3)*u
```

Putem transforma un vector linie într-un vector coloană prin procedeul numit *transpunere*, notat „'”:

```
» x=[2 -1 4 19]; x'
```

Rezolvarea unui sistem de n ecuații cu n necunoscute, compatibil determinat:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

.....

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

se reduce la rezolvarea ecuației matriceale $A \cdot x = b$, unde matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ este nesingulară, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Ecuația are o soluție unică $x = A^{-1} \cdot b$.

- Rezolvați cu Matlab sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 + 3x_7 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + x_7 = -10 \end{cases}$$

» A=[1 3 3 3 3 3 3;3 1 3 3 3 3 3;3 3 1 3 3 3 3;3 3 3 1 3 3 3 ; 3 3 3 3 1 3 3 ; 3 3 3 3 3 1 3; 3 3 3 3 3 3 1];
 b=[1 3 5 2 -4 2 -10]; x=inv(A)*
 Pentru a obține soluția sistemului putem scrie și: x=A\b;
 » x=A\b'

Am definit noțiunea de *produs scalar* pe \mathbf{R}^n .

În general produsul scalar este produsul dintre un vector linie și un vector coloană, amândoi având aceeași

dimensiune: dacă $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, atunci se definește: $\langle x, y \rangle = x * y = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$

»x=[3 2 1 -7]; u=[4;-1;2;13]; x*u

Dacă avem:

» x=[3 2 1 -7]; y=[4 2 -2 12];x*y
 ??? Error using ==> mtimes
 Inner matrix dimensions must agree.

Eroarea se datorează faptului că vectorii al căror produs scalar vrem să-l calculăm sunt vectori linie; pentru a evita această situație folosim vectorul y' (vectorul transpus).

» x=[3 2 1 -7]; y=[4 2 -2 12];x*y'

Calculăm produsul scalar a doi vectori linie sau doi vectori coloană. Comentariile sunt precedate de % , având doar rolul de a da explicații cititorului.

»x=[3 2 1];y=[2 4 5];x*y' % x si y sunt vectori linie
 »x=[3 2 1];x*x' % x este vector linie
 » u=[2;0;-3];v=[-1;2;3];u*v % u si v sunt vectori coloana

Cele trei norme definite pe \mathbf{R}^n , $\|x\|$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se calculează în Matlab folosind instrucțiunile:

norm(x) = $\|x\|$; norm(x,1) = $\|x\|_1$; norm(x,inf) = $\|x\|_\infty$
 » x=[-1 3 14 -11 2]; norm(x)
 » norm(x,1)
 » norm(x,inf)

Pentru a calcula distanțele definite anterior, dintre doi vectori din \mathbf{R}^n , folosim formula $d(x, y) = \|x - y\|$:

» x=[-1 3 14 -11 2];y=[2 -5 21 1 -10];norm(x-y)
 » norm(x-y,1)
 » norm(x-y,inf)

- Unghiul θ dintre doi vectori linie x și y din \mathbf{R}^3 este definit de formula: $\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Calculați, utilizând Matlab, cosinusul unghiului dintre $x = (1, 2, -3)$ și $y = (-1, 2, -4)$ și determinați măsura unghiului în grade.

```

» x=[1 2 -3];y=[-1 2 -4]; a=(x*y)/(norm(x)*norm(y))
» t=acos(a)
» th=t*180/pi

```

Vă propunem să justificați formula Schwarz-Cauchy folosind formula de mai sus.

- Folosind Matlab să reluăm problema de clustering (simplificată) cu pacienții de la gastroenterologie: stabiliți dacă vectorii

$$P_1 = (162, 255, 74, 258) \text{ și } P_2 = (422, 488, 183, 292)$$

aparțin bilei deschise de centru $C_1(356, 350, 134, 228)$ sau bilei deschise de centru $C_2(184, 203, 95, 189)$?

```

»x=[165 255 74 258]; y=[422 488 183 292];a=[356 350 134 228]; b=[184 203 95 189];
»norm(x-a)
»norm(x-b)
»norm(y-a)
»norm(y-b)

```

În continuare introducem un nou tip de produs a doi vectori de aceeași dimensiune și același tip, cunoscut sub numele de *produsul Hadamard*. Aproape de loc utilizat în matematică, așa numitul *dot product* (\cdot) este o caracteristică esențială a Matlab-ului.

Fiind dați doi vectori $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definim:

$$x \cdot y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$$

După cum se observă rezultatul este un vector n -dimensional, ale cărui componente sunt componentele celor doi vectori înmulțite punctual (element cu element).

```

» x=[2 -6 1 3];y=[-1 3 2 5];u=[4;19;2;-2];v=[4;10;-4;23];
» x.*u'
» x.*v'
» u.*v
» x'.*u
» y'.*v
» x.^2
» u.^3

```

- Scrieți (sub forma de tabel) valorile funcției $f(x) = x \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ în punctele 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.

```
»x=0.2:0.2:1;y=x.*log(x+sqrt(x.^2+1));[x',y']
```

Împărțirea a doi vectori nu există în matematică, dar în Matlab operația ($\./$) este definită ca fiind împărțirea element la element, adică pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ avem:

$$x ./ y = (x_1 / y_1, x_2 / y_2, \dots, x_n / y_n)$$

```

» x=[2 -6 1 3];y=[-1 3 2 5];u=[4;19;2;-2];v=[4;10;-4;23];
» x./y
» v./u
» u./x'

```

- Să scriem (sub forma de tabel) valorile funcției $f(x) = \frac{\arcsin x}{x}$ în punctele 0.1; 0.2; 0.3;0.4; 0.5.

```
» x=[0.1:.1:.5]';y=(asin(x))./x;[x,y]
```

Introducere în programarea în Matlab

Instrucțiunea for

- Calculați următoarea sumă: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{20^2}$.

```

» s=0;
» for i=1:20
s=s+1/i^2;
end

```

```

» s
s =
    1.5962

```

Dacă renunțăm la punct și virgulă (semi colon) vom avea afișate toate valorile intermediare ale sumei:

```

» s=0;
» for i=1:20
s=s+1/i^2
end

```

Dacă dorim ca rezultatul să apară sub forma unui vector coloană vom scrie:

```

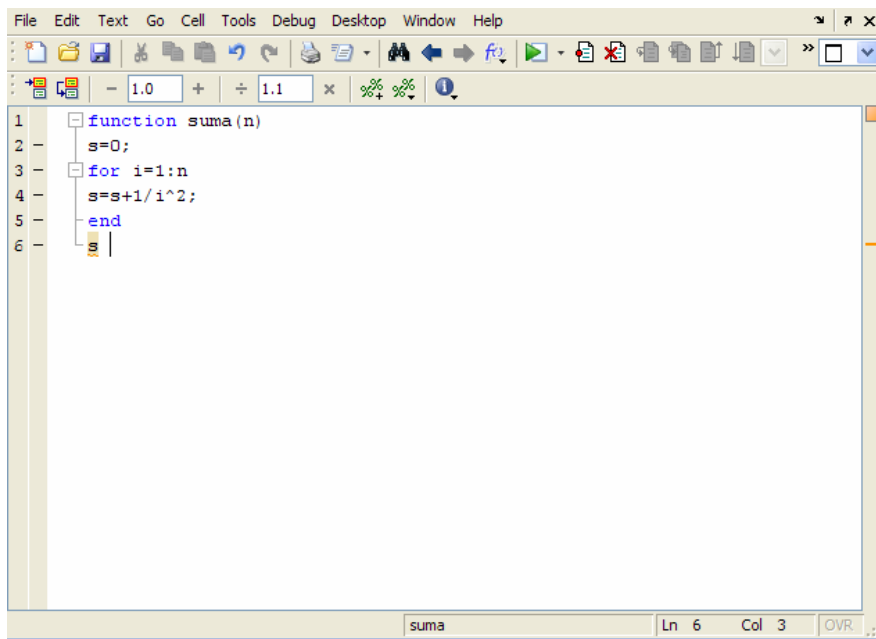
» s(1)=1;
» for i=1:19
s(i+1)=s(i)+1/(i+1)^2;
end
» s'

```

Dacă dorim să calculăm $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$, pentru a nu scrie de fiecare dată codul vom defini și salva într-un m-file o funcție ce are ca

variabilă numărul de pași: $suma(n) = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

Pentru a deschide un m-file dăm click pe File_New_m-file



Salvăm fișierul sub numele de suma(n).

Dacă dorim să calculăm $\sum_{i=1}^{30} \frac{1}{i^2}$ vom scrie:

```

» suma(30)
s =
    1.6122

```

Un mod mai simplu, specific pentru Matlab, de a calcula această sumă este utilizarea funcției sum:

```

» sum(1./(1:20).^2)

```

Instrucțiunea while

- Determinați cel mai mic număr natural pentru care $\frac{2^n}{n!} < \frac{1}{10}$, Problema fiind posibilă deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

```

» n=1;
» x=2;

```

```

» while x>=1/10
x=x*2/n;
n=n+1;
end
» n-1

```

Pentru a rezolva inecuația $\frac{k^n}{n!} < \frac{1}{10}$, pentru diferite valori ale lui k , vom construi o funcție numită ineg într-un m-file.

```

function inec(k)
n=1;
x=k;
while x>=1/10
    x=x*k/n;
    n=n+1;
end
n_1

```

Salvăm fișierul sub numele de Inec(k).

Dacă dorim să rezolvăm inegalitatea $\frac{13^n}{n!} < \frac{1}{10}$ vom scrie:

```
» Inec(13)
```

Probleme propuse

1. Utilizând Matlab

- calculați: $7 - \frac{\sqrt{3}}{2e^2}$; $\frac{35 \sin \frac{\pi}{12}}{1 + \sqrt[3]{2}}$; $5 \ln(1 + \sqrt{e})$; $\arctg \frac{2}{1 + \lg 7}$.

- stabiliți dacă următoarele matrice sunt nesingulare și în caz afirmativ calculați matricele inverse:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- rezolvați următoarele sisteme liniare:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z - 7t = 12 \\ 3x - 5y + 7z - t = 0 \\ 5x - 7y + z - 3t = 4 \\ 7x - y + 3z - 5t = 16 \end{cases}; \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ y + 2z + 3t = 20 \\ 3x + z + 2t = 14 \\ 2x + 3y + t = 12 \end{cases}; \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y + 4z = 18 \\ 5z + 6u = 39 \\ 7u + 8v = 68 \\ 9v + 10x = 55 \end{cases}$$

- fiind dați vectorii $x = (2, 3, \sqrt{\pi}, -1)$ și $y = (-5, 0, 1, e^2)$ calculați:

$x + y$, $x - 3y$;
normele cunoscute ale acestor vectori;
distanțele cunoscute dintre cei doi vectori;

produsul scalar al celor doi vectori.

- fiind dați vectorii $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ și $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt[5]{e} \end{pmatrix}$ calculați:

$$2u + v, u - 5v;$$

normele cunoscute ale acestor vectori;
distanțele cunoscute dintre cei doi vectori;
produsul scalar al celor doi vectori.

- Scrieți (sub forma de tabel) valorile funcțiilor $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^4 - x^2 + 2}$ și $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ în punctele: -0.5; -0.4; -0.3; -0.2; -0.1; 0.1; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5.

2. Calculați următoarea sumă: $\sum_{k=2}^{20} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$;

- utilizând instrucțiunea `for` și afișând rezultatul final;
- utilizând instrucțiunea `for` și afișând rezultatele parțiale sub forma unui vector coloană;
- scriind o funcție „`sumaln`” într-un m-file;
- folosind funcția `sum`

3. Calculați următoarea sumă: $\sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

utilizând instrucțiunea `for` și afișând rezultatul final;
utilizând instrucțiunea `for` și afișând rezultatele parțiale sub forma unui vector coloană;
scriind o funcție „`sumarm`” într-un m-file;
folosind funcția `sum`

4. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care

- $\frac{(n!)^2}{(2 \cdot n)!} < 0.001$
- $\frac{n^2}{5^n} < 0.02$

5. În cazul bazei de date cu florile de Iris, prezentată la începutul paragrafului s-a calculat că irișii de același tip sunt grupați într-o bilă deschisă și anume

- Setosa în bila de centru $C_1(2.4, 14.6, 34.3, 50.1)$,
- Verginica în bila de centru $C_2(20, 55.5, 29.7, 65.9)$
- Versicolor în bila de centru $C_3(13.3, 43.2, 27.7, 59.4)$

Decideți cărui tip îi aparține un iris cu următoarele attribute:

	lățimea petalei	lungimea petalei	lățimea sepalei	lungimea sepalei
I_1	21	56	28	64
I_1	13	42	26	57

Grafice de funcții în Matlab

Este evident că putem desena graficul unei funcții doar în cazul $A, B \subset \mathbf{R}$ sau $A \subset \mathbf{R}^2, B \subset \mathbf{R}$.

Pentru început vom desena în Matlab graficul unei funcții $f: A \rightarrow B$, unde $A, B \subset \mathbf{R}$.

Dacă $A = [a, b]$, generăm doi vectori:

$$x = (a, a+h, a+2h, \dots, a+(n-1)h, b) \text{ și } y = (f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots, f(a+(n-1)h), f(b)),$$

scriind:

- » `x=a:h:b`
- » `y=f(x)`

Perechile $((a + ih, f(a + ih)), 0 \leq i \leq n - 1$, vor fi unite prin segmente de dreaptă în urma aplicării funcției $\text{plot}(x,y)$

Pentru a obține un grafic cu o bună acuratețe este necesară folosirea unui pas h cât mai mic. În exemplul următor dacă $h = 1$ obținem o linie poligonală ce aproximează funcția, în schimb dacă $h = 0.1$ obținem graficul cunoscut.

```
» x=0:1:2*pi
» y=cos(x)
» plot(x,y)
» x=0:0.01:2*pi; y=cos(x);plot(x,y)
```

Pentru a nu mai fi afișate valorile vectorilor x respectiv y am scris punct și virgulă (*semicolon*) după fiecare instrucțiune.

Pe fiecare figură scriem un titlu și etichetăm axele selectând din *Insert* (apare la *Figure*) *x-label*, *y-label*, *title* și în ferestrele ce s-au deschis înscriind axa Ox , axa Oy , respectiv titlul.

Alegerea valorii pasului h este importantă și pentru a argumenta această afirmație vom prezenta mai multe variante, desenând toate graficele în același ecran. În acest scop vom construi niște “ferestre”, în care vom desena graficele, ferestre situate într-o $m \times n$ matrice. Fiecare element al matricei este constituit dintr-o asemenea fereastră, iar numerotarea acestora este de la 1 la $m \cdot n$, începând cu colțul stânga sus. Funcția folosită este *subplot*.

```
» subplot(411);x=0:1:2*pi;y=cos(x);plot(x,y)
» subplot(412);x=0:0.5:2*pi;y=cos(x);plot(x,y)
» subplot(413);x=0:0.1:2*pi;y=cos(x);plot(x,y)
» subplot(414);x=0:0.01:2*pi;y=cos(x);plot(x,y)
```

În mod obișnuit, graficul este desenat printr-o linie continuă de culoare albastră; dacă dorim altă culoare, sau alt stil de linie facem precizarea în *plot*. Prezentăm câteva opțiuni pentru culori și stiluri de linie:

y	galben	.	punct
m	mov	o	cerc
r	roșu	+	plus
g	verde	-	linie continuă
b	albastru	*	steluță
w	alb	:	punctat
k	negru	-.	linie punct

Aceste opțiuni se scriu în cadrul funcției *plot*, încadrate de apostrof, fără virgulă între ele.

- Desenați graficul funcției \cos pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$, în culoarea roșie, punctat, luând pasul $h = 0.1$.

```
» x=-2*pi:.1:2*pi;y=cos(x);plot(x,y,'r.')
```

Deseori în *Matlab* scriem *.1* în loc de *0.1*

- Desenați graficul funcției $f(x) = \tan x$, folosind diferite valori ale lui h și eventual diferite culori.

Domeniul de definiție al funcției este $\mathbf{R} \setminus \{(2k + 1) \frac{\pi}{2}\}$; funcția este periodică de perioadă π , așadar este suficient

să desenăm graficul pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Dacă vom considera vectorul

```
»x = -pi/2:.1:pi/2;
```

rezultatul va fi catastrofal, deoarece $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$

```
»x=-pi/2:.1:pi/2;y=tan(x);plot(x,y)
```

Astfel vom considera un vector x a cărui primă componentă este -1.5 și a cărui ultimă componentă este 1.5 .

```
» subplot(141);x=-1.5:.6:1.5;y=tan(x);plot(x,y,'r*')
» subplot(142);x=-1.5:.4:1.5;y=tan(x);plot(x,y,'bo')
» subplot(143);x=-1.5:.2:1.5;y=tan(x);plot(x,y,'k.')
```

```
» subplot(144);x=-1.5:.05:1.5;y=tan(x);plot(x,y,'m-.')
```

Stabilirea corectă a domeniului de definiție al funcției este foarte importantă. În unele cazuri soft-ul ne avertizează asupra greșelilor și graficul poate prezenta erori.

- Desenați graficul funcției $f(x) = \ln(16 - x^2)$:

Domeniul de definiție este $(-4, 4)$,

» `x=-4:.1:4;y=log(16-x.^2);plot(x,y)`

Warning: Log of zero.

Alegem intervalul $(-3.95, 3.95)$:

» `x=-3.95:.1:3.95;y=log(16-x.^2);plot(x,y)`

Desenăm pe $[-10, 10]$:

» `x=-10:.1:10;y=log(16-x.^2);plot(x,y)`

Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored

- Desenați pe același ecran, în ferestre diferite, graficul funcției $f(x) = \frac{3-2x}{\sqrt{9-x^2}}$ pe $[-3, 3]$ și respectiv pe

$[-2.95, 2.95]$ pe același ecran, în ferestre diferite. Comentați desenele obținute

» `subplot(121); x=-3:.1:3; y=(3-2*x)./sqrt(9-x.^2);plot(x,y,'k')`

Warning: Divide by zero.

» `subplot(122); x=-2.95:.1:2.95; y=(3-2*x)./sqrt(9-x.^2);plot(x,y,'b')`

În cazul funcției $f: A \rightarrow B$, unde $A, B \subset \mathbf{R}$, A fiind o submulțime nemărginită a axei reale, problema constă în alegerea mulțimii la care restricționăm funcția, pentru a obține cel mai bun desen al graficului..

- Desenați graficul funcției $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

Vom desena în același ecran mai multe variante și anume graficele restricțiilor la $[-1000, 1000]$, $[-100, 100]$, $[-20, 20]$, $[-10, 10]$ și vom alege desenul care ne convine:

» `subplot(411); x=-1000:1:1000; y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+1); plot(x,y)`

» `subplot(412); x=-100:1:100; y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+1); plot(x,y)`

» `subplot(413); x=-20:1:20; y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+1); plot(x,y)`

» `subplot(414); x=-10:1:10; y=(2*x-1)./sqrt(x.^2+1); plot(x,y)`

- Desenați graficul funcției $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|}$

În Matlab funcția modul este notată `abs`

» `x=-20:.1:20; y=sqrt(abs(x.^2-4)); plot(x,y)`

Pentru a desena graficul unei funcții al cărei domeniu de definiție este o reuniune de intervale disjuncte este nevoie de a studia problema desenării graficelor a două funcții în același sistem de coordonate. (*multiplot*). Considerând cazul a două funcții $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ vom scrie:

» `x=a:h:b; y1=f(x); y2=g(x); plot(x,y1,x,y2)`

sau

» `x=a:h:b; plot(x,f(x),x,g(x))`

- Desenați graficele funcțiilor $f(x) = \sin x + \cos x$ și $g(x) = \sin x - \cos x$ pe $[0, 2\pi]$.

» `x=0:.05:2*pi; y=sin(x)+cos(x); y1=sin(x)-cos(x); plot(x,y,'r',x,y1,'k')`

Pentru a desena graficul unei funcții definite pe $[a, b] \cup [c, d]$, $b < c$ vom scrie:

» `x1=a:h:b; y1=f(x1); x2=c:h:d; y2=f(x2); plot(x1,y1,x2,y2)`

sau

» `x1=a:h:b; x2=c:h:d; plot(x1, f(x1),x2, f(x2))`

- Desenați graficul funcției: $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$;

Domeniul de definiție al lui f este $\mathbf{R} \setminus \{2\}$; funcția are asimptotă verticală în $x = 2$.

În primul caz nu ținem seama de această asimptotă verticală, considerând un vector a cărui primă componentă este -10 , ultimă componentă 10 și pasul 0.1 ; în al doilea caz folosim metoda propusă anterior, considerând restricțiile la $(-10, 2)$ respectiv la $(2, 10)$:

```
» subplot(121);x=-20:.1:20;plot(x,(2*x+1)./(x-2))
Warning: Divide by zero
» subplot(122);x1=-20:.1:1.95;x2=2.05:.1:20; plot(x1,(2*x1+1)./(x12),'k',x2,(2*x2+1)./(x2-2),'k')
```

Nu e nevoie să specificăm funcția separat, formula ce o definește poate fi scrisă și în plot. Dacă nu se specifică aceeași culoare pentru cele două ramuri, graficul va fi desenat în culori diferite

- Desenați graficul funcției $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$

Domeniul de definiție este $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Dacă ne propunem să folosim intervalul $(-20, 20)$, fără a ține seama care este domeniul de definiție, softul ne avertizează că greșim.

```
» x=-20:.1:20;plot(x,log(sqrt((x+2)./(x-3))))
Warning: Divide by zero.
Warning: Log of zero.
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored.
```

Utilizăm metoda prezentată anterior:

```
»x1=-20:.1:-2.05;y1=log(sqrt((x1+2)./(x1-3)));
»x2=3.05:.1:20;y2=log(sqrt((x2+2)./(x2-3)));
»plot(x1,y1,'k',x2,y2,'k')
```

Matlab include aplicații specifice, numite Toolbox-uri, utilizate pentru a rezolva probleme variate. Symbolic math este un asemenea Toolbox, care cuprinde calculul simbolic și accesul la nucleul Maple. Symbolic math este folosit pentru calculul diferențial și integral.

În Matlab există două noțiuni distincte legate de funcții:

- *expresia simbolică*, de exemplu $\frac{1}{x^2+1}$ sau $\log(x)$

- *funcția -algoritm (regula)* care produce un *output* numeric pentru un *input* numeric sau o mulțime de input-uri numerice.

Desenul graficului unei expresii simbolice se execută ușor folosind **ezplot**; dezavantajele constau în faptul că nu se mai poate modifica stilul sau culoarea desenului. Avantajul rezidă din faptul că nu mai lucrăm cu vectori și matrice și astfel sintaxa este mult mai simplă.

- Desenați graficele funcțiilor prezentate anterior, utilizând Symbolic math

$$f(x) = \cos x, x \in [0, 2\pi]$$

```
»syms x
» ezplot(cos(x),[0,2*pi])
```

$$f(x) = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

```
» ezplot(tan(x), [-1.55,1.55])
```

$$f(x) = \ln(16 - x^2)$$

```
» ezplot(log(16- x^2),[3.95,3.95])
```

$$f(x) = \frac{3-2x}{\sqrt{9-x^2}}$$

```
»ezplot((3-2*x)/sqrt(9-x^2),[-2.95,2.95])
```

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

»ezplot((2*x-1)/sqrt(x^2+1),[-20,20])

$$f(x) = \sqrt{|x^2-4|}$$

»ezplot(sqrt(abs(x^2-4)),[-20,20])

Pentru a desena graficele a două funcții în același sistem de axe vom scrie:

»ezplot(f(x),[a,b]);hold on
 »ezplot(g(x),[a,b]);hold off

Graficele celor două funcții vor fi de culoare albastră și astfel nu putem distinge funcțiile pe baza coloritului graficelor lor.

- Desenați în același sistem de axe graficele funcțiilor $f(x) = \sin x + \cos x$ și $g(x) = \sin x - \cos x$;

» ezplot(sin(x)+cos(x),[0,2*pi]);hold on
 » ezplot(sin(x)-cos(x),[0,2*pi]);hold off

- Desenați graficul funcției $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$

În Symbolic Math nu putem folosi „multiplot” pe domenii de definiție diferite, dar problema este rezolvată corect chiar dacă cerem ca $x \in [-20, 20]$

» ezplot(log(sqrt((x+2)/(x-3))),[-20,20])

Vom desena în Matlab (pachetul de bază) graficele funcțiilor reale de două variabile reale, caz în care

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2\} \subset \mathbf{R}^3$$

În termeni de informatică, putem spune că funcția f este o regulă care produce dintr-un vector *input* (x, y) , un *output* numeric notat $f(x, y)$.

În cazul $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$, scriind

» [x,y] = meshgrid(a:h:b,c:h:d)

vom crea o matrice ale cărei elemente sunt vârfurile unei rețele de pătrate de latură h , din dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$; scriind

»z=f(x,y);

creăm un vector ale cărui elemente sunt valorile funcției f în punctele rețelei.

Funcția

»surf(x,y,z)

construiește graficul funcției cu ajutorul informațiilor anterioare.

- Desenați graficul funcției $f : [-2, 2] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin: $f(x, y) = x^2 - y^2$ (funcția șa -Saddle).
 » [x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=x.^2-y.^2;surf(x,y,z)

Graficul obținut este graficul unei porțiuni de suprafață.

Desenați graficele următoarelor porțiuni de suprafață:

- $f : [-2, 2] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x, y) = x^2 + y^2$ (paraboloid)
 » [x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=x.^2+y.^2;surf(x,y,z)

- $f : [-2,2] \times [-2,2] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (con)
 » `[x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=sqrt(x.^2+y.^2);surf(x,y,z)`

- $f : [-2,2] \times [-2,2] \rightarrow \mathbf{R}$, definită de $f(x, y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ (con)
 » `[x,y]=meshgrid(-2:.1:2,-2:.1:2);z=3-sqrt(x.^2+y.^2);surf(x,y,z)`

În desenul unei porțiuni de suprafață, în **Matlab**, există un cod al culorilor: albastru închis înseamnă cele mai mici valori ale lui $z = f(x, y)$, iar roșu intens reprezintă cele mai mari valori.

În general pentru a desena graficul funcției $f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ vom alege restricția funcției la domeniul definit de inegalitățile: $-\alpha \leq x-a \leq \alpha$, $-\alpha \leq y-b \leq \alpha$, adică $[-\alpha+a, \alpha+a] \times [-\alpha+b, \alpha+b]$

- Desenați graficul funcției $f(x, y) = (x+1)^2 + (y-2)^2$:
 » `[x,y]=meshgrid(-3:.1:1,0:.1:4);z=(x+1).^2+(y-2).^2;surf(x,y,z)`

- Desenați graficele următoarelor funcții:

$f : [-4, 4] \times [-4, 4] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x, y) = ye^{-(x^2+y^2)}$;

$g : [-3, 3] \times [-3, 3] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x, y) = \frac{x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4 + 1}$

» `[x,y]=meshgrid(-4:.1:4,-4:.1:4);f=y.*exp(-x.^2-y.^2);surf(x,y,f)`
 » `[x,y]=meshgrid(-3:.1:3,-3:.1:3);`
 » `g=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2+y.^4)./(x.^4+y.^4+1);`
 » `surf(x,y,g)`

Considerând funcția $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$, mulțimea $M_c = f^{-1}(\{c\}) = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$, unde c este o constantă reală se numește *curbă de nivel* constant c . Această mulțime este proiecția în \mathbf{R}^2 a secțiunii graficului lui f cu planul $z = c$.

Pentru a desena aceste curbe de nivel folosim funcțiile `contour`, pentru desenul în \mathbf{R}^2 și `contour3` pentru desenul în \mathbf{R}^3 , funcții ce se apelează astfel:

» `[x,y]=meshgrid(a:h:b,c:h:d); f=f(x,y); contour(x,y,f,n)`
 » `[x,y]=meshgrid(a:h:b,c:h:d); f=f(x,y); contour3(x,y,f,n)`

unde n reprezintă numărul de curbe de nivel ce vor fi desenate.

- Desenați curbele de nivel în \mathbf{R}^2 respectiv în \mathbf{R}^3 , ale funcției $f : [-4, 4] \times [-4, 4] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$f(x, y) = ye^{-(x^2+y^2)}$.

» `[x,y]=meshgrid(-4:.1:4,-4:.1:4);f=y.*exp(-x.^2-y.^2); contour(x,y,f,15)`
 » `[x,y]=meshgrid(-4:.1:4,-4:.1:4);f=y.*exp(-x.^2-y.^2); contour3(x,y,f,15)`

Pentru a desena în același sistem de axe, atât suprafața, cât și curbele sale de nivel în \mathbf{R}^2 , folosim funcția `surfc`.

- Desenați în același sistem de axe, porțiunea de suprafață definită de funcția $f : [-4, 4] \times [-4, 4] \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x, y) = ye^{-(x^2+y^2)}$ cât și curbele sale de nivel în \mathbf{R}^2 .

- Fie funcția $f : [-4, 4] \times [-4, 4] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4 + 1}$; desenați graficul, curbele de nivel în

\mathbf{R}^2 respectiv în \mathbf{R}^3 , porțiunea de suprafață și curbele sale de nivel în \mathbf{R}^2 , cele patru desene fiind în aceeași pagină

» `subplot(221); [x,y]=meshgrid(-4:.2:4,-4:.2:4);`
 » `f=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2+y.^4)./(x.^4+y.^4+1);surf(x,y,f)`
 » `subplot(222); [x,y]=meshgrid(-4:.2:4,-4:.2:4);`

```

»f=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2+y.^4)/(x.^4+y.^4+1);contour(x,y,f,20)
» subplot(223); [x,y]=meshgrid(-4:.2:4,-4:.2:4);
» f=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2+y.^4)/(x.^4+y.^4+1);contour3(x,y,f,20)
»subplot(224); [x,y]=meshgrid(-4:.2:4,-4:.2:4);
»f=(x.^4+2.*x.^3.*y-6.*x.^2.*y.^2+y.^4)/(x.^4+y.^4+1);surfc(x,y,f)

```

Dacă privim aceste funcții ca expresii simbolice putem folosi în Symbolic Math instrucțiunile `ezsurf` și `ezcontour` pentru a desena graficul funcției., respectiv curbele de nivel în \mathbf{R}^2

- Fie funcția $f : [-4, 4] \times [-4, 4] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4 + 1}$;

desenați graficul și curbele de nivel corespunzătoare utilizând Symbolic Math.

```

»syms x y
»f=(x^4+2*x^3*y-6*x^2*y^2+y^4)/(x^4+y^4+1);ezsurf(f,[-4,4,-4,4])
» f=(x^4+2*x^3*y-6*x^2*y^2+y^4)/(x^4+y^4+1);ezcontour(f,[-4,4,-4,4])

```

Probleme propuse

1. Desenați graficul funcției $f(x) = \arcsin x$, folosind diferite valori ale lui pasului h și eventual diferite culori, în 6 ferestre pe aceeași pagină

2. Desenați graficele funcțiilor folosind pachetul de bază Matlab și apoi Symbolic Math:

- $f_1(x) = \arctg 2x$;
- $f_2(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$;
- $f_3(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$;
- $f_4(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $f_5(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^3 + 1}}$

4. Desenați în același sistem de axe graficele funcțiilor:

- $f_1(x) = e^x$ și $g_1(x) = \ln x$;
- $f_2(x) = e^x$ și $g_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$;
- $f_3(x) = \sin x$ și $g_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

5. Desenați graficul, curbele de nivel în \mathbf{R}^2 respectiv în \mathbf{R}^3 , porțiunea de suprafață și curbele sale de nivel în \mathbf{R}^2 , cele patru desene fiind în aceeași pagină

- $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 4$;
- $f_2(x, y) = \sqrt{8 - x^2 - y^2} + 2x$;
- $f_3(x, y) = (x-1) \cdot (y+2)$;
- $f_4(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5}$;
- $f_5(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + x^2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$.

6. Desenați graficul, curbele de nivel în \mathbf{R}^2 ale funcțiilor de la problema 4 utilizând Symbolic Math.